Über eine Reihe neuer mathematischer Erfahrungssätze.

(Schluss.)

Von Dr. **Oskar Simony**,
Professor an der Wiener Hochschule für Bodencultur.

(Mit 6 Tafeln.)

II.

Untersuchung jener Erscheinungen, welche bei einem unverdrehten, biegsamen Ringe von kreisförmigem Querschnitte auftreten, wenn man einen, den Ring vollständig durchsetzenden, längs dessen Mittellinie in sich selbst zurückkehrenden Schnitt durch denselben führt.

Die im vorliegenden zweiten Theile unserer Abhandlung zu beschreibenden Gebilde zeigen im Vergleiche zu jenen, welche aus einem unverdrehten, biegsamen Ringe durch Schnitte erster Art entstehen[1] insoferne einen complicirteren Bau, als hier ausser positiven und negativen Knotenverbindungen verschiedener Ordnungen[2] auch wechselseitige Verschlingungen je zweier Gebilde vorkommen, welche nur in den einfachsten Fällen auf positive (Taf. VI, Fig 21) oder negative (Taf. VI, Fig. 22) Verbindungen irgend welcher Art reducirbar sind.

---

[1] Die hierauf bezüglichen Untersuchungen des Verfassers sind im LXXXV. Bande der Sitzungsberichte der k. Akademie der Wissenschaften, II. Abtheilung, pag. 907—928, ferner im LXXXVII. Bande, II. Abtheilung, pag. 556—587 veröffentlicht worden.

[2] Schematische Darstellungen von Knotenverbindungen 1ter, 2ter und $(r-1)$ter Ordnung findet man auf Taf. III, IV und V des ersten Theiles meiner Abhandlung.

Es combiniren sich nämlich die genannten Verbindungen hier gemeiniglich mit anderweitigen eigenthümlichen Verschlingungen, zu deren vollständiger Characteristik die nachstehenden Hilfsbegriffe genügen:

1. Die Verknotung erster Ordnung (Taf. VI, Fig. 23, 24), als welche wir jede Verschlingung zweier gleichgebauter Knoten bezeichnen, in der, falls man den inneren — in beiden schematischen Figuren als verdickte Doppellinie gezeichneten — Knoten von dessen Basis bis zum Schlusstheile durchläuft, die correspondirenden Elemente des äusseren Knotens sich stets zur rechten Hand vorfinden. Der jeweilige Typus (T) der Verknotung stimmt natürlich mit jenem der beiden, sie constituirenden Knoten überein und wird demnach, wenn die letzteren positive Knoten a^{ter} Art vorstellen (Fig. 23), das Symbol: $[(+)_a]$, hingegen bei einer Verschlingung zweier negativer Knoten a^{ter} Art das Symbol: $[(-)_a]$ besitzen. Im ersten Falle nennen wir auch die Verknotung positiv, im zweiten negativ, und ist aus einem Vergleiche von Fig. 23 mit Fig. 24 unmittelbar zu entnehmen, dass sich beide Verknotungen für alle denkbaren Werthe von a wie ein gegebenes Object zu dem Spiegelbilde seiner Rückseite verhalten.

2. Die Verknotung zweiter Ordnung (Taf. VII, Fig. 25, 26). — Dieselbe entsteht, sobald sich zwei gleichgebaute Knotenverbindungen erster Ordnung derart verschlingen, dass je zwei einander correspondirende Knoten derselben zusammen eine Verknotung erster Ordnung bilden, und an der Übergangsstelle von den Schlusstheilen des ersten in die Bögen des zweiten Knotenpaares gleichfalls keinerlei Überkreuzungen von, einander entsprechenden Elementen der beiden Knotenverbindungen stattfinden. Je nachdem die letzteren positiv oder negativ sind, wird man auch die Verknotung als positiv oder negativ bezeichnen und ihren jeweiligen Typus: T durch dasselbe Symbol characterisiren können, welches den, sie constituirenden Knotenverbindungen zugehört. Es repräsentirt also speciell die in Fig. 25 schematisch dargestellte positive Verknotung erster Ordnung eine solche vom Typus: $[(+)_a(+)_b]$, hingegen die in Fig. 26 veranschaulichte negative Verknotung erster Ordnung eine solche vom Typus: $[(-)_a(-)_b]$. — Verknotungen von den Typen:

$[(+)_a (-)_b]$ und $[(-)_a (+)_b]$ kommen bei den hier zu beschreibenden Gebilden nicht vor, und sind überdies jene Werthe, welche a und b gleichzeitig annehmen können, denselben Beschränkungen wie bei den früher betrachteten Knotenverbindungen erster Ordnung unterworfen, d. h. es ist b entweder gleich a oder gleich $a+1$.

3. Die Verknotung r^{ter} Ordnung (Taf. VIII, Fig. 27, Taf. IX, Fig. 28), welche sich in derselben Weise aus zwei gleichgebauten Knotenverbindungen $(r-1)^{\text{ter}}$ Ordnung zusammensetzt, wie die Verknotung zweiter Ordnung aus der Combination zweier Knotenverbindungen erster Ordnung hervorgeht. Es constituiren demnach je zwei einander entsprechende Knoten der beiden Knotenverbindungen $(r-1)^{\text{ter}}$ Ordnung auch hier mitsammen eine Verknotung erster Ordnung, und zeigen die Übergangsstellen von den Schlusstheilen des 1^{ten}, 2^{ten}, . . $(r-1)^{\text{ten}}$ Knotenpaares in die Bögen des 2^{ten}, 3^{ten}, . . r^{ten} Knotenpaares nirgends Überkreuzungen von, einander correspondirenden Elementen jener Knotenverbindungen. Das jeweilige Typensymbol der letzteren bestimmt zugleich den Typus der betreffenden Verknotung, so dass speciell die in Fig. 27 und 28 schematisch dargestellten Verknotungen, welche wir kurzweg als positive und negative Verknotung r^{ter} Ordnung bezeichnen, die Typengleichungen:

$$T = [(+)_{a_1} (+)_{a_2} \ldots (+)_{a_{r-1}} (+)_{a_r}],$$
$$T = [(-)_{a_1} (-)_{a_2} \ldots (-)_{a_{r-1}} (-)_{a_r}]$$

zu erhalten haben. — Analog wie bei den, durch Schnitte erster Art erzeugbaren Knotenverbindungen $(r-1)^{\text{ter}}$ Ordnung bleiben die $2(2^{r-1}-1)$ übrigen Typen:

$$[(+)_{a_1} (+)_{a_2} \ldots (+)_{a_{r-1}} (-)_{a_r}] \ldots [(-)_{a_1} (-)_{a_2} \ldots (-)_{a_{r-1}} (+)_{a_r}]$$

bei den hier vorkommenden Verknotungen gleichfalls unvertreten, und sind die jeweiligen Werthe von $a_2, a_3, \ldots a_{r-1}, a_r$ entweder insgesammt gleich a_1 oder theilweise oder insgesammt gleich a_1+1.

Nachdem hiemit die im Folgenden gebrauchten neuen Hilfsbegriffe ausreichend präcisirt erscheinen, muss behufs ihrer practischen Verwerthung noch hervorgehoben werden, dass die Verbindungen und Verknotungen in den sie enthaltenden

Gebilden anfänglich nicht isolirt sind, sondern jene Aufhängungen, aus welchen die betreffende Verbindung besteht, unmittelbar nach Vollendung des Schnittes theils innerhalb, theils ausserhalb der jeweiligen Verknotung auftreten. Da sich nun die Aufhängungen der ersten Kategorie längs einer der beiden, in einander verschlungenen Knotenverbindungen ohne Schwierigkeit von jedem Knoten auf den nächstfolgenden, mithin durch fortgesetztes Verschieben endlich auf den Schlusstheil des letzten Knotens übertragen lassen, kann man die Verknotungen von den Verbindungen stets so trennen, wie es in den Figuren 23—28 dargestellt ist. Dieselben veranschaulichen überdies die Thatsache, dass die mit einer gegebenen Verknotung combinirten Aufhängungen in allen hier vorkommenden Fällen zugleich mit dieser positiv oder negativ ausfallen. — Ihre Characteristik kann natürlich ebenfalls mittelst symbolischer Relationen gegeben werden, und wollen wir hiebei im Anschlusse an die zur Beschreibung einfacher Knoten eingeführten Typengleichungen den Typus: $\overline{T}$ einer gegebenen Reihe von Aufhängungen durch das Symbol: $[(+)_h]$ oder $[(-)_h]$ ausdrücken, je nachdem dieselben die in Fig. 21 oder die in Fig. 22 dargestellte Verbindung constituiren.

Dies vorausgeschickt, ziehen wir jetzt zunächst jene Gebilde in Betracht, welche aus einem unverdrehten, biegsamen Ringe entstehen, wenn man di Axe des schneidenden Instrumentes bei Ausführung des betreffenden Schnittes zweiter Art in einer ungeraden Anzahl (u) von Umläufen um ein gerades Vielfaches von $\pm 180°$ dreht.

Man erhält so immer je zwei ringförmig geschlossene Gebilde, deren aufeinanderfolgende Querschnitte, falls der zerschnittene Ring ein massiver war, congruente Kreissectoren von dem Centriwinkel $\frac{180°}{u}$ vorstellen. Ihre Scheitel liegen — unter λ die Länge der Mittellinie des ursprünglichen Ringes verstanden — in jedem der beiden Gebilde auf einer Linie von der Länge λu, und sind auch die Verdrehungszahlen: z_1, z_2 beider Gebilde stets einander gleich. [1]

[1] Dass hieraus noch keineswegs auf Congruenz beider Gebilde geschlossen werden darf, lässt sich am einfachsten durch Erörterung jenes

Auf diese Art erscheint das Ergebniss des Schnittes von Fall zu Fall eindeutig bestimmt, sobald ausser dem gemeinsamen Werthe: z von z_1 und z_2 noch die Typengleichungen der durch den Schnitt erzeugten Verbindungen und Verknotungen angegeben werden.

Specialfalles darthun, in welchem der Schnitt zweiter Art in einem einzigen Umlaufe ohne Drehung in sich selbst zurückkehrt und hiebei die Ebene der Mittellinie des Ringes senkrecht durchschneidet. Man kann dann die beiden durch den Schnitt erhaltenen Gebilde als Rotationskörper auffassen, welche, wenn wir dieser Betrachtung ein ebenes rechtwinkliges Coordinatensystem und einen, dessen Ordinatenaxe im Abstande $\frac{\lambda}{2\pi} = c$ vom Ursprunge berührenden Kreis von dem Radius: r des Ringquerschnittes zu Grunde legen, durch Drehung der oberen und unteren Hälfte dieses Kreises um die Abscissenaxe als Rotationsaxe entstehen. Infolge dessen gelten für die Volumina: V_1, V_2 des äusseren und inneren Rotationskörpers die Bestimmungsgleichungen

$$V_1 = \pi \int_0^{2r} (c + \sqrt{2rx - x^2})^2 dx - 2c^2 r\pi =$$

$$= \pi \left\{ \left| x(c^2 + rx - {}^1\!/_3 x^2) + c(x - r)\sqrt{2rx - x^2} + cr^2 \arcsin \frac{x-r}{r} \right|_0^{2r} - 2c^2 r \right\} = r^2\pi({}^1\!/_2\lambda + {}^4\!/_3 r),$$

$$V_2 = 2c^2 r\pi - \pi \int_0^{2r} (c - \sqrt{2rx - x^2})^2 dx =$$

$$= r^2\pi({}^1\!/_2\lambda - {}^4\!/_3 r),$$

d. h. es differiren die Volumina der beiden, durch jenen Schnitt erzeugten Gebilde um ${}^8\!/_3 r^3\pi$.

[1] Die hier mitgetheilten Experimente sind insoferne mühevoller durchzuführen als die correspondirenden Versuche mit Schnitten erster Art, weil einerseits die Entfernung der Aufhängungen aus den jeweiligen Verknotungen schon bei Verknotungen vierter Ordnung sehr zeitraubend ist, anderseits die einzelnen Theile der beiden Gebilde, um den Character ihrer Verknotung deutlich hervortreten zu lassen, in relativ kurzen Intervallen fixirt werden müssen. Da ferner die Breite der zu befestigenden Streifen behufs Entwirrung complicirterer Verknotungen bis auf circa 1^{mm} reducirt werden muss, ist eine dauerhafte Fixirung derselben nur mittelst sehr dünner Stahlnadeln möglich, wobei man am vortheilhaftesten eine sogenannte Insektenzange mit schmalen, schwachgebogenen Schenkeln verwendet.

Die eben gemachten Bemerkungen führen zu nachstehender schematischer Beschreibung meiner, durch Schnitte **zweiter Art** gewonnenen speciellen Resultate, wobei, wie im ersten Theile der vorliegenden Abhandlung, die jeweilige Umlaufszahl: u des Schnittes als Eintheilungsgrund dienen, und eine Sonderung der Drehungszahlen: t der Schnitte in zwei Gruppen vorgenommen werden mag, von welchen die erste ausschliesslich **negative**, die zweite nur **positive** Specialisirungen von t enthält:

$$(1)\ldots u = 1.$$

Gemeinsame diesbezügliche Verdrehungszahl: $z = 0$.

$t = -2$: Zwei knotenfreie Gebilde, $\overline{T} = [(\pm)_1]$; *
$t = -4$: $\overline{T} = [(+)_2]$;
$t = -6$: $\overline{T} = [(+)_3]$;
$t = -8$: $\overline{T} = [(+)_4]$.

$$(2)\qquad u = 3.$$

Gemeinsame diesbezügliche Verdrehungszahl: $z = +2$.

$t = -2$: Zwei knotenfreie Gebilde, $\overline{T} = [(+)_3]$;
$t = -4$: $T = [(+)_1]$, $\overline{T} = [(+)_3]$;
$t = -8$: $T = [(+)_1^2]$, $\overline{T} = [(+)_4]$;
$t = -10$: $T = [(+)_1\,(+)_2]$, $\overline{T} = [(+)_5]$;
$t = -14$: $T = [(+)_2^2]$, $\overline{T} = [(+)_7]$;
$t = -16$: $T = [(+)_2\,(+)_3]$, $\overline{T} = [(+)_8]$.

$$(3)\ldots u = 5.$$

Gemeinsame diesbezügliche Verdrehungszahl: $z = +4$.

$t = -2$: Zwei knotenfreie Gebilde, $\overline{T} = [(+)_5]$;
$t = -4$: $T = [(+)_2]$, $\overline{T} = [(+)_5]$;
$t = -6$: $T = [(+)_1\,(+)_2]$, $\overline{T} = [(+)_5]$;
$t = -8$: $T = [(+)_1^3]$, $\overline{T} = [(+)_5]$;
$t = -12$: $T = [(+)_1^4]$, $\overline{T} = [(+)_6]$;
$t = -14$: $T = [(+)_1^2\,(+)_2\,(+)_1]$, $\overline{T} = [(+)_7]$;
$t = -16$: $T = [\{(+)_1\,(+)_2\}^2]$, $\overline{T} = [(+)_8]$;
$t = -18$: $T = [(+)_1\,(+)_2^3]$, $\overline{T} = [(+)_9]$.

* Das doppelte Zeichen drückt hier die Thatsache aus, dass speciell die positive und negative Verbindung **erster Art** in einander transformirbar sind.

(4) . . . $u = 7$.

Gemeinsame diesbezügliche Verdrehungszahl: $z = +6$.

$t = -2$: Zwei knotenfreie Gebilde, $\bar{T} = [(+)_7]$;
$t = -4$: $T = [(+)_3]$, $\bar{T} = [(+)_7]$;
$t = -6$: $T = [(+)_2^2]$, $\bar{T} = [(+)_7]$;
$t = -8$: $T = [(+)_1 (+)_2^2]$, $\bar{T} = [(+)_7]$;
$t = -10$: $T = [(+)_1^2 (+)_2 (+)_1]$, $\bar{T} = [(+)_7]$;
$t = -12$: $T = [(+)_1^5]$, $\bar{T} = [(+)_7]$;
$t = -16$: $T = [(+)_1^6]$, $\bar{T} = [(+)_8]$;
$t = -18$: $T = [(+)_1^3 (+)_2 (+)_1^2]$, $\bar{T} = [(+)_9]$.

(5) . . . $u = 9$.

Gemeinsame diesbezügliche Verdrehungszahl: $z = +8$.

$t = -4$: $T = [(+)_4]$, $\bar{T} = [(+)_9]$;
$t = -8$: $T = [(+)_2^3]$, $\bar{T} = [(+)_9]$;
$t = -10$: $T = [(+)_1 (+)_2^3]$, $\bar{T} = [(+)_9]$;
$t = -14$: $T = [(+)_1^3 (+)_2 (+)_1^2]$, $\bar{T} = [(+)_9]$;
$t = -16$: $T = [(+)_1^7]$, $\bar{T} = [(+)_9]$.

(6) . . $u = 11$.

Gemeinsame diesbezügliche Verdrehungszahl: $z = +10$.

$t = -8$: $T = [(+)_2 (+)_3^2]$, $\bar{T} = [(+)_{11}]$;
$t = -10$: $T = [(+)_2^4]$, $\bar{T} = [(+)_{11}]$;
$t = -14$: $T = [\{(+)_1 (+)_2\}^3]$, $\bar{T} = [(+)_{11}]$;
$t = -16$: $T = [\{(+)_1^2 (+)_2\}^2 (+)_1]$, $\bar{T} = [(+)_{11}]$.

(7) . . $u = 13$.

Gemeinsame diesbezügliche Verdrehungszahl: $z = +12$.

$t = -8$: $T = [(+)_3^3]$, $\bar{T} = [(+)_{13}]$;
$t = -10$: $T = [\{(+)_2 (+)_3\}^2]$, $\bar{T} = [(+)_{13}]$;
$t = -14$: $T = [(+)_1 (+)_2^5]$, $\bar{T} = [(+)_{13}]$;
$t = -16$: $T = [(+)_1 \{(+)_2 (+)_1 (+)_2\}^2]$, $\bar{T} = [(+)_{13}]$.

Auf Grundlage dieser und der folgenden Ergebnisse:

$u = 3$, $t = +10$: $T = [(-)_1 (-)_2]$, $\bar{T} = [(-)_5]$;
$u = 5$, $t = +14$: $T = [(-)_1^2 (-)_2 (-)_1]$, $\bar{T} = [(-)_7]$;
$u = 9$, $t = +\ 8$: $T = [(-)_2^3]$, $\bar{T} = [(-)_9]$;
$u = 11$, $t = +12$: $T = [(-)_1 (-)_2^4]$, $\bar{T} = [(-)_{11}]$

sind wir berechtigt, die nachstehenden Gesetze vorläufig als mathematische Erfahrungssätze auszusprechen, welche — unter p, q beliebige positive, ganze Zahlen gedacht — für sämmtliche Specialisirungen der beiden Relationen:

$$u = 2p - 1, \; t = \pm 2q$$

ihre Giltigkeit behaupten:

I. Der jeweilige Werth von z ist bei negativer Axendrehung des schneidenden Instrumentes positiv, bei positiver Axendrehung desselben negativ und seinem absoluten Betrage nach stets gleich der um 1 verminderten Umlaufszahl des betreffenden Schnittes zweiter Art. Gleichzeitig mit z fallen dann auch die Verbindung und eventuelle Verknotung beider Gebilde positiv respective negativ aus.

II. Die Anzahl: h der durch den Schnitt bedingten Aufhängungen ist für $q < u$ constant gleich u, während sie für $q > u$ mit dem jeweiligen Werthe von q zusammenfällt.

III. Die durch den Schnitt entstandenen Gebilde sind nur für

$$u = 1, \; t = \pm 2q, \text{ beziehungsweise: } u = 2p - 1, \; t = \pm 2$$

unverknotet, in allen übrigen Fällen jedoch mit einer Verknotung versehen, und stimmt deren Typus ausnahmslos mit dem Typus jener Knotenverbindung überein, welche durch einen Schnitt erster Art von der Umlaufszahl: u und der Drehungszahl: $t = \pm q$ erhalten wird. Da sich nun bekanntlich bei derartigen Schnitten dieselbe Knotenverbindung auch dadurch herstellen lässt, dass man die Axe des schneidenden Instrumentes in q-Umläufen um: $\pm u \times 360°$ dreht, und q offenbar sowohl eine ungerade als eine gerade Zahl vorstellen kann, entspricht jeder durch Schnitte erster Art erzeugbaren Knotenverbindung eine Verknotung von congruentem Typus.

Um nunmehr auch den Zusammenhang dieser Inductionsschlüsse mit unseren früheren Erfahrungssätzen vollständig zu übersehen, vergleiche man die auf der Ringoberfläche für $u = 2p-1$, $t = q$ entstehende Grenzcurve des Schnittes erster Art mit jenen Grenzlinien, welche einem Schnitte zweiter Art von gleicher Umlaufszahl aber doppelt so grosser Drehungszahl zugehören. Hiebei zeigt sich, dass die letzteren aus je zwei identisch verlaufenden Grenzlinien der ersten Art bestehen, und jede Windung der einen Grenzlinie zwischen je zwei Windungen der anderen zu liegen kommt. Es kann also das, jenem Schnitte zweiter Art entsprechende Resultat auch erhalten werden, indem man durch das, mittelst des besprochenen Schnittes erster Art hergestellte Gebilde nochmals einen in sich selbst zurücklaufenden Schnitt führt, welcher die Centriwinkel sämmtlicher Querflächen desselben halbirt.

Hieraus geht hervor, dass zunächst die Inductionsschlüsse I und III als nothwendige Consequenzen früherer Erfahrungssätze aufzufassen sind. Bezüglich des Inductionsschlusses II ist dies allerdings nicht unmittelbar evident, lässt sich aber leicht auf Grundlage der bekannten Thatsache darthun, dass die Ordnungszahl der durch irgend einen Schnitt erster Art erhaltenen Knotenverbindung gefunden wird, wenn man den absoluten Betrag der kleineren der beiden Zahlen u und t um zwei Einheiten vermindert.

Ist nämlich erstens für den betreffenden Schnitt zweiter Art q kleiner als u, so besitzt jedes der beiden Gebilde eine Knotenverbindung $(q-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche von der Gesammtverdrehung des Gebildes: $(u-1)\times 360°$ den Betrag: $(q-1)\times 360°$ in Form jener $(q-1)$ irreductibeln Überkreuzungen in Anspruch nimmt, welche der aus den Umschlingungen des ersten Knotens heraustretende Schlusstheil des $(q-1)^{\text{ten}}$ Knotens mit den $(q-1)$ Knotenbögen bildet. Die übrigen $(u-q)$ Drehungen um je 360° treten in den knotenfreien Theilen beider Gebilde zwar ursprünglich auch als Überkreuzungen auf, lassen sich aber durch Streckung derselben direct in eben so viele Windungen um je 360° umsetzen, womit vorläufig das Auftreten von $(u-q)$ Aufhängungen erklärt ist. Da ferner der Schnitt an und für sich q—volle Windungen um die Mittellinie des Ringes ausführt, was — unabhängig von den jeweiligen Verdrehungen beider Gebilde — q weitere Aufhängungen des einen Gebildes auf dem anderen bedingt, so ergibt sich für $q < u$ in der That: $h = (u-q)+q = u$.

Ist dagegen zweitens q grösser als u, so absorbiren die zwei in allen derartigen Fällen entstehenden Knotenverbindungen $(u-2)^{ter}$ Ordnung mit je $(u-1)$ Knoten die gesammte Verdrehung beider Gebilde in Form von irreductibeln Überkreuzungen, und können daher nur die Windungen des Schnittes in der Gestalt von Aufhängungen zur Geltung gelangen, d. h. es muss $h = q$ sein.

Es erübrigt jetzt noch die Besprechung jener Schnitte zweiter Art, für welche u und t entweder gleichzeitig ungerade Zahlen vorstellen, oder u eine gerade, t eine ungerade Zahl repräsentirt.

Indem wir hiebei von der Betrachtung der Grenzlinien des jeweiligen Schnittes auf der Ringoberfläche ausgehen, ergibt sich, dass dieselben immer eine einzige in sich selbst zurückkehrende Curve von doppelter Krümmung constituiren, welche die Peripherie jedes Querschittes des Ringes in $2u$ gleiche Theile zerlegt und dessen Mittellinie ebenso oft umwindet, als t positive oder negative Einheiten besitzt. Es ist mithin jeder solche Schnitt zweiter Art einem Schnitte erster Art mit gleicher Drehungszahl aber doppelt so grosser Umlaufszahl äquivalent, und lassen sich alle hier in Betracht kommenden Gebilde direct auf Grundlage unserer ersten Reihe von Erfahrungssätzen beschreiben.

Auf diese Art können in unverdrehten, biegsamen Ringen ohne Ausführung von Querschnitten überhaupt nur einfache Verbindungen, Knotenverbindungen und Verknotungen erzeugt werden, wobei sich speciell bei den einfachen Verbindungen, den Knotenverbindungen nullter und Verknotungen erster Ordnung durch passende Wahl von u und t jeder denkbare specielle Typus realisiren lässt, während Knotenverbindungen und Verknotungen höherer Ordnungen nur in gewissen, durch meine früheren Entwicklungen vollständig präcisirten Typen herstellbar sind.

Hieran knüpft sich unmittelbar die Frage, wie oft irgend eine empirisch mögliche Verbindung beziehungsweise Verschlingung auftritt, sobald man für die Schnitte beider Kategorien alle denkbaren Specialisirungen von u und t in Betracht zieht? — Da dieselbe augenscheinlich in drei Unterfragen zerfällt, erscheint auch für deren Beantwortung eine dreifache Gliederung nothwendig, und suchen wir demgemäss vor Allem jene Zahl (N) zu ermitteln, welche besagt, durch wie viele Schnitte eine bestimmte einfache Verbindung, z. B. eine positive Verbindung a^{ter} Art, erzeugt werden kann.

Zu diesem Zwecke unterscheiden wir in Hinblick auf die Thatsache, dass Verbindungen lediglich bei Schnitten zweiter Art mit ungeraden Umlaufszahlen vorkommen, zwei Fälle, je nachdem a gerade oder ungerade ist.

Im ersten Falle entsteht die Verbindung a^{ter} Art kraft des Inductionsschlusses II so oft, als die halbe Drehungszahl des betreffenden Schnittes grösser als dessen Umlaufszahl ist und gleichzeitig den Werth a besitzt. Es wird mithin N hier gleich der durch eine bekannte Formel bestimmten Anzahl: Z jener Glieder der Zahlenreihe: $1, 2, 3, \ldots a-1$, welche in Bezug auf a relative Primzahlen vorstellen.

Im zweiten Falle tritt die Verbindung a^{ter} Art zunächst in jenen Z— Fällen auf, für welche $u=a$ ist, und q kleiner als a bleibt. Sie entsteht aber ausserdem für $u<a$ noch so oft, als in der zuvor erwähnten Zahlenreihe ungerade relative Primzahlen in Bezug auf a vorhanden sind. — Die Anzahl: Z' der letzteren ist leicht festzustellen, wenn man berücksichtigt, dass — unter $p_1, p_2, \ldots p_s$ die in a ohne Rest aufgehenden absoluten Primzahlen verstanden — für ungerade a ausser der Zahlenreihe $1, 2, 3, \ldots a-1$ auch jede der in ihr enthaltenen Zahlengruppen:

$$p_1,\ 2p_1,\ 3p_1 \ldots \left(\frac{a}{p_1}-1\right)p_1;$$

$$p_2,\ 2p_2,\ 3p_2 \ldots \left(\frac{a}{p_2}-1\right)p_2;$$

$$p_s,\ 2p_s,\ 3p_s, \ldots \left(\frac{a}{p_s}-1\right)p_s$$

aus gleich viel geraden und ungeraden Zahlen bestehen muss, indem ja die Division von a durch $p_1, p_2, \ldots p_s$ nur ungerade Zahlen liefern kann. Ist ferner irgend eines jener Multipla von

p_1, p_2, p_s, z. B. rp_m, zugleich ein Vielfaches anderer Primzahlen: p_i, p_n, ., so repräsentirt

$$a - rp_m = \left(\frac{a}{p_m} - r\right) p_m$$

ebenfalls ein solches und wird gerade oder ungerade sein, je nachdem r ungerade oder gerade ist. Da mithin bei der Reduction der beiden Zahlengruppen:

$$1,\ 3,\ 5, \ldots a-2;\ 2,\ 4,\ 6, \ldots a-1$$

auf die zu a relativen Primzahlen aus jeder Zahlengruppe gleich viel Zahlen entfallen, wird $Z' = {}^1/_2 Z$, respective in diesem Falle:

$$N = Z + Z' = {}^3/_2 Z.$$

Hienach ist N ausser für $a = 2$ nur dann eine ungerade Zahl, wenn sich a als Potenz einer absoluten Primzahl von der Form: $4p-1$ darstellen lässt, indem für:

$a = (4p-1)^\alpha$ die Gleichung: $Z = 2(2p-1)(4p-1)^{\alpha-1}$ besteht.

Diese Schlüsse gelten auch für negative Verbindungen und liefern speciell für $a = 1$*, 2, 3, ... 100 das Zahlenschema:

a	N	a	N	a	N	a	N	a	N	a	N	a	N	a	N	a	N	a	N
1	2	11	15	21	18	31	45	41	60	51	48	61	90	71	105	81	81	91	108
2	1	12	4	22	10	32	16	42	12	52	24	62	30	72	24	82	40	92	44
3	3	13	18	23	33	33	30	43	63	53	78	63	54	73	108	83	123	93	90
4	2	14	6	24	8	34	16	44	20	54	18	64	32	74	36	84	24	94	46
5	6	15	12	25	30	35	36	45	36	55	60	65	72	75	60	85	96	95	108
6	2	16	8	26	12	36	12	46	22	56	24	66	20	76	36	86	42	96	32
7	9	17	24	27	27	37	54	47	69	57	54	67	99	77	90	87	84	97	144
8	4	18	6	28	12	38	18	48	16	58	28	68	32	78	24	88	40	98	42
9	9	19	27	29	42	39	36	49	63	59	87	69	66	79	117	89	132	99	90
10	4	20	8	30	8	40	16	50	20	60	16	70	24	80	32	90	24	100	40

welches an und für sich wohl nur bei den Zahlen:

$$2,\ 4,\ 8,\ 16, \ldots;\ 3,\ 9,\ 27,\ 81, .$$

sofort einen gesetzlichen Zusammenhang zwischen a und N erkennen lässt. Da nämlich Z für $a = 2^\alpha$ gleich $2^{\alpha-1}$ wird, ferner

* Für $a = 1$ ist $N = 2$, weil die positive und negative Verbindung erster Art in einander transformirbar sind.

für $a = 3^\alpha$ mit: $2(3^{\alpha-1})$ coincidirt, ist für die erste Zahlenreihe $N = {}^1/_2 a$, dagegen für die zweite: $N = a$.

Wesentlich einfacher gestaltet sich die Erledigung der beiden übrigen Unterfragen, welche die Bestimmung von N für positive oder negative Knotenverbindungen, beziehungsweise Verknotungen fordern. — Da hiebei nur empirisch mögliche Verschlingungen in Betracht kommen, wird deren jeweiliger Typus: T stets als eine Specialisirung jener allgemeinen Typengleichungen auftreten, welche wir im ersten Theile der vorliegenden Abhandlung für $u = a$, $t = \pm b$, resp. $u = b$, $t = \pm a$ nach Umformung des Quotienten $\frac{b}{a}$ in:

$$k + \frac{\rho}{a} = k + \cfrac{1}{\rho_1 + \cfrac{1}{\rho_2 + \cdots + \cfrac{1}{\rho_s}}}$$

abgeleitet haben.[1] In Folge dessen ist in der vorgelegten Typengleichung die Windungszahl: w_1 des ersten Knotens stets gleich k, die Anzahl: n_1 der Knoten mit höheren Windungszahlen gleich $\rho-1$, und die Gesammtzahl aller Knoten: n gleich $a-1$, also:

$$a = n+1\,,\ b = (n+1)w_1 + (n_1+1),$$

mittelst welcher Daten sich über den jeweiligen Werth von N, wie folgt, entscheiden lässt:

1. Bildet T den Typus einer positiven oder negativen Knotenverbindung, so kann dieselbe für ungerade Werthe von a und b durch zwei verschiedene Schnitte erster Art, jedoch durch keinen einzigen Schnitt zweiter Art erzeugt werden, während in jenem Falle, wo entweder a oder b eine gerade Zahl vorstellt, speciell der Schnitt erster Art mit gerader Umlaufszahl einem Schnitte zweiter Art mit der halben Umlaufszahl und derselben Drehungszahl entspricht. Es ist also im ersten Falle N constant gleich 2, im zweiten dagegen gleich 3.

[1] S. h. Sitzb. d. k. Akad. d. Wissensch. LXXXV. Bd. pag. 925, 927 und LXXXVII. Bd. pag. 559—562.

Zu dieser Localisation tritt speciell bei Sinnesempfindungen noch eine zweite hinzu, indem sich an jede derselben die unmittelbare[1] Vorstellung zweier Orte, eines Ortes im Centrum und eines in der Peripherie knüpft.

Aber Vorstellungen von Orten involviren nicht nothwendig solche von Ausdehnung,[2] denn wir localisiren sowohl unser Bewusstsein als auch Töne und Worte, ohne hiebei Vorstellungen von Ausdehnung zu entwickeln.

Es geschieht dies erst auf Grundlage jener Sinnesempfindungen, welche wir in unser Tastfeld, beziehungsweise in unser Gesichtsfeld localisiren.[3]

---

[1] S. h. S. Stricker's 1877 im LXXVI. Bd. d. Sitzb. d. k. Akad. d. Wissensch. III. Abth. pag. 283—305 publicirte Abhandlung: „Untersuchungen über das Ortsbewusstsein und dessen Beziehungen zu der Raumvorstellung."

[2] Dieser Satz, welcher das Fundament aller meiner Betrachtungen über die Entwicklung der Raumvorstellung gebildet hat, ist gleichfalls in der eben citirten Abhandlung S. Stricker's enthalten.

[3] Die nun folgende Entwicklung des Begriffes: „Sinnenraum" verwerthet zum Theile Ideen, welche bereits F. Herbart (s. dessen 1824/5 zu Königsberg erschienenes Werk: „Psychologie als Wissenschaft") in den nachstehenden Stellen niedergelegt hat:

„Der sinnliche Weltraum ist nicht ursprünglich nur Einer; sondern Auge und Gefühl oder Getast haben unabhängig von einander Gelegenheit zur Production des Raumes gegeben; später ist Beides verschmolzen und erweitert. — Man kann nicht oft genug gegen das Vorurtheil warnen, als gebe es nur Einen Raum, den des sinnlichen Weltalls. Es gibt ganz und gar keinen Raum; aber es gibt Veranlassungen, dass Systeme von Vorstellungen ein Gewebe von Reproductionsgesetzen durch ihre Verschmelzung erzeugen, dessen Vorgestelltes nothwendig ein Räumliches — nämlich für den Vorstellenden — sein muss." (I. Theil, p. 360).

„Was aber die Art und Weise anlangt, wie das Reale in den Raum gesetzt wird, so ist merkwürdig, dass dazu allemal die sämmtlichen drei Dimensionen des Raumes erfordert werden. Dieses kann in den allerersten Auffassungen sinnlicher Gegenstände nicht gelegen haben, denn ursprünglich bieten sich dem Auge sowohl als dem Gefühl nur Flächen dar; und es ist kein Zweifel, dass anfangs die gefärbten und widerstehenden Flächen für real genommen werden ohne ein Bedürfniss der dritten Dimension, an welche noch gar nicht gedacht wird." (II. Theil. p. 349).

Da wir einerseits zwei, unsere Haut berührende Zirkelspitzen bei gegenseitiger Annäherung der letzteren unter 1 Mm. an jeder Hautstelle als eine einzige Spitze empfinden,[1] anderseits zwei leuchtende Punkte, deren scheinbare Entfernung weniger als 30 Secunden beträgt, nicht mehr von einander trennen können,[2] setzen sich unser Tast- und Gesichtsfeld aus Tast-, respective Gesichtsbezirken von endlicher Grösse zusammen. Die letzteren schliessen sich überdies nicht einmal lückenlos an einander, indem die Eintrittsstellen beider Sehnerven keine wie immer geartete Lichtempfindung vermitteln.[3]

Die weitere Frage, wie sich auf Grundlage von Tast- und Gesichtswahrnehmungen Vorstellungen von Ausdehnung entwickeln, findet eine Erledigung durch Verwerthung der Thatsache,[4] dass die Organe des Tast- und Gesichtssinnes mit Muskeln versehene bewegliche Endapparate besitzen, während die Rinde des Grosshirnes, als Sitz des Bewusstseins, unbeweglich unter der Schädeldecke ruht, und die peripheren Enden beider Hörnerven ebenfalls unverschiebbar im Felsenbeine liegen. Hieraus ergibt sich als Wahrscheinlichkeitsschluss, dass wir zu Vorstellungen von Ausdehnung durch Association von Tast-, respective Gesichtswahrnehmungen mit Bewegungsvorstellungen, also, da die Vorstellung jeder wie immer gearteten Bewegung des eigenen Leibes mit

---

„Unter welchen Bedingungen aber entstehen die verschiedenen Abstufungen des Verschmelzens einer jeden Vorstellung mit allen übrigen“? „Die ganz einfache Antwort ist: Wenn man das beschauende Auge und den tastenden Finger vorwärts und rückwärts bewegt.“ (II. Theil, pag. 126).

[1] Näheres hierüber findet man in W. Wundt's 1880 zu Leipzig erschienenen Werke: „Grundzüge der physiologischen Psychologie“, 2. Aufl., II. Bd., pag. 4—14.

[2] S. h. in erster Linie das 1867 zu Leipzig erschienene Werk von H. Helmholtz: „Handbuch der physiologischen Optik,“ p. 215—222.

[3] Auf dem Durchmesser dieses „blinden Flecks“ könnten nach den Messungen von H. Helmholtz (Handbuch der physiologischen Optik, pag. 213) eilf Vollmonde nebeneinander Platz finden.

[4] S. h. S. Stricker's 1879 zu Wien erschienene „Studien über das Bewusstsein“, pag. 45—49.

2. Characterisirt T eine positive oder negative Verknotung, so beschränkt sich die Frage nach den möglichen Erzeugungsweisen derselben von vornherein auf Schnitte zweiter Art mit ungeraden Umlaufszahlen und geraden Drehungszahlen. Es wird daher, sobald eine der beiden Grössen a, b durch 2 theilbar ist, nur ein einziger Schnitt die betreffende Verknotung hervorbringen, während bei ungeraden Werthen von a und b stets je zwei, durch die Gleichungen:

$$u = a, \ t = \pm 2b; \ u = b, \ t = \pm 2a$$

präcisirte Schnitte das gewünschte Resultat liefern.

Hiemit erscheint der jeweilige Werth von N für jede empirisch mögliche Verschlingung direct gegeben, und tritt nunmehr auch das eigenthümliche Verhältniss der Verbindungen zu den Verknotungen deutlich hervor. Da nämlich kraft des Inductionsschlusses II für beide zuvor angeführte Substitutionsreihen die Anzahl der, gleichzeitig mit der Verknotung entstehenden Aufhängungen dieselbe bleibt, combinirt sich jede Verknotung nur mit einer einzigen Verbindung, so dass der Zusammenhang zwischen den jeweiligen Typengleichungen für T und $\overline{T}$ gleichfalls als ein fixer anzusehen ist.

Diese Thatsache führt schliesslich auf die Vermuthung, dass jede Verknotung mit der ihr zugehörigen Verbindung — theoretisch genommen — Ein Ganzes ausmache, mithin die Sonderung beider Gebilde nicht sachlich, sondern nur formal durch die Forderung bedingt sei, die in Betracht gezogenen Erscheinungen möglichst einfach zu beschreiben.

Um hierüber Aufschluss zu gewinnen, recurriren wir auf die bekannten Wechselbeziehungen zwischen Knotenverbindungen und Verknotungen, gemäss welchen aus jeder Knotenverbindung mittelst eines Längsschnittes eine Verknotung von congruentem Typus herstellbar ist, folglich alle früher gefundenen Transformationsgleichungen für beide Verschlingungsformen gelten. Es werden also auch die der Substitutionsreihe:

$$u = 2p-1, \ t = \pm 2\{k(2p-1)+\rho\}, \text{ beziehungsweise: } u = 2p-1, \ t = \pm 2\rho$$

entsprechenden Verknotungen der $2(p-1)^{\text{ten}}$ und $(\rho-1)^{\text{ten}}$ Ordnung für $k = 0$ in einander transformirbar sein, wobei dann die Zahl der irreductibeln Überkreuzungen in jedem der verknoteten Gebilde von $2(p-1)$ auf $(\rho-1)$ sinkt, respective je $(2p-\rho-1)$ Überkreuzungen in ebenso viele Windungen um je 360° verwandelt werden können. Auf diese Art erfahren die der ersten Substitutionsreihe zugehörigen $\{k(2p-1)+\rho\}$ Aufhängungen für $k = 0$ einen Zuwachs um $(2p-\rho-1)$ Aufhängungen von gleichem Zeichen, und so entsteht die, für die zweite Substitutionsreihe characteristische Verbindung der $(2p-1)^{\text{ten}}$ Art. Dies beweist, dass an den Transformationen der Verknotungen die ihnen zugeordneten Verbindungen gleichfalls Antheil nehmen, womit die früher ausgesprochene Vermuthung ihre Bestätigung gefunden hat.

Der Zweck, den meine bisherigen Betrachtungen verfolgten, war ein vorwiegend praktischer; handelte es sich ja doch zunächst darum, die Gesetze einer unbegrenzten Reihe von theilweise sehr complicirten Erscheinungen nach Einführung passender Hilfsbegriffe vollständig und möglichst einfach wiederzugeben. Jetzt, nachdem diese Aufgabe gelöst ist, muss auch die theoretische Bedeutung der hier untersuchten Erscheinungen festgestellt, also die Frage erörtert werden, in welche Geometrie dieselben einzuordnen sind?

Als Ausgangspunkt mögen hiebei gewisse Thatsachen und Erwägungen physiologisch-psychologischer Natur dienen, welche ich, um die Grenzen der vorliegenden Abhandlung nicht zu überschreiten, hier selbstverständlicherweise nur so weit berühren werde, als es zu einer klaren Beantwortung der vorhin gestellten Frage nothwendig erscheint. Es ist daher auch selbstverständlich, dass ich den im Folgenden benützten Erwägungen dieser Art vorläufig keine allgemein bindende Beweiskraft zuerkenne, wohl aber die Anerkennung ihrer subjectiven Brauchbarkeit erwarten darf, weil sie mich bei der Wahl meiner Untersuchungsmethoden auf den richtigen Weg geleitet haben.

Jede psychische Function wird, wenn sie zum Bewusstsein gelangt, insoferne direct localisirt, als wir den Sitz des letzteren in das Haupt verlegen.

Muskelgefühlen verknüpft ist,[1] durch Verknüpfung jener Wahrnehmungen mit Gefühlen von Muskelbewegung gelangen.

Bei jeder solchen Association tritt die Bewegungsvorstellung selbst als ein Quale auf, welches uns durch keine andere sinnliche Qualität ersetzt werden kann,[2] und es erscheint demnach gerechtfertigt, einen specifischen[3] Muskelsinn anzunehmen.

Indem ferner die, jene Wahrnehmungen begleitenden Muskelbewegungen viele unter sich gleichartige, aber zeitlich getrennte motorische Innervationen erfordern, werden wir uns der ein- beziehungsweise mehrmaligen Wiederholung eines und desselben Willensactes bewusst und gelangen so nach Einführung von Zählworten zur Kenntniss verschiedener Anzahlen, welche von der Beschaffenheit des Gezählten völlig unabhängig erscheinen und sich daher auch in eine einzige Reihe, nämlich die Reihe der unbenannten ganzen Zahlen, einordnen lassen.[4]

Es entsteht jetzt noch die Frage, welche Merkmale die auf Grundlage jener Wahrnehmungen associirten Vorstellungen von Ausdehnung für die letztere liefern?

Sind die associirten Wahrnehmungen speciell Tastwahrnehmungen, so nöthigt uns schon das Bestreben, die beim Betasten gegebener Objecte gewonnenen Eindrücke und die Art, wie dieselben erlangt wurden, gesondert im Bewusstsein festzuhalten, einerseits zur Unterscheidung zwischen Flächen, Kanten und Spitzen, anderseits zur Aufstellung der Richtungsunterschiede: Rechts — Links, Vorwärts — Rückwärts,

---

1 S. h. S. Stricker's 1882 zu Wien erschienene „Studien über die Bewegungsvorstellungen", p. 11—13.

2 S. h. die eben citirte Brochure S. Stricker's, p. 35—38.

3 Derselbe unterrichtet uns ausserdem über den Druck, welchen wir auf ein gegebenes Object ausüben, ferner über den Grad der Anstrengung, welche mit dem Heben irgend einer Last verbunden ist. (S. h. z. B. M. Foster's, von N. Kleinenberg ins Deutsche übersetztes Lehrbuch der Physiologie, pag. 501—503).

4 S. h. in erster Linie Paul du Bois-Reymond's Betrachtungen über discrete Grössen, in dessen 1882 zu Tübingen erschienenem Werke: „Die allgemeine Functionentheorie", I. Theil, p. 16—20.

Aufwärts — Abwärts. Die Entwicklung der letzteren Vorstellungen vermittelt zugleich das Bewusstwerden einer räumlichen Anordnung[1] der getasteten Gegenstände und ihrer verschiedenen Entfernungen vom tastenden Subjecte, deren Vergleichung die ersten rohen[2] Massbestimmungen in, dem eigenen Körper und dessen Bewegungen — ich erinnere hier an das Schrittmass — entnommenen Masseinheiten begründet. — Parallel hiemit läuft die Einschaltung einfacher gebrochener Zahlen zwischen die Glieder der Reihe ganzer Zahlen.

Einen analogen Weg nimmt die Entwicklung der Vorstellungen von Ausdehnung bei den, mit Muskelgefühlen associirten Gesichtswahrnehmungen.

Auch diese erscheinen, wie Beobachtungen an glücklich operirten Blindgeborenen lehren,[3] anfänglich als Flächenbilder der wahrgenommenen Gegenstände, deren räumliche Vertiefung zunächst unter fortwährender Mitwirkung des Tastsinnes zu Stande kommt.[4] Infolge dessen liefert die räumliche Anordnung der Tastempfindungen die erste Directive für jene der Gesichtswahrnehmungen und wird in der Folge von den sichtbaren und erreichbaren auf die sichtbaren, aber unerreichbaren Gegenstände ausgedehnt.

Da wir ferner alle übrigen Sinnesempfindungen auf tastbare respective sichtbare Objecte beziehen, vereinigen sich die verschiedenen Vorstellungen von Ausdehnung zur Vorstellung eines alle Localisationen unserer Sinnesempfindungen in sich auf-

---

[1] Vergl. die 1879 zu Berlin im Druck erschienene Rede von H. Helmholtz: „Die Thatsachen in der Wahrnehmung“, pag. 20, 21.

[2] Indem ich dieses Attribut gebrauche, habe ich lediglich Menschen mit normalen Sinnen im Auge; für Blindgeborne mit ihrem ausserordentlich feinen Tastsinn wäre dasselbe jedenfalls unzulässig.

[3] S. h. z. B. die Berichte Cheselden's und Wardrop's (reproducirt in H. Helmholtz's Handbuch der physiologischen Optik, p. 587—592) unter Hinzuziehung des eingehenden Resume's über die Mittheilungen der genannten und anderer Ärzte in C. Stumpf's 1873 zu Leipzig erschienenen Werke: „Über den psychologischen Ursprung der Raumvorstellung“ pag. 289—293.

[4] Kinder pflegen in den ersten Stadien ihrer Entwicklung nach allen Gegenständen, welche sie sehen, zu greifen, selbst nach dem Monde.

nehmenden Sinnenraumes[1] als des Inbegriffes sämmtlicher Orte, in welche wir überhaupt Sinnesempfindungen localisiren können.

In diesem Raume finden wir Theile desselben durch sichtbare Flächen als Körper abgegrenzt; die Kanten und Spitzen der letzteren bilden sichtbare Linien und sichtbare Punkte, welche aber, weil unsere Gesichtsbezirke von endlicher Grösse sind, ebenso als räumliche Gebilde betrachtet werden müssen, wie die Körper selbst. Indem wir also die Eigenschaften sichtbarer Punkte, Linien und Flächen studiren, lernen wir zugleich Eigenschaften unseres Sinnenraumes kennen. Hiebei müssen wir, da die Art, wie wir unsere Sinnesempfindungen localisiren, als ein Merkmal unserer Organisation dieselbe bleibt, wo immer wir uns befinden mögen,[2] auch unserem Sinnenraume an allen Orten und nach allen Richtungen dieselbe Beschaffenheit zuschreiben und gehen demgemäss, indem wir jene Gebilde studiren, von dem Grundsatze aus, dass sich an allen Orten und nach allen Richtungen gleiche Constructionen vollziehen lassen.[3]

Auf diese Art entwickelt sich zunächst eine Geometrie der einfachsten, anschaulich ausführbaren Constructionen, auf welche ich deshalb nicht näher eingehe, weil Euclid's classische Bearbeitung derselben schon längst ein Gemeingut

---

[1] Nur auf diesen Raum können die bekannten Worte Kant's (Einleitung in die Kritik der reinen Vernunft) bezogen werden: „Lasset von Eurem Erfahrungsbegriffe eines Körpers Alles, was daran empirisch ist, nach und nach weg: die Farbe, die Härte oder Weiche, die Schwere, die Undurchdringlichkeit, so bleibt doch der Raum übrig, den er (welcher nun ganz verschwunden ist) einnahm, und den könnt Ihr nicht weglassen".

[2] Zur Erläuterung dieses Satzes bemerke ich, dass ich von der Existenz eines absoluten Raumes subjectiv überzeugt, zugleich aber der Ansicht bin, es liessen sich über die Natur desselben lediglich auf Grundlage der Thatsache Aufschlüsse gewinnen, dass speciell jene Orte des absoluten Raumes, welche unseren jeweiligen Sinnenraum constituiren, eine dreifach ausgedehnte, unbegrenzte und endliche Mannigfaltigkeit bilden.

[3] Dieser oberste Grundsatz jeder empirischen Geometrie ist zuerst von H. Grassmann (s. dessen 1844 zu Leipzig erschienene „Lineale Ausdehnungslehre", p. 35) ausgesprochen worden.

aller Mathematiker geworden ist. Aber die sogenannten Axiome dieser Geometrie bilden, insoweit sie sich auf unsere Raumvorstellung beziehen, nur eine Zusammenstellung jener unmittelbar anschaulichen Sätze, welche zu einer bequemen Beweisführung nothwendig und hinreichend sind; die der Vorstellung unseres Sinnenraumes möglicherweise specifisch eigenthümlichen Prädicate treten in jenen Axiomen keineswegs direct zu Tage.[1]

Ausserdem ist hervorzuheben, dass alle empirischen Massbestimmungen, welche mittelst der beiden elementaren Massstäbe dieser Geometrie, der geraden Linie und des ebenen Winkels, möglich werden, numerisch in ganzen und gebrochenen Zahlen ausdrückbar sind, denn infolge der endlichen Grösse unserer Gesichtsbezirke lässt sich weder die Theilung einer gegebenen Strecke, noch jene eines gegebenen Winkels beliebig weit fortsetzen. Allerdings werden die Grenzen, bis zu welchen wir hiebei vordringen können, mit der fortschreitenden Verbesserung unserer Microscope im Laufe der Zeit weiter hinausgeschoben werden, allein der Umstand, dass gegenwärtig noch keine definitive Grenze für die empirische Theilung jener geometrischen Massstäbe präcisirbar ist, erlaubt keineswegs den Schluss, dass eine solche Grenze überhaupt nicht existirt.[2]

Anders verhält es sich mit der Theilung der Zahlen selbst, indem wir nach Einführung gebrochener Zahlen jeder beliebigen Zahl eine kleinere gegenüberstellen können. In der Fortsetzung dieser Operation stossen wir auf keine wie immer geartete Schranke und schliessen hieraus inductiv auf die Existenz von unendlich kleinen Zahlen, d. h. Zahlen, die kleiner sind als jede noch so klein angenommene Zahl.

Dass nun derartige Zahlen überhaupt als Grössen auftreten können, erscheint darin begründet, dass in uns kraft den an die Spitze unserer physiologisch-psychologischen Erwägungen gestellten Thatsachen Vorstellungen von Orten ohne jede be-

---

1 Vergl. das 1877 zu Leipzig erschienene Werk B. Erdmann's: „Die Axiome der Geometrie," p. 34, 35.

2 Vergl. das 1882 zu Leipzig erschienene Werk von M. Pasch: „Vorlesungen über neuere Geometrie," p. 10 und 18.

stimmte Ausdehnung vorhanden sind. Sobald wir uns also einen Ort nicht mehr als Ort in unserem Sinnenraume, sondern als innere Gestaltung vorstellen, können wir demselben auch eine nach allen Richtungen unendlich kleine Ausdehnung zuschreiben,[1] d. h. ihn als idealen Punkt denken.

Diese Vorstellung darf dann gemäss unserer Auffassung der Bewegungsvorstellung als einer selbstständig bestehenden psychischen Funktion mit der letzteren combinirt werden und liefert so den Begriff der idealen Linie, in welcher jedes endliche Stück aus unendlich vielen, lückenlos aufeinander folgenden unendlich kleinen Elementen zusammengesetzt ist,[2] d. h. eine im mathematischen Sinne stetige Mannigfaltigkeit bildet. Um also die ideale Linie als messbare Grösse zu definiren, muss die Zahlenreihe aus einer Reihe discreter rationaler Zahlen durch Einschaltuug der Irrationalzahlen in eine stetig fortschreitende Reihe verwandelt werden.

Die ideale Linie erzeugt ihrerseits durch Bewegung die ideale Fläche,[3] und die Bewegung der letzteren schliesslich den idealen Körper als Theil des idealen Raumes, d. i. einer Mannigfaltigkeit idealer Punkte, welche sich von jedem derselben stetig nach allen Richtungen fortsetzt. Jede solche Mannigfaltigkeit besitzt zufolge ihrer Entstehungsweise im Endlichen dieselben Massverhältnisse wie im Unendlichkleinen; in jeder lassen sich ideale Linien und Flächen durch Gleichungen zwischen stetig veränderlichen Coordinaten analytisch präcisiren, und die Lehren der Infinitesimalrechnung mathematisch strenge verwerthen.

---

[1] Vergl. P. du Bois-Reymond's „Allgemeine Functionentheorie," I. Theil, p. 106—108.

[2] Ich verweise hier in erster Linie auf die scharfsinnigen Auseinandersetzungen P. du Bois-Reymond's über das Unendlichkleine und dessen Haupteigenschaften (s. das eben citirte Werk, I. Theil, p. 71—75).

[3] Unser Begriff der idealen Fläche entspricht hienach vollständig der Gauss'schen Auffassungsweise geometrischer Flächen „als Körper, deren eine Dimension verschwindet" (s. Gauss' Werke, IV. Bd. p. 344). Diese Auffassungsweise liegt bekanntlich auch den „Disquisitiones generales circa superficies curvas" (s. Gauss' Werke, IV. Bd. p. 219—258) zu Grunde.

Dagegen können in einer Mannigfaltigkeit, welche wir, wie unseren Sinnenraum, zunächst aus endlichen Elementen zusammensetzen, über die Art, wie diese Elemente sich aus hypothetischen unendlich kleinen Elementen aufbauen, die verschiedensten Annahmen logisch gleichberechtigt sein, d. h. die Massverhältnisse im Endlichen bestimmen hier nie eindeutig jene im Unendlichkleinen.[1] — In Folge dessen ist auch beispielsweise das analytische Gegenstück der anschaulich vorstellbaren Curve, wie F. Klein zuerst erkannt hat,[2] nicht die Function, sondern der Functionsstreifen.

Die vorliegenden Betrachtungen liefern ausserdem den Beweis, dass unser Sinnenraum und jene Welt innerer Gestaltungen, welche wir als idealen Raum bezeichnet haben, völlig unabhängig von einander bestehen,[3] also jeder Versuch, durch Discussion der möglichen Eigenschaften des idealen Raumes Beweismittel für die strenge Giltigkeit der Euclid'schen

---

[1] Vergl. die Worte B. Riemann's (Gesammelte Werke, p. 267): „Die Fragen über die Massverhältnisse des Raumes im Unmessbarkleinen gehören nicht zu den müssigen"... „Nun scheinen aber die empirischen Begriffe, in welchen die räumlichen Massbestimmungen gegründet sind, der Begriff des festen Körpers und des Lichtstrahles, im Unendlichkleinen ihre Giltigkeit zu verlieren, es ist also sehr wohl denkbar, dass die Massverhältnisse des Raumes im Unendlichkleinen den Voraussetzungen der Geometrie nicht gemäss sind, und diess würde man in der That annehmen müssen, sobald sich dadurch die Erscheinungen auf einfachere Weise erklären liessen."

[2] S. h. dessen wichtige, 1883 im XXII. Bd. der „Mathematischen Annalen" erschienene Abhandlung: „Über den allgemeinen Functionsbegriff und dessen Darstellung durch eine willkürliche Curve," p. 252, 253.

[3] Ich citire hier des Vergleiches wegen die Worte J. Baumann's (s. dessen 1868/69 zu Berlin erschienenes Werk: „Die Lehren von Raum, Zeit und Mathematik in der neueren Philosophie. I. Bd. p. 101): „Der Raum in mathematischer Hinsicht, rein als Vorstellung unseres Geistes gefasst, stellt sich, wenn er mit dem Raume draussen verglichen wird, bald als ein Wesen sui generis heraus; in ihm ist Allgemeines und Besonderes mit Einem Schlage gegeben; wir entwerfen ihn zugleich im Bilde und finden ihn in uns von selbst entworfen, wir durcheilen ihn und verfügen über ihn ohne Hinderniss; ganz anders finden wir es bei dem Raume, der ausser uns sich uns empfindbar macht; ein Schluss von einem auf den andern ist so durch die Sache selbst verboten."

Axiome in unserem Sinnenraume zu gewinnen, ohne Erfolg bleiben muss. — Da jedoch unsere Sehnerven im wachen Zustande fortwährend erregt sind, verknüpfen wir mit der Vorstellung des idealen Punktes zumeist unwillkürlich jene eines sichtbaren Punktes und verfallen, indem wir die erstere Vorstellung nur durch Abstraction von der letzteren wieder herstellen können, [1] leicht dem Irrthume, es sei der ideale Raum als Inbegriff aller idealen Punkte überhaupt nur eine Abstraction, nicht aber eine, vielleicht uns allein eigenthümliche, selbstständige Schöpfung unseres Geistes.

Die Unabhängigkeit eines Theiles unserer Ortsvorstellungen vom Sinnenraume involvirt ferner die Fähigkeit, ideale Punkte auch nach solchen Gesetzen einander zuzuordnen, welche mit Euclid's Axiomen in theilweisem Widerspruche stehen.

Auf diese Art resultiren zunächst die bekannten, in sich widerspruchsfreien Geometrien solcher Mannigfaltigkeiten idealer Punkte, in welchen, wie in dem, nach Euclid's Axiomen construirten idealen Raume, [2] jede Ortsbestimmung drei Grössenbestimmungen erfordert, dagegen das sogenannte Krümmungsmass in jedem idealen Punkte einen von Null verschiedenen (positiven oder negativen) Werth besitzt.

Hiebei führt die analytische Bestimmung der letzteren Grösse direct zu weiteren Verallgemeinerungen, indem sich zeigt, dass jede derartige Mannigfaltigkeit mittelst einer Gleichung zwischen vier, stetig veränderlichen Coordinaten aus einer

[1] Die Fähigkeit hiezu dürfte vielen Menschen vollständig fehlen. — So erklären beispielsweise Berkeley und Stumpf, es liesse sich keine Ausdehnung ohne Farbe denken, während Kant in seinem früher citirten Ausspruche andeutet, er könne sich auch Ausdehnung ohne jede Farbe vorstellen.— Sicherlich thun dies alle Blindgebornen, welche auch die räumlichen Verhältnisse ihrer nächsten Umgebung richtig beurtheilen.

[2] Diese specielle Mannigfaltigkeit hat, da im 18. Jahrhundert ausser Euclid's Geometrie noch keine andere in sich widerspruchsfreie Geometrie bekannt war, meiner Ansicht nach den unbewussten Ausgangspunkt der Kant'schen Definition des Raumes als einer a priori gegebenen und subjectiv nothwendigen Form aller äusseren Anschauung gebildet und sollte demnach auch bleibend mit dem Namen des grossen Philosophen verknüpft werden.

— im Riemann'schen Sinne — ebenen Mannigfaltigkeit ausgeschieden werden kann, welche für jede Ortsbestimmung vier Grössenbestimmungen nöthig macht und insoferne als vierfach ausgedehnt bezeichnet werden darf.

Durch consequente Fortsetzung dieser Untersuchungen muss daher schliesslich der Begriff einer n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit gewonnen werden, in welcher jede Ortsbestimmung n-Grössenbestimmungen erheischt, und deren Krümmungsmass:[1]

$$K = \frac{1}{\rho_1 \rho_2 \rho_3 \cdot \quad \cdot \rho_n}$$

speciell für $n = 2$ das bekannte Gauss'sche Krümmungsmass einer Fläche in einer „ebenen" dreidimensionalen Mannigfaltigkeit liefert.

Alle auf dem hier angedeuteten analytischen Wege eingeführten höheren Mannigfaltigkeiten sind mathematisch gleichberechtigte innere Gestaltungen; an ihre Grössenbegriffe ist demnach zunächst nur die Forderung ihrer Denkbarkeit zu stellen, ohne dass man hieraus auf die Anschaulichkeit, geschweige denn auf die Wirklichkeit der definirten Grössen schliessen dürfte.[2]

Hiemit erscheinen jene Betrachtungen abgeschlossen, welche die, bei der Feststellung des geometrischen Characters der vorliegenden Arbeit in Frage kommenden allgemeinen Gesichtspunkte klarzulegen hatten; sie lehren, dass die hier untersuchten Erscheinungen, da sie unserem Sinnenraume[3]

---

[1] Bezüglich der analytischen Darstellung dieser Hilfsgrösse verweise ich vor Allem auf die in den „Monatsberichten der Berliner-Akademie aus dem Jahre 1869" erschienene Abhandlung L. Kronecker's: „Über Systeme von Functionen mehrer Variabeln," p. 159—193 u. p. 688—698.

[2] Ich habe diesen Satz bereits vor zwei Jahren in meiner Brochüre über die Lösung des Knotenproblems (3. Auflage, p. 30) ausgesprochen und im Anschlusse hieran speciell jene vierfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit analytisch präcisirt, welche ich in meinen bisherigen Untersuchungen über unbegrenzte und endliche dreidimensionale Mannigfaltigkeiten als analytischen Hilfsbegriff verwendet habe.

[3] Ich sage deshalb immer „unser Sinnenraum", weil beispielsweise der sogenannte Richtsinn der Samojeden Nordsibiriens und gewisser, vorzugsweise Nachts — selbst bei dichtem Nebel — wandernder Zug-

angehören, nur in eine empirische Geometrie eingeordnet werden können, ohne mit der Lehre von den sogenannten höheren Mannigfaltigkeiten an und für sich in irgend eine Beziehung zu treten. Überdies hat der von mir gewählte Entwicklungsgang auch die Gründe ersichtlich gemacht, aus welchen ich bei der Untersuchung der verschiedenen Schnitte erster und zweiter Art, um von jeder denkbaren Hypothese über die Natur unseres Sinnenraumes unabhängig zu bleiben, weder die Hilfsmittel der analytischen Geometrie noch jene der Infinitesimalrechnung benützt habe.

Der weitere Fortschritt unserer Betrachtungen knüpft sich an folgende drei Thatsachen:

1. Nicht alle Orte möglicher Localisation von Sinnesempfindungen sind in einem gegebenen Zeitabschnitte zugleich Orte wirklicher Localisation.
2. Die Orte wirklicher Localisation können zu verschiedenen Zeiten mit verschiedenen Orten möglicher Localisation zusammenfallen.
3. Die Orte wirklicher Localisation können auch gegenseitige Verschiebungen erfahren.

Diese Thatsachen veranlassen uns, die Gegenstände der Aussenwelt, welchen wir zunächst die specifischen Qualitäten unserer durch sie erregten Sinnesempfindungen als Eigenschaften beilegen, aus Elementen zusammenzusetzen, welchen wir, wie den Elementen unseres Sinnenraumes, endliche Ausdehnung, aber ausserdem die Fähigkeit zuschreiben, einerseits in Bezug auf Orte möglicher Localisation, andererseits gegeneinander verschiebbar zu sein.

---

vögel Wahrnehmungen vermitteln mag, für welche uns jedes Verständniss fehlt. — Eine Zusammenstellung besonders merkwürdiger diesbezüglicher Beobachtungen findet man u. A. in dem 1881 zu Leipzig erschienenen Werke F. v. Homeyer's: „Die Wanderungen der Vögel mit Rücksicht auf die Züge der Säugethiere, Fische und Insekten“, pag. 300—306. Ausserdem mag hier noch auf die zuerst von J. Lubbock (s. die 1883 zu Leipzig erschienene deutsche Ausgabe seines Werkes über Ameisen, Bienen und Wespen, p. 153—186) constatirte Thatsache verwiesen werden, dass gewisse Insekten, z. B. *Lasius niger* und *Formica fusca*, eine grosse Empfindlichkeit für ultraviolette Strahlen besitzen.

Indem wir ferner die Ursachen für die gegenseitigen Ortsveränderungen der so characterisirten Elemente in diese selbst verlegen, statten wir sie mit der weiteren Fähigkeit aus, auf einander einzuwirken, wobei wir die, über die Gesetze ihrer Wechselwirkungen möglichen Hypothesen [1] in erster Linie durch die Forderung einschränken, dass aus den angenommenen Wirkungsgesetzen [2] und bestimmten räumlichen Positionen und Geschwindigkeiten der wirksamen Elemente alle jene Naturerscheinungen resultiren sollen, welche wir in Folge unserer Organisation als gesetzmässig verlaufende Veränderungen zu erfassen im Stande sind.

Um endlich durch die, unter derartigen Voraussetzungen erzielbaren Erklärungen von Naturerscheinungen unser Causalitätsbedürfniss zu befriedigen, erheben wir noch die

[1] Hiebei lassen sich Anziehungs- und Abstossungskräfte auch unter ein einziges Wirkungsgesetz subsumiren, und auf Grundlage desselben die qualitativen Verschiedenheiten der wirksamen Elemente aus ihren räumlichen Verschiedenheiten ableiten, wie ich dies speciell für das Wirkungsgesetz:

$$K = \frac{\varepsilon m m'}{r^2} \cos \frac{\alpha}{r}$$

in meiner Arbeit: „Grundzüge einer neuen Moleculartheorie unter Voraussetzung Einer Materie und Eines Kraftprincipes (s. die 1873—1875 erschienenen Jahrgänge von Schlömilch's Zeitschrift für Mathematik und Physik, p. 463—510, p. 299—323, p. 177—211) dargethan habe.

[2] Der in solcher Form eingeführte Begriff von Kraftwirkung besitzt zunächst nur den Character eines, für eine bestimmte Auffassungsweise von Naturerscheinungen unentbehrlichen Hilfsbegriffes, aus dessen vielseitiger Verwerthbarkeit an und für sich noch keineswegs auf die wirkliche Existenz irgend welcher Kräfte geschlossen werden darf. Übrigens hat bereits Newton (s. die von R. Cotes veranstaltete 1714, zu Amsterdam erschienene Ausgabe der „Philosophiae naturalis principia mathematica". p. 5) vor jedem derartigen Schlusse ausdrücklich gewarnt, indem er sagt: „Voces autem attractionis, impulsus vel propensionis cujuscunque in centrum indifferenter et pro se mutuo promiscue usurpo, has vires non physice sed mathematice tantum considerando. Unde caveat lector ne per hujusmodi voces cogitet me speciem vel modum actionis causamve aut rationem physicam alicubi definire, vel centris (quae sunt puncta mathematica) vires vere et physice tribuere, si forte aut centra trahere, aut vires centorum esse dixero."

Forderung, dass, wenn einmal irgend welchen Elementen: E_1 $E_2, \ldots E_a, \ldots E_b, \ldots$ gewisse Eigenschaftscomplexe: $[C]_1$, $[C]_2, \ldots$ $[C]_a, \ldots [C]_b, \ldots$ zugeordnet worden sind, jedes Element mit seinem Eigenschaftscomplexe zu jeder Zeit und in jedem Orte unseres Sinnenraumes unveränderlich verbunden bleiben muss.[1]

Würden nun zum Beispiele die Elemente E_a, E_b irgend einmal gleichzeitig denselben Ort in unserem Sinnenraume einnehmen, so würde für jedes der beiden Elemente ein Ort existiren, in welchem man dem einen Elemente entweder zugleich den Eigenschaftscomplex des anderen Elementes oder aber einen durch Verknüpfung beider Eigenschaftscomplexe: $[C]_a$, $[C]_b$ nach einem willkürlichen Gesetze gebildeten neuen Eigenschaftscomplex mit demselben Rechte beilegen könnte, wie den ihm ursprünglich zugeordneten. Um also unser Causalitätsbedürfniss zu befriedigen, müssen wir die gleichzeitig möglichen Bewegungen aller Elemente: $E_1, E_2, \ldots E_a, \ldots E_b,$ von vornherein insoferne einschränken, als dort, wo eines dieser Elemente sich gerade befindet, nie gleichzeitig ein zweites vorhanden sein kann.

Sobald wir jedoch räumliche Gebilde aus Elementen zusammensetzen, welchen wir — abgesehen von allen zwischen ihnen angenommenen Fernwirkungen — neben den Eigenschaften endlicher Ausdehnung und Beweglichkeit jene gegenseitiger Un-

---

[1] Von diesem Standpunkte aus ist es natürlich unstatthaft, dieselben Elemente mit einander durch Kräfte in Beziehung zu setzen, welche einmal als Functionen der jeweiligen Entfernungen jener Elemente. ein andermal als solche anderer veränderlicher Grössen definirt werden müssen, ohne dass es hiebei möglich wäre, durch Benützung von, zwischen den einzelnen Variabeln bestehenden Relationen die Functionen erster Art in jene zweiter Art zu transformiren. Daher lässt sich auch a priori nicht behaupten, dass die oben ausgesprochene Forderung noch mit der weiteren vereinbar ist, die betreffenden Erscheinungen möglichst einfach zu beschreiben, indem, wie ich in meiner Abhandlung: „Über eine Erweiterung der Giltigkeitsgrenzen einiger allgemeiner Sätze der Mechanik“ (Sitzb. der k. Akad. d. Wissensch. LXXXI. Bd., II. Abth. p. 399—414) hervorgehoben habe, die Erfüllung der letzteren Forderung speciell bei physikalisch-mechanischen Untersuchungen über organische Gebilde die Einführung von Kräften als Functionen der Geschwindigkeitsquadrate der bewegten Elemente und der Zeit nöthig machen kann.

durchdringlichkeit zuschreiben, entsteht das Bedürfniss nach einer empirischen Geometrie, welche auch der zuletzt genannten Eigenschaft Rechnung trägt, folglich weder eine Coincidenz von Linien mit Linien noch eine solche von Flächen mit Flächen im Sinne der Geometrie Euclid's zulässt.

Insoferne man nun jedem — im Sinne der gewöhnlichen Auffassungsweise — wirklich existirenden Körper die Eigenschaft der Undurchdringlichkeit zuerkennt, ist die hier geforderte Geometrie am besten als concrete Geometrie zu bezeichnen, deren Gebilde consequent concrete Linien, Flächen und Körper, nicht aber materielle Linien, Flächen und Körper genannt werden dürfen, weil ihren Elementen wohl, wie den Atomen der Materie, endliche Ausdehnung, Beweglichkeit und Undurchdringlichkeit, aber noch nicht die Fähigkeit irgend welcher gegenseitiger Fernwirkungen beigelegt wird.

Auf diese Art könnte jedes Gebilde der concreten Geometrie alle überhaupt denkbaren Formen durchlaufen, wenn nicht die gegenseitige Undurchdringlichkeit seiner Elemente vorhanden wäre, und es entsteht jetzt die Frage, inwieweit die genannte Eigenschaft den Formenkreis jedes gegebenen concreten Gebildes einschränkt?

Das einfachste concrete Gebilde ist nun die concrete, knotenfreie, geschlossene Linie, für welche sich jene Frage wie folgt, präcisiren lässt: Es soll ein vollständiger Überblick über sämmtliche, typisch von einander verschiedene Formen gegeben werden, welche eine solche Linie annehmen kann, ohne dass bei ihren Transformationen an irgend einer Stelle zwei freie Enden entstehen.

Die Erledigung des vorgelegten Problems ist in den vorangegangenen Untersuchungen enthalten, deren einfachste Resultate schon durch das Studium jener Erscheinungen zu gewinnen sind, welche ringförmig geschlossene, knotenfreie Bänder bei in sich selbst zurücklaufenden Längsschnitten zeigen.

Es schien mir daher auch zweckmässig, vor Allem die diesbezüglichen Sätze zu entwickeln und, da dieselben eine gemeinfassliche, graphische Interpretation gestatten, hierüber in einer selbstständigen, populären Schrift zu berichten.

Was nunmehr die Lösung selbst anbelangt, welche ich in der vorliegenden Arbeit für das erwähnte Problem geliefert habe, so tritt ihr eigenthümlicher Character am schärfsten hervor, wenn man eine analoge Aufgabe für eine als veränderlich gedachte Linie jenes idealen Raumes, welcher nach Euclid's Axiomen construirt wird, analytisch zu präcisiren sucht.

Es seien x, y, z, t vier reelle, auf dieselbe Masseinheit beziehbare, stetig veränderliche Grössen, ferner:

$$\Phi_1, \Phi_2, \ldots \Phi_m, \ldots \Phi_n;\ \Psi_1, \Psi_2, \ldots \Psi_m, \ldots \Psi_n$$

Functionen von x, y, z, dagegen:

$$f_1, f_2, \ldots f_m, \ldots f_n;\ F_1, F_2, \ldots F_m, \ldots F_n$$

einwerthige Functionen der einzigen Veränderlichen t, welche — unter $t_1, t_2, \ldots t_m, \ldots t_n$ lauter numerisch verschiedene Specialisirungen von t verstanden — mit einander durch die Relationen:

$$f_1(t) = \frac{(t-t_2)(t-t_3)\ldots(t-t_n)\,F_1(t)}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)\ldots(t_1-t_n)\,F_1(t_1)},$$

$$f_2(t) = \frac{(t-t_1)(t-t_3)\ldots(t-t_n)\,F_2(t)}{(t_2-t_1)(t_2-t_3)\ldots(t_2-t_n)\,F_2(t_2)},$$

$$f_m(t) = \frac{(t-t_1)\ldots(t-t_{m-1})(t-t_{m+1})\ldots(t-t_n)\,F_m(t)}{(t_m-t_1)\ldots(t_m-t_{m-1})(t_m-t_{m+1})\ldots(t_m-t_n)\,F_m(t_m)},$$

$$f_n(t) = \frac{(t-t_1)(t-t_2)\ldots(t-t_{n-1})\,F_n(t)}{(t_n-t_1)(t_n-t_2)\ldots(t_n-t_{n-1})\,F_n(t_n)}$$

zusammenhängen und für keinen einzigen in Betracht kommenden Werth von t unendlich gross werden.

Man kann hiebei $\Phi_1, \Phi_2, \ldots \Phi_n;\ \Psi_1, \Psi_2, \ldots \Psi_n$ so wählen, dass die n-Gleichungssysteme:

$$\Phi_1 = 0,\ \Psi_1 = 0;\ \Phi_2 = 0,\ \Psi_2 = 0;\ \ldots\ \Phi_n = 0,\ \Psi_n = 0$$

n-Raumcurven von vorgeschriebenen geometrischen Formen analytisch darstellen, und nach Einführung der, insgesammt von Null verschieden vorausgesetzten reellen Constanten:

$$P_1, P_2, \ldots P_m, \ldots P_n;\ Q_1, Q_2, \ldots Q_m, \ldots Q_n$$

die beiden Gleichungen:

$$P_1 f'_1 \Phi_1 + P_2 f'_2 \Phi_2 + . \quad . + P_m f'_m \Phi_m + . \quad . + P_n f'_n \Phi_n = 0,$$
$$Q_1 f'_1 \Psi_1 + Q_2 f'_2 \Psi_2 + . \quad . + Q_m f'_m \Psi_m + . \quad . + Q_n f'_n \Psi_n = 0$$

bilden, in welchen t jetzt als ein veränderlicher Parameter zu betrachten ist. Dieselben characterisiren augenscheinlich für jedes specielle System der Functionen: $f'_1, f'_2, \ldots f'_n$ und der Constanten: $P_1, P_2, . \; . P_n$; $Q_1, Q_2, . \; . Q_n$ eine veränderliche ideale Linie, welche, falls t stetig von 0 bis ∞ wächst, für $t = t_1, t_2, . \quad t_n$ successive die Gestalt der 1ten, 2ten, . . $n$ten vorgeschriebenen Raumcurve annimmt.

Allerdings kann ausserdem noch die Forderung gestellt werden, dass nicht nur jene Raumcurven, sondern auch alle Zwischenformen der betreffenden idealen Linie geschlossene Curven bilden sollen, aber selbst dann erscheint es unmöglich, eine bestimmte Reihe typisch von einander verschiedener Grundformen anzugeben, auf welche alle denkbaren Formen des untersuchten Gebildes eindeutig beziehbar wären.

Gemäss diesen Erwägungen besitzt also meine Lösung des ersten Problems der concreten Geometrie hauptsächlich insoferne einen eigenthümlichen Character, als sie nach Einführung einer bestimmten Reihe eindeutig präcisirter Formentypen unveränderliche mathematische Beziehungen zwischen veränderlichen Gebilden liefert, deren Variabilität durch keine wie immer geartete analytische Beschreibung vollständig wiedergegeben werden könnte.

Das zweite Problem der concreten Geometrie betrifft die Feststellung des characteristischen Formenkreises für den einfachsten geschlossenen Liniencomplex, also für jenes Liniensystem, welches durch Verschmelzung der vier Enden zweier concreter knotenfreier Linien erhalten wird.

Auch hier treten alle Grundtypen des fraglichen Formenkreises in gewissen Flächen auf, und zwar in jenen Gebilden, welche aus zwei, kreuzförmig mit einander verbundenen Streifen durch paarweise Vereinigung ihrer Enden und, längs den Mittellinien der ersteren in sich selbst zurückkehrende Schnitte entstehen, so dass meine hierüber publicirte Arbeit zugleich die vollständige Beschreibung der im einfachsten geschlossenen

Liniencomplexe erzeugbaren Doppelverbindungen, Verknüpfungen und Verschlingungen erster Ordnung liefert.

Der weitere Entwicklungsgang der Betrachtungen ist nunmehr klar vorgezeichnet; an die Untersuchung des einfachsten, aus zwei concreten Linien gebildeten geschlossenen Liniencomplexes wird jene der einfachsten, aus 3, 4, n concreten Linien zusammengesetzten geschlossenen Liniencomplexe anzureihen sein, und ist es in Anbetracht der kleinen Zahl von Gattungsbegriffen, welche die bisher von mir gelösten Probleme der concreten Geometrie erfordert haben, zu erwarten, dass sich endlich eine verhältnissmässig geringe Zahl oberster Classenbegriffe für alle typisch von einander verschiedenen Formen ergeben wird, welche concrete, geschlossene Liniencomplexe überhaupt durchlaufen können.

Auf Grundlage der, diesem neuen und ausgedehnten Forschungsgebiete entspringenden Resultate werden sich dann, da die concreten Linien gemäss ihrer Definitionsweise ebenso wie die übrigen Gebilde der concreten Geometrie aus dreidimensionalen Elementen bestehen, auch die typisch von einander verschiedenen Formenkreise geschlossener concreter Flächen und Körper vollständig präcisiren lassen, wodurch die Lehren der genannten Disciplin speciell für die Theorie der Functionen einer complexen Veränderlichen Bedeutung gewinnen werden. Denn alle jene geschlossenen Flächen, für deren Punkte — als Orte der unabhängigen complexen Variabeln aufgefasst — mehrwerthige Functionen der letzteren eindeutig bestimmt sind, dürfen als geschlossene concrete Flächen betrachtet werden, welche sich speciell aus unendlich kleinen dreidimensionalen Elementen aufbauen.[1]

[1] Ich bin zu dieser Auffassungsweise Riemann'scher Flächen, welche auch mit der, von F. Klein entwickelten physikalischen Auffassungsweise derselben (s. dessen 1882 zu Leipzig erschienene Schrift: „Über Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale") vereinbar ist, zuerst durch folgenden Ausspruch C. Neumann's (Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale, p. 163) geführt worden: Wir setzen ein für alle mal fest, dass zwischen zwei Theilen einer Riemann'schen Windungsfläche, welche einander in irgend einer Linie durchsetzen, längs dieser Linie hin kein Zusammenhang, also auch keine Nachbarschaft stattfinden soll.

Aber abgesehen davon, dass die concrete Geometrie für den eben erwähnten Zweig der reinen Analysis von Nutzen sein wird, kann sie ausserdem bei jenen physikalisch-mechanischen Untersuchungen eine Verwerthung finden, welche die möglichen Gleichgewichts- und Bewegungsfiguren geschlossener materieller Systeme von veränderlicher Gestalt betreffen. Da nämlich die gleichzeitig möglichen Bewegungen der Elemente solcher Systeme nicht nur durch ihre gegenseitige Undurchdringlichkeit sondern auch durch wechselseitige Attractions- und Repulsionskräfte eingeschränkt werden, ist es von vornherein evident, dass alle typisch von einander verschiedenen Formen solcher materieller Gebilde in jenen der correspondirenden concreten Gebilde enthalten sind, also die Kenntniss der letzteren zugleich die Directive für eine Systemisirung der ersteren liefert.

Auf diese Art kann die concrete Geometrie in ihrer weiteren Ausbildung auch bei vergleichenden Studien über die Formen organischer Gebilde eine Rolle spielen, insoweit hiebei das Bestreben zur Geltung kommt, die Fülle der empirisch gegebenen Formen auf eine möglichst geringe Zahl möglichst einfacher Grundtypen zu beziehen.

Zum Schlusse der vorliegenden Arbeit mögen jetzt noch in Kürze die Gründe dargelegt werden, aus welchen ich bei der Lösung meiner Probleme weder den auf die Umschlingungen zweier geschlossener Linien bezüglichen Satz von Gauss, noch die von B. Listing und G. Tait für Knoten gewählten Darstellungsweisen verwerthen konnte.

Was zunächst den Gauss'schen Satz [1] betrifft, so besagt derselbe bekanntlich, dass — unter x, y, z die Coordinaten irgend

---

[1] Dieser Satz, bekanntlich der einzige, in welchem Gauss das Gebiet der Topologie in Betracht gezogen hat, wird von seinem Entdecker mit folgenden historisch interessanten Bemerkungen (s. Gauss' Werke, V. Bd. pag. 605) eingeleitet: „Von der Geometria Situs, die Leibnitz ahnte, und in die nur einem Paar Geometern (Euler und Vandermonde) einen schwachen Blick zu thun vergönnt war, wissen und haben wir nach anderthalbhundert Jahren noch nicht viel mehr wie nichts. Eine Hauptaufgabe aus dem Grenzgebiete der Geometria Situs und der Geometria Magnitudinis wird die sein, die Umschlingungen zweier geschlossener oder unendlicher Linien zu zählen."

eines Punktes der einen, unter x', y', z' jene irgend eines Punktes der anderen geschlossenen Linie, unter Δ die Determinante

$$\begin{vmatrix} x'-x, & y'-y, & z'-z \\ dx, & dy, & dz, \\ dx', & dy', & dz' \end{vmatrix}$$

verstanden — das durch beide Linien ausgedehnte Doppelintegral:

$$\iint \frac{\Delta}{[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2]^{3/2}} = 4m\pi$$

ist, wenn m die Anzahl der Umschlingungen vorstellt.

Bringt man behufs praktischer Verwerthung des Integrales eine der beiden Curven durch Biegung in eine horizontale Ebene, so zeigt sich sofort, dass die zweite Curve, wenn man dieselbe von irgend einem ihrer Punkte aus vollständig durchläuft, die Ebene der ersten Curve bei manchen Umschlingungen von oben nach unten, bei anderen von unten nach oben durchsetzen kann. Es wird also wie schon C. Maxwell[1] erkannt, aber erst O. Boeddicker[2] eingehend nachgewiesen hat, nothwendig, zweierlei Arten von Umschlingungen zu unterscheiden, je nachdem dieselben infolge von Durchsetzungen erster Art oder von solchen zweiter Art entstehen, wonach der numerische Werth des genannten Doppelintegrales von Fall zu Fall durch das Product: $4\varepsilon\,(a-b)\pi$ bestimmt erscheint, in welchem a die Anzahl der Umschlingungen erster Art, b jene der Umschlingungen zweiter Art vorstellt, und ε gleich $+1$ oder -1 zu setzen ist, je nachdem $a-b$ positiv oder negativ ausfällt.

Hieraus folgt aber weiter, dass der numerische Werth jenes Doppelintegrales beispielsweise für eine Doppelverbindung zweier Curven vom Typus: $[(+)_a(+)_b]$, $(a>b)$ ebenso gross ausfällt, wie für eine einfache Verbindung $(a-b)^{\text{ter}}$ Art, mithin speciell für $a=b$ nicht nur für zwei unverschlungene Curven, sondern auch für zwei Curven in einer Doppelverbindung vom Typus: $[(+)_a^2]$ verschwindet.

---

[1] S. h. dessen 1873 zu Oxford erschienenes Werk: „A treatise on Electricity and Magnetism", vol. II. p. 40, 41.

[2] S. h. dessen 1876 zu Stuttgart erschienene Schrift: „Erweiterung der Gauss'schen Theorie der Verschlingungen mit Anwendungen in der Electrodynamik", p. 52—58.

Auf diese Art steht der Gauss'sche Satz zu dem, was ich als positive, respective negative Aufhängung einer concreten Linie auf einer zweiten bezeichne, im Allgemeinen in keiner eindeutigen Beziehung, und war daher auch eine Anwendung desselben auf die von mir behandelten Fragen a priori ausgeschlossen.

Um endlich noch B. Listing's[1] und G. Tait's[2] Darstellungsweisen[3] gegebener Knoten, soweit hiebei später von mir verwendete Knoten in Betracht gezogen wurden, ersichtlich zu machen und einen directen Vergleich mit meiner Darstellungsweise derselben Gebilde zu ermöglichen, habe ich die betreffenden Knoten auf Taf. X und XI der vorliegenden Arbeit einerseits in den von mir gewählten Gestalten, anderseits in den, ihnen von jenen Mathematikern gegebenen Formen abgebildet und drücke die zwischen den verschiedenen Verschlingungen

---

[1] S. h. dessen 1848 zu Göttingen erschienene „Vorstudien zur Topologie", p. 54—58.

S. h. ausser dessen Arbeit: „On knots" (Transactions of the royal society of Edinburgh, vol. XXVIII, part I, p. 145—190) noch eine Reihe kleinerer Aufsätze über dasselbe Thema in den „Proceedings of the royal society of Edinburgh", Session 1876—77 u. 1878—79.

[3] Listing hat auch zuerst versucht, Verschlingungen symbolisch zu characterisiren, wobei er speciell dem positiven Knoten erster Art, der Verknüpfung vom Typus: $[(-)_1\,(+)_1]$ und jener von dem Typus: $[(-)_1^2\,(+)_1^2]$ die „Complexions-Symbole":

$$\left\{\begin{matrix}2\delta^3\\3\lambda^2\end{matrix}\right\},\quad \left\{\begin{matrix}2\delta^4+\delta^2\\2\lambda^3+2\lambda^2\end{matrix}\right\},\quad \left\{\begin{matrix}\delta^5+3\delta^3\\\lambda^4+2\lambda^3+2\lambda^2\end{matrix}\right\}$$

zuordnete und die Thatsache, dass die in Fig. 52 und 54 dargestellten Verschlingungen in einander transformirbar sind, durch die symbolische Gleichung:

$$\left\{\begin{matrix}\delta^5+3\delta^3\\\lambda^4+2\lambda^3+2\lambda^2\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix}2\delta^4+2\delta^3\\\lambda^4+2\lambda^3+2\lambda^2\end{matrix}\right\}$$

ausdrückte. Tait bezieht dagegen seine Verschlingungen in erster Linie auf gewisse Buchstabenschemata, so z. B. die vier einfachsten Verschlingungen, nämlich die Knoten erster und zweiter Art und die beiden Verknüpfungen von den Typen: $[(+)_1^2]$ und $[(-)_1\,(+)_1]$ auf die Schemata:

$$\mathrm{A}C\mathrm{B}A\mathrm{C}B|\mathrm{A},\quad \mathrm{A}D\mathrm{B}E\mathrm{C}A\mathrm{D}B\mathrm{E}C|\mathrm{A},$$
$$\mathrm{A}C\mathrm{B}D\mathrm{C}A\mathrm{D}B|\mathrm{A},\quad \mathrm{A}C\mathrm{B}E\mathrm{C}A\mathrm{D}B\mathrm{E}D|\mathrm{A},$$

woraus hervorgeht, dass meine Typengleichungen weder mit Listing's noch mit Tait's Symbolik in irgend einem Zusammenhange stehen.

geltenden Beziehungen im Folgenden symbolisch aus, wobei ich die Namen: Listing und Tait der Kürze wegen auf deren Anfangsbuchstaben reducire und für die Worte: „transformirbar in" das Zeichen $\overline{\backsim}$ benütze.

Das Experiment lehrt nämlich, dass die nachstehenden Transformationen ausführbar sind:

$$\text{F. 29 (L., T.), F. 30 (T.)} \;\overline{\backsim}\; \text{F. 41,} \;\; (T = [(+)_1]);$$
$$\text{F. 31, 32 (T.)} \;\overline{\backsim}\; \text{F. 42,} \;\; (T = [(+)_1^2]);$$
$$\text{F. 33, 34, 35, 36 (L., T.)} \;\overline{\backsim}\; \text{F. 43,} \;\; (T = [(-)_1 (+)_1]);$$
$$\text{F. 37, 38 (T.)} \;\overline{\backsim}\; \text{F. 44,} \;\; (T = [(+)_2]);$$
$$\text{F. 39 (T.)} \;\overline{\backsim}\; \text{F. 45,} \;\; (T = [(+)_2 (+)_1]);$$
$$\text{F. 40 (T.)} \;\overline{\backsim}\; \text{F. 46,} \;\; (T = [(+)_1 (+)_2]);$$
$$\text{F. 47, 48 (T.)} \;\overline{\backsim}\; \text{F. 59,} \;\; (T = [(-)_1 (+)_1^2]);$$
$$\text{Fig. 49 (T.)} \;\overline{\backsim}\; \text{F. 60,} \;\; (T = [(+)_2 (-)_1]);$$
$$\text{F. 50, 51 (T.)} \;\overline{\backsim}\; \text{F. 61,} \;\; (T = [(-)_1 (+)_1 (-)_1]);$$
$$\text{F. 52, 53, 54 (L., T.)} \;\overline{\backsim}\; \text{F. 62,} \;\; (T = [(-)_1^2 (+)_1^2]);$$
$$\text{F. 55, 56 (T.)} \;\overline{\backsim}\; \text{F. 63,} \;\; (T = [(+)_1^2]);$$
$$\text{F. 57, 58 (T.)} \;\overline{\backsim}\; \text{F. 64,} \;\; (T = [(+)_1 (+)_2]).$$

In diesem Schema, welches alle von Listing graphisch dargestellten Knoten und fast die Hälfte sämmtlicher von Tait abgebildeter Knoten enthält, repräsentiren F. 41 und 44 speciell die positiven Knoten erster und zweiter Art, Fig. 42, 43, 45, 46, 60 Verknüpfungen erster Ordnung, Fig. 59, 61 solche zweiter Ordnung, F. 62 eine Verknüpfung dritter Ordnung, endlich Fig. 63, 64 Knotenverbindungen erster Ordnung, und dürfte wohl schon eine oberflächliche Vergleichung der in einander transformirbaren Figuren genügen, um die grössere Einfachheit meiner Knotenformen gegenüber jenen von Listing und Tait erkennen zu lassen.

Eine Verwendung der letzteren Knotenformen in meinen bisherigen Arbeiten auf dem Gebiete der concreten Geometrie wäre daher mit der, vom wissenschaftlichen Standpunkte nothwendigen Forderung unvereinbar gewesen, die in Betracht gezogenen Erscheinungen nicht nur vollständig, sondern auch möglichst einfach zu beschreiben.

Fig. 21.

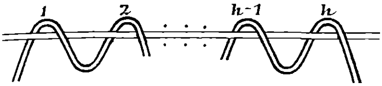


Fig. 22.

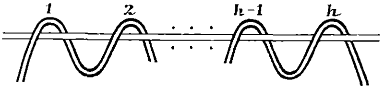


Fig. 23.

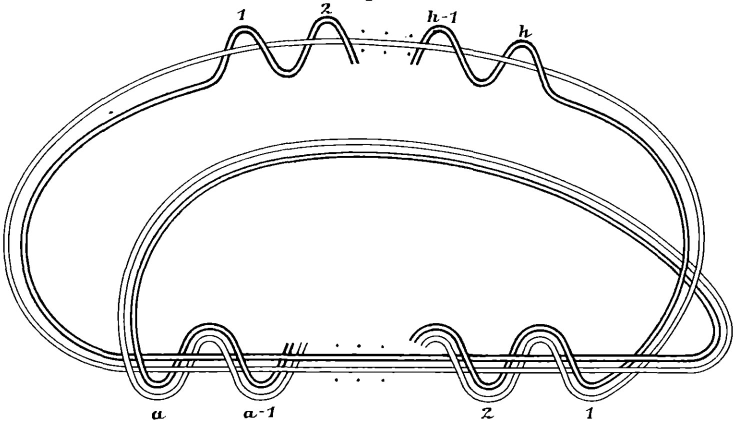


Fig. 24.

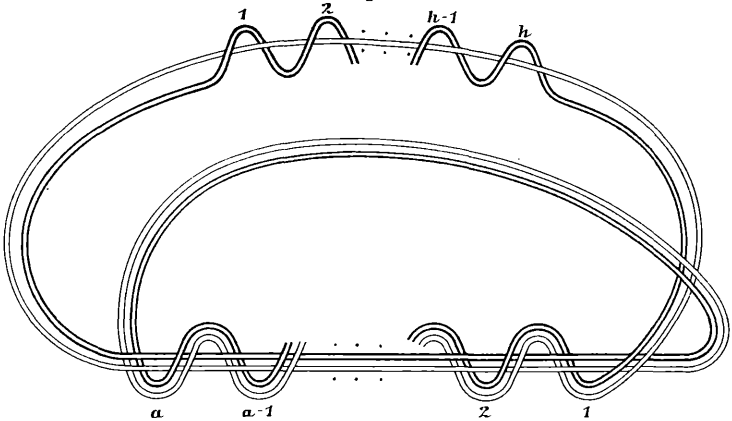


Fig. 25.

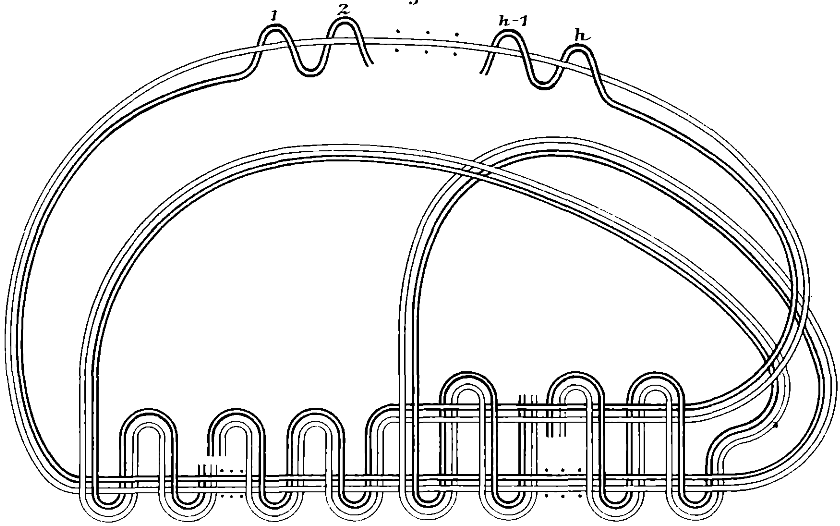
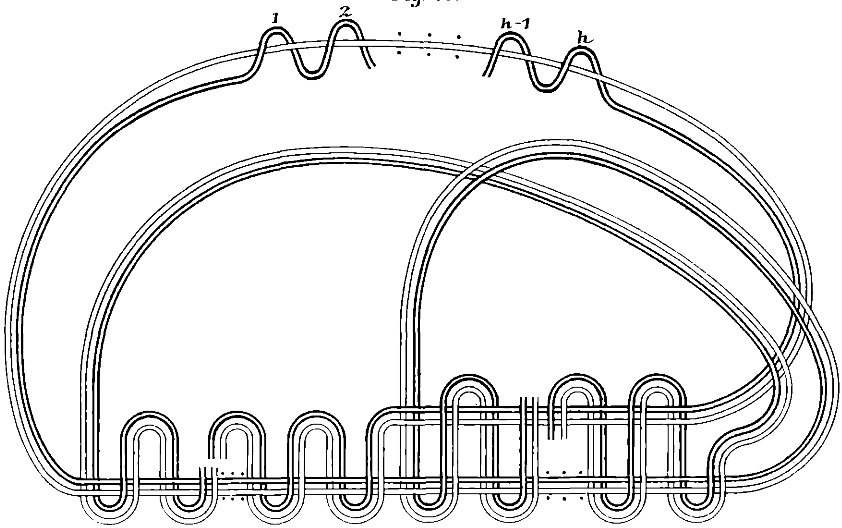


Fig. 26.



Autor del. F. Hesse lith. K.k. Hof- u. Staatsdruckerei.

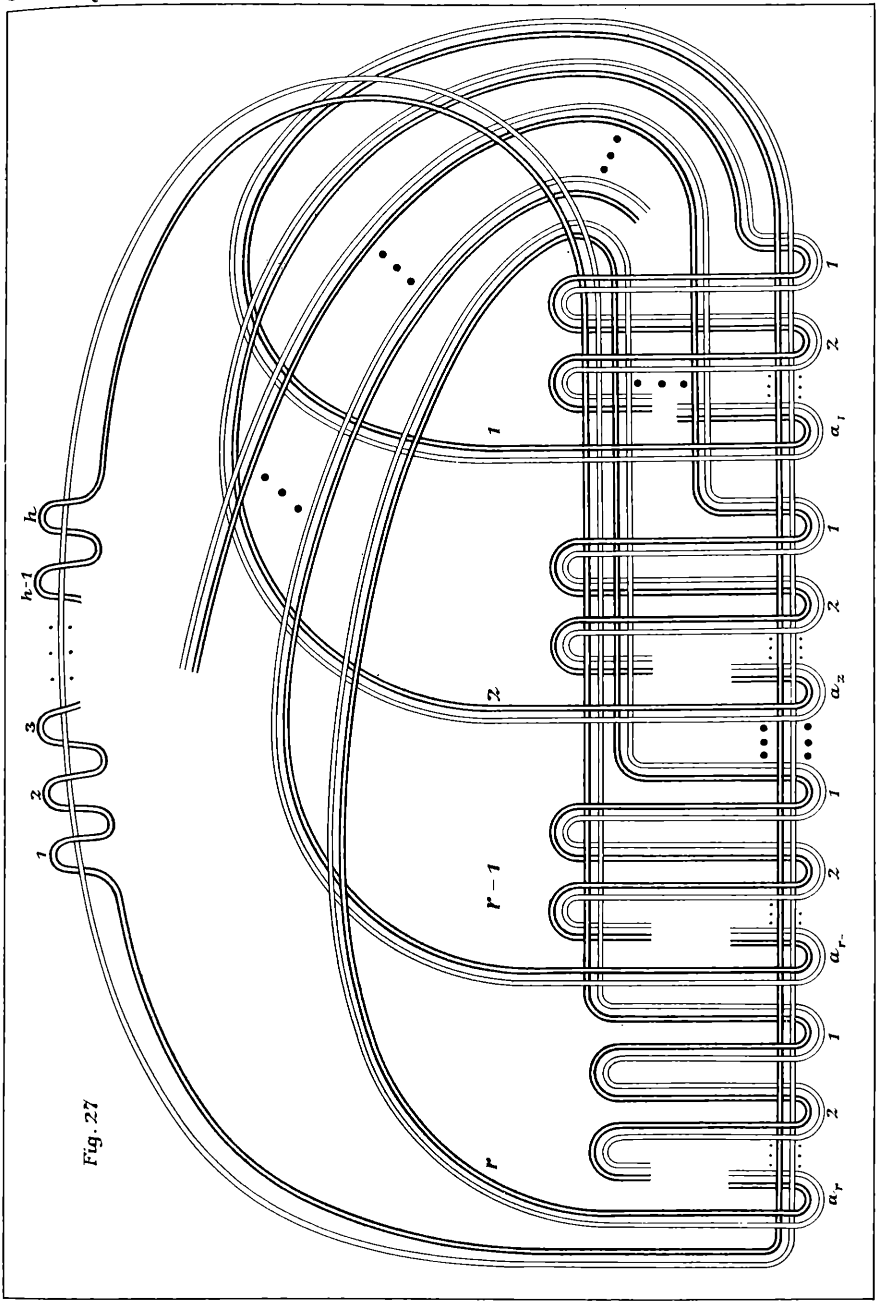


Fig. 27

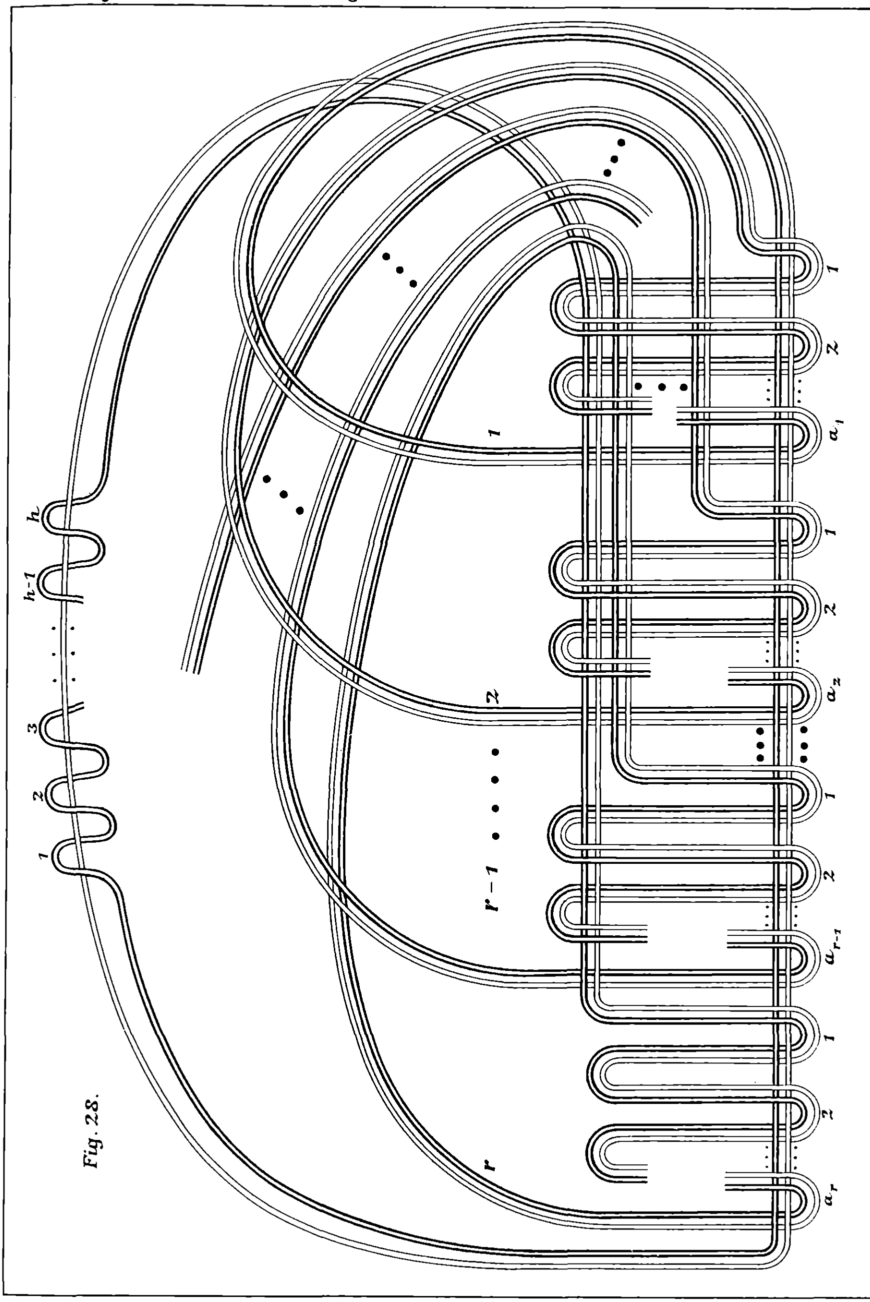


Fig. 28.

Autor del. F. Hesse lith. K.k. Hof- u. Staatsdruckerei.

Fig. 29.

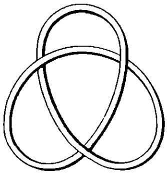



Fig. 30.

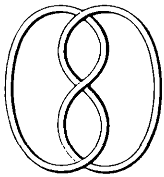



Fig. 31.

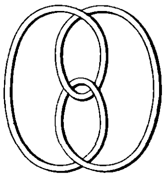



Fig. 32.

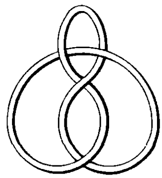



Fig. 33.

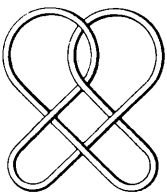



Fig. 34.

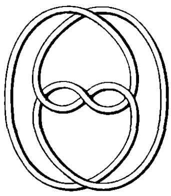



Fig. 35.

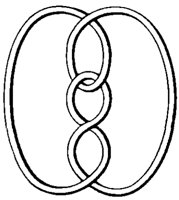



Fig. 36.

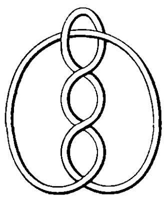



Fig. 37.

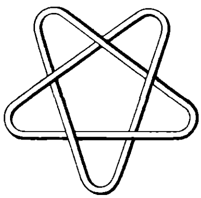



Fig. 38.

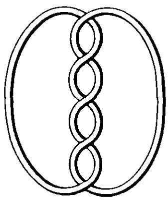



Fig. 39.

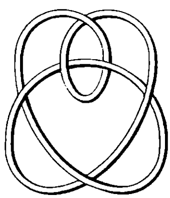



Fig. 40.

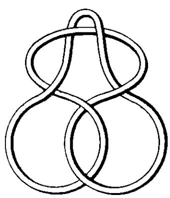



Fig. 41.

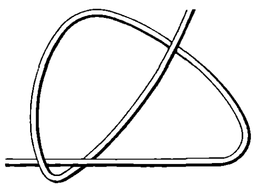



Fig. 42.

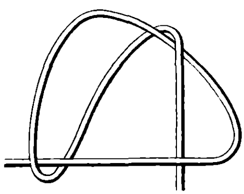



Fig. 43.

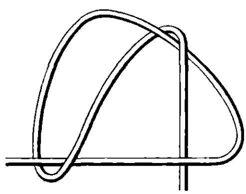



Fig. 44.

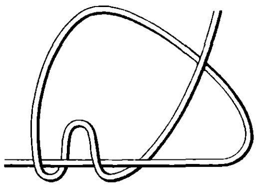



Fig. 45.

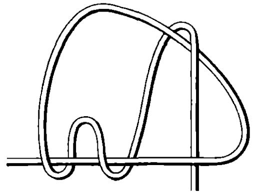
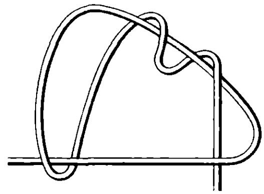



Fig. 46.


Autor del. F. Hesse lith. K.k. Hof- u. Staatsdruckerei.

Fig. 47.

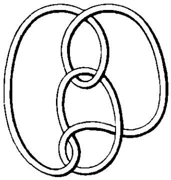


Fig. 48.

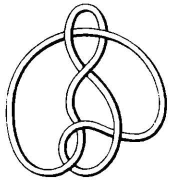


Fig. 49.

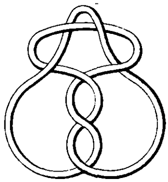


Fig. 50.

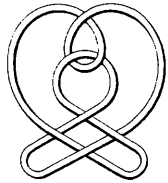


Fig. 51.

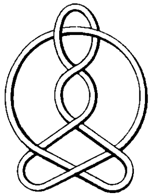


Fig. 52.

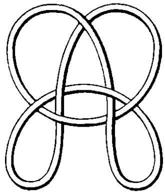


Fig. 53.

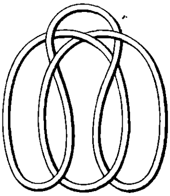
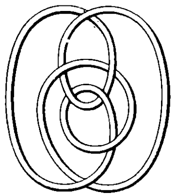


Fig. 54.



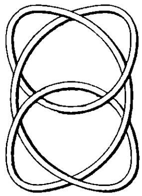


Fig. 56.

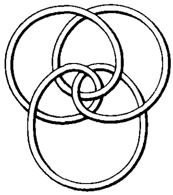


Fig. 57.

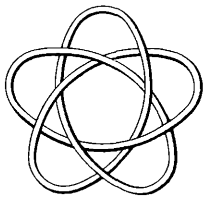


Fig. 58.

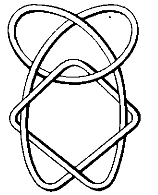


Fig. 59.

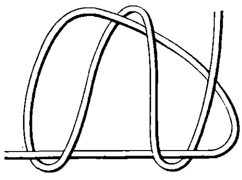


Fig. 60.

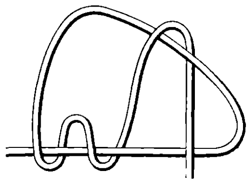


Fig. 61.

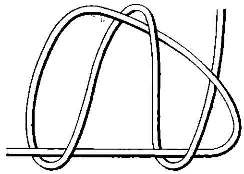


Fig. 62.

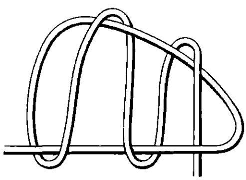


Fig. 63.

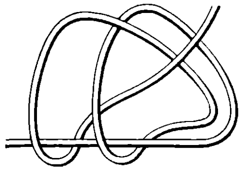
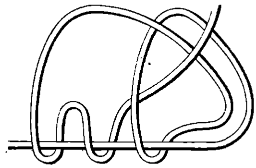


Fig. 64.



Autor del. F. Hesse lith. K.k. Hof- u. Staatsdruckerei.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1883

Band/Volume: 88_2

Autor(en)/Author(s): Simony Oskar

Artikel/Article: Über eine Reihe neuer mathematischer Erfahrungssätze. 939-974