Über die Bessel'schen Functionen.

Von Leopold Gegenbauer.

(Vorgelegt in der Sitzung am 11. October 1883.)

In den folgenden Zeilen wird zunächst eine kurze Mittheilung über eine Classe von Entwicklungen nach Bessel'schen Functionen erster Art gemacht, von welcher bisher nur einzelne specielle Fälle von O. Schlömilch und E. Beltrami behandelt wurden; sodann werden mehrere bestimmte Integrale ausgewerthet und einige Relationen zwischen bestimmten Integralen abgeleitet, in welchen bekannte Formeln aus der Theorie der symmetrischen Potentialfunctionen, auf welche H. Weber und E. Beltrami aufmerksam gemacht haben, als specielle Fälle enthalten sind.

Bedenkt man, dass:

$$\cos x = \sqrt{\frac{\pi x}{2}}\, J^{-\frac{1}{2}}(x)$$

$$\sin x = \sqrt{\frac{\pi x}{2}}\, J^{\frac{1}{2}}(x)$$

ist, wo $J^{\mu}(x)$ die bekannte Bessel'sche Function erster Art bezeichnet, so sieht man, dass die Fourier'schen Reihen:

$$f(x) = \sum_{\lambda} A_{\lambda} \cos \lambda x$$

$$\varphi(x) = \sum_{\lambda} B_{\lambda} \sin \lambda x$$

wo λ die Reihe der ganzen positiven Zahlen durchläuft, falls dieselben als Entwicklungen nach Kreisfunctionen, welche nach den

Vielfachen des Argumentes fortschreiten, aufgefasst werden, als specielle Fälle der allgemeinen Entwicklungsformen:

$$f(x) = \sum_{\lambda} A_{\lambda}\, x^{-\mu} J^{\mu}(\lambda x)$$

$$\varphi(x) = \sum_{\lambda} B_{\lambda}\, x^{-\mu} J^{\mu+1}(\lambda x)$$

wo μ irgend eine reelle Zahl ist und λ die Reihe der ganzen positiven Zahlen durchläuft, angesehen werden können. Den speciellen Fall $\mu = o$ dieser beiden Entwicklungsformen hat Herr O. Schlömilch in seiner Abhandlung: „Über die Bessel'sche Function" (Zeitschrift für Mathematik und Physik, II. Jahrg., pag. 137 ff.) mitgetheilt und daselbst auch die Coëfficienten dieser speciellen Entwicklungsformen durch Doppelintegrale ausgedrückt.

Wenn man berücksichtigt, dass die Reihe der ganzen positiven Zahlen mit der Reihe der positiven Wurzeln der transcendenten Gleichung:

$$\sin \pi z = 0$$

übereinstimmt, so sieht man, dass die angeführten Fourier'schen Reihen auch Entwicklungen nach Kreisfunctionen sind, deren Argumente alle reellen positiven Wurzeln einer bestimmten transcendenten Gleichung durchlaufen. Bei dieser Auffassung ergeben sich zunächst als Verallgemeinerungen der Fourier'schen Reihen im Gebiete der Entwicklungen nach Bessel'schen Functionen erster Art die Reihen:

$$f(x) = \sum A_{\lambda}\, x^{-\mu} J^{\mu}(\rho_{\lambda} x)$$

wo die Grössen ρ_{λ} die verschiedenen reellen positiven Wurzeln einer der beiden transcendenten Gleichungen:

$$(ax)^{-\mu} J^{\mu}(ax) = o$$

$$[(ax)^{-\mu} J^{\mu}(ax)]' = o$$

sind.

Ein specieller Fall dieser Entwicklungsformen, nämlich der Fall $\mu = 0$, findet sich schon in Fourier's „Théorie analytique de la chaleur". Die allgemeine Form wurde von Hermann Hankel in seiner Abhandlung: „Die Fourier'schen Reihen und Integrale für Cylinderfunctionen" (Mathem. Annalen, VIII. Bd., pag. 471 ff.), L. Schläfli in der Arbeit: „Über die Convergenz der Entwicklung einer arbiträren Function $f(x)$ nach den Bessel'schen Functionen $\overset{a}{J}(\beta_1 x)$, $\overset{a}{J}(\beta_2 x)$,. ., wo $\beta_1, \beta_2, \beta_3$,. die positiven Wurzeln der Gleichung $\overset{a}{J}(\beta) = o$ vorstellen" (Mathematische Annalen, X. Bd., p. 137 ff.) und in neuester Zeit in besonders eingehender Weise von Ulisse Dini in seinem vortrefflichen Werke: „Serie di Fourier e altre rappresentazioni analitiche delle funzioni di una variabile reale" (Pisa 1880) untersucht. Herr Ulisse Dini hat auch die allgemeinere Entwicklungsform, welche man erhält, wenn man für die Grössen ρ_λ die reellen positiven Wurzeln der transcendenten Gleichung:

$$ax\left[(ax)^{-\mu} J^{\mu}(ax)\right]' - h(ax)^{-\mu} J^{\mu}(ax) = o$$

nimmt, in dem oben erwähnten Werke ausführlich behandelt.

Die Coëfficienten dieser Entwicklungsformen sind durch einfache Integrale ausdrückbar.

Die von Herrn O. Schlömilch aufgestellten Entwicklungsformen können nun ebenfalls unter dem eben auseinandergesetzten Gesichtspunkte betrachtet werden, und bilden dann specielle Fälle einer allgemeinen Classe von Entwicklungen nach Bessel'schen Functionen erster Art, die nun kurz besprochen werden soll.

Die von O. Schlömilch angegebenen Entwicklungen haben nämlich folgende Gestalt:

$$f(x) = \sum_{\lambda} A_\lambda J^0(\rho_\lambda x)$$

$$\varphi(x) = \sum_{\lambda} B_\lambda J^1(\rho_\lambda x)$$

wo die die reellen positiven Wurzeln der transcendenten Gleichung:

$$(\pi z)^{\frac{1}{2}} J^{\frac{1}{2}}(\pi z) = 0$$

sind. Verallgemeinerungen dieser Reihen sind demnach die Entwicklungen:

$$f(x) = \sum_{\lambda} A_{\lambda} x^{-(\mu-p)} J^{\mu}(\rho_{\lambda} x)$$

wo p eine ganze positive Zahl ist und die Grössen ρ_{λ} die verschiedenen reellen positiven Wurzeln der transcendenten Gleichung:

1) $$x^{-(\mu+\nu)}\{m J^{\mu+\nu}(ax) + nx[J^{\mu+\nu}(ax)]'\} = 0 \quad [\nu \gtrless 0]$$

sind, wo a, m, n reelle Constanten bezeichnen.

Ausser den schon erwähnten speciellen Fällen dieser Entwicklungsformen wurden bisher nur die Fälle:

$$\mu = \frac{1}{2},\ p = 1,\ \nu = -\frac{1}{2},\ n = 0$$

$$\mu = \frac{1}{2},\ p = 1,\ \nu = -\frac{1}{2},\ m = 0$$

$$\mu = -\frac{1}{2},\ p = 0,\ \nu = \frac{1}{2},\ n = 0$$

$$\mu = -\frac{1}{2},\ p = 0,\ \nu = \frac{1}{2},\ m = 0$$

welche trigonometrische Reihen liefern, deren Terme nach den reellen positiven Wurzeln einer der beiden transcendenten Gleichungen:

$$J^{0}(ax) = 0$$
$$J^{1}(ax) = 0$$

fortschreiten, von Herrn Eugenio Beltrami behandelt. („Intorno ad un teorema di Abel e ad alcune sue applicazioni.“ Nota del M. E. prof. E. Beltrami, letta al R. Istituto Lombardo nell' adunanza del 20 maggio 1880. „Intorno ad alcune serie trigonometriche.“ Nota del M. E. prof. E. Beltrami, letta al R. Istituto Lombardo nell' adunanza del 3 giugno 1880. Rendiconti del R. Istituto Lombardo. Serie II, Vol. XIII, fasc. X e XI, XIII).

In dem Falle $\nu=0$ sind die Coëfficienten dieser Entwicklungsformen, wie schon erwähnt wurde, durch einfache Integrale ausdrückbar; in allen anderen Fällen lassen sie sich, wie nun gezeigt werden soll, durch Doppelintegrale ausdrücken.

Multiplicirt man die Gleichung:

$$J^{\mu}(\alpha x)=\frac{(\alpha x)^{\mu}}{2^{\mu}}\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}(-1)^{\lambda}\frac{(\alpha x)^{2\lambda}}{2^{2\lambda}\,\Pi(\lambda)\,\Pi(\mu+\lambda)}$$

mit $x^{\mu+1}(1-x^2)^{\nu-1}\,dx$ und integrirt in Bezug auf x von $x=0$ bis $x=+1$, so erhält man, da:

$$\int_0^1 x^{2\mu+2\lambda+1}(1-x^2)^{\nu-1}\,dx=\frac{\Pi(\mu+\lambda)\,\Pi(\nu-1)}{2\,\Pi(\mu+\nu+\lambda)}$$

ist:

$$\int_0^1 J^{\mu}(\alpha x)x^{\mu+1}(1-x^2)^{\nu-1}\,dx=\frac{\alpha^{\mu}\,\Pi(\nu-1)}{2^{\mu+1}}.$$

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}(-1)^{\lambda}\frac{\alpha^{2\lambda}}{2^{2\lambda}\,\Pi(\lambda)\,\Pi(\mu+\nu+\lambda)}$$

oder:

$$2)\qquad \int_0^1 J^{\mu}(\alpha x)x^{\mu+1}(1-x^2)^{\nu-1}\,dx=\frac{2^{\nu-1}\,\Pi(\nu-1)}{\alpha^{\nu}}\,J^{\mu+\nu}(\alpha)$$

$$[\mu>-1,\nu>0[$$

Setzt man in dieser Formel:

$$\alpha=\rho_{\lambda}y$$

multiplicirt sodann mit $y^{\nu+1}J^{\mu+\nu}(\rho_{\tau}y)\,dy$ und integrirt von $y=0$ bis $y=a$, so erhält man die Relation:

$$\int_0^a y^{\nu+1}J^{\mu+\nu}(\rho_{\tau}y)dy\int_0^1 J^{\mu}(\rho_{\lambda}y)x^{\mu+1}(1-x^2)^{\nu-1}dx$$

$$=\frac{2^{\nu-1}\,\Pi(\nu-1)}{\rho_{\lambda}^{\nu}}\int_0^a y\,J^{\mu+\nu}(\rho_{\lambda}y)\,J^{\mu+\nu}(\rho_{\tau}y)dy$$

Transformirt man das Integral auf der linken Seite dieser Gleichung durch die Substitution:

$$yx = z$$

so verwandelt sich dasselbe in:

$$\int_0^a y^{-(\mu+\nu-1)} J^{\mu+\nu}(\rho_\tau y)\,dy \int_0^y J^{\mu}(\rho_\lambda z) z^{\mu+1} (y^2 - z^2)^{\nu-1}\,dz$$

welches Integral auch in folgender Form geschrieben werden kann:

$$\int_0^a J^{\mu}(\rho_\lambda z) z^{\mu+1}\,dz \int_z^a y^{-(\mu+\nu-1)} J^{\mu+\nu}(\rho_\tau y)(y^2 - z^2)^{\nu-1}\,dy$$

Mit Hilfe der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung, von welcher die Bessel'sche Function erster Art ein particuläres Integral ist, findet man bekanntlich die Relationen:

$$\int_0^a y J^{\mu+\nu}(\rho_\lambda y)\, J^{\mu+\nu}(\rho_\tau y)\,dy = \frac{a}{\rho_\lambda^2 - \rho_\tau^2} \begin{vmatrix} J^{\mu+\nu}(a\rho_\lambda), & J^{\mu+\nu}(a\rho_\tau) \\ \rho_\lambda [J^{\mu+\nu}(a\rho_\lambda)]', & \rho_\tau [J^{\mu+\nu}(a\rho_\tau)]' \end{vmatrix}$$

$$(\rho_\lambda \lesseqgtr \rho_\tau)$$

$$\int_0^a y(J^{\mu+\nu}(\rho_\tau y))^2\,d = \frac{a^2}{2} \begin{vmatrix} [J^{\mu+\nu}(a\rho_\tau)]', & J^{\mu+\nu}(a\rho_\tau) \\ \left\{\left(\frac{\mu+\nu}{a\rho^\tau}\right)^2 - 1\right\} J^{\mu+\nu}(a\rho_\tau), & [J^{\mu+\nu}(a\rho_\tau)]' \end{vmatrix}$$

Man hat daher schliesslich die Formeln:

$$\int_0^a J^{\mu}(\rho_\lambda z) z^{\mu+1}\,dz \int_z^a y^{-(\mu+\nu-1)} J^{\mu+\nu}(\rho_\tau y)(y^2 - z^2)^{\nu-1}\,dy =$$

$$\frac{2^{\nu-1}\,\Pi(\nu-1)\,a}{\rho_\lambda^\nu(\rho_\lambda^2 - \rho_\tau^2)} \begin{vmatrix} J^{\mu+\nu}(a\rho_\lambda), & J^{\mu+\nu}(a\rho_\tau) \\ \rho_\lambda [J^{\mu+\nu}(a\rho_\lambda)]', & \rho_\tau [J^{\mu+\nu}(a\rho_\tau)]' \end{vmatrix}$$

$$(\rho_\lambda \gtreqless \rho_\tau)$$

$$\int^a J^{\mu}(\rho_\tau z) z^{\mu+1}\,dz \int_z^a y^{-(\mu+\nu-1)} J^{\mu+\nu}(\rho_\tau y)(y^2 - z^2)^{\nu-1}\,dy =$$

$$\frac{2^{\nu-2}\,\Pi(\nu-1)\,a^2}{\rho_\tau^\nu} \begin{vmatrix} [J^{\mu+\nu}(a\rho_\tau)]', & J^{\mu+\nu}(a\rho_\tau) \\ \left\{\left(\frac{\mu+\nu}{a\rho_\tau}\right)^2 - 1\right\} J^{\mu+\nu}(a\rho_\tau), & [J^{\mu+\nu}(a\rho_\tau)]' \end{vmatrix}$$

Setzt man:

$$\chi^{(z)}_{\mu,\nu} = \chi(z) = \int_z^a y^{-(\mu+\nu-1)} J^{\mu+\nu}(\rho y)(y^2 - z^2)^{\nu-1} dy$$

so findet man nach einigen leichten Rechnungen, dass diese Function der folgenden Differentialgleichung zweiter Ordnung genügt:

$$\chi''(z) + \frac{2\mu+1}{z}\chi'(z) + \rho^2\chi(z) = 2(\nu-1)a^{-(\mu+\nu-2)}(a^2 - z^2)^{\nu-2} J^{\mu+\nu}(a\rho) -$$

$$-\rho a^{-(\mu+\nu-1)}(a^2 - z^2)^{\nu-1} J^{\mu+\nu-1}(a\rho)$$

Setzt man der Reihe nach:

$$a=1,\ \mu=-\frac{1}{2},\quad \nu=\frac{1}{2}$$

$$a=1,\quad \mu=\frac{1}{2},\quad \nu=\frac{1}{2}$$

$$a=\pi,\ \mu=-1,\quad \nu=\frac{1}{2},\ \rho=n_1$$

wo n_1 eine ganze Zahl ist, so erhält man für die dadurch entstehenden speciellen Functionen $\chi(z)$ die schon von Eugenio Beltrami aufgestellten Differentialgleichungen:

$$\chi''(z) + \rho^2\chi(z) + \frac{\rho J^1(\rho)}{\sqrt{1-z^2}} + \frac{J^0(\rho)}{(1-z^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

$$\chi''(z) + \frac{2}{z}\chi'(z) + \rho^2\chi(z) + \frac{\rho J^0(\rho)}{\sqrt{1-z^2}} + \frac{J^1(\rho)}{(1-z^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

$$\chi''(z) - \frac{1}{z}\chi'(z) + n^2\chi(z) + \frac{z^2 \cos n_1 \pi}{(\pi^2 - z^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

Es seien nun ρ_λ und ρ_τ zwei verschiedene Wurzeln der transcendenten Gleichung:

$$x^{-(\mu+\nu)}\{mJ^{\mu+\nu}(ax) + nx[J^{\mu+\nu}(ax)]'\} = 0 \quad [\mu > -1,\quad \nu > 0]$$

Alsdann verwandeln sich die obigen Gleichungen in die folgenden:

$$\int_0^a y J^{\mu+\nu}(\rho_\lambda y)\, J^{\mu+\nu}(\rho_\tau y)\, dy = 0 \quad (\rho_\lambda \lessgtr \rho_\tau)$$

$$\int_0^a y (J^{\mu+\nu}(\rho_\tau y))^2 dy = \frac{a^2}{2}\left\{1 - \left(\frac{\mu+\nu}{a\rho_\tau}\right)^2 + \left(\frac{m}{n\rho_\tau}\right)^2\right\} (J^{\mu+\nu}(a\rho_\tau))^2$$

$$(n \lessgtr 0)$$

$$\int_0^a y (J^{\mu+\nu}(\rho_\tau y))^2 dy = \frac{a^2}{2}\left\{1 + \left(\frac{n\rho_\tau}{m}\right)^2\left[1 - \left(\frac{\mu+\nu}{a\rho_\tau}\right)^2\right]\right\} ([J^{\mu+\nu}(a\rho_\tau)]')^2$$

$$(m \gtrless 0)$$

Aus der ersten von diesen Gleichungen folgt bekanntlich, dass die Wurzeln der eben erwähnten transcendenten Gleichung sämmtlich reell sind; denn hätte diese Gleichung eine complexe Wurzel, so müsste sie, da alle ihre Coëfficienten reell sind, auch die conjugirte complexe Wurzel besitzen. Würde man diese zwei conjugirten Grössen für ρ_λ und ρ_τ nehmen, so hätte man unter dem Integralzeichen einer Function, welche im ganzen Integrationsintervalle stets dasselbe Zeichen besässe, deren Integral also nicht gleich Null sein kann, ausser wenn sie selbst identisch gleich Null ist. Dies ist aber nicht der Fall, und daher sind alle Wurzeln der oben erwähnten transcendenten Gleichung reell. Man sieht ferner leicht aus dem asymptotischen Ausdrucke für die Bessel'sche Function erster Art, dass die obige Gleichung unendlich viele Wurzeln besitzt. Aus der bekannten Form der Bessel'schen Functionen erster Art endlich ergibt sich sofort, dass die Wurzeln der Gleichung paarweise dem absoluten Betrage nach gleich und von entgegengesetztem Zeichen sind.

Für die erwähnten speciellen Werthe der Grössen ρ_λ und ρ_τ hat man die folgenden Relationen:

$$\int_0^a J^\mu(\rho_\lambda z) z^{\mu+1} dz \int_z^a y^{-(\mu+\nu-1)} J^{\mu+\nu}(\rho_\tau y)\,(y^2 - z^2)^{\nu-1} dy = o$$

$$[\rho_\lambda \gtrless \rho_\tau]$$

$$\int_0^a J^\mu(\rho_\tau z) z^{\mu+1}\, dz \int^a y^{-(\mu+\nu-1)} J^{\mu+\nu}(\rho_\tau y)(y^2-z^2)^{\nu-1}\, dy =$$

$$= \frac{2^{\nu-2}\Pi(\nu-1)\,a^2}{\rho_\tau^\nu}\left\{1-\left(\frac{\mu+\nu}{a\rho_\tau}\right)^2+\left(\frac{m}{n\rho_\tau}\right)^2\right\}(J^{\mu+\nu}(a\rho_\tau))^2 \qquad [n \lessgtr 0]$$

$$\int_0^a J^\mu(\rho_\tau z) z^{\mu+1}\, dz \int_z^a y^{-(\mu+\nu-1)} J^{\mu+\nu}(\rho_\tau y)(y^2-z^2)^{\nu-1}\, dy =$$

$$= \frac{2^{\nu-2}\Pi(\nu-1)\,a^2}{\rho_\tau^\nu}\left\{1+\left(\frac{n\rho_\tau}{m}\right)^2\left[1-\left(\frac{\mu+\nu}{a\rho_\tau}\right)^2\right]\right\}([J^{\mu+\nu}(a\rho_\tau)]')^2 \qquad [m \lessgtr 0]$$

Ist nun die Function $f(x)$ so beschaffen, dass nicht nur $x^{2\mu-p+1} f(x)$, sondern auch das Quadrat dieses Ausdruckes in dem Intervalle $0 \ldots a$ integrabel ist, so hat man die Entwicklung:

$$f(x) = \sum_\lambda A_\lambda x^{-(\mu-p)} J^\mu(\rho_\lambda x) \qquad [\mu > -1;\ 0 \leqq x < a]$$

wo die Summation sich über alle positiven Wurzeln ρ_λ der erwähnten transcendenten Gleichung erstreckt und:

$$A_\lambda = \frac{\rho_\lambda^\nu}{2^{\nu-2}\Pi(\nu-1)\,a^2\left\{1-\left(\frac{\mu+\nu}{a\rho_\lambda}\right)^2+\left(\frac{m}{n\rho_\lambda}\right)^2\right\}(J^{\mu+\nu}(a\rho_\lambda))^2}.$$

$$\cdot \int_0^a z^{2\mu-p+1} f(z)\, dz \int_z^a y^{-(\mu+\nu-1)} J^{\mu+\nu}(\rho_\lambda y)(y^2-z^2)^{\nu-1}\, dy$$

$$= \frac{\rho_\lambda^\nu}{2^{\nu-2}\Pi(\nu-1)\,a^2\left\{1-\left(\frac{\mu+\nu}{a\rho_\lambda}\right)^2+\left(\frac{m}{n\rho_\lambda}\right)^2\right\}(J^{\mu+\nu}(a\rho_\lambda))^2}.$$

$$\int_0^a y^{\mu+\nu-p-1} J^{\mu+\nu}(\rho_\lambda y)\, dy \int_0^1 z^{2\mu-p+1} f(yz)(1-z^2)^{\nu-1}\, dz$$

$$[n \gtrless 0]$$

$$A_\lambda = \frac{\rho_\lambda^{\nu}}{2^{\nu-2}\Pi(\nu-1)\,a^2\left\{1+\left(\frac{n\rho_\lambda}{m}\right)^2\left[1-\left(\frac{\mu+\nu}{a\rho_\lambda}\right)^2\right]\right\}([J^{\mu+\nu}(a\rho_\lambda)]')^2}\cdot$$

$$\cdot\int_0^a z^{2\mu-p+1} f(z)\,dz \int_z^a y^{-(\mu+\nu-1)} J^{\mu+\nu}(\rho_\lambda y)(y^2-z^2)^{\nu-1}\,dy$$

$$= \frac{\rho_\lambda^{\nu}}{2^{\nu-2}\Pi(\nu-1)\,a^2\left\{1+\left(\frac{n\rho_\lambda}{m}\right)^2\left[1-\left(\frac{\mu+\nu}{a\rho_\lambda}\right)^2\right]\right\}([J^{\mu+\nu}(a\rho_\lambda)]')^2}\cdot$$

$$\int_0^a y^{\mu+\nu-p-1} J^{\mu+\nu}(\rho_\lambda y)\,dy \int_0^1 z^{2\mu-p+1} f(yz)(1-z^2)^{\nu-1}\,dz$$

$$[m \gtrless 0$$

ist.

Setzt man speciell:

$$p = 0$$

$$f(x) = (\beta x)^{-\mu} J^{\mu}(\beta x)$$

wo β von jeder der Wurzeln $\pm\rho_\lambda$ verschieden sein soll, so erhält man die Formeln:

$$(\beta x)^{-\mu} J^{\mu}(\beta x) = \frac{2}{an}\beta^{-(\mu+\nu)}\{mJ^{\mu+\nu}(a\beta)+n\beta[J^{\mu+\nu}(a\beta)]'\}\,.$$

$$\sum_\lambda \frac{\rho_\lambda^{\nu} x^{-\mu} J^{\mu}(\rho_\lambda x)}{(\rho_\lambda^2-\beta^2)\left\{1-\left(\frac{\mu+\nu}{a\rho_\lambda}\right)^2+\left(\frac{m}{n\rho_\lambda}\right)^2\right\} J^{\mu+\nu}(a\rho_\lambda)}$$

$$[n \gtrless 0]$$

$$(\beta x)^{-\mu} J^{\mu}(\beta x) = \frac{2}{an}\beta^{-(\mu+\nu)}\{mJ^{\mu+\nu}(a\beta)+n\beta[J^{\mu+\nu}(a\beta)]'\}\,.$$

$$\sum_\lambda \frac{\rho_\lambda^{\nu+1} x^{-\mu} J^{\mu}(\rho_\lambda x)}{(\rho_\lambda^2-\beta^2)\left\{1+\left(\frac{n\rho_\lambda}{m}\right)^2\left[1-\left(\frac{\mu+\nu}{a\rho_\lambda}\right)^2\right]\right\}[J^{\mu+\nu}(a\rho_\lambda)]'}$$

$$[m \lessgtr 0$$

Setzt man in diesen zwei Formeln:

$$\beta = 0$$

so verwandeln sich dieselben in die folgenden:

$$x^{\mu}=\frac{\Pi(\mu)\,a^{\mu+\nu-2}}{2^{\nu-1}m\,\Pi(\mu+\nu)}\{ma+n(\mu+\nu)\}.$$

$$\sum_{\lambda}\frac{\rho_{\lambda}^{\nu-2}J^{\mu}(\rho_{\lambda}x)}{\left\{1-\left(\frac{\mu+\nu}{a\rho_{\lambda}}\right)^{2}+\left(\frac{m}{n\rho_{\lambda}}\right)^{2}\right\}J^{\mu+\nu}(a\rho_{\lambda})}$$

$[n \lesseqgtr 0]$

$$x^{\mu}=-\frac{\Pi(\mu)\,a^{\mu+\nu-2}}{2^{\nu-1}m\Pi(\mu+\nu)}\{ma+n(\mu+\nu)\}.$$

$$\sum_{\lambda}\frac{\rho_{\lambda}^{\nu-1}J^{\mu}(\rho_{\lambda}x)}{\left\{1+\left(\frac{n\rho_{\lambda}}{m}\right)^{2}\left[1-\left(\frac{\mu+\nu}{a\rho_{\lambda}}\right)^{2}\right]\right\}[J^{\mu+\nu}(a\rho_{\lambda})]'}$$

$[m \lesseqgtr 0]$

Aus der letzten Formel folgt für:

$$m=1\,,\quad n=0\,,\quad \mu=\frac{1}{2}$$

die specielle Relation:

$$1=-\frac{a^{\nu}}{2^{\nu}\,\Pi\left(\frac{2\nu+1}{2}\right)}\sqrt{\frac{2}{a}}\sum\frac{\rho_{\lambda}^{\frac{2\nu-1}{2}}\sin\rho_{\lambda}x}{x\left[J^{\frac{2\nu+1}{2}}(a\rho_{\lambda})\right]'}.$$

Es soll nun auch ein Ausdruck für die Entwicklungscoëfficienten A_{λ} für den Fall gegeben werden, dass die in der Gleichung 1) auftretende Constante ν negativ ist.

Es sei $F(z)$ eine Function von z von der Beschaffenheit, dass nicht nur $z^{-2}F(z)$, sondern auch das Quadrat dieses Ausdruckes in dem Intervalle $0\ldots a$ integrabel ist. Dieselbe lässt sich alsdann in eine Reihe von der Form:

$$F(z)=\sum_{\lambda}B_{\lambda}z^{\mu-\nu+2}J^{\mu-\nu}(\rho_{\lambda}z)$$

entwickeln, wo die Grössen ρ_{λ} die Wurzeln der transcendenten Gleichung:

3) $$x^{-(\mu-\nu)}\{mJ^{\mu-\nu}(ax)+nx[J^{\mu-\nu}(ax)]'\}=0$$

$[\nu>0]$

sind. Diese Entwicklung ist innerhalb des genannten Intervalles mit Ausnahme einer discreten Punktmenge in gleichem Grade convergent und die Entwicklungscoëfficienten B_λ sind durch die Relationen:

$$B_\lambda = \frac{2}{a^2\left\{1-\left(\frac{\mu-\nu}{a\rho_\lambda}\right)^2+\left(\frac{m}{n\rho_\lambda}\right)^2\right\}(J^{\mu-\nu})(a\rho_\lambda)^2} \cdot \int_0^a y^{-(\mu-\nu+1)} F(y)\, J^{\mu-\nu}(\rho_\lambda y)\, dy$$

$$[n \lesseqgtr 0]$$

$$B_\lambda = \frac{2}{a^2\left\{1+\left(\frac{n\rho_\lambda}{m}\right)^2\left[1-\left(\frac{\mu-\nu}{a\rho_\lambda}\right)^2\right]\right\}([J^{\mu-\nu}(a\rho_\lambda)])')^2} \cdot \int_0^a y^{-(\mu-\nu+1)} F(y)\, J^{\mu-\nu}(\rho_\lambda y)\, dy$$

$$[m \lesseqgtr 0]$$

gegeben.

Schreibt man in der obigen Entwicklung xz für z, multiplicirt sodann mit $(1-z)^{\nu-1}\frac{dz}{z}$ und integrirt in Bezug auf z von $z=0$ bis $z=1$, so erhält man unter Berücksichtigung der Relation 2) sofort die Gleichung:

$$f(x) = \int_0^1 F(xz)(1-z^2)^{\nu-1}\frac{dz}{z} = \sum \frac{2^{\nu-1}\Pi(\nu-1)}{\rho_\lambda^\nu} B_\lambda x^{\mu-2\nu+2} J^\mu(\rho_\lambda x)$$

$$[\mu-\nu > -1]$$

Nun ist, wenn q der Bedingung:

$$0 < q < 1$$

genügt, bekanntlich:

$$F(y)-F(0) = \frac{2y\sin q\pi}{\pi}\int_0^1 \frac{u^{2q}\,du}{(1-u^2)^q}\int_0^1 \frac{F'(yzu)\,dz}{(1-z^2)^{1-q}}$$

Unter den gemachten Voraussetzungen ist aber:

$$F(0)=0$$

ferner:

$$f'(yu)=\int_0^1 F'(yzu)(1-z^2)^{\nu-1}\,dz$$

Man hat daher für $q=\nu$ die Relation:

$$F(y)=\frac{2y\sin\nu\pi}{\pi}\int_0^1\frac{u^{2\nu}f'(uy)\,du}{(1-u^2)^\nu}.$$

Es besteht also die Entwicklung:

$$\varphi(x)=\sum A_\lambda x^{-(\mu-p)}J^\mu(\rho_\lambda x)$$

$$[\mu-\nu>-1,\ 0<\nu<1]$$

wo die Grössen ρ_λ die verschiedenen reellen positiven Wurzeln der transcendenten Gleichung 3) sind und:

$$A_\lambda=\frac{2^{\nu+1}\Pi(\nu-1)\sin\nu\pi}{\pi\rho_\lambda^\nu a^2\left\{1-\left(\frac{\mu-\nu}{a\rho_\lambda}\right)^2+\left(\frac{m}{n\rho_\lambda}\right)^2\right\}(J^{\mu-\nu}(a\rho_\lambda))^2}.$$

$$.\int_0^a y^{-(\mu-\nu)}J^{\mu-\nu}(\rho_\lambda y)\,dy\int_0^1\frac{z^{2\nu}\left[(yz)^{2\mu-2\nu-p+2}\varphi(yz)\right]'dz}{(1-z^2)^\nu}$$

$$=\frac{2^{\nu+1}\Pi(\nu-1)\sin\nu\pi}{\pi\rho_\lambda^\nu a^2\left\{1-\left(\frac{\mu-\nu}{a\rho_\lambda}\right)^2+\left(\frac{m}{n\rho_\lambda}\right)^2\right\}(J^{\mu-\nu}(a\rho_\lambda))^2}.$$

$$.\int_0^a z^{2\nu}\left[z^{2\mu-2\nu-p+2}\varphi(z)\right]'dz\int_z^a\frac{y^{-(\mu-\nu+1)}J^{\mu-\nu}(\rho_\lambda y)\,dy}{(y^2-z^2)^\nu}$$

$$[n\gtrless 0]$$

$$A_\lambda=\frac{2^{\nu+1}\Pi(\nu-1)\sin\nu\pi}{\pi\rho_\lambda^\nu a^2\left\{1+\left(\frac{n\rho_\lambda}{m}\right)^2\left[1-\left(\frac{\mu-\nu}{a\rho_\lambda}\right)^2\right]\right\}([J^{\mu-\nu}(a\rho_\lambda)]')^2}.$$

$$.\int_0^a y^{-(\mu-\nu)}J^{\mu-\nu}(\rho_\lambda y)\,dy\int_0^1\frac{z^{2\nu}\left[(yz)^{2\mu-2\nu-p+2}\varphi(yz)\right]'dz}{(1-z^2)^\nu}$$

$$\frac{2^{\nu+1}\Pi(\nu-1)\sin\nu\pi}{\pi\rho_\lambda^\nu a^2\left\{1+\left(\frac{n\rho_\lambda}{m}\right)^2\left[1-\left(\frac{\mu-\nu}{a\rho_\lambda}\right)^2\right]\right\}\left([J^{\mu-\nu}(a\rho_\lambda)]'\right)^2}.$$

$$\int_0^a z^{2\nu}\left[z^{2\mu-2\nu-p+2}\varphi(z)\right]'dz\int_z^a\frac{y^{-(\mu-\nu+1)}J^{\mu-\nu}(\rho_\lambda y)\,dy}{(y^2-z^2)^\nu}$$

$[m \lesseqgtr 0]$

ist.

Geht man, wenn $\nu=\frac{1}{2}$ ist, von der Entwicklung:

$$F(z)=\sum B_\lambda z^{\frac{2\mu+1}{2}}J^{\frac{2\mu-1}{2}}(\rho_\lambda z)$$

aus, schreibt in derselben xz für z, multiplicirt sodann mit $\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$ und integrirt in Bezug auf z von 0 bis 1, so erhält man in diesem speciellen Falle für die Entwicklungscoëfficienten A_λ die folgenden Ausdrücke:

$$A_\lambda=\sqrt{\frac{2}{\pi\rho_\lambda}}\frac{2}{a^2\left\{1-\left(\frac{2\mu-1}{2a\rho_\lambda}\right)^2+\left(\frac{m}{n\rho_\lambda}\right)^2\right\}\left(J^{\frac{2\mu-1}{2}}(a\rho_\lambda)\right)^2}.$$

$$.\int_0^a y^{-\frac{2\mu-3}{2}}J^{\frac{2\mu-1}{2}}(\rho_\lambda y)\,dy\int_0^1\frac{[(zy)^{2\mu-p}\varphi(zy)]'\,dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi\rho_\lambda}}\frac{2}{a^2\left\{1-\left(\frac{2\mu-1}{2a\rho_\lambda}\right)^2+\left(\frac{m}{n\rho_\lambda}\right)^2\right\}\left(J^{\frac{2\mu-1}{2}}(a\rho_\lambda)\right)^2}.$$

$$.\int_0^a [z^{2\mu-p}\varphi(z)]'\,dz\int_z^a\frac{y^{-\frac{2\mu-3}{2}}J^{\frac{2\mu-1}{2}}(\rho_\lambda y)\,dy}{\sqrt{y^2-z^2}}$$

$[n \gtreqless 0]$

$$A_\lambda=\sqrt{\frac{2}{\pi\rho_\lambda}}\frac{2}{a^2\left\{1+\left(\frac{n\rho_\lambda}{m}\right)^2\left[1-\left(\frac{2\mu-1}{2a\rho_\lambda}\right)^2\right]\right\}\left(\left[J^{\frac{2\mu-1}{2}}(a\rho_\lambda)\right]'\right)^2}.$$

$$.\int_0^a y^{-\frac{2\mu-3}{2}}J^{\frac{2\mu-1}{2}}(\rho_\lambda y)\,dy\int_0^1\frac{[(zy)^{2\mu-p}\varphi(zy)]'\,dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi\rho_\lambda}}\,\frac{2}{a^2\left\{1+\left(\frac{n\rho_\lambda}{m}\right)^2\left[1-\left(\frac{2\mu-1}{2a\rho_\lambda}\right)^2\right]\right\}\left(\left[J^{\frac{2\mu-1}{2}}(a\rho_\lambda)\right]'\right)^2}.$$

$$.\int_0^a [z^{2\mu-\nu}\varphi(z)]'\,dz\int_z^a \frac{y^{-\frac{2\mu-3}{2}}J^{\frac{2\mu-1}{2}}(\rho_\lambda y)\,dy}{\sqrt{y^2-z^2}} \qquad [m\lesseqgtr 0]$$

Es sind demnach auch für negative ν die Functionen $\chi_{\mu,\nu}(z)$ die zur Isolirung der einzelnen Coëfficienten tauglichen Multiplicatoren.

Es mag noch hervorgehoben werden, dass aus der Relation:

$$\chi'_{\mu,\nu}(z)=-a^{-(\mu+\nu)}z\,J^{\mu+\nu}(a\rho_\lambda)\,(a^2-z^2)^{\nu-1}-\rho_\lambda z\,\chi_{\mu+1,\nu}(z)$$

sofort folgt, dass in allen früheren Formeln, wenn $n=0$ ist, die Multiplicatoren $\chi_{\mu,\nu}(z)$ durch $-\frac{1}{\rho_\lambda z}\chi'_{\mu-1,\nu}(z)$ ersetzt werden können.

Ebenso sieht man auch, dass die in den Ausdrücken der Coëfficienten A_λ auftretenden Doppelintegrale durch partielle Integration noch weiter umgeformt werden können.

Ich gehe nun zur Auswerthung einiger bestimmter Integrale über.

Multiplicirt man die von Herrn L. Schläfli abgeleitete Formel:

$$J^m(x)\,J^n(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} J^{m+n}(2x\cos\varphi)\cos(m-n)\varphi\,d\varphi$$

(„Einige Bemerkungen zu Herrn Neumann's Untersuchungen über die Bessel'schen Functionen." Mathem. Annalen, 3. Bd., pag. 134 ff.), wo m und n ganze Zahlen sind, mit $x^{\alpha-m-n-1}dx$ und integrirt von $x=0$ bis $x=\infty$, so erhält man, wenn man auf der rechten Seite der so entstehenden Gleichung die Integrationsordnung umkehrt und die von mir aufgestellte Formel:

$$4)\qquad \int_0^\infty x^{\alpha-\nu-1} J^\nu(ax)\,dx = 2^{\alpha-\nu-1} a^{\nu-\alpha} \frac{\Pi\left(\frac{\alpha-2}{2}\right)}{\Pi\left(\frac{2\nu-\alpha}{2}\right)} \left[0<\alpha<\nu+\frac{3}{2}\right]$$

(„Über einige bestimmte Integrale". Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften, mathematisch-naturwissenschaftliche Classe, 72. Band, II. Abtheilung, Juni-Heft, Jahrgang 1875) berücksichtigt, die Relation:

$$\int_0^\infty J^m(x) J^n(x) x^{\alpha-m-n-1}\,dx = \frac{\Pi\left(\frac{\alpha-2}{2}\right)}{\pi\Pi\left(m+n-\frac{\alpha}{2}\right)} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(m-n)\varphi \cos^{m+n-\alpha}\varphi\, d\varphi \qquad [0<\alpha<m+n+1]$$

Berücksichtigt man, dass:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^\beta v \, \cos\gamma v\, dv = \frac{\pi}{2^{\beta+1}} \frac{\Pi(\beta)}{\Pi\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)\Pi\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)} \qquad [\beta>-1]$$

ist, so erhält man sofort:

$$\int_0^\infty J^m(x) J^n(x) x^{\alpha-m-n-1}\,dx = \frac{\Pi\left(\frac{\alpha}{2}-1\right)\Pi(m+n-\alpha)}{2^{m+n-\alpha+1}\Pi\left(m+n-\frac{\alpha}{2}\right)\Pi\left(m-\frac{\alpha}{2}\right)\Pi\left(n-\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$[o<\alpha<m+n+1].$$

Setzt man speciell:

$$\alpha = m+n$$

so erhält man die Formeln:

$$\int_0^\infty J^m(x) J^n(x) \frac{dx}{x} = 0 \qquad [m \gtrless n \text{ und } m-n \text{ gerade}]$$

$$\int_0^\infty J^m(x)\,J^n(x)\,\frac{dx}{x} = (-1)^{\frac{m-n-1}{2}}\,\frac{2}{\pi(m^2-n^2)}$$

$$[m \gtrless n \text{ und } m-n \text{ ungerade}]$$

$$\int_0^\infty (J^m(x))^2\,\frac{dx}{x} = \frac{1}{2m} \qquad [m>0].$$

Die erste und dritte von diesen speciellen Formeln hat Herr E. Heine mitgetheilt (Handbuch der Kugelfunctionen, Theorie und Anwendungen von Dr. E. Heine, 2. Auflage, 1. Band, pag. 255 f.)

Ein anderes allgemeines Integral, in welchem das zuletzt angegebene als specieller Fall enthalten ist, kann auf folgendem Wege gefunden werden.

Multiplicirt man die Gleichung:

$$5)\quad J^{n+\nu}(\rho_1 y)\,J^{n+\nu}(\rho_2 y) = \frac{(\rho_1\rho_2 y)^\nu\,\Pi(n)}{2^{3\nu-1}\,\Pi(\nu-1)\,\Pi(n+2\nu-1)}\left[\frac{\Pi(2\nu-1)}{\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}\right]$$

$$\int_0 (\rho_1^2+\rho_2^2-2\rho_1\,\rho_2\cos\varphi)^{-\frac{\nu}{2}}\,J^\nu\!\left(y\sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2-2\rho_1\rho_2\cos\varphi}\right)$$

$$\cdot\, C_n^\nu(\cos\varphi)\,\sin^{2\nu}\varphi\,d\varphi$$

mit $y^{\alpha-2\nu-1}\,dy$ und integrirt in Bezug auf y von $y=0$ bis $y=\infty$, so erhält man, wenn man auf der rechten Seite der dadurch entstehenden Gleichung die Integrationsordnung umkehrt und die Formel 4) berücksichtigt, die Relation:

$$\int_0^\infty J^{n+\nu}(\rho_1 y)\,J^{n+\nu}(\rho_2 y)\,y^{\alpha-2\nu-1}\,dy =$$

$$= \frac{(\rho_1\rho_2)^\nu\,\Pi(n)\,\Pi\left(\frac{\alpha}{2}-1\right)}{2^{4\nu-\alpha}\,\Pi(\nu-1)\,\Pi\left(\nu-\frac{\alpha}{2}\right)\Pi(n+2\nu-1)}\left[\frac{\Pi(2\nu-1)}{\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}\right]^2.$$

$$.\int_0^\pi (\rho_1^2+\rho_2^2-2\rho_1\rho_2\cos\varphi)^{-\frac{\alpha}{2}}\,C_n^\nu(\cos\varphi)\,\sin^{2\nu}\varphi\,d\varphi$$

oder nach einer von mir a. a. O. mitgetheilten Formel:

$$\int_0^\infty J^{n+\nu}(\rho_1 y)\, J^{n+\nu}(\rho_2 y)\, y^{\alpha-2\nu-1}\, dy =$$

$$=\frac{\Pi\left(\frac{\alpha}{2}+n-1\right)}{2^{2\nu-\alpha+1}\,\Pi\left(\nu-\frac{\alpha}{2}\right)\Pi(n+\nu)}\,\frac{(\rho_1\rho_2)^{n+\nu}}{(\rho_1^2+\rho_2^2)^{n+\frac{\alpha}{2}}}$$

$$.F\left(\frac{\alpha+2n}{4},\quad \frac{\alpha+2n+2}{4},\quad n+\nu+1,\quad \frac{4\rho_1^2\rho_2^2}{(\rho_1^2+\rho_2^2)^2}\right)$$

$$\left[0<\alpha<\nu+\frac{3}{2}\right].$$

Setzt man speciell:

$$\rho_1=\rho_2=\rho$$

so verwandelt sich diese Formel, da

$$F(\beta,\gamma,\delta,1)=\frac{\Pi(\delta-1)\,\Pi(\delta-\gamma-\beta-1)}{\Pi(\delta-\beta-1)\,\Pi(\delta-\gamma-1)}$$

ist, in die folgende:

$$\int_0^\infty [J^{n+\nu}(\rho y)]^2\, y^{\alpha-2\nu-1}\, dy =$$

$$=\frac{\Pi\left(\frac{\alpha}{2}+n-1\right)\Pi\left(\nu-\frac{\alpha+1}{2}\right)}{2^{2\nu+n+1-\frac{\alpha}{2}}\,\Pi\left(\nu-\frac{\alpha}{2}\right)\Pi\left(\nu+\frac{2n-\alpha}{4}\right)\Pi\left(\nu+\frac{2n-\alpha-2}{4}\right)}\,\rho^{2\nu-\alpha}$$

$$\left[0<\alpha<\nu+\frac{3}{2}\right].$$

Setzt man in dieser Formel:

$$\rho=1,\quad \alpha=2,\quad \nu=1$$

so erhält man die Relation:

$$\int_0^\infty (J^{n+1}(y))^2\frac{dy}{y}=\frac{1}{2(n+1)}\qquad [n\geqq 0 \text{ und ganzzahlig}],$$

welche oben auf einem anderen Wege abgeleitet wurde.

Multiplicirt man ferner die Gleichung 5) mit

$$(x^2+y^2)^{-\frac{\mu}{2}} J^{\mu}(\rho_3 \sqrt{x^2+y^2})\, y\, dy$$

und integrirt sodann in Bezug auf y von $y=0$ bis $y=\infty$, so erhält man, wenn man auf der rechten Seite der dadurch entstehenden Gleichung die Integrationsordnung umkehrt, die Formel:

$$\int_0^\infty J^{n+\nu}(\rho_1 y) J^{n+\nu}(\rho_2 y) J^{\mu}(\rho_3 \sqrt{x^2+y^2})(x^2+y^2)^{-\frac{\mu}{2}} y\, dy =$$

$$=\frac{(\rho_1\rho_2)^\nu \Pi(n)}{2^{3\nu-1}\Pi(\nu-1)\Pi(n+2\nu-1)} \left[\frac{\Pi(2\nu-1)}{\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}\right]^2 .$$

$$\int_0^\pi (\rho_1^2+\rho_2^2-2\rho_1\rho_2\cos\varphi)^{-\frac{\nu}{2}} C_n^\nu(\cos\varphi)\sin^{2\nu}\varphi\, d\varphi$$

$$\cdot\int_0^\infty J^\nu(y\sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2-2\rho_1\rho_2\cos\varphi}) \frac{J^\mu(\rho_3\sqrt{x^2+y^2})}{(x^2+y^2)^{\frac{\mu}{2}}} y^{\nu+1}\, dy.$$

Nun ist aber, wie Herr Sonine gezeigt hat (Recherches sur les fonctions cylindriques et le développement des fonctions continues en séries". Mathematische Annalen 16. Band, pag. 1 ff.):

$$\int_0^\infty J^\nu(\alpha y) y^{\nu+1}(x^2+y^2)^{-\frac{\mu}{2}} J^\mu(\rho_3\sqrt{x^2+y^2})\, dy = 0 \qquad [\rho_3<\alpha]$$

$$\int_0^\infty J^\nu(\alpha y) y^{\nu+1}(x^2+y^2)^{-\frac{\mu}{2}} J^\mu(\rho_3\sqrt{x^2+y^2})\, dy =$$

$$=\frac{\alpha^\nu}{\rho_3^\mu}\frac{(\rho_3^2-\alpha^2)^{\frac{\mu-\nu-1}{2}}}{x^{\mu-\nu-1}} J^{\mu-\nu-1}(x\sqrt{\rho_3^2-\alpha^2}) \qquad [\rho_3>\alpha]$$

und daher verwandelt sich die letzte Gleichung in die folgende:

$$\int_0^\infty J^{n+\nu}(\rho_1 y) J^{n+\nu}(\rho_2 y) J^{\mu}(\rho_3 \sqrt{x^2+y^2})(x^2+y^2)^{-\frac{\mu}{2}} y\, dy =$$

$$=\frac{(\rho_1\rho_2)^\nu \Pi(n)\, x^{\nu-\mu+1}}{2^{3\nu-1}\Pi(\nu-1)\Pi(n+2\nu-1)\rho_3^\mu} \left[\frac{\Pi(2\nu-1)}{\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}\right]^2$$

$$\cdot\int_0^\beta (\rho_3^2-\rho_1^2-\rho_2^2+2\rho_1\rho_2\cos\varphi)^{\mu-\nu-1}.$$

$$\cdot J^{\mu-\nu-1}\left(x\sqrt{\rho_3^2-\rho_1^2-\rho_2^2+2\rho_1\rho_2\cos\varphi}\right) C_n^\nu(\cos\varphi)\sin^{2\nu}\varphi\, d\varphi,$$

wo

$$\beta = 0,\ \pi,\ \arccos\frac{\rho_1^2+\rho_2^2-\rho_3^2}{2\rho_1\rho_2}$$

ist, je nachdem

$$\rho_3^2<(\rho_1-\rho_2)^2,\ \rho_3^2>(\rho_1-\rho_2)^2,\ (\rho_1-\rho_2)^2<\rho_3^2<(\rho_1+\rho_2)^2$$

ist. Den speciellen Fall $n=0$ dieser Formel hat Herr Sonine a. a. O. auf einem anderen Wege hergeleitet.

Aus dieser Formel leitet man sofort ab, dass;

$$\int_0^\infty J^{n+\nu}(\rho_1 y)J^{n+\nu}(\rho_2 y)J^\nu(\rho_3 y)\frac{dy}{y^{\nu-1}} = 0$$

ist, wenn $\rho_3^2<(\rho_1-\rho_2)^2$ oder $\rho_3^2>(\rho_1+\rho_2)^2$ ist, und dass in den übrigen Fällen die Relation:

$$\int_0^\infty J^{n+\nu}(\rho_1 y)J^{n+\nu}(\rho_2 y)J^\nu(\rho_3 y)\frac{dy}{y^{\nu-1}} =$$

$$=\frac{\Pi(n)}{2^{5\nu-2}\Pi(\nu-1)\Pi(n+2\nu-1)(\rho_1\rho_2\rho_3)^\nu}\left[\frac{\Pi(2\nu-1)}{\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}\right]^2.$$

$$.[(\rho_1+\rho_2+\rho_3)(\rho_1+\rho_2-\rho_3)(\rho_1+\rho_3-\rho_2)(\rho_2+\rho_3-\rho_1)]^{\nu-\frac{1}{2}}$$

$$.\, C_n^\nu\left(\frac{\rho_1^2+\rho_2^2-\rho_3^2}{2\rho_1\rho_2}\right)$$

besteht. Das Integral auf der linken Seite dieser Gleichung, welches für $n=0$ schon von Sonine mitgetheilt wurde, wird also nicht nur gleich Null, wenn sich kein Dreieck bilden lässt, dessen Seiten die Längen ρ_1, ρ_2, ρ_3 haben, sondern auch, wenn diese Grössen so beschaffen sind, dass der Ausdruck $\frac{\rho_1^2+\rho_2^2-\rho_3^2}{2\rho_1\rho_2}$ eine Wurzel der Gleichung $C_n^\nu(x)=0$ ist. Die Wurzeln dieser

Gleichung sind bekanntlich sämmtlich reell und ungleich und liegen innerhalb des Intervalles $-1\ldots+1$.

Multiplicirt man die Gleichung:

$$J^{\nu}(\alpha x)=\frac{(\alpha x)^{\nu}}{2^{\nu}\sqrt{\pi}\,\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}\int_{-1}^{+1}e^{\alpha xyi}(1-y^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}dy$$

mit $e^{-zx}x^{\mu-\nu}J^{\mu}(\gamma x)dx$ und integrirt von $x=0$ bis $x=\infty$, so erhält man durch Umkehrung der Integrationsordnung auf der rechten Seite der dadurch entstehenden Gleichung, wenn man die von mir a. a. O. mitgetheilte Formel:

$$\int_0^{\infty}e^{-ax}x^{\mu}J^{\mu}(\gamma x)\,dx=\frac{\Pi(2\mu)}{2^{\mu}\Pi(\mu)}\frac{\gamma^{\mu}}{(a^2+\gamma^2)^{\frac{2\mu+1}{2}}}$$

welche gilt, so lange der reelle Bestandtheil von a grösser ist, als der imaginäre von γ, berücksichtigt, die Relation:

$$\int_0^{\infty}e^{-zx}x^{\mu-\nu}J^{\nu}(\alpha x)J^{\mu}(\gamma x)dx=$$

$$\frac{\Pi(2\mu)\alpha^{\nu}\gamma^{\mu}}{2^{\mu+\nu}\sqrt{\pi}\,\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}\int_{-1}^{+1}\frac{(1-y^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}dy}{(\gamma^2+z^2-\alpha^2y^2+2\alpha zyi)^{\frac{2\mu+1}{2}}}$$

Folgende specielle Fälle dieser Formel mögen besonders hervorgehoben werden:

$$\mu=0,\quad \nu=1,\quad \alpha y=u$$
$$\mu=0,\quad \nu=0,\quad y=\cos\varphi$$
$$\mu=0,\quad \nu=\frac{1}{2},\quad \alpha y=u$$
$$\mu=0,\quad \nu=\frac{1}{2},\quad \alpha=\varkappa i,\quad \varkappa y=u.$$

Dieselben liefern, wenn z und γ reelle Grössen bezeichnen, die folgenden Integralrelationen:

$$\int_0^{\infty}e^{-|z|x}J^1(\alpha x)J^0(\gamma x)\frac{dx}{x}=\frac{1}{\alpha\pi}\int_{-\alpha}^{+\alpha}\frac{\sqrt{\alpha^2-u^2}du}{\sqrt{\gamma^2+(z+iu)^2}}$$

$$\int_0^\infty e^{-|z|x} J^0(\alpha x) J^0(\gamma x)\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{\gamma^2+(z+\alpha i\cos\varphi)^2}}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-|z|x} J^0(yx)\sin\alpha x\,\frac{dx}{x} = \frac{1}{\pi}\int_{-\alpha}^{+\alpha}\frac{du}{\sqrt{\gamma^2+(z+iu)^2}}$$

$$\int_0^\infty e^{-|z|x} J^0(\gamma x)\sin hyp(\varkappa x)\frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\int_{-\varkappa}^{+\varkappa}\frac{du}{\sqrt{\gamma^2+(z-u)^2}}$$

$$[|z|>|\varkappa|].$$

Da der Ausdruck:

$$\int_{-\varkappa}^{+\varkappa}\frac{du}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+(z-u)^2}}$$

die Potentialfunction einer homogenen geraden Linie von der linearen Dichtigkeit 1, welche die Punkte $z=-\varkappa$ und $z=+\varkappa$ der z-Axe verbindet, vorstellt, so liefert die letzte Gleichung für alle z, welche der Bedingung $|z|>|\varkappa|$ genügen, für diese Potentialfunction den von Herrn E. Beltrami in seiner Abhandlung: „Sulla teoria delle funzioni potenziali simmetriche" (Memoria dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna. Serie IV. Tomo II.) mitgetheilten Ausdruck:

$$2\int_0^\infty e^{-|z|x} J^0(\gamma x)\sin hyp(\varkappa x)\frac{dx}{x} \qquad [\gamma^2 = x_1^2+y_1^2].$$

Wenn man die zweite von diesen Gleichungen mit $2\pi\gamma\, d\gamma$ multiplicirt und in Bezug auf γ von 0 bis γ integrirt, so verwandelt sich die linke Seite derselben in:

$$2\pi\gamma\int_0^\infty e^{-|z|x} J^1(\gamma x) J^0(\alpha x)\frac{dx}{x}$$

während die rechte Seite in:

$$2\int_0^\pi \sqrt{\gamma^2+(z+\alpha i\cos\varphi)^2}\, d\varphi - 2\pi z$$

den bekannten Ausdruck der Potentialfunction einer homogenen Kreisscheibe von der Flächendichtigkeit 1 und dem Radius γ, welche sich in der xy-Ebene befindet und deren Mittelpunkt der Ursprung ist, übergeht. („Das Potential eines homogenen Kreises" von E. Heine. Journal für die reine und angewandte Mathematik von Borchardt, 76. Band). Die erste von diesen vier Gleichungen liefert demnach für diese Potentialfunction die beiden Ausdrücke:

$$2\pi\gamma\int_0^\infty e^{-|z|x}J^1(\gamma x)J^0(\alpha x)\frac{dx}{x} \qquad 2\int_{-\gamma}^{+\gamma}\frac{\sqrt{\gamma^2-u^2}\,du}{\sqrt{\alpha^2+(z+iu)^2}}$$

$$[\alpha^2=x_1^2+y_1^2],$$

von denen der erste von Herrn H. Weber in der Arbeit: „Über die Bessel'schen Functionen und ihre Anwendung in der Theorie der elektrischen Ströme" (Journal für die reine und angewandte Mathematik von Borchardt, 75. Band) und von Herrn Eugenio Beltrami a. a. O. mitgetheilt wurde, den zweiten hat in neuester Zeit Herr E. Beltrami in seiner Abhandlung: „Sulle funzioni associate e specialmente su quelle della calotta sferica" (Memorie dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Serie IV, Tomo IV) aufgestellt.

Die dritte Gleichung spricht die Identität zweier bekannter Ausdrücke für die Potentialfunction aus, welche auf einer in der Ebene $z=o$ gelegenen Kreisfläche mit dem Radius α den constanten Werth 1 annimmt.

Multiplicirt man ferner die Gleichung 5) mit $e^{-zy}y^{-\mu}J^{\mu}(\gamma y)\,dy$ und integrirt in Bezug auf y von $y=0$ bis $y=\infty$, so erhält man, wenn man die Integrationsordnung auf der rechten Seite der so entstehenden Gleichung umkehrt und die eben abgeleitete Integralrelation berücksichtigt, die Formel:

$$6)\quad \int_0^\infty e^{-zy}y^{-\mu}J^{n+\nu}(\rho_1 y)J^{n+\nu}(\rho_2 y)J^{\mu}(\gamma y)\,dy =$$

$$=\frac{(\rho_1\rho_2)^{\nu}\gamma^{\mu}\Pi(2\nu)\Pi(n)}{2^{4\nu+\mu-1}\sqrt{\pi}\,\Pi(\nu-1)\Pi\left(\frac{2\mu-1}{2}\right)\Pi(n+2\nu-1)}\left[\frac{\Pi(2\nu-1)}{\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}\right]^2$$

$$\int_{-1}^{+1}\int_0^{\pi}\frac{(1-x^2)^{\frac{2\mu-1}{2}}C_n^{\nu}(\cos\varphi)\,dx\,d\varphi}{(\rho_1^2+\rho_2^2-2\rho_1\rho_2\cos\varphi+z^2-\gamma^2x^2-2\gamma zi)^{\frac{2\nu+1}{2}}}$$

wo der reelle Bestandtheil von z grösser sein muss, als der imaginäre von γ.

Setzt man in dieser Gleichung:

$$n = 0, \quad \nu = 0, \quad \mu = \frac{1}{2}, \quad \gamma = \varkappa i, \quad \varkappa x = u,$$

so verwandelt sich dieselbe in die folgende:

$$\int_0^\infty e^{-|z|y} J^0(\rho_1 y) J^0(\rho_2 y) \sin hyp(\varkappa y) \frac{dy}{y} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\varkappa}^{+\varkappa} \int_0^\pi \frac{du\, d\varphi}{\sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos\varphi + z^2 + u^2 - 2zu}} \qquad [|z| > |\varkappa|[$$

falls z und $\varkappa$ reelle Grössen sind.

Nun ist aber:

$$2\rho_2 \int_{-\varkappa}^{+\varkappa} \int_0^\pi \frac{du\, d\varphi}{\sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos\varphi + z^2 + u^2 - 2zu}} \qquad [\rho_1^2 = x_1^2 + y_1^2]$$

die Potentialfunction der Mantelfläche eines homogenen Kreiscylinders von der Flächendichtigkeit 1, dessen Axe die z-Axe ist und welcher von zwei Kreisen mit dem Radius ρ_2 geschlossen wird, die in den Ebenen $z = +\varkappa$ und $z = -\varkappa$ liegen. Man hat demnach für diese Potentialfunction auch den von Herrn E. Beltrami in der zuerst erwähnten Abhandlung mitgetheilten Ausdruck:

$$4\pi\rho_2 \int_0^\infty e^{-|z|y} J^0(\rho_1 y) J^0(\rho_2 y) \sin hyp(\varkappa y) \frac{dy}{y}$$

Multiplicirt man die Gleichung 6) mit $\gamma^{-\mu}$ und setzt sodann γ gleich Null, so verwandelt sich dieselbe in:

$$\int_0^\infty e^{-zy} J^{n+\nu}(\rho_1 y) J^{n+\nu}(\rho_2 y)\, dy = \frac{\Pi(n)\,\Pi(2\nu)}{2^{4\nu-1}\,\Pi(\nu-1)\,\Pi(n+2\nu-1)} \cdot$$

$$\cdot \left[\frac{\Pi(2\nu-1)}{\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}\right]^2 \int_0^\pi \frac{C_n^\nu(\cos\varphi) \sin^{2\nu}\varphi\, d\varphi}{\sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 + z^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos\varphi}}.$$

Setzt man in dieser Formel der Reihe nach:

$$n = 0, \quad \nu = 0$$

$$n = 0, \quad \nu = 0, \quad \rho_1 = \rho_2 = ib, \quad z = 2a, \quad \varphi = 2\psi$$

so erhält man die Relationen:

$$\int_0^\infty e^{-|z|y} J^0(\rho_1 y) J^0(\rho_2 y)\, dy = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2+z^2-2\rho_1\rho_2 \cos\varphi}}$$

$$\int_0^\infty e^{-2ay} (J^0(iby))^2\, dy = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{a^2-b^2 \sin^2\psi}} \qquad [|a| > |b|].$$

Da nun der Ausdruck:

$$\rho_2 \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2+z^2-2\rho_1\rho_2 \cos\varphi}} \qquad [\rho_1^2 = x_1^2+y_1^2]$$

die Potentialfunction einer homogenen Kreisperipherie von der linearen Dichtigkeit 1, welche in der xy-Ebene liegt und den Ursprung zum Mittelpunkte hat, vorstellt, während der Ausdruck

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{a^2-b^2 \sin^2\varphi}}$$

die Potentialfunction einer homogenen Kreisperipherie von der Masse 1 ist, wenn man unter a und b die halbe Summe und die halbe Differenz des grössten und kleinsten Abstandes des potenzirten Punktes vom Umfange versteht, so hat man für diese Potentialfunctionen die Ausdrücke:

$$2\pi\rho_2 \int_0^\infty e^{-|z|y} J^0(\rho_1 y) J^0(\rho_2 y)\, dy$$

$$2 \int_0^\infty e^{-2ay} (J^0(iby))^2\, dy$$

welche man Herrn E. Beltrami verdankt, der den ersten in der zuerst angeführten Abhandlung, den zweiten in der Arbeit:

„Sulle funzioni cilindriche" (Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino. Vol. XVI.) mittheilte.

Schreibt man, um weitere Integrale abzuleiten, in der oben angegebenen Schläfli'schen Relation $-n$ für n berücksichtigt, dass für ganzzahlige n:

$$J^{-n}(x) = (-1)^n J^n(x)$$

ist, und setzt:

$$m = n+2r$$

$$2\varphi = \psi,$$

so verwandelt sich dieselbe in:

7) $$J^{n+2r}(x)\,J^n(x) = \frac{(-1)^n}{\pi}\int_0^\pi J^{2r}(x\sqrt{2+2\cos\psi})\cos(n+r)\psi\, d\psi.$$

Multiplicirt man diese Relation mit $e^{-\frac{x^2}{a}}x^{2r+1}\,dx$ und integrirt in Bezug auf x von $x=0$ bis $x=\infty$, so erhält man durch Umkehrung der Integrationsordnung auf der rechten Seite der so entstehenden Gleichung, da, wie ich gezeigt habe:

$$\int_0^\infty e^{-a_1^2x^2}x^{\nu+1}J^\nu(a_2x)\,dx = \frac{a_2^\nu}{(2a_1^2)^{\nu+1}}\,e^{-\frac{a_2^2}{4a_1^2}}$$

ist, die Relation:

$$\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{a}}x^{2r+1}J^{n+2r}(x)\,J^n(x)\,dx = \frac{(-1)^n a^{2r+1}}{2^{r+1}\pi}$$

$$.\int_0^\pi e^{-\frac{a(1+\cos\psi)}{2}}(1+\cos\psi)^r\cos(n+r)\psi\,d\psi.$$

Aus der Gleichung:

$$J^s(\alpha) = \frac{(-i)^s}{\pi}\int_0^\pi e^{\alpha i\cos\vartheta}\cos s\vartheta\,d\vartheta$$

folgt:

$$\int_0 e^{\alpha i\cos\vartheta}\cos s\vartheta\cos^\sigma\vartheta\,d\vartheta = \frac{\pi}{i^{\sigma-s}}\,\frac{d^\sigma J^s(\alpha)}{d\alpha^\sigma}$$

und daher hat man schliesslich:

$$\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{a}} x^{2r+1} J^{n+2r}(x) J^n(x)\, dx =$$

$$= \frac{i^{n+r} a^{2r+1}}{2} \frac{d^r}{da^r} \left\{ e^{-\frac{a}{2}} J^{n+r}\left(\frac{a}{2i}\right) \right\}$$

Multiplicirt man die Formel 7) mit $e^{-\frac{x}{\sqrt{a}}} x^{2r+1}\, dx$ und integrirt in Bezug auf x von $x = 0$ bis $x = \infty$, so erhält man durch Umkehrung der Integrationsordnung unter Benützung einer von mir früher mitgetheilten Formel die Relation:

$$\int_0^\infty e^{-\frac{x}{\sqrt{a}}} x^{2r+1} J^{n+2r}(x) J^n(x)\, dx =$$

$$= \frac{(-1)^n \Pi(4r+1) a^{\frac{4r+1}{2}}}{2^r \Pi(2r)\pi} \int_0^\pi \frac{\cos(n+r)\psi (1+\cos\psi)^r d\psi}{(1+2a+2a\cos\psi)^{\frac{4r+3}{2}}}$$

Nun ist aber:

$$\int_0^\pi \frac{\cos(n+r)\psi(1+\cos\psi)^r d\psi}{(1+2a+2a\cos\psi)^{\frac{4r+3}{2}}} = \frac{(-1)^r \Pi\left(\frac{4r+1}{2}\right)}{2^r \Pi\left(\frac{2r+1}{2}\right)} .$$

$$. \frac{d^r}{da^r} \left\{ \int_0^\pi \frac{\cos(n+r)\psi\, d\psi}{(1+2a+2a\cos\psi)^{\frac{2r+3}{2}}} \right\}$$

ferner:

$$\int_0^\pi \frac{\cos(n+r)\psi\, d\psi}{(1+2a+2a\cos\psi)^{\frac{2r+3}{2}}} = \frac{(-1)^{n+r} \Pi\left(n+2r+\frac{1}{2}\right) \pi a^{n+r}}{\Pi(n+r)\Pi\left(r+\frac{1}{2}\right)(1+2a)^{n+2r+\frac{3}{2}}} .$$

$$. F\left(\frac{4r+2n+3}{4}, \frac{4r+2n+5}{4}, n+r+1, \frac{4a^2}{(1+2a)^2}\right)$$

und daher:

$$\int_0^\infty e^{-\frac{x}{\sqrt{a}}} x^{2r+1} J^{n+2r}(x) J^n(x)\, dx =$$

$$= \frac{\Pi(4r+1)\Pi\left(\frac{4r+1}{2}\right)\Pi\left(n+2r+\frac{1}{2}\right) a^{\frac{4r+1}{2}}}{2^{2r}\Pi(2r)\Pi(n+r)\left[\Pi\left(\frac{2r+1}{2}\right)\right]^2} .$$

$$\cdot \frac{d^r}{da^r}\left\{\frac{a^{n+r}}{(1+2a)^{n+2r+\frac{3}{2}}} F\left(\frac{4r+2n+3}{4}, \frac{4r+2n+5}{4}, n+r+1, \frac{4a^2}{(1+2a)^2}\right)\right\}.$$

Schreibt man in der Schläfli'schen Relation $\rho_1\sqrt{x^2+z^2}$ für x, multiplicirt dieselbe sodann mit $(x^2+z^2)^{-\frac{m+n}{2}} J^r(\rho x) x^{r-1} dx$ und integrirt in Bezug auf x von 0 bis ∞, so erhält man durch Umkehrung der Integrationsordnung auf der rechten Seite der so entstehenden Gleichung, da, wie Herr Sonine a. a. O. gezeigt hat,

$$\int_0^\infty J^p(\rho_1\sqrt{x^2+z^2})(x^2+z^2)^{-\frac{p}{2}} J^r(\rho x) x^{r-1}\, dx =$$

$$= \frac{2^{r-1}\Pi(r-1)}{\rho^r} \frac{J^p(\rho_1 z)}{z^p} \qquad [\rho > \rho_1 \quad p > r-1 > -1]$$

ist, die Relation:

$$\int_0^\infty J^n(\rho_1\sqrt{x^2+z^2}) J^m(\rho_1\sqrt{x^2+z^2})(x^2+z^2)^{-\frac{m+n}{2}} J^r(\rho x) x^{r-1}\, dx =$$

$$= \frac{2^r\Pi(r-1)}{\pi\rho^r z^{m+n}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} J^{m+n}(2\rho_1 z\cos\rho)\cos(m-n)\varphi\, d\varphi \qquad [\rho > 2\rho_1]$$

oder

$$\int_0^\infty J^n(\rho_1\sqrt{x^2+z^2}) J^m(\rho_1\sqrt{x^2+z^2})(x^2+z^2)^{-\frac{m+n}{2}} J^r(\rho x) x^{r-1}\, dx =$$

$$= \frac{2^{r-1}\Pi(r-1) J^m(\rho_1 z) J^n(\rho_1 z)}{\rho^r z^{m+n}} \qquad [\rho > 2\rho_1].$$

Für $z = 0$ verwandelt sich diese Relation in die folgende:

$$\int_0^\infty J^n(\rho_1 x) J^m(\rho_1 x) J^r(\rho x) x^{r-m-n-1}\, dx = \frac{\Pi(r-1)}{2^{m+n+1-r}\Pi(m)\Pi(n)} \frac{\rho_1^{m+n}}{\rho^r}$$

$$[\rho > 2\rho_1].$$

Auf demselben Wege lässt sich aus der Gleichung 5) die Formel:

$$\int_0^\infty J^\nu(\rho_1\sqrt{x^2+z^2})\,J^\nu(\rho_2\sqrt{x^2+z^2})\,(x^2+z^2)^{-\nu}\,J^r(\rho x)\,x^{r-1}\,dx =$$

$$= \frac{2^{r-1}\Pi(r-1)}{\rho^r}\,\frac{J^\nu(\rho_1 z)\,J^\nu(\rho_2 z)}{z^{2\nu}} \qquad [\rho > \rho_1+\rho_2]$$

herleiten, welche für $z = 0$ in die specielle Formel:

$$\int_0^\infty J^\nu(\rho_1 x)\,J^\nu(\rho_2 x)\,J^r(\rho x)\,x^{r-2\nu-1}\,dx = \frac{2^{r-1}\Pi(r-1)}{[2^\nu\Pi(\nu)]^2}\,\frac{(\rho_1\rho_2)^\nu}{\rho^r}$$

$$[\rho > \rho_1+\rho_2]$$

übergeht.

Durch wiederholte Anwendung des eben angewendeten Verfahrens findet man sofort die allgemeinen Relationen:

$$\int_0^\infty J^\nu(\rho_1\sqrt{x^2+z^2})J^\nu(\rho_2\sqrt{x^2+z^2})\ldots J^\nu(\rho_s\sqrt{x^2+z^2})J^r(\rho x)(x^2+z^2)^{-\frac{s\nu}{2}}x^{r-1}\,dx =$$

$$= \frac{2^{r-1}\Pi(r-1)}{\rho^r}\,\frac{J^\nu(\rho_1 z)\,J^\nu(\rho_2 z)\ldots J^\nu(\rho_s z)}{z^{s\nu}} \qquad [\rho > \rho_1+\rho_2+\ldots+\rho_s]$$

$$\int_0^\infty J^\nu(\rho_1 x)\,J^\nu(\rho_2 x)\ldots J^\nu(\rho_s x)\,J^r(\rho x)\,x^{r-s\nu-1}\,dx = \frac{2^{r-1}\Pi(r-1)}{[2^\nu\Pi(\nu)]^s}\,\frac{(\rho_1\rho_2\ldots\rho_s)^\nu}{\rho^r}$$

$$[\rho > \rho_1+\rho_2+\ldots+\rho_s]$$

$$\int_0^\infty J^n(\rho_1\sqrt{x^2+z^2})\,J^m(\rho_1\sqrt{x^2+z^2})\,J^{m+n}(\rho_2\sqrt{x^2+z^2})\,J^{m+n}(\rho_3\sqrt{x^2+z^2})$$

$$J^{m+n}(\rho_s\sqrt{x^2+z^2})J^r(\rho x)\,(x^2+z^2)^{-\frac{s(m+n)}{2}}\,x^{r-1}\,dx = \frac{2^{r-1}\Pi(r-1)}{\rho^r}\,.$$

$$.\,\frac{J^m(\rho_1 z)J^n(\rho_1 z)\,J^{m+n}(\rho_2 z)\ldots J^{m+n}(\rho_s z)}{z^{s(m+n)}} \qquad [\rho > 2\rho_1+\rho_2+\rho_3+\ldots\rho_s]$$

$$\int_0^\infty J^n(\rho_1 x)J^m(\rho_1 x)J^{m+n}(\rho_2 x)J^{m+n}(\rho_3 x)\ldots J^{m+n}(\rho_s x)J^r(\rho x)x^{r-s(m+n)-1}\,dx =$$

$$= \frac{\Pi(r-1)}{[2^{m+n}\Pi(m+n)]^{s-1}}\,\frac{(\rho_1\rho_2\ldots\rho_s)^{m+n}}{2^{m+n+1-r}\rho^r\,\Pi(m)\,\Pi(n)} \qquad [\rho > 2\rho_1+\rho_2+\rho_3+\ldots+\rho_s]$$