# Beitrag zur Auswerthung unendlicher Producte und Reihen.

Von **Reinhard Mildner,**
*Realschulprofessor in Römerstadt.*

(Vorgelegt in der Sitzung am 12. Juli 1883.)

## I.

Es soll der Werth der nachstehenden unendlichen Reihe für alle $x$, deren absolute Beträge kleiner als 1 sind, ermittelt werden. Es sei:

$$1)\quad F(x) = \frac{1}{1^n - x^n} + \frac{1}{2^n - x^n} + \frac{1}{3^n - x^n} + \frac{1}{4^n - x^n} + \ldots;\ \text{also } [x] < 1$$

Zunächst entwickle man die einzelnen Glieder in Potenzreihen, geordnet nach steigenden Potenzen von $x$, so folgt unter der über $x$ gemachten Voraussetzung:

$$\frac{1}{1^n - x^n} = \frac{1}{1^n} \quad \frac{1}{1-\left(\frac{x}{1}\right)^n} = \frac{1}{1^n}\left[1 + \frac{x^n}{1^n} + \frac{x^{2n}}{1^{2n}} + \frac{x^{3n}}{1^{3n}} + \ldots\right]$$

$$\frac{1}{2^n - x^n} = \frac{1}{2^n} \quad \frac{1}{1-\left(\frac{x}{2}\right)^n} = \frac{1}{2^n}\left[1 + \frac{x^n}{2^n} + \frac{x^{2n}}{2^{2n}} + \frac{x^{3n}}{2^{3n}} + \ldots\right]$$

$$\frac{1}{3^n - x^n} = \frac{1}{3^n} \quad \frac{1}{1-\left(\frac{x}{3}\right)^n} = \frac{1}{3^n}\left[1 + \frac{x^n}{3^n} + \frac{x^{2n}}{3^{2n}} + \frac{x^{3n}}{3^{3n}} + \ldots\right]$$

Alles addirt gibt:

$$2)\qquad F(x) = S_n + S_{2n}x^n + S_{3n}x^{2n} + S_{4n}x^{3n} + \ldots \qquad [x] < 1$$

dabei stellt $S_n$ die Summe der $n$ten Potenzen der reciproken ganzen Zahlen vor; nämlich:

$$S_n = \frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \ldots$$

Der Logarithmus von $\Gamma(1-x)$ lässt sich, wie aus der Theorie der Gammafunctionen bekannt ist, durch folgende Potenzreihe ausdrücken:

$$3)\qquad \lg\Gamma(1-x) = Cx + \frac{1}{2}S_2x^2 + \frac{1}{3}S_3x^3 + \frac{1}{4}S_4x^4 + \ldots,$$

wobei $C$ durch nachfolgende Gleichung bestimmt wird:

$$C = \lim\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdot\quad+\frac{1}{r}-\lg r\right) = 0\cdot57721566\ldots$$

Es ist ferner bekannt, dass aus der Reihe

$$f(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \ldots$$

der Werth der nachstehenden Reihe durch die Summe bestimmt ist:

$$\varphi(x) = A_0 + A_nx^n + A_{2n}x^{2n} + A_{3n}x^{3n} + \cdot\quad\cdot = \frac{1}{n}\sum_0^{n-1} f\left(xe^{\frac{2g\pi i}{n}}\right)$$

$\varphi(x)$ ist für alle $x$ convergent, für welche $f(x)$, die ursprüngliche Reihe convergirt.

Dieser Satz auf Gleichung 3) angewendet, gibt, wenn in der Potenzreihe für $\lg\Gamma(1-x)$ immer $(n-1)$ Glieder weggelassen werden:

$$4)\qquad \varphi(x) = \frac{1}{n}S_nx^n + \frac{1}{2n}S_{2n}x^{2n} + \frac{1}{3n}S_{3n}x^{3n} + .$$

$$= \frac{1}{n}\sum_0^{n-1}\lg\Gamma\left(1-xe^{\frac{2g\pi i}{n}}\right) = \frac{1}{n}\lg\prod_0^{n-1}\Gamma\left(1-xe^{\frac{2g\pi i}{n}}\right)$$

Wird hier $n$ als gerade Zahl vorausgesetzt, so geht die letzte Gleichung durch Vertauschung von $x$ mit $-x$ über in:

$$5)\qquad \varphi(-x) = \varphi(x) = \frac{1}{n}\lg\prod_0^{n-1}\left(1+xe^{\frac{2g\pi i}{n}}\right)$$

Durch Addition von 4) und 5) ergibt sich:

$$6)\qquad 2\varphi(x) = \frac{1}{n}\lg\prod_0^{n-1}\Gamma\left(1+xe^{\frac{2g\pi i}{n}}\right)\quad\Gamma\left(1-xe^{\frac{2g\pi i}{n}}\right)$$

Berücksichtigt man die Fundamentaleigenschaft der Gammafunction:

$$\Gamma(1+\lambda) \quad \Gamma(1-\lambda) = \frac{\pi\lambda}{\sin \pi\lambda}; \text{ wobei } [\lambda] < 1,$$

so verwandelt sich die Gleichung 6) in die nachstehende:

$$7) \qquad 2\varphi(x) = \frac{1}{n} \lg \prod_{0}^{n-1} \frac{x\pi e^{\frac{2g\pi i}{n}}}{\sin\left(x\pi e^{\frac{2g\pi i}{n}}\right)}$$

Der Zähler kann leicht umgeformt werden, denn es ist:

$$\prod_{0}^{n-1} e^{\frac{2g\pi i}{n}} = e^{\frac{2\pi i}{n}[1+2+3+\ldots+(n-1)]} = e^{(n-1)\pi i}$$

$$= \cos(n-1)\pi + i \sin(n-1)\pi = -1;$$

da $(n-1)$ ungerade ist, demnach geht 7) über in:

$$7') \qquad 2\varphi(x) = \frac{1}{n} \lg \frac{-x^n \pi^n}{\prod_{0}^{n-1} \sin\left(x\pi e^{\frac{2g\pi i}{n}}\right)}$$

Es sei der Kürze halber:

$$P = \prod_{0}^{n-1} \sin\left(x\pi e^{\frac{2g\pi i}{n}}\right) = \prod_{0}^{\frac{n}{2}-1} \sin\left(x\pi e^{\frac{2g\pi i}{n}}\right) \prod_{\frac{n}{2}}^{n-1} \sin\left(x\pi e^{\frac{2g\pi i}{n}}\right)$$

$$= \sin \pi x \prod_{1}^{\frac{n}{2}-1} \sin\left(x\pi e^{\frac{2g\pi i}{n}}\right) \quad \sin\left(x\pi e^{\pi i}\right) \prod_{\frac{n}{2}+1}^{n-1} \sin\left(x\pi e^{\frac{2g\pi i}{n}}\right)$$

Der letzte Factor kann folgendermassen umgeformt werden, wenn die Substitutionen in umgekehrter Ordnung ausgeführt werden:

$$\prod_{n-1}^{\frac{n}{2}+1} \sin\left(x\pi e^{\frac{2g\pi i}{n}}\right) = \prod_{1}^{\frac{n}{2}-} \sin\left(x\pi e^{\frac{2n-2g}{n}\pi i}\right)$$

Dies beachtend, hat man für $P$ den Ausdruck:

$$P = -\sin^2 \pi x \prod_{1}^{\frac{n}{2}-1} [\sin(x\pi e^{\frac{2g\pi i}{n}}) \quad \sin(x\pi e^{\frac{2n-2g}{n}\pi i})$$

$$= -\sin^2 \pi x \prod_{1}^{\frac{n}{2}-1} \omega(x,g);$$

dabei steht $\omega(x, g)$ zur Abkürzung für den Ausdruck in der eckigen Klammer. Werden darin die Exponentialgrössen durch trigonometrische Functionen ersetzt, so folgt:

$$\omega(x,g) = \sin\left(x\pi \cos\frac{2g\pi}{n} + i\, x\pi \sin\frac{2g\pi}{n}\right)$$
$$\sin\left(x\pi \cos\frac{2g\pi}{n} - i\, x\pi \sin\frac{2g\pi}{n}\right)$$

und wenn hier noch das Product der Sinuse durch die Differenz zweier Cosinuse ausgedrückt wird, so gibt dies:

$$\omega(x,g) = \frac{1}{2}\left\{\cos\left(2ix\pi \sin\frac{2g\pi}{n}\right) - \cos\left(2x\pi \cos\frac{2g\pi}{n}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\left\{e^{2x\pi \sin\frac{2g\pi}{n}} + e^{-2x\pi \sin\frac{2g\pi}{n}} - 2\cos\left(2x\pi\cos\frac{2g\pi}{n}\right)\right\}$$

Setzt man in Folgendem zur Abkürzung:

$$\lambda_g = \sin\frac{2g\pi}{n} \text{ und } \rho_g = \cos\frac{2g\pi}{n},$$

so geht $P$ über in:

$$P = -\sin^2 \pi x \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \prod_{1}^{\frac{n}{2}-1} \{e^{2x\pi\lambda_g} + e^{-2x\pi\lambda_g} - 2\cos(2x\pi\rho_g)\}$$

und aus Gleichung 7') wird alsdann:

$$8) \qquad 2\varphi(x) = \frac{1}{n} \lg \frac{2^{n-2} x^n \pi^n}{\sin^2 \pi x \prod_{1}^{\frac{n}{2}-1} \{e^{2x\pi\lambda_g} + e^{-2x\pi\lambda_g} - 2\cos(2x\pi\rho_g)\}}$$

Durch Differentiation dieser Gleichung nach $x$ ergibt sich:

9) $$2\varphi'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2\pi}{n}\operatorname{cotg}\pi x - \frac{2\pi}{n}\sum_{1}^{\frac{n}{2}-1}\psi(x,g).$$

Der Ausdruck unter dem Summenzeichen ist durch die nachstehende Gleichung bestimmt:

A) $$\psi(x,g) = \frac{\lambda_g(e^{2x\pi\lambda_g} - e^{-2x\pi\lambda_g}) + 2\rho_g\sin(2x\pi\rho_g)}{e^{2x\pi\lambda_g} + e^{-2x\pi\lambda_g} - 2\cos(2x\pi\rho_g)}.$$

Wird jetzt auch Gleichung 4) nach $x$ differentiirt, so folgt:

$$\varphi'(x) = S_n x^{n-1} + S_{2n}x^{2n-1} + S_{3n}x^{3n-1} + S_{4n}x^{4n-1} + \ldots$$

und nach geschehener Division der letzten Gleichung durch $x^{n-1}$ folgt:

$$\frac{\varphi'(x)}{x^{n-1}} = S_n + S_{2n}x^n + S_{3n}x^{2n} + S_{4n}x^{3n} + .$$
$$= F(x)$$

Substituirt man in die letzte Gleichung den Werth des Differentialquotienten $\varphi'(x)$ aus Gleichung 9), so erhält man:

10) $$F(x) = \frac{1}{2x^n} - \frac{\pi}{nx^{n-1}}\left[\operatorname{cotg}\pi x + \sum_{1}^{\frac{n}{2}-1}\psi(x,g)\right]$$

und wenn $x$ durch $\frac{x}{\pi}$ ersetzt wird, so folgt für $-\pi < x < +\pi$

10′) $$\frac{1}{x^n}F\left(\frac{x}{\pi}\right) = \frac{1}{1^n\pi^n - x^n} + \frac{1}{2^n\pi^n - x^n} + \frac{1}{3^n\pi^n - x^n} + .$$
$$= \frac{1}{2x^n} - \frac{1}{nx^{n-1}}\left[\operatorname{cotg} x + \sum_{1}^{\frac{n}{2}-1}\psi\left(\frac{x}{\pi}, g\right)\right]$$

für $n = 4$ gibt Gleichung 10), da $g = 1$ und $\lambda_g = \sin\frac{2g\pi}{4} = 1$ und $\rho_g = 0$ ist das leicht zu beweisende Resultat:

$$\frac{1}{1^4-x^4}+\frac{1}{2^4-x^4}+\frac{1}{3^4-x^4}+\frac{1}{4^4-x^4}+.$$
$$=\frac{1}{2x^4}-\frac{\pi}{4x^3}\left(\operatorname{cotg}\pi x+\frac{e^{2x\pi}+1}{e^{2x\pi}-1}\right).$$

Zur bequemeren praktischen Berechnung mögen zwei Fälle unterschieden werden.

$$\alpha)\ n=4p+2 \text{ und } \beta)\ n=4p.$$

Wird in $\psi(x,g)$ statt $g$.. $(\frac{n}{2}-g)$ eingesetzt, so stimmen, wie sich leicht zeigen lässt, die Substitutionsresultate $\psi(x,g)$ und $\psi(x,\frac{n}{2}-g)$ überein. Es ist nämlich:

$$\lambda_{\frac{n}{2}-g}=\sin\frac{2\left(\frac{n}{2}-g\right)\pi}{n}=\quad\sin\frac{2g\pi}{n}=\lambda_g$$

und

$$\rho_{\frac{n}{2}-g}=\cos\frac{2\left(\frac{n}{2}-g\right)\pi}{n}=-\cos\frac{2g\pi}{n}=-\rho_g.$$

Dies beachtend, gibt die Gleichung $A$) nach ausgeführter Substitution:

$$\psi(x,\frac{n}{2}-g)=\psi(x,g)$$

und es lässt sich die Summe in Gleichung 10) also umformen:

$$\sum_1^{\frac{n}{2}-1}\psi(x,g)=\sum_1^{\frac{n-2}{4}}\psi(x,g)+\sum_{\frac{n+2}{4}}^{\frac{n}{2}-1}\psi(x,g);\ \text{für } n=4p+2.$$

Der zweite Theil lässt sich, wenn die Substitutionen in umgekehrter Ordnung vorgenommen werden, folgendermassen darstellen:

$$\sum_{\frac{n}{2}-1}^{\frac{n+2}{4}}\psi(x,g)=\sum_1^{\frac{n-2}{4}}\psi(x,\frac{n}{2}-g)=\sum_1^{\frac{n-2}{4}}\psi(x,g)$$

und es geht daher das Resultat der Gleichung 10) über in:

$$11)\qquad F(x)=\frac{1}{2x^n}-\frac{\pi}{nx^{n-1}}\left[\operatorname{cotg}\pi x+2\sum_{1}^{\frac{n-2}{4}}\psi(x,g)\right]$$

$\beta$) Für $n=4p$ ist:

$$\sum_{1}^{\frac{n}{2}-1}\psi(x,g)=\sum_{1}^{\frac{n}{4}-1}\psi(x,g)+\psi\left(x,\frac{n}{4}\right)+\sum_{\frac{n}{4}+1}^{\frac{n}{2}-1}\psi(x,g).$$

Das Mittelglied $\psi\left(x,\frac{n}{4}\right)$ gibt:

$$\psi\left(x,\frac{n}{4}\right)=\frac{e^{x\pi}+e^{-x\pi}}{e^{x\pi}-e^{-x\pi}}$$

und der letzte Theil der Summe kann wie früher behandelt werden, nämlich:

$$\sum_{\frac{n}{4}+1}^{\frac{n}{2}-1}\psi(x,g)=\sum_{\frac{n}{2}-1}^{\frac{n}{4}+1}\psi(x,g)=\sum_{1}^{\frac{n}{4}-1}\psi\left(x,\frac{n}{2}-g\right)=\sum_{1}^{\frac{n}{4}-1}\psi(x,g);$$

daher ist:

$$\sum_{1}^{\frac{n}{2}-1}\psi(x,g)=\frac{e^{2x\pi}+1}{e^{2x\pi}-1}+2\sum_{1}^{\frac{n}{4}-1}\psi(x,g).$$

Mit Berücksichtigung der letzten Gleichung erhält man aus 10) für $n=4p$:

$$12)\quad F(x)=\frac{1}{2x^n}-\frac{\pi}{nx^{n-1}}\left[\operatorname{cotg}\pi x+\frac{e^{2x\pi}+1}{e^{2x\pi}-1}+2\sum_{1}^{\frac{n}{4}-1}\psi(x,g)\right].$$

Dabei ist $\psi(x,g)$ durch den Ausdruck bestimmt:

$$\psi(x,g)=\frac{\lambda_g\left(e^{2x\pi\lambda_g}-e^{-2x\pi\lambda_g}\right)+2\rho_g\sin(2x\pi\rho_g)}{e^{2x\pi\lambda_g}+e^{-2x\pi\lambda_g}-2\cos(2x\pi\rho_g)}$$

und

$$\lambda_g = \sin\frac{2g\pi}{n}; \quad \rho_g = \cos\frac{2g\pi}{n}.$$

Um einige specielle Fälle zu berechnen, setze man in Gleichung 11) $n = 6$ und in Gleichung 12) $n = 8$, so folgt:

$$F(x) = \frac{1}{2x^6} - \frac{\pi}{6x^5}[\operatorname{cotg}\pi x + 2\psi(x, 1)]$$

$$\lambda_1 = \sin\frac{2\pi}{6} = \frac{1}{2}\sqrt{3}; \quad \rho_1 = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

daher:

$$3\psi(x, 1) = \frac{\sqrt{3}(e^{x\pi\sqrt{3}} - e^{-x\pi\sqrt{3}}) + 2\sin x\pi}{e^{x\pi\sqrt{3}} - e^{-x\pi\sqrt{3}} - 2\cos x\pi}$$

Dies beachtend, geht die vorige Gleichung über in:

$$\frac{1}{1^6 - x^6} + \frac{1}{2^6 - x^6} + \frac{1}{3^6 - x^6} + \frac{1}{4^6 - x^6} + .$$

$$= \frac{1}{2x^6} - \frac{\pi}{6x^5}\left[\operatorname{cotg}\pi x + \frac{\sqrt{3}(e^{x\pi\sqrt{3}} - e^{-x\pi\sqrt{3}}) + 2\sin x\pi)}{e^{x\pi\sqrt{3}} + e^{-x\pi\sqrt{3}} - 2\cos x\pi}\right].$$

Für $n = 8$ gibt die Gleichung 12)

$$F(x) = \frac{1}{2x^8} - \frac{\pi}{8x^7}\left[\operatorname{cotg}\pi x + \frac{e^{2\pi x} + 1}{e^{2\pi x} - 1} + 2\psi(x, 1)\right].$$

In der Function $\psi(x, 1)$ ist:

$$\lambda_1 = \sin\frac{2g\pi}{n} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}; \quad \rho_1 = \cos\frac{n}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

und

$$2\psi(x, 1) = \frac{\sqrt{2}(e^{x\pi\sqrt{2}} - e^{-x\pi\sqrt{2}}) + 2\sqrt{2}\sin(x\pi\sqrt{2})}{e^{x\pi\sqrt{2}} + e^{-x\pi\sqrt{2}} - 2\cos(x\pi\sqrt{2})},$$

daher:

$$F(x) = \frac{1}{1^8 - x^8} + \frac{1}{2^8 - x^8} + \frac{1}{3^8 - x^8} + \frac{1}{4^8 - x^8} +$$

$$= \frac{1}{2x^8} - \frac{\pi}{8x^7}\left[\operatorname{cotg}\pi x + \frac{e^{2x\pi} + 1}{e^{2x\pi} - 1} + \frac{\sqrt{2}(e^\alpha - e^{-\alpha} + 2\sin\alpha}{e^\alpha + e^{-\alpha} - 2\cos\alpha}\right].$$

Dabei hat $\alpha$ den Werth: $\alpha = x\pi\sqrt{2}.$

Werden nun die Gleichungen 1) und 2) zuerst mit $x^{n-1}$ multiplicirt und sodann nach $x$ zwischen den Grenzen 0 und $x$ integrirt, so entspringt die Gleichung:

$$\int_0^x \left[\frac{1}{1^n-x^n}+\frac{1}{2^n-x^n}+\frac{1}{3^n-x^n}+\frac{1}{4^n-x^n}+\qquad\right]x^{n-1}dx$$

$$=\int_0^x [S_n x^{n-1}+S_{2n}x^{2n-1}+S_{3n}x^{3n-1}+S_{4n}x^{4n-1}+\ldots]\,dx.$$

Entwickelt man die Integrale linker Hand nach der Formel:

$$\int_0^x \frac{x^{n-1}}{p^n-x^n}dx=-\frac{1}{n}\lg\left(1-\frac{x^n}{p^n}\right),$$

so folgt nach Ausführung der Integration der rechten Seite der Gleichung:

$$-\frac{1}{n}\left[\lg\left(1-\frac{x^n}{1^n}\right)+\lg\left(1-\frac{x^n}{2^n}\right)+\lg\left(1-\frac{x^n}{3^n}\right)+\lg\left(1-\frac{x^n}{4^n}\right)+\ldots\right]$$

$$=\frac{1}{n}S_n x^n+\frac{1}{2n}S_{2n}x^{2n}+\frac{1}{3n}S_{3n}x^{3n}+\frac{1}{4n}S_{4n}x^{4n}+\ldots=\varphi(x);$$

oder

$$\varphi(x)=-\frac{1}{n}\lg\left(1-\frac{x^n}{1^n}\right)\left(1-\frac{x^n}{2^n}\right)\left(1-\frac{x^n}{3^n}\right)\left(1-\frac{x^n}{4^n}\right).$$

$$=\frac{1}{2n}\lg\frac{-x^n\pi^n}{\prod\limits_0^{n-1}\sin\left(x\pi e^{\frac{2g\pi i}{n}}\right)},$$

wenn für $\varphi(x)$ der Werth aus Gleichung 7′) substituirt wird, fehlt oder wenn man von der Gleichheit der Logarithmen auf die Gleichheit der Grundzahlen schliesst:

$$13)\quad\left[\left(1-\frac{x^n}{1^n}\right)\left(1-\frac{x^n}{2^n}\right)\left(1-\frac{x^n}{3_n}\right)\left(1-\frac{x^n}{4^n}\right)\qquad\right]^2=\frac{\prod\limits_0^{n-1}\sin\left(x\pi e^{\frac{2g\pi i}{n}}\right)}{-x^n\pi^n}$$

$$=\frac{4\sin^2\pi x\prod\limits_1^{\frac{n}{2}-1}\left[e^{2x\pi\lambda_g}+e^{-2x\pi\lambda_g}-2\cos(2x\pi\rho_g)\right]}{(2x\pi)^n},$$

welch' letzterer Ausdruck unmittelbar aus Gleichung 7) und 8) hervorgeht. Wird zur Abkürzung

$$A)\qquad f(x,g) = e^{2x\pi\lambda_g} + e^{-2x\pi\lambda_g} - 2\cos(2x\pi\rho_g)$$

gesetzt, so ist die letzte Gleichung in ihrer einfachsten Form:

$$14)\qquad \left[\prod_1^\infty\left(1-\frac{x^n}{g^n}\right)\right]^2 = \frac{4\sin^2\pi x}{(2\pi x)^n}\cdot\prod_1^{\frac{n}{2}-1} f(x,g).$$

Um die Anzahl der Substitutionen auf die Hälfte zu reduciren, mögen wieder die zwei Fälle unterschieden werden:

$$\alpha)\ n = 4p+2 \quad \text{und} \quad \beta)\ n = 4p.$$

$$\alpha)\qquad \prod_1^{\frac{n}{2}-1} f(x,g) = \prod_1^{\frac{n-2}{4}} f(x,g)\cdot\prod_{\frac{n+2}{4}}^{\frac{n}{2}-1} f(x,g)$$

$$= \prod_1^{\frac{n-2}{4}} f(x,g) \prod_{\frac{n}{2}-1}^{\frac{n+2}{4}} f(x,g) = \prod_1^{\frac{n-2}{4}} f(x,g)\cdot\prod_1^{\frac{n-2}{4}} f\left(x,\frac{n}{2}-g\right).$$

Nun ist aber

$$f\left(x,\frac{n}{2}-g\right) = f(x,g),$$

da

$$\lambda_{\frac{n}{2}-g} = \lambda_g \quad \text{und} \quad \rho_{\frac{n}{2}-g} = -\rho_g$$

ist, also folgt:

$$\prod_1^{\frac{n}{2}-1} f(x,g) = \left[\prod_1^{\frac{n-2}{4}} f(x,g)\right]^2$$

und Gleichung 14) geht über in:

$$15)\qquad \prod_1^\infty\left(1-\frac{x^n}{g^n}\right) = \frac{2\sin\pi x\prod_1^{\frac{n-2}{4}} f(x,g)}{(2x\pi)^{\frac{n}{2}}};\ \text{für } n = 4p+2.$$

$\beta$) $n = 4p$. Für diesen Fall lässt sich das Product folgendermassen umformen:

$$\prod_{1}^{\frac{n}{2}-1} f(x,g) = \prod_{1}^{\frac{n}{4}-1} f(x,g) \cdot f\left(x,\frac{n}{4}\right) \cdot \prod_{\frac{n}{4}+1}^{\frac{n}{2}-1} f(x,g)$$

$$= \prod_{1}^{\frac{n}{4}-1} f(x,g) \cdot f\left(x,\frac{n}{4}\right) \cdot \prod_{\frac{n}{2}-1}^{\frac{n}{4}+1} f(x,g).$$

Nun ist der letzte Factor:

$$\prod_{\frac{n}{2}-1}^{\frac{n}{4}+1} f(x,g) = \prod_{1}^{\frac{n}{4}-1} f\left(x,\frac{n}{2}-g\right) = \prod_{1}^{\frac{n}{4}-1} f(x,g),$$

daher:

$$\prod_{1}^{\frac{n}{2}-1} f(x,g) = (e^{x\pi}-e^{-x\pi})^2 \left[\prod_{1}^{\frac{n}{4}-1} f(x,g)\right]^2.$$

Aus diesem Grunde erhält man aus Gleichung 14)

$$16) \quad \prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{x^n}{g^n}\right) = \frac{2\sin \pi x\,(e^{\pi x}-e^{-\pi x}) \prod\limits_{1}^{\frac{n}{4}-1} f(x,g)}{(2x\pi)^{\frac{n}{2}}};\ n = 4p.$$

Durch Substitution von $\frac{x}{\pi}$ statt $x$ findet man aus den letzten zwei Gleichungen die Resultate:

$$17) \quad \prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{x^n}{g^n\pi^n}\right) = \frac{2\sin x \prod\limits_{1}^{\frac{n-2}{4}} f\left(\frac{x}{\pi},g\right)}{(2x)^{\frac{n}{2}}};\ \text{für } n = 4p+2$$

$$18) \quad = \frac{2\sin x\,(e^{x}-e^{-x}) \prod\limits_{1}^{\frac{n}{4}-1} f\left(\frac{x}{\pi},g\right)}{(2x)^{\frac{n}{2}}};\ \text{für } n = 4p.$$

In 17) und 18) muss $-\pi < x < +\pi$ sein.

Als Anwendungen der Gleichungen 15) und 16) mögen einige specielle Beispiele Platz finden. Man setze in 14) $n = 4$ und in Gleichung 15) $n = 6$ und $n = 10$, so folgt nach kurzer Rechnung:

$$\left(1-\frac{x^4}{1^4}\right)\left(1-\frac{x^4}{2^4}\right)\left(1-\frac{x^4}{3^4}\right)\left(1-\frac{x^4}{4^4}\right) \qquad = \frac{2\sin\pi x\,(e^{x\pi}-e^{-x\pi})}{(2x\pi)^2}$$

$$\left(1-\frac{x^6}{1^6}\right)\left(1-\frac{x^6}{2^6}\right)\left(1-\frac{x^6}{3^6}\right)\left(1-\frac{x^6}{4^6}\right)$$

$$= \frac{\sin\pi x\,(e^{x\pi\sqrt{3}}+e^{-x\pi\sqrt{3}}-2\cos\pi x)}{4x^3\pi^3}$$

$$\left(1-\frac{x^{10}}{1^{10}}\right)\left(1-\frac{x^{10}}{2^{10}}\right)\left(1-\frac{x^{10}}{3^{10}}\right).$$

$$= \frac{2\sin x\pi}{(2x\pi)^5} \quad \left[e^{\frac{x\pi}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+e^{-\frac{x\pi}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}-2\cos\left\{\frac{x\pi}{2}(-1+\sqrt{5})\right\}\right].$$

$$\left[e^{\frac{x\pi}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}}+e^{-\frac{x\pi}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}}-2\cos\left\{\frac{x\pi}{2}(1+\sqrt{5})\right\}\right].$$

In Gleichung 16) $n = 8$ gesetzt, gibt:

$$\left(1-\frac{x^8}{1^8}\right)\left(1-\frac{x^8}{2^8}\right)\left(1-\frac{x^8}{3^8}\right)\left(1-\frac{x^8}{4^8}\right)$$

$$= \frac{2\sin\pi x}{(2x\pi)^4}(e^{x\pi}-e^{-x\pi})(e^{x\pi\sqrt{2}}+e^{-x\pi\sqrt{2}}-2\cos x\pi\sqrt{2}).$$

Ersetzt man in Formel 13), welche einfacher geschrieben, folgende Form annimmt:

$$\left[\prod_1^\infty\left(1-\frac{x^n}{g^n}\right)\right]^2 = -\frac{\prod\limits_0^{n-1}\sin\left(x\pi e^{\frac{2g\pi i}{n}}\right)}{(x\pi)^n}$$

$x$ durch $\frac{x}{2}$, so folgt:

$$\left[\prod_1^\infty\left(1-\frac{x^n}{2^n g^n}\right)\right]^2 = -\frac{\prod\limits_0^{n-1}\sin\left(\frac{x\pi}{2}e^{\frac{2g\pi i}{n}}\right)}{\left(\frac{x\pi}{2}\right)^n}$$

Durch Division dieser zwei Gleichungen ergibt sich:

$$\left[\prod_1^{\infty}\left\{1-\frac{x^n}{(2g+1)^n}\right\}\right]^2=\frac{1}{2^n}\prod_0^{n-1}\frac{\sin\left(x\pi e^{\frac{2g\pi i}{n}}\right)}{\sin\left(\frac{x\pi}{2}e^{\frac{2g\pi i}{n}}\right)}=\prod_0^{n-1}\cos\left(\frac{x\pi}{2}e^{\frac{2g\pi i}{n}}\right)$$

nachdem der Sinus im Zähler durch Functionen des halben Bogens ausgedrückt worden. Das letzte Product kann jetzt auf nachstehende Form gebracht werden:

$$\prod_0^{n-1}\cos\left(\frac{x\pi}{2}e^{\frac{2g\pi i}{n}}\right)=\prod_0^{\frac{n}{2}-1}\cos\left(\frac{x\pi}{2}e^{\frac{2g\pi i}{n}}\right)\prod_{\frac{n}{2}}^{n-1}\cos\left(\frac{x\pi}{2}e^{\frac{2g\pi i}{n}}\right)$$

$$=\prod_0^{\frac{n}{2}-1}\cos\left(\frac{x\pi}{2}e^{\frac{2g\pi i}{n}}\right).\prod_0^{\frac{n}{2}-1}\cos\left(\frac{x\pi}{2}e^{\frac{2n-2g}{n}\pi i}\right)$$

$$=\prod_0^{\frac{n}{2}-1}Pg$$

dabei ist

$$Pg=\cos\left(\frac{x\pi}{2}e^{\frac{2g\pi i}{n}}\right).\cos\left(\frac{x\pi}{2}e^{\frac{2\pi-2g}{n}\pi i}\right)$$

*Pg*, das Product der Cosinuse, lässt sich folgendermassen darstellen, wenn die Exponentialfunctionen durch trigonometrische Functionen ersetzt werden.

$$Pg=\cos\left(\frac{x\pi}{2}\cos\frac{2g\pi}{n}+i\frac{x\pi}{2}\sin\frac{2g\pi}{n}\right)$$
$$\cos\left(\frac{x\pi}{2}\cos\frac{2g\pi}{n}-i\frac{x\pi}{2}\sin\frac{2g\pi}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\cos\left(x\pi\cos\frac{2g\pi}{n}\right)+\cos\left(ix\pi\sin\frac{2gn}{n}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[e^{x\pi\sin\frac{2g\pi}{n}}+e^{-x\pi\sin\frac{2g\pi}{n}}+2\cos\left(x\pi\cos\frac{2g\pi}{n}\right)\right]=\frac{1}{4}\omega(x,g)$$

$\omega(x,g)$ ist durch die Gleichung definirt:

*B*) $$\omega(x,\mathrm{g})=e^{x\pi\lambda_g}+e^{-x\pi\lambda_g}+2\cos(x\pi\rho_g).$$

$\lambda_g$ und $\rho_g$ haben ihre frühere Bedeutung.

Es ist demnach der Werth des unendlichen Productes:

$$19)\qquad \left[\prod_1^\infty \left\{1-\frac{x^n}{(2g+1)^n}\right\}\right]^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^n \prod_0^{\frac{n}{2}-1} \omega(x, g).$$

Zur bequemeren Berechnung mögen auch hier die zwei Fälle unterschieden werden:

$$\alpha)\ n = 4p+2 \qquad \beta)\ n = 4p$$

$\alpha$) Es ist:

$$\prod_0^{\frac{n}{2}-1} \omega(x, g) = \omega(x, 0) \prod_1^{\frac{n-2}{4}} \omega(x, g) \prod_{\frac{n+2}{4}}^{\frac{n}{2}-1} \omega(x, g)$$

$$= \omega(x, 0) \prod_1^{\frac{n-2}{4}} \omega(x, g) \prod_1^{\frac{n-2}{4}} \omega\left(x, \frac{n}{2}-g\right)$$

Wie früher hat man:

$$\lambda_{\frac{n}{2}-g} = \lambda_g$$

und

$$\rho_{\frac{n}{2}-g} = -\rho_g$$

und wie leicht einzusehen ist auch:

$$\omega\left(x, \frac{n}{2}-g\right) = \omega(x, g),$$

wenn in Gleichung *B*) statt $g \ldots \frac{n}{2}-g$ gesetzt wird, daher folgt:

$$\prod_0^{\frac{n}{2}-1} \omega(x,g) = \omega(x, 0) \,.\, \left[\prod_1^{\frac{n-2}{4}} \omega(x, g)\right]^2$$

$$\omega(x,0) = 2(1+\cos x\pi);$$

dies beachtend, gibt Gleichung 19)

$$\left[\prod_1^\infty \left\{1-\frac{x^n}{(2g+1)^n}\right\}\right]^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \cos^2\frac{\pi x}{2} \left[\prod_1^{\frac{n-2}{4}} \omega(x, g)\right]^2$$

oder:

$$20)\quad \prod_{1}^{\infty}\left[1-\frac{x^n}{(2g+1)^n}\right]=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1} \cos\frac{x\pi}{2} \prod_{1}^{\frac{n-2}{4}} \omega(x,g),$$

für $n=4p+2$

$$\beta)\quad \prod_{0}^{\frac{n}{2}-1} \omega(x.g)=\omega(x,0) \prod_{1}^{\frac{n}{4}-1} \omega(x,g)\,.\,\omega\left(x,\frac{n}{4}\right) \prod_{\frac{n}{4}+1}^{\frac{n}{2}-1} \omega(x,g)$$

$$=\omega(x,0)\quad \omega\left(x,\frac{n}{4}\right). \prod_{1}^{\frac{n}{4}-1} \omega(x,g) \prod_{1}^{\frac{n}{4}-1} \omega\left(x,\frac{n}{2}-g\right).$$

Das Product der ersten zwei Factoren ist durch den Ausdruck gegeben:

$$\omega(x,0)\quad \omega\left(x,\frac{n}{4}\right)=4\cos^2\frac{x\pi}{2}\left(e^{\frac{x\pi}{2}}+e^{-\frac{x\pi}{2}}\right)^2,$$

also ist:

$$\prod_{0}^{\frac{n}{2}-1} \omega(x,g)=4\cos^2\frac{x\omega}{2}\left(e^{\frac{x\pi}{2}}+e^{-\frac{x\pi}{2}}\right)^2 \left[\prod_{1}^{\frac{n}{4}-1} \omega(x,g)\right]^2$$

Die Gleichung 19) geht somit für $n=4p$ über in:

$$21)\quad \prod_{1}^{\infty}\left[1-\frac{x^n}{(2g+1)^n}\right]=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1} \cos\frac{x\pi}{2}\left(e^{\frac{x\pi}{2}}+e^{-\frac{x\pi}{2}}\right) \prod_{1}^{\frac{n}{4}-1} \omega(x,g).$$

Durch Substitution von $n=6$ und $n=8$ gehen aus den letzten zwei Gleichungen nachstehende specielle Resultate hervor:

$$\left(1-\frac{x^6}{1^6}\right)\left(1-\frac{x^6}{3^6}\right)\left(1-\frac{x^6}{5^6}\right)\left(1-\frac{x^6}{7^6}\right).$$

$$=\frac{1}{4}\cos\frac{x\pi}{2}\left(e^{\frac{x\pi}{2}\sqrt{3}}+e^{-\frac{x\pi}{2}\sqrt{3}}+2\cos\frac{x\pi}{2}\right)$$

$$\left(1-\frac{x^8}{1^8}\right)\left(1-\frac{x^8}{3^8}\right)\left(1-\frac{x^8}{5^8}\right)\left(1-\frac{x^8}{7^8}\right).$$

$$=\frac{1}{8}\cos\frac{x\pi}{2}\left(e^{\frac{x\pi}{2}}+e^{-\frac{x\pi}{2}}\right)\left(e^{\frac{x\pi}{2}\sqrt{2}}+e^{-\frac{x\pi}{2}\sqrt{2}}+2\cos\frac{x\pi}{2}\sqrt{2}\right).$$

Nimmt man von den Gleichungen 19), 20) und 21) die natürlichen Logarithmen und bildet die Differentialquotienten nach $x$, so folgt:

$$2\left[\lg\left(1-\frac{x^n}{1^n}\right)+\lg\left(1-\frac{x^n}{3^n}\right)+\lg\left(1-\frac{x^n}{5^n}\right)+\quad\right]$$

$$=n\lg\frac{1}{2}+\sum_{0}^{\frac{n}{2}-1}\lg\omega(x,g);$$

und

$$-2nx^{n-1}\left[\frac{1}{1^n-x^n}+\frac{1}{3^n-x^n}+\frac{1}{5^n-x^n}+\frac{1}{7^n-x^n}+\ldots\right]$$

$$=\sum_{0}^{\frac{n}{2}-1}\frac{\omega'(x,g)}{\omega(x,g)}=\pi\sum_{0}^{\frac{n}{2}-1}\eta(x,g)$$

dabei hat $\eta(x,g)$ den Werth:

$$\eta(x,g)=\frac{\lambda_g(e^{x\pi\lambda_g}-e^{-x\pi\lambda_g})-2\rho_g\sin(x\pi\rho_g)}{e^{x\pi\lambda_g}+e^{-x\pi\lambda_g}+2\cos(x\pi\rho_g)}$$

also folgt für die unendliche Reihe, bei welcher im Nenner die $n$ten Potenzen der ungeraden Zahlen vorkommen, der Werth:

$$22)\qquad \frac{1}{1^n-x^n}+\frac{1}{3^n-x^n}+\frac{1}{5^n-x^n}+\frac{1}{7^n-x^n}+.$$

$$=-\frac{\pi}{2nx^{n-1}}\sum_{0}^{\frac{n}{2}-1}\eta(x,g)$$

ebenso findet man aus 20) und 21) für $n=4p+2$ und für $n=4p$ die Resultate:

$$23)\qquad \frac{1}{1^n-x^n}+\frac{1}{3^n-x^n}+\frac{1}{5^n-x^n}+\frac{1}{7^n-x^n}+.$$

$$=\frac{\pi}{2nx^{n-1}}\left[\operatorname{tg}\frac{x\pi}{2}-2\sum_{1}^{\frac{n-2}{4}}\eta(x,g)\right]$$

$$24)\qquad =\frac{\pi}{2nx^{n-1}}\left[\operatorname{tg}\frac{x\pi}{2}-\frac{e^{x\pi}-1}{e^{x\pi}+1}-2\sum_{1}^{\frac{n}{4}-1}\eta(x,g)\right]$$

Für $n=2$ und $n=4$ gehen aus der Gleichung 22) die bekannten speciellen Reihen hervor:

$$\frac{1}{1^2-x^2}+\frac{1}{3^2-x^2}+\frac{1}{5^2-x^2}+\frac{1}{7^2-x^2}+\cdot \quad =\frac{\pi}{4x}\,\mathrm{tg}\,\frac{x\pi}{2}$$

und

$$\frac{1}{1^4-x^4}+\frac{1}{3^4-x^4}+\frac{1}{5^4-x^4}+\frac{1}{7^4-x^4}+\ldots=\frac{\pi}{8x^3}\left(\mathrm{tg}\,\frac{x\pi}{2}-\frac{e^{x\pi}-1}{e^{x\pi}+1}\right)$$

und für $n=6$ und $n=8$ geben die letzten zwei Gleichungen die bemerkenswerthen Resultate:

$$\frac{1}{1^6-x^6}+\frac{1}{3^6-x^6}+\frac{1}{5^6-x^6}+\frac{1}{7^6-x^6}+\cdot$$

$$=\frac{\pi}{12x^5}\left[\mathrm{tg}\,\frac{\pi x}{2}-\frac{\sqrt{3}\,\left(e^{\frac{x\pi}{2}\sqrt{3}}-e^{-\frac{x\pi}{2}\sqrt{3}}\right)-2\sin\frac{x\pi}{2}}{e^{\frac{x\pi}{2}\sqrt{3}}+e^{-\frac{x\pi}{2}\sqrt{3}}+2\cos\frac{x\pi}{2}}\right]$$

$$\frac{1}{1^8-x^8}+\frac{1}{3^8-x^8}+\frac{1}{5^8-x^8}+\frac{1}{7^8-x^8}+\cdot$$

$$=\frac{\pi}{16x^7}\left[\mathrm{tg}\,\frac{x\pi}{2}-\frac{e^{x\pi}-1}{e^{x\pi}+1}-\sqrt{2}\,.\,\frac{e^{x\pi\sqrt{\frac{1}{2}}}-e^{-x\pi\sqrt{\frac{1}{2}}}-2\sin\left(x\pi\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}{e^{x\pi\sqrt{\frac{1}{2}}}+e^{-x\pi\sqrt{\frac{1}{2}}}+2\cos\left(x\pi\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\right]$$

Es ist ferner nach Gleichung 10):

$$F(x)=\frac{1}{1^n-x^n}+\frac{1}{2^n-x^n}+\frac{1}{3^n-x^n}+\frac{1}{4^n-x^n}+\cdot$$

$$=\frac{1}{2x^n}-\frac{\pi}{nx^{n-1}}\left[\mathrm{cotg}\,\pi x+\sum_{1}^{\frac{n}{2}-1}\psi(x,g)\right]$$

und wenn $\frac{x}{2}$ statt $x$ gesetzt wird, so folgt:

$$\frac{1}{2^n}F\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2^n-x^n}+\frac{1}{4^n-x^n}+\frac{1}{6^n-x^n}+\cdot$$

$$=\frac{1}{2x^n}-\frac{\pi}{2nx^{n-1}}\left[\mathrm{cotg}\,\frac{\pi x}{2}+\sum_{1}^{\frac{n}{2}-1}\psi\left(\frac{x}{2},g\right)\right]$$

Durch Subtraction der letzten Gleichung von 22) ergibt sich:

$$\frac{1}{1^n-x^n}-\frac{1}{2^n-x^n}+\frac{1}{3^n-x^n}-\frac{1}{4^n-x^n}+.$$

$$=-\frac{\pi}{2nx^{n-1}}\left[\eta(x,0)+\sum_{1}^{\frac{n}{2}-1}\eta(x,g)\right]+\frac{\pi}{2nx^{n-1}}\left[\operatorname{cotg}\frac{\pi x}{2}\right.$$

$$\left.+\sum_{1}^{\frac{n}{2}-1}\psi\left(\frac{x}{2},g\right)\right]-\frac{1}{2x^n}$$

$$=-\frac{1}{2x^n}+\frac{\pi}{2nx^{n-1}}\left[\frac{2}{\sin x\pi}+\sum_{1}^{\frac{n}{2}-1}\left\{\psi\left(\frac{x}{2},g\right)-\eta(x,g)\right\}\right]$$

Die Functionen $\psi$ und $\eta$ sind durch den Ausdruck bestimmt:

$$\psi\left(\frac{x}{2},g\right)=\frac{\lambda_g(e^{\alpha}-e^{-\alpha})+2\rho_g\sin\beta}{e^{\alpha}+e^{-\alpha}-2\cos\beta}$$

$$\eta(x,g)=\frac{\lambda_g(e^{\alpha}-e^{-\alpha})-2\rho_g\sin\beta}{e^{\alpha}+e^{-\alpha}+2\cos\beta}$$

Dabei haben $\alpha$ und $\beta$ die Bedeutung;

$$\alpha=x\pi\lambda_g \text{ und } \beta=x\pi\rho_g$$

Für die Differenz dieser zwei Functionen erhält man:

$$\psi\left(\frac{x}{2},g\right)-\eta(x,g)=\frac{4\rho_g\sin\beta(e^{\alpha}+e^{-\alpha})+4\lambda_g\cos\beta(e^{\alpha}-e^{-\alpha})}{(e^{\alpha}+e^{-\alpha})^2-4\cos^2\beta}$$

$$4\;\frac{e^{x\pi\lambda_g}\sin\left(x\pi\rho_g+\frac{2g\pi}{n}\right)+e^{-x\pi\lambda_g}\sin\left(x\pi\rho_g-\frac{2g\pi}{n}\right)}{e^{2x\pi\lambda_g}+e^{-2x\pi\lambda_g}-2\cos(2x\pi\rho_g)}$$

Es ist somit der Werth der Reihe mit regelmässigem Zeichenwechsel durch folgende Formel gegeben:

$$25)\qquad \frac{1}{1^n-x^n}-\frac{1}{2^n-x^n}+\frac{1}{3^n-x^n}-\frac{1}{4^n-x^n}+.$$

$$=-\frac{1}{2x^n}+\frac{\pi}{nx^{n-1}}\left[\frac{1}{\sin x\pi}+2\sum_{1}^{\frac{n}{2}-1}Q(x)\right]$$

wobei abkürzend

$$Q(x)=\frac{e^{x\pi\lambda_g}\sin\left(x\pi\rho_g+\frac{2g\pi}{n}\right)+e^{-x\pi\lambda_g}\sin\left(x\pi\rho_g-\frac{2g\pi}{n}\right)}{e^{2x\pi\lambda_g}+e^{-2x\pi\lambda_g}-2\cos(2x\pi\rho_g)}$$

gesetzt wurde.

Wird ferner in Gleichung 11) $x$ durch $\frac{x}{2}$ ersetzt, so entspringt die Gleichung:

$$\frac{1}{2^n}F\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2x^n}-\frac{\pi}{2nx^{n-1}}\left[\operatorname{cotg}\frac{\pi x}{2}+2\sum_{1}^{\frac{n}{2}-1}\psi\left(\frac{x}{2},g\right)\right],$$

für $n=4p+2$.

Zieht man das letzte Resultat von Gleichung 23) ab, so folgt:

26) $$\frac{1}{1^n-x^n}-\frac{1}{2^n-x^n}+\frac{1}{3^n-x^n}-\frac{1}{4^n-x^n}+\cdots$$

$$=-\frac{1}{2x^n}+\frac{\pi}{nx^{n-1}}\left[\frac{1}{\sin x\pi}+\sum_{1}^{\frac{n-2}{4}}\left\{\psi\left(\frac{x}{2},g\right)-\eta(x,g)\right\}\right]$$

$$=-\frac{1}{2x^n}+\frac{\pi}{nx^{n-1}}\left[\frac{1}{\sin x\pi}+4\sum_{1}^{\frac{n-}{4}}Q(x)\right],\ n=4p+2$$

Durch dasselbe Verfahren gibt Gleichung 12) in Verbindung mit 24) für $n=4p$ nachstehendes Resultat:

27) $$\frac{1}{1^n-x^n}-\frac{1}{2^n-x^n}+\frac{1}{3^n-x^n}-\frac{1}{4^n-x^n}+\cdot$$

$$=-\frac{1}{2x^n}+\frac{\pi}{nx^{n-1}}\left[\frac{1}{\sin\pi x}+\frac{2e^{\pi x}}{e^{2x\pi}-1}+4\sum^{\frac{n}{4}-1}Q(x)\right]$$

Specielle Fälle: Für $n = 4$ gibt Gleichung 25)

$$\frac{1}{1^4-x^4}-\frac{1}{2^4-x^4}+\frac{1}{3^4-x^4}-\frac{1}{4^4-x^4}+\ldots=-\frac{1}{2x^4}+\frac{\pi}{4x^3}\left(\frac{1}{\sin \pi x}+\frac{2}{e^{x\pi}+e^{-x\pi}}\right)$$

Für $n = 6$ und $n = 8$ erhält man aus 26) und 27):

$$\frac{1}{1^6-x^6}-\frac{1}{2^6-x^6}+\frac{1}{3^6-x^6}-\frac{1}{4^6-x^6}+.$$

$$=-\frac{1}{2x^6}+\frac{\pi}{6x^5}\left\{\frac{1}{\sin \pi x}+4\,\frac{e^{\frac{x\pi}{2}\sqrt{3}}\sin\left[\frac{\pi}{6}(3x+2)\right]+e^{-\frac{x\pi}{2}\sqrt{3}}\sin\left[\frac{\pi}{6}(3x-2)\right]}{e^{x\pi\sqrt{3}}+e^{-x\pi\sqrt{3}}-2\cos \pi x}\right]$$

und

$$\frac{1}{1^8-x^8}-\frac{1}{2^8-x^8}+\frac{1}{3^8-x^8}-\frac{1}{4^8-x^8}+.$$

$$=-\frac{1}{2x^8}+\frac{\pi}{8x^7}\left\{\frac{1}{\sin \pi x}+\frac{2}{e^{x\pi}-e^{-x\pi}}+4\,\frac{e^{x\pi\sqrt{\frac{1}{2}}}\sin\left[\frac{\pi}{4}(2x\sqrt{2}+1)\right]+e^{-x\pi\sqrt{\frac{1}{2}}}\sin\left[\frac{\pi}{4}(2x\sqrt{2}-1)\right]}{e^{x\pi\sqrt{2}}+e^{-x\pi\sqrt{2}}-2\cos(x\pi\sqrt{2})}\right\}$$

## II.

Es ist nicht schwer, die analogen unendlichen Reihen und Producte auszuwerthen, wenn im Nenner $x^n$ durch $-x^n$ vertreten ist.

Für diesen Fall hat die Reihe die Form:

1) $$F(x) = \frac{1}{1^n+x^n} + \frac{1}{2^n+x^n} + \frac{1}{3^n+x^n} + \frac{1}{4^n+x^n} + \ldots;$$

für $[x] < 1$ und $n = 2r$.

Man drücke die Glieder dieser Reihe durch Potenzreihen nach $x$ aus, so hat man für alle $x$, deren absolute Beträge kleiner als 1 sind:

$$\frac{1}{1^n+x^n} = \frac{1}{1^n}\left[1 - \frac{x^n}{1^n} + \frac{x^{2n}}{1^{2n}} - \frac{x^{3n}}{1^{3n}} + . \quad\right]$$

$$\frac{1}{2^n+x^n} = \frac{1}{2^n}\left[1 - \frac{x^n}{2^n} + \frac{x^{2n}}{2^{2n}} - \frac{x^{3n}}{2^{3n}} + . . \quad\right]$$

$$\frac{1}{3^n+x^n} = \frac{1}{3^n}\left[1 - \frac{x^n}{3^n} + \frac{x^{2n}}{3^{2n}} - \frac{x^{3n}}{3^{3n}} + . \quad\right]$$

Dieses System von Gleichungen gibt durch Addition vereinigt:

2) $$F(x) = S_n - S_{2n}x^n + S_{3n}x^{2n} - S_{4n}x^{3n} + .$$

Dabei ist wie früher:

$$S_n = \frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + .$$

Setzt man in die Potenzreihe für $\lg\Gamma(1-x)$ anstatt $x \ldots xe^{\frac{\pi i}{n}}$ so folgt:

3) $$\lg\Gamma\left(1-xe^{\frac{\pi i}{n}}\right) = Cxe^{\frac{\pi i}{n}} + \frac{1}{2}S_2e^{\frac{2\pi i}{n}}x^2 + \frac{1}{3}S_3e^{\frac{3\pi i}{n}}x^3 + \frac{1}{4}S_4e^{\frac{4\pi i}{n}}x^4 + \ldots$$

$$= B_1x + B_2x^2 + B_3x^3 + B_4x^4 + \ldots = f(x)$$

Es ist nach dem Vorhergehenden:

$a$) $$B_nx^n + B_{2n}x^{2n} + B_{3n}x^{3n} + . \quad . = \frac{1}{n}\sum_0^{n-1} f\left(xe^{\frac{2g\pi i}{n}}\right)$$

und wenn für die Coëfficienten $B_n$, $B_{2n}$, $B_{3n}$, u. s. w. ihre Werthe eingesetzt werden, geht die vorige Gleichung über in:

$$\varphi(x) = \frac{1}{n}\left(e^{\frac{\pi i}{n}}\right)^n S_nx^n + \frac{1}{2n}\left(e^{\frac{\pi i}{n}}\right)^{2n} S_{2n}x^{2n} + \frac{1}{3n}\left(e^{\frac{\pi i}{n}}\right)^{3n} S_{3n}x^{3n} + .$$

oder:

$$4)\quad \varphi(x) = -\frac{1}{n} S_n x^n + \frac{1}{2n} S_{2n} x^{2n} - \frac{1}{3n} S_{3n} x^{3n} + \frac{1}{4n} S_{4n} x^{4n} - .$$

und nach Gleichung $a$) ist:

$$5)\quad \varphi(x) = \frac{1}{n} \sum_{0}^{n-1} \lg \Gamma\left(1 - xe^{\frac{\pi i}{n}} \cdot e^{\frac{2g\pi i}{n}}\right) = \frac{1}{n} \lg \prod_{0}^{n-1} \Gamma\left(1 - xe^{\frac{2g+1}{n}\pi i}\right).$$

Wird in den Gleichungen 4) und 5) $x$ durch $-x$ ersetzt, so ändert sich der Werth der Function $\varphi(x)$ nicht, da $n$ der Voraussetzung zufolge eine gerade Zahl bedeutet und es ist somit:

$$\varphi(-x) = \varphi(x)$$

oder auch

$$\varphi(x) = \frac{1}{n} \lg \prod_{0}^{n-1} \Gamma\left(1 + xe^{\frac{2g+1}{n}\pi i}\right) = \frac{1}{n} \lg \prod_{0}^{n-1} \Gamma\left(1 - xe^{\frac{2g+1}{n}\pi i}\right)$$

woraus unmittelbar folgt:

$$2\varphi(x) = \frac{1}{n} \lg \Gamma\left(1 + xe^{\frac{2g+1}{n}\pi i}\right) \quad \Gamma\left(1 - xe^{\frac{2g+1}{n}\pi i}\right)$$

und nach der Formel:

$$\Gamma(1+\lambda) \quad \Gamma(1-\lambda) = \frac{\pi\lambda}{\sin \pi\lambda}$$

wird aus der vorhergehenden Gleichung:

$$6)\qquad 2\varphi(x) = \frac{1}{n} \lg \prod_{0}^{n-1} \frac{x\pi e^{\frac{2g+1}{n}\pi i}}{\sin\left(x\pi e^{\frac{2g+1}{n}\pi i}\right)}.$$

Das Product der Exponentialfunctionen im Zähler kann leicht berechnet werden. Es ist nämlich:

$$\prod_{0}^{n-1} e^{\frac{2g+1}{n}\pi i} = e^{(1+3+5+\ldots+n-1)\frac{\pi i}{n}} = e^{n^2 \cdot \frac{\pi i}{n}} = e^{n\pi i} = \cos n\pi + i \sin n\pi$$

$$= 1;\ \text{vermöge } n = 2r.$$

Dies berücksichtigt, gibt Gleichung 6):

7) $$2\varphi(x) = \frac{1}{n} \lg \frac{x^n \pi^n}{\prod_0^{n-1} \sin\left(x\pi e^{\frac{2g+1}{n}\pi i}\right)}$$

Man setze für den Augenblick zur Abkürzung:

$$P = \prod_0^{n-1} \sin\left(x\pi e^{\frac{2g+1}{n}\pi i}\right),$$

so lässt sich dieses Product folgendermassen zerlegen:

$$P = \prod_0^{\frac{n}{2}-1} \sin\left(x\pi e^{\frac{2g+1}{n}\pi i}\right) \prod_{\frac{n}{2}}^{n-1} \sin\left(x\pi e^{\frac{2g+1}{n}\pi i}\right).$$

Der zweite Factor lässt sich also umformen, wenn die Substitutionen in umgekehrter Ordnung ausgeführt werden:

$$\prod_{n-1}^{\frac{n}{2}} \sin\left(x\pi e^{\frac{2g+1}{n}\pi i}\right) = \prod_0^{\frac{n}{2}-1} \sin\left(x\pi e^{\frac{2n-2g-1}{n}\pi i}\right).$$

*P* ist somit durch das Product gegeben:

$$P = \prod_0^{\frac{n}{2}-1} \sin\left(x\pi e^{\frac{2g+1}{n}\pi i}\right) \quad \sin\left(x\pi e^{\frac{2n-2g-1}{n}\pi i}\right).$$

Die Exponentialfunction im zweiten Factor ausgerechnet, gibt

$$e^{\frac{2n-2g-1}{n}\pi i} = e^{\frac{-2g-1}{n}\pi i} = \cos\frac{2g+1}{n}\pi - i\sin\frac{2g+1}{n}\pi$$

desshalb erhält man für *P*:

$$P = \prod_0^{\frac{n}{2}-1} \sin\left[x\pi\cos\frac{2g+1}{n}\pi + ix\pi\sin\frac{2g+1}{n}\pi\right]$$
$$\sin\left[x\pi\cos\frac{2g+1}{n}\pi - ix\pi\sin\frac{2g+1}{n}\pi\right].$$

Wird das Product der Sinuse durch die Differenz zweier Cosinuse ersetzt, so ist $P$ durch den Ausdruck bestimmt:

$$P=\prod_0^{\frac{n}{2}-1}\frac{1}{2}\left\{\cos\left(2x\pi i\sin\frac{2g+1}{n}\pi\right)-\cos\left(2x\pi\cos\frac{2g+1}{n}\pi\right)\right\}.$$

Der erste Theil der Differenz, durch Exponentielle ausgedrückt, gibt:

$$\cos\left(2x\pi i\sin\frac{2g+1}{n}\pi\right)=\frac{1}{2}\left(e^{2x\pi\sin\frac{2g+1}{n}\pi}+e^{-2x\pi\sin\frac{2g+1}{n}\pi}\right),$$

also ist:

$$P=\prod_0^{\frac{n}{2}-1}\frac{1}{4}\left\{e^{2x\pi\sin\frac{2g+1}{n}\pi}+e^{-2x\pi\sin\frac{2g+1}{n}\pi}-2\cos\left(2x\pi\cos\frac{2g+1}{n}\pi\right)\right\}$$

$$D)\quad P=\left(\frac{1}{2}\right)^n\prod_0^{\frac{n}{2}-1}\left\{{}^{2x\pi\lambda_g}+e^{-2x\pi\lambda_g}-2\cos\left(2x\pi\rho_g\right)\right\}$$

$\lambda_g$ und $\rho_g$ sind durch die Gleichungen gegeben:

$$\lambda_g=\sin\frac{2g+1}{n}\pi \text{ und } \rho_g=\cos\frac{2g+1}{n}\pi.$$

Durch Substitution des Werthes von $P$ in Gleichung 7) erhält man:

$$7')\quad 2\varphi(x)=\lg(2x\pi)-\frac{1}{n}\lg\prod_0^{\frac{n}{2}-1}\left\{e^{2x\pi\lambda_g}+e^{-2x\pi\lambda_g}-2\cos(2x\pi\rho_g)\right\}.$$

Durch Differentiation der letzten Gleichung nach $x$ ergibt sich

$$2\varphi'(x)=\frac{1}{x}-\frac{2\pi}{n}\sum_0^{\frac{n}{2}-1}\frac{\lambda_g(e^{2x\pi\lambda_g}-e^{-2x\pi\lambda_g})+2\rho_g\sin(2x\pi\rho_g)}{e^{2x\pi\lambda_g}+e^{-2x\pi\lambda_g}-2\cos(2x\pi\rho_g)}$$

$$=\frac{1}{x}-\frac{2\pi}{n}\sum_0^{\frac{n}{2}-1}\omega(x,g).$$

Die Function $\omega$ unter dem Summenzeichen ist durch den Ausdruck bestimmt:

$$A) \qquad \omega(x, g) = \frac{\lambda_g(e^{2x\pi\lambda_g} - e^{-2x\pi\lambda_g}) + 2\rho_g \sin(2x\pi\rho_g)}{e^{2x\pi\lambda_g} - e^{-2x\pi\lambda_g} - 2\cos(2x\pi\rho_g)}$$

Aus Gleichung 4) folgt durch Differentiiren nach $x$ und nachheriger Division durch $-x^{n-1}$ alsogleich;

$$-\frac{\varphi'(x)}{x^{n-1}} = F(x) = -\frac{1}{2x^n} + \frac{\pi}{nx^{n-1}} \sum_0^{\frac{n}{2}-1} \omega(x, g),$$

nachdem der Werth für den Differentialquotienten $\varphi'(x)$ aus der vorhergehenden Gleichung eingesetzt wurde. Es ist somit:

$$8) \qquad F(x) = -\frac{1}{2x^n} + \frac{\pi}{nx^{n-1}} \sum_0^{\frac{n}{2}-1} \omega(x, g).$$

Durch nachstehende Umformung soll die praktische Ausrechnung von $F(x)$ vereinfacht werden. Man unterscheide wieder die zwei Fälle:

$$\alpha)\ n = 4p \ \text{ und } \ \beta)\ n = 4p+2.$$

Im ersten Falle kann die Summe folgendermassen umgestaltet werden:

$$\sum_0^{\frac{n}{2}-1} \omega(x, g) = \sum_0^{\frac{n}{4}-1} \omega(x, g) + \sum_{\frac{n}{4}}^{\frac{n}{2}-1} \omega(x, g).$$

Der zweite Theil der Summe kann gleichfalls auf eine andere Form gebracht werden, wenn man die Substitutionen in umgekehrter Ordnung ausführte. Es ist dann:

$$\sum_{\frac{n}{2}-1}^{\frac{n}{4}} \omega(x, g) = \sum_0^{\frac{n}{4}-1} \omega\left(x, \frac{n}{2} - g - 1\right);$$

daher:

$$\sum_{0}^{\frac{n}{2}-1} \omega(x,g) = \sum_{0}^{\frac{n}{4}-1} [\omega(x,g)+\omega(x,\frac{n}{2}-g-1)].$$

Es lässt sich leicht zeigen, dass die Functionen in der eckigen Klammer einander gleich sind. In $\omega(x,g)$ erscheint $g$ nur in $\lambda_g$ und in $\rho_g$.

Durch Substitution von $(\frac{n}{2}-g-1)$ statt $g$ erhält man:

$$\lambda_{\frac{n}{2}-g-1} = \sin\frac{n-2g-1}{n}\pi = \sin\frac{2g+1}{n}\pi = \lambda_g$$

und

$$\rho_{\frac{n}{2}-g-1} = \cos\frac{n-2g-1}{n}\pi = -\cos\frac{2g+1}{n}\pi = -\rho_g.$$

Dies beachtend, geht $\omega(x,\frac{n}{2}-g-1)$ in $\omega(x,g)$ über und es ist:

$$\sum_{0}^{\frac{n}{2}-1} \omega(x,g) = 2\sum_{0}^{\frac{n}{4}-1} \omega(x,g),$$

daher gibt die Gleichung 8) für $n = 4p$:

9) $$F(x) = -\frac{1}{2x^n} + \frac{2\pi}{nx^{n-1}}\sum_{0}^{\frac{n}{4}-1} \omega(x,g)$$

$\beta$) für $n = 4p+2$ zerlege man die Summe, wie folgt:

$$\sum_{0}^{\frac{n}{2}-1} \omega(x,g) = \sum_{0}^{\frac{n-2}{4}-1} \omega(x,g) + \sum_{\frac{n-2}{4}+1}^{\frac{n}{2}-1} \omega(x,g)+\omega(x,\frac{n-2}{4}).$$

Der Werth von $\omega(x,\frac{n-2}{n})$ ergibt sich sofort aus Gleichung $A$):

$$\omega(x,\frac{n-2}{4}) = \frac{e^{x\pi}+e^{-x\pi}}{e^{x\pi}-e^{-x\pi}} = \frac{e^{2x\pi}+1}{e^{2x\pi}-1}$$

und der zweite Theil der Summe kann auf die Form gebracht werden:

$$\sum_{\frac{n}{2}-1}^{\frac{n-2}{4}+1} \omega(x,g) = \sum_{0}^{\frac{n-2}{4}-1} \omega\left(x, \frac{n}{2}-g-1\right) = \sum_{0}^{\frac{n-2}{4}-1} \omega(x,g)$$

also geht die obige Summe über in:

$$\sum_{0}^{\frac{n}{2}-1} \omega(x,g) = \frac{e^{2x\pi}+1}{e^{2x\pi}-1} + 2 \sum_{0}^{\frac{n-2}{4}-1} \omega(x,g)$$

und man gelangt für $n = 4p+2$ zu dem Resultate:

$$10) \qquad F(x) = -\frac{1}{2x^n} + \frac{\pi}{nx^{n-1}} \left[\frac{e^{2x\pi}+1}{e^{2x\pi}-1} + 2 \sum_{0}^{\frac{n-2}{4}-1} \omega(x,g)\right]$$

Specielle Fälle: Für $n = 2$ gibt Gleichung 8) die bekannte Reihe:

$$\frac{1}{1^2+x^2} + \frac{1}{2^2+x^2} + \frac{1}{3^2+x^2} + \frac{1}{4^2+x^2} + \cdot$$

$$= -\frac{1}{2x^2} + \frac{\pi}{2x} \quad \frac{e^{2x\pi}+1}{e^{2x\pi}-1};$$

und für $n = 4$ und $n = 6$ folgen aus Gleichung 9) und 10) die Resultate:

$$\frac{1}{1^4+x^4} + \frac{1}{2^4+x^4} + \frac{1}{3^4+x^4} + \frac{1}{4^4+x^4} + \cdot$$

$$= -\frac{1}{2x^4} + \frac{\pi\sqrt{2}}{4x^3} \quad \frac{e^{x\pi\sqrt{2}} - e^{-x\pi\sqrt{2}} + 2\sin(x\pi\sqrt{2})}{e^{x\pi\sqrt{2}} + e^{-x\pi\sqrt{2}} - 2\cos(x\pi\sqrt{2})}$$

$$\frac{1}{1^6+x^6} + \frac{1}{2^6+x^6} + \frac{1}{3^6+x^6} + \frac{1}{4^6+x^6} +$$

$$= -\frac{1}{2x^6} + \frac{\pi}{6x^5}\left[\frac{e^{2x\pi}+1}{e^{2x\pi}-1} + \frac{e^{x\pi} - e^{-x\pi} + 2\sqrt{3}\sin(x\pi\sqrt{3})}{e^{x\pi} + e^{-x\pi} - 2\cos(x\pi\sqrt{3})}\right].$$

Werden die Gleichungen 1) und 2) mit $x^{n-1}$ multiplicirt und sodann zwischen den Grenzen 0 und $x$ integrirt, so folgt:

$$\int_0^x \left[\frac{1}{1^n+x^n}+\frac{1}{2^n+x^n}+\frac{1}{3^n+x^n}+\frac{1}{4^n+x^n}+\quad\right]x^{n-1}dx$$

$$=\int_0^x [S_n x^{n-1}-S_{2n}x^{2n-1}+S_{3n}x^{3n-1}-S_{4n}x^{4n-1}+\ldots]dx$$

oder nach Ausführung der Integrationen:

$$\frac{1}{n}\left[\lg\left(1+\frac{x^n}{1^n}\right)+\lg\left(1+\frac{x^n}{2^n}\right)+\lg\left(1+\frac{x^n}{3^n}\right)+\lg\left(1+\frac{x^n}{4^n}\right)+\quad\right]$$

$$=\frac{1}{n}S_n x^n-\frac{1}{2n}S_{2n}x^{2n}+\frac{1}{3n}S_{3n}x^{3n}-\frac{1}{4n}S_{4n}x^{4n}+.\ .=-\varphi(x)$$

oder nach Vereinigung der Logarithmen in der Klammer unter Berücksichtigung der Gleichungen 7) und $D$)

$$\frac{1}{n}\lg\left[\left(1+\frac{x^n}{1^n}\right)\left(1+\frac{x^n}{2^n}\right)\left(1+\frac{x^n}{3^n}\right)\left(1+\frac{x^n}{4^n}\right)\quad\right]$$

$$=\frac{1}{2n}\lg\frac{\prod\limits_0^{n-1}\sin\left(x\pi e^{\frac{2g+1}{n}\pi i}\right)}{x^n\pi^n}.$$

Es ist nämlich nach $D$):

$$E)\qquad P=\prod_0^{n-1}\sin\left(x\pi e^{\frac{2g+1}{n}\pi i}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^n\prod_0^{\frac{n}{2}-1}f(x,g),$$

wenn die Function $f(x,g)$ durch die nachfolgende Gleichung erklärt wird:

$$f(x,g)=e^{2x\pi\lambda_g}+e^{-2x\pi\lambda_g}-2\cos(2x\pi\rho_g).$$

Übergeht man von den Logarithmen auf die Grundzahlen, so folgt alsogleich:

$$11)\quad \left[\left(1+\frac{x^n}{1^n}\right)\left(1+\frac{x^n}{2^n}\right)\left(1+\frac{x^n}{3^n}\right)\left(1+\frac{x^n}{4^n}\right)\quad\right]^2=\frac{\prod\limits_0^{\frac{n}{2}-1}f(x,g)}{(2x\pi)^n}$$

Dabei liegt $x$ zwischen $+1$ und $-1$.

Um die Anzahl der Substitutionen zu vermindern, sollen abermals die zwei Fälle $\alpha)\ n = 4p$ und $\beta)\ n = 4p+2$ unterschieden werden.

$\alpha)$ Für $n = 4p$ kann der Zähler in folgende zwei Producte zerlegt werden:

$$\prod_{0}^{\frac{n}{2}-1} f(x,g) = \prod_{0}^{\frac{n}{4}-1} f(x,g) \prod_{\frac{n}{4}}^{\frac{n}{2}-1} f(x,g).$$

Der letzte Factor lässt sich also umgestalten, wenn die Substitutionen in umgekehrter Ordnung geschehen:

$$\prod_{\frac{n}{4}}^{\frac{n}{2}-1} f(x,g) = \prod_{0}^{\frac{n}{4}-1} f(x,\frac{n}{2}-g-1) = \prod_{0}^{\frac{n}{4}-1} f(x,g);$$

denn $g$ kommt in der Function $f(x,g)$ nur in $\lambda_g = \sin\frac{2g+1}{n}\pi$ und in $\rho_g = \cos\frac{2g+1}{n}\pi$ vor und es ist bereits von früher her bekannt, dass $\lambda_{\frac{n}{2}-g-1} = \lambda_g$ und $\rho_{\frac{n}{2}-g-1} = -\rho_g$ ist, desshalb geht auch die Function $f(x,\frac{n}{2}-g-1)$ über in $f(x,g)$, also hat man für das Product:

$$\prod_{0}^{\frac{n}{2}-1} f(x,g) = [\prod_{0}^{\frac{n}{4}-1} f(x,g)]^2$$

und es nimmt die Gleichung 11) die Form an:

$$12)\quad \left(1+\frac{x}{1^n}\right)\left(1+\frac{x^n}{2^n}\right)\left(1+\frac{x^n}{3^n}\right)\left(1+\frac{x^n}{4^n}\right). \qquad = \frac{\prod_{0}^{\frac{n}{4}-1} f(x,\ g),}{(2x\pi)^{\frac{n}{2}}}$$

für $n = 4p$.

$\beta)$ Für $n = 4p+2$ kann der Zähler in Gleichung 11) in nachstehende Factoren zerlegt werden:

$$\prod_{0}^{\frac{n}{2}-1} f(x,g) = \prod_{0}^{\frac{n-2}{4}-1} f(x,g) . f\left(x,\frac{n-2}{4}\right) . \prod_{\frac{n-2}{4}+1}^{\frac{n}{2}-1} f(x,g).$$

Der mittlere Factor ausgerechnet, gibt den einfachen Werth:

$$f\left(x, \frac{n-2}{4}\right) = (e^{x\pi} - e^{-x\pi})^2$$

und der letzte Theil des Productes kann ähnlich wie vorher umgeformt werden:

$$\prod_{\frac{n-2}{4}+1}^{\frac{n}{2}-1} f(x, g) = \prod_{0}^{\frac{n-2}{4}-1} f\left(x, \frac{n}{2} - g - 1\right) = \prod_{0}^{\frac{n-2}{4}-1} f(x, g)$$

daher liefert Gleichung 11) das Resultat:

$$13) \quad \left(1 + \frac{x^n}{1^n}\right)\left(1 + \frac{x^n}{2^n}\right)\left(1 + \frac{x^n}{3^n}\right)\left(1 + \frac{x^n}{4^n}\right)$$

$$= \frac{e^{x\pi} - e^{-x\pi}}{(2x\pi)^{\frac{n}{2}}} \prod_{0}^{\frac{n-2}{4}-1} f(x, g).$$

Durch Einsetzen von $n = 2$ in Gleichung 11) findet man das bekannte Product:

$$\left(1 + \frac{x^2}{1^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{2^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{3^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{4^2}\right) = \frac{e^{x\pi} - e^{-x\pi}}{2x\pi}$$

Aus den Gleichungen 12) und 13) folgen durch Substitution von $n = 4$, $n = 6$ und $n = 8$ noch die Resultate:

$$\left(1 + \frac{x^4}{1^4}\right)\left(1 + \frac{x^4}{2^4}\right)\left(1 + \frac{x^4}{3^4}\right)\left(1 + \frac{x^4}{4^4}\right)$$

$$= \frac{1}{4x^2\pi^2}\left[e^{x\pi\sqrt{2}} + e^{-x\pi\sqrt{2}} - 2\cos(x\pi\sqrt{2})\right]$$

$$\left(1 + \frac{x^6}{1^6}\right)\left(1 + \frac{x^6}{2^6}\right)\left(1 + \frac{x^6}{3^6}\right)\left(1 + \frac{x^6}{4^6}\right)$$

$$= \frac{e^{x\pi} - e^{-x\pi}}{8x^3\pi^3}\left[e^{x\pi} + e^{-x\pi} - 2\cos(x\pi\sqrt{3})\right]$$

$$\left(1+\frac{x^8}{1^8}\right)\left(1+\frac{x^8}{2^8}\right)\left(1+\frac{x^8}{3^8}\right)\left(1+\frac{x^8}{4^8}\right)$$

$$=\frac{1}{16x^4\pi^4}\left(e^{a\pi}+e^{-a\pi}-2\cos b\pi\right)\left(e^{b\pi}+e^{-b\pi}-2\cos a\pi\right).$$

Dabei ist:

$$a=x\sqrt{2-\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad b=x\sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

Substituirt man in Formel 11) statt $x$. $\frac{x}{2}$, so nimmt das Product die Form an:

$$\left[\left(1+\frac{x^n}{2^n}\right)\left(1+\frac{x^n}{4^n}\right)\left(1+\frac{x^n}{6^n}\right)\left(1+\frac{x^n}{8^n}\right).\quad\right]^2$$

$$=\frac{2^n\prod_0^{n-1}\sin\left(\frac{x\pi}{2}e^{\frac{2g+1}{n}\pi i}\right)}{x^n\pi^n}.$$

Bei dieser Umformung wurde $\prod_0^{\frac{n}{2}-1} f(x,g)$ vermöge Gleichung $E$) durch den Zähler des Bruches in der letzten Gleichung ersetzt, nebstdem kann 11) in folgender Gestalt geschrieben werden:

$$\left[\left(1+\frac{x^n}{1^n}\right)\left(1+\frac{x^n}{2^n}\right)\left(1+\frac{x^n}{3^n}\right)\left(1+\frac{x^n}{4^n}\right).\quad\right]^2=\frac{\prod_0^{n-1}\sin\left(x\pi e^{\frac{2g+1}{n}\pi i}\right)}{x^n\pi^n}$$

Durch Division dieser zwei unendlichen Producte entspringt die Gleichung:

$$14)\quad\left[\left(1+\frac{x^n}{1^n}\right)\left(1+\frac{x^n}{3^n}\right)\left(1+\frac{x^n}{5^n}\right)\left(1+\frac{x^n}{7^n}\right).\quad\right]^2$$

$$=\prod_0^{n-1}\cos\left(\frac{x\pi}{2}e^{\frac{2g+1}{n}\pi i}\right).$$

Ich setze zur Abkürzung:

$$P=\prod_0^{n-1}\cos\left(\frac{x\pi}{2}e^{\frac{2g+1}{n}\pi i}\right),$$

so folgt:

$$P = \prod_{0}^{\frac{n}{2}-1} \cos\left(\frac{x\pi}{2}\, e^{\frac{2g+1}{n}\pi i}\right) \quad \prod_{n-1}^{\frac{n}{2}} \cos\left(\frac{x\pi}{2}\, e^{\frac{2g+1}{n}\pi i}\right),$$

wenn die Substitutionen beim zweiten Factor in umgekehrter Ordnung vorgenommen werden. Letzterer lässt sich auf nachstehende Weise umformen:

$$\prod_{n-1}^{\frac{n}{2}} \cos\left(\frac{x\pi}{2}\, e^{\frac{2g+1}{n}\pi i}\right) = \prod_{0}^{\frac{n}{2}-1} \cos\left(\frac{x\pi}{2}\, e^{\frac{2n-2g-1}{n}\pi i}\right)$$

$$= \prod_{0}^{\frac{n}{2}-1} \cos\left(\frac{x\pi}{2}\, e^{-\frac{2g+1}{x}\pi i}\right)$$

da $e^{\frac{2n\pi i}{n}} = 1$ ist, also hat man für $P$ den Ausdruck:

$$P = \prod_{0}^{\frac{n}{2}-1} \cos\left(\frac{x\pi}{2}\, e^{\frac{2g+1}{n}\pi i}\right) . \cos\left(\frac{x\pi}{2}\, e^{-\frac{2g+1}{n}\pi i}\right)$$

$$= \prod_{0}^{\frac{n}{2}-1} \frac{1}{2}\left[\cos\left(x\pi \cos\frac{2g+1}{n}\pi\right) + \cos\left(ix\pi \sin\frac{2g+1}{n}\pi\right)\right]$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \left[\cos\left(x\pi \cos\frac{2g+1}{n}\pi\right) + \frac{1}{2}\, e^{x\pi \sin\frac{2g+1}{n}\pi} + \frac{1}{2}\, e^{-x\pi \sin\frac{2g+1}{n}\pi}\right]$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \left\{e^{x\pi\lambda_g} + e^{-x\pi\lambda_g} + 2\cos(x\pi\rho_g)\right\}$$

hier haben $\lambda_g$ und $\rho_g$ ihre frühere Bedeutung, nämlich:

$$\lambda_g = \sin\frac{2g+1}{n}\pi \quad \text{und} \quad \rho_g = \cos\frac{2g+1}{n}\pi$$

und Gleichung 14) gibt das Resultat:

$$15)\quad \left[\left(1+\frac{x^n}{1^n}\right)\left(1+\frac{x^n}{3^n}\right)\left(1+\frac{x^n}{5^n}\right)\left(1+\frac{x^n}{7^n}\right). \quad .\right]^2$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{n} . \prod_{1}^{\frac{n}{2}-1} \psi(x, g);\ -1 < x < +1.$$

$\psi(x, g)$ ist durch die Gleichung bestimmt:

$$\psi(x, g) = e^{x\pi\lambda_g} + e^{-x\pi\lambda_g} + 2\cos(x\pi\rho_g).$$

$\alpha$) Für $n = 4p+2$ ist:

$$\prod_0^{\frac{n}{2}-1} \psi(x, g) = \prod_0^{\frac{n-2}{4}-1} \psi(x, g) \cdot \psi\left(x, \frac{n-2}{4}\right) \prod_{\frac{n-2}{4}+1}^{\frac{n}{2}-1} \psi(x, g).$$

Für das Mittelglied im Producte erhält man den Werth:

$$\psi\left(x, \frac{n-2}{4}\right) = e^{x\pi} + e^{-x\pi} + 2$$

und der letzte Factor kann ähnlich wie in den früheren Fällen umgestaltet werden, wenn man von rückwärts zu substituiren beginnt. Es folgt dann:

$$\prod_{\frac{n}{2}-1}^{\frac{n-2}{4}+1} \psi(x, g) = \prod_0^{\frac{n-2}{4}-1} \psi\left(x, \frac{n}{2}-g-1\right) = \prod_0^{\frac{n-2}{4}-1} \psi(x, g)$$

weil

$$\lambda_{\frac{n}{2}-g-1} = \lambda_g \quad \text{und} \quad \rho_{\frac{n}{2}-g-1} = -\rho_g$$

ist, daher geht die Gleichung 15) über in:

$$16) \quad \left(1+\frac{x^n}{1^n}\right)\left(1+\frac{x^n}{3^n}\right)\left(1+\frac{x^n}{5^n}\right)\left(1+\frac{x^n}{7^n}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \left(e^{\frac{x\pi}{2}} + e^{-\frac{x\pi}{2}}\right) \prod_0^{\frac{n-2}{4}-1} \psi(x, g).$$

$\beta$) Für $n = 4p$ hat man:

$$\prod_0^{\frac{n}{2}-1} \psi(x,g) = \prod_0^{\frac{n}{4}-1} \psi(x, g) \cdot \prod_{\frac{n}{4}}^{\frac{n}{2}-1} \psi(x, g),$$

Der zweite Factor kann wieder auf die Form gebracht werden:

$$\prod_{\frac{n}{4}}^{\frac{n}{2}-1} \psi(x,g) = \prod_{0}^{\frac{n}{4}-1} \psi\left(x, \frac{n}{2}-g-1\right) = \prod_{0}^{\frac{n}{4}-1} \psi(x,g)$$

Dies beachtend gibt Gleichung 14) für $n = 4p$

$$17) \quad \left(1+\frac{x^n}{1^n}\right)\left(1+\frac{x^n}{3^n}\right)\left(1+\frac{x^n}{5^n}\right)\left(1+\frac{x^n}{7^n}\right)\cdot \ldots = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \prod_{0}^{\frac{n}{4}-1} \psi(x,g).$$

Für $n = 2$ findet sich aus Gleichung 14) das bekannte specielle Resultat:

$$\left(1+\frac{x^2}{1^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{3^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{5^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{7^2}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x\pi}{2}}+e^{-\frac{x\pi}{2}}\right)$$

und für $n = 4$, $n = 6$ und $n = 8$ gehen aus den letzten zwei Gleichungen noch folgende specielle Ergebnisse hervor:

$$\left(1+\frac{x^4}{1^4}\right)\left(1+\frac{x^4}{3^4}\right)\left(1+\frac{x^4}{5^4}\right)\left(1+\frac{x^4}{7^4}\right)\cdot$$
$$= \frac{1}{4}\left(e^{x\pi\sqrt{\frac{1}{2}}}+e^{-x\pi\sqrt{\frac{1}{2}}}+2\cos x\pi\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$$

$$\left(1+\frac{x^6}{1^6}\right)\left(1+\frac{x^6}{3^6}\right)\left(1+\frac{x^6}{5^6}\right)\left(1+\frac{x^6}{7^6}\right)$$
$$= \frac{1}{8}\left(e^{\frac{x\pi}{2}}+e^{-\frac{x\pi}{2}}\right)\left(e^{\frac{x\pi}{2}}+e^{-\frac{x\pi}{2}}+2\cos\frac{x\pi}{2}\sqrt{3}\right)$$

$$\left(1+\frac{x^8}{1^8}\right)\left(1+\frac{x^8}{3^8}\right)\left(1+\frac{x^8}{5^8}\right)\left(1+\frac{x^8}{7^8}\right)\cdot$$
$$= \frac{1}{16}\left(e^{a\pi}+e^{-a\pi}+2\cos b\pi\right)\left(e^{b\pi}+e^{-b\pi}+2\cos a\pi\right)$$

Dabei haben $a$ und $b$ die Werthe:

$$a = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}} \qquad b = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\cdot$$

Nimmt man von den Gleichungen 15), 16) und 17) die natürlichen Logarithmen und differentiirt dann nach $x$, so ist:

$$2\left[\lg\left(1+\frac{x^n}{1^n}\right)+\lg\left(1+\frac{x^n}{3^n}\right)+\lg\left(1+\frac{x^n}{5^n}\right)+\ldots\right]=n\lg\frac{1}{2}+\sum_{0}^{\frac{n}{2}-1}\lg\psi(x,g)$$

und

$$2nx^{n-1}\left[\frac{1}{1^n+x^n}+\frac{1}{3^n+x^n}+\frac{1}{5^n+x^n}+\frac{1}{7^n+x^n}+\ldots\right]=\sum_{0}^{\frac{n}{2}-1}\frac{\psi'(x,g)}{\psi(x,g)}$$

folglich hat man für die Reihe in der eckigen Klammer:

$$18)\quad \frac{1}{1^n+x^n}+\frac{1}{3^n+x^n}+\frac{1}{5^n+x^n}+\frac{1}{7^n+x^n}\cdot\ldots=\frac{\pi}{2nx^{n-1}}\sum_{0}^{\frac{n}{2}-1}\eta(x,g),$$

wenn der Bruch

$$\frac{\psi'(x,g)}{\psi(x,g)}=\pi\eta(x,g)$$

gesetzt wird, und $\eta(x,g)$ ist durch den Ausdruck gegeben:

$$\eta(x,g)=\frac{\lambda_g(e^{x\pi\lambda_g}-e^{-x\pi\lambda_g})-2\rho_g\sin(x\pi\rho_g)}{e^{x\pi\lambda_g}+e^{-x\pi\lambda_g}+2\cos(x\pi\rho_g)}$$

Ebenso gehen aus den Gleichungen 16) und 17) bei ähnlicher Behandlung die Resultate hervor:

$$19)\quad \frac{1}{1^n+x^n}+\frac{1}{3^n+x^n}+\frac{1}{5^n+x^n}+\frac{1}{7^n+x^n}+$$

$$=\frac{\pi}{2nx^{n-1}}\left\{\frac{e^{x\pi}-1}{e^{x\pi}+1}+2\sum_{0}^{\frac{n-2}{4}-1}\eta(x,g)\right\}$$

$$20)\quad =\frac{\pi}{nx^{n-1}}\sum_{0}^{\frac{n}{4}-1}\eta(x,g).$$

Formel 19) ist giltig für $n=4p+2$ und 20) für $n=4p$.

Für $n=4$ und $n=6$ erhält man aus den letzten zwei Gleichungen die speciellen Formeln:

$$\frac{1}{1^4+x^4}+\frac{1}{3^4+x^4}+\frac{1}{5^4+x^4}+\frac{1}{7^4+x^4}+.$$

$$=\frac{\pi}{4x^3\sqrt{2}}\;\frac{e^{x\pi\sqrt{\frac{1}{2}}}-e^{-x\pi\sqrt{\frac{1}{2}}}-2\sin\left(x\pi\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}{e^{x\pi\sqrt{\frac{1}{2}}}+e^{-x\pi\sqrt{\frac{1}{2}}}+2\cos\left(x\pi\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}$$

$$\frac{1}{1^6+x^6}+\frac{1}{3^6+x^6}+\frac{1}{5^6+x^6}+\frac{1}{7^6+x^6}+.$$

$$=\frac{\pi}{12x^5}\left\{\frac{e^{x\pi}-1}{e^{x\pi}+1}+\frac{e^{\frac{x\pi}{2}}-e^{-\frac{x\pi}{2}}-2\sqrt{3}\sin\left(\frac{x\pi}{2}\sqrt{3}\right)}{e^{\frac{x\pi}{2}}+e^{-\frac{x\pi}{2}}+2\cos\left(\frac{x\pi}{2}\sqrt{3}\right)}\right\}.$$

Es ist nach Gleichung 8):

$$F(x)=\frac{1}{1^n+x^n}+\frac{1}{2^n+x^n}+\frac{1}{3^n+x^n}+\frac{1}{4^n+x^n}+\ldots$$

$$=-\frac{1}{2x^n}+\frac{\pi}{nx^{n-1}}\sum_{0}^{\frac{n}{2}-1}\omega\,(x,g)$$

und wenn $\frac{x}{2}$ statt $x$ substituirt wird, so folgt:

$$\frac{1}{2^n}F\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2^n+x^n}+\frac{1}{4^n+x^n}+\frac{1}{6^n+x^n}+\frac{1}{8^n+x^n}+\ldots$$

$$=-\frac{1}{2x^n}+\frac{\pi}{2nx^{n-1}}\sum_{0}^{\frac{n}{2}-1}\omega\left(\frac{x}{2},g\right).$$

Durch Subtraction dieser Gleichung von 18) ergibt sich:

$$\frac{1}{1^n+x^n}-\frac{1}{2^n+x^n}+\frac{1}{3^n+x^n}-\frac{1}{4^n+x^n}+.$$

$$=\frac{1}{2x^n}+\frac{\pi}{2nx^{n-1}}\sum_{0}^{\frac{n}{2}-1}\left[\eta\,(x,g)-\omega\left(\frac{x}{2},g\right)\right].$$

Die Functionen $\eta$ und $\omega$ sind durch die Ausdrücke gegeben:

$$\eta(x,g)=\frac{\lambda_g(e^\alpha-e^{-\alpha})-2\rho_g\sin\beta}{e^\alpha+e^{-\alpha}+2\cos\beta}$$

$$\omega\left(\frac{x}{2},g\right)=\frac{\lambda_g(e^\alpha-e^{-\alpha})+2\rho_g\sin\beta}{e^\alpha+e^{-\alpha}-2\cos\beta}$$

Dabei ist zur Abkürzung:

$$\alpha=x\pi\lambda_g \text{ und } \beta=x\pi\rho_g$$

Für die Differenz dieser zwei Functionen erhält man:

$$\eta(x,g)-\omega\left(\frac{x}{2},g\right)=\frac{-4\rho_g\sin\beta(e^\alpha+e^{-\alpha})-4\lambda_g\cos\beta(e^\alpha-e^{-\alpha})}{e^{2\alpha}+e^{-2\alpha}+2(1-2\cos^2\beta)}$$

$$=-4\cdot\frac{e^{x\pi\lambda_g}\sin\left(x\pi\rho_g+\frac{2g+1}{n}\pi\right)+e^{-x\pi\lambda_g}\sin\left(x\pi\rho_g-\frac{2g+1}{n}\pi\right)}{e^{2x\pi\lambda_g}+e^{-2x\pi\lambda_g}-2\cos(2x\pi\rho_g)}.$$

Es ist somit der Werth der Reihe mit regelmässigem Zeichenwechsel durch folgende Formel gegeben:

$$21)\qquad \frac{1}{1^n+x^n}-\frac{1}{2^n+x^n}+\frac{1}{3^n+x^n}-\frac{1}{4^n+x^n}+.$$

$$=\frac{1}{2x^n}=\frac{2\pi}{nx^{n-1}}\sum_0^{\frac{n}{2}-1}Q(x),$$

wobei abkürzend:

$$Q(x)=\frac{e^{x\pi\lambda_g}\quad\sin\left(x\pi\rho_g+\frac{2g+1}{n}\pi\right)+e^{-x\pi\lambda_g}\,.\,\sin\left(x\pi\rho_g-\frac{2g+1}{n}\pi\right)}{e^{2x\pi\lambda_g}+e^{-2x\pi\lambda_g}-2\cos(2x\pi\rho_g)}$$

gesetzt wurde. Wird ferner in 9) $x$ durch $\frac{x}{2}$ ersetzt, so gibt dies:

$$\frac{1}{2^n}F\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2^n+x^n}+\frac{1}{4^n+x^n}+\frac{1}{6^n+x^n}+\frac{1}{8^n+x^n}+\dots$$

$$=-\frac{1}{2x^n}+\frac{\pi}{nx^{n-1}}\sum_0^{\frac{n}{4}-1}\omega\left(\frac{x}{2},g\right)$$

Zieht man dies letzte Resultat von Gleichung 20) ab, so folgt:

22) $$\frac{1}{1^n+x^n}-\frac{1}{2^n+x^n}+\frac{1}{3^n+x^n}-\frac{1}{4^n+x^n}+.$$

$$=\frac{1}{2x^n}+\frac{\pi}{nx^{n-1}}\sum_{0}^{\frac{n}{4}-1}\left[\eta\,(x,g)-\omega\left(\frac{x}{2},g\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2x^n}-\frac{4\pi}{nx^{n-1}}\sum_{0}^{\frac{n}{4}-1}Q(x);\; n=4p.$$

Durch das analoge Verfahren gibt Gleichung 10) in Verbindung mit 19) für $n=4p+2$ nachstehendes Resultat:

23) $$\frac{1}{1^n+x^n}-\frac{1}{2^n+x^n}+\frac{1}{3^n+x^n}-\frac{1}{4^n+x^n}+\ldots$$

$$=\frac{1}{2x^n}-\frac{2\pi}{nx^{n-1}}\left[\frac{1}{e^{x\pi}-e^{-x\pi}}+2\sum_{0}^{\frac{n-2}{4}-1}Q(x)\right]$$

Aus den letzten zwei Formeln gehen durch Substitution von $n=4$ und $n=6$ folgende specielle Resultate hervor:

$$\frac{1}{1^4+x^4}-\frac{1}{2^4+x^4}+\frac{1}{3^4+x^4}-\frac{1}{4^4+x^4}+\ldots$$

$$=\frac{1}{2x^4}-\frac{\pi}{x^3}\,\frac{e^{x\pi\sqrt{\frac{1}{2}}}\sin\left[\frac{\pi}{4}(2x\sqrt{2}+1)\right]+e^{-x\pi\sqrt{\frac{1}{2}}}\sin\left[\frac{\pi}{4}(2x\sqrt{2}-1)\right]}{e^{x\pi\sqrt{2}}+e^{-x\pi\sqrt{2}}-2\cos(x\pi\sqrt{2})}$$

$$\frac{1}{1^6+x^6}-\frac{1}{2^6+x^6}+\frac{1}{3^6+x^6}-\frac{1}{4^6+x^6}+\ldots=\frac{1}{2x^6}-\frac{\pi}{3x^5}$$

$$\left\{\frac{1}{e^{x\pi}-e^{-x\pi}}+\frac{e^{\frac{x\pi}{2}}\sin\left[\frac{\pi}{6}(3x\sqrt{3}+1)\right]+e^{-\frac{x\pi}{2}}\sin\left[\frac{\pi}{6}(3x\sqrt{3}-1)\right]}{e^{x\pi}+e^{-x\pi}-2\cos(x\pi\sqrt{3})}\right\}$$