

Über die Bahn eines Kometen, der während seiner günstigen Helligkeit nicht aus den Sonnenstrahlen heraustreten kann.

Von Dr. J. Holetschek,

Adjunct der Wiener Sternwarte.

(Mit 5 Holzschnitten.)

Das von den Beobachtern zu Sohag in Agypten, 1882, Mai 16., in der Nähe der total verfinsterten Sonne wahrgenommene kometenähnliche Object ist bekanntlich weder vor, noch nach diesem Tag gesehen worden. Ob dieser Umstand bloß von der Mangelhaftigkeit der Nachsuchungen herrührt oder ob das Gestirn tatsächlich längere Zeit in den Sonnenstrahlen verborgen blieb, vor und nach diesem Zeitraum aber zu lichtschwach war, um gesehen zu werden, lässt sich wohl nicht entscheiden, immerhin hat es einiges Interesse, die Möglichkeit des letzteren Falles etwas genauer zu untersuchen.

Ein Komet kann im Allgemeinen aus zwei Gründen für uns unsichtbar sein; einmal, wenn seine Distanz von der Erde oder Sonne eine gewisse Grösse übersteigt, dann aber auch, wenn sein scheinbarer geocentrischer Abstand von der Sonne, also seine Elongation, nach jeder Richtung hin sehr gering ist. Diese beiden Fälle sind vom Beobachtungsort auf der Erde unabhängig. Für eine bestimmte geographische Breite tritt aber noch ein Fall hinzu, welcher den zweiten in sich schliesst, nämlich der, dass ein Gestirn, wenn auch in grösserer Elongation, auch dann unsichtbar bleiben kann, wenn es ausser am Tage nur noch während der Dämmerung über dem Horizont steht, in der vollen Nacht dagegen unter dem Horizont, d. h. also, wenn es sich innerhalb der durch den heliakischen Auf- und Untergang

bestimmten Grenzen befindet; diesen letzten Fall habe ich jedoch nicht behandelt.

Die Grösse jener Elongation von der Sonne, innerhalb welcher ein Komet nicht mehr gesehen wird, ist wohl von Fall zu Fall verschieden, doch wissen wir mit Bestimmtheit, dass das Kometensuchen in beträchtlicher Sonnennähe nur ausnahmsweise Erfolg haben kann; ich werde daher hauptsächlich die Elongation $\psi = 15^\circ$ behandeln, die etwas kleiner ist, als der Abstand des Dämmerungskreises vom Horizont. Da aber solche Nachforschungen nur tief am Horizont, also im Osten beim Beginn und im Westen beim Verschwinden der Dämmerung betrieben werden können, hier jedoch, abgesehen von localen Hindernissen, besonders durch die atmosphärischen Verhältnisse beeinträchtigt, manchmal sogar unmöglich gemacht werden, werde ich auch noch die weitere Grenze, $\psi = 22\frac{1}{2}^\circ$, betrachten. Auf den Äquator bezogen und in Zeit ausgedrückt, beträgt also die innere Grenze 1^h , die äussere $1^h 30^m$.¹

Was die Helligkeit betrifft, so kann hier nur die theoretische Lichtintensität, $J = \frac{1}{r^2 \rho^2}$, in Rechnung gezogen werden. Es schwankt nun freilich jene Helligkeit, bei welcher gegenwärtig die Kometen entdeckt werden, für die einzelnen Gestirne mindestens ebenso stark, wie jene Elongation, innerhalb welcher ein Komet noch zu erkennen ist, doch scheint es der Erfahrung nicht zu widersprechen, wenn die untere Durchschnittsgrenze zwischen 0.06 und 0.12 liegend angenommen wird. So wurde, um nur einige extreme Beispiele aus den letzten Jahren anzuführen, der Komet 1874 IV bei $J = 0.14$ entdeckt, 1874 III (der grosse) und 1877 IV bei $J = 0.13$ und zwar alle drei von Coggia in Marseille; ferner 1880 II (Schäberle) bei $J = 0.06$ und 1882 I (Wells) bei $J = 0.08$; der Komet von 1812 wurde bei seiner Rückkehr am 1. Sept. 1883 schon bei $J = 0.03$ aufgefunden.

Olbers sagt in einem Briefe an Bessel 1806, dass ein Komet $25^\circ - 30^\circ$ von der Sonne entfernt sein müsse, um gesehen zu werden. Da aber gegenwärtig das Kometensuchen grösstentheils mit besseren Hilfsmitteln betrieben wird, erscheint die Wahl von engeren Grenzen ganz gerechtfertigt.

Beobachtet wurden freilich manchè Kometen nach ihrer Entdeckung bis zu noch kleineren Helligkeiten, doch lasse ich dieselben absichtlich aus dem Auge, da es weitaus leichter ist ein Gestirn von bekannter Position zu finden, als ein noch fremdes beim willkürlichen Herumsuchen nicht zu übersehen.

Ich nehme also die untere Grenze für die Helligkeit nicht fix, sondern lasse ihr einen Spielraum zwischen zwei anderen Grenzen. Man kann dieselben dahin deuten, dass Kometen, so lange J zwischen 0.06 und 0.12 liegt, in der Nähe des Horizontes, auf die ja hier durchgehends zu achten ist, nur mit Mühe, bei $J < 0.06$ aber gar nicht mehr zu erkennen sind. Mit $J > 0.06$ und noch mehr mit $J > 0.12$ gelangt man in das Gebiet der „günstigen“ Helligkeiten. Für den Werth 0.06, oder wenn man will 0.0625, habe ich mich darum entschieden, weil in ihm der ganz einfache, specielle Fall $r=2$, $\rho=2$ enthalten ist; die Wahl von $J=0.12$ wird später motivirt werden. Ganz streng jedoch habe ich mich in meinen Erörterungen an diese Grenzen nicht immer gehalten. Auch sind, wenn man dieselben zu starr findet, durch die den einzelnen Elongationen fast durchgehends beigesetzten Zahlen für J die Mittel geboten, die Rechnungsergebnisse direct auch unter Voraussetzung einer anderen Helligkeitsgrenze zu discutiren.

Da die ganze Rechnung bloß einen Durchschnittscharakter hat, können ihre Resultate natürlich keine Anwendung finden auf solche Kometen, die durch eine besondere Grösse ausgezeichnet sind, und in Folge dessen nicht nur in ausserordentlich grossen Distanzen beobachtet werden können (siehe eine Zusammenstellung solcher Kometen in der englischen Wochenschrift „Nature“ vom 9. März 1882), sondern auch, wenn sie in eine bedeutende Erd- oder Sonnennähe gelangen, eine glänzende Erscheinung darbieten; so hat, um nur ein Beispiel aus der letzten Zeit anzuführen, der grosse Komet, der im September 1882 am hellen Tage sogar in der nächsten Nähe der Sonne beobachtet wurde, als Ausnahme zu gelten.

Andererseits sind sehr kleine Kometen, wie z. B. 1879 IV, der nur schwer zu beobachten war, obwohl die Lichtintensität Werthe zwischen 0.8 und 0.5 hatte, hier schon von vorneherein ohne Bedeutung; bei solchen Kometen wäre noch früher das entgegen-

gesetzte Thema zulässig, nämlich unter Annahme einer oberen Helligkeitsgrenze nachzusehen, in welchem Fall dieselben trotz ihrer Lichtschwäche sichtbar werden können.

Auch die Leistungsfähigkeit sehr grosser Teleskope muss ausser Acht gelassen werden, denn wenn auch mit solchen Instrumenten bekannte Kometen beobachtet werden, so wird mit denselben in der Regel doch nicht nach Kometen gesucht.

Die Rechnung begann ich mit der Aufsuchung jener Umstände, welche dem Verbleiben des Kometen innerhalb der Elongationen 15° und $22\frac{1}{2}^\circ$ am förderlichsten sind. Tritt er wirklich heraus, so ist zu ermitteln, ob an dieser Stelle J genügend klein ist, um zu der Behauptung zu berechtigen, dass hier der Komet übersehen werden kann. Damit den gestellten Anforderungen entsprochen wird, muss die Bahn eigenartigen Beschränkungen unterworfen sein, und diese sollen jetzt näher betrachtet werden. Die Kometenbahn wird dabei durchgehends als Parabel, die Erdbahn als Kreis vorausgesetzt.

Ich gehe von der Annahme aus, dass sich das Sichtbarwerden des Kometen auf beiden Ästen der Parabel nur dann möglichst vermindern lässt, wenn die grösste Lichtintensität mit der geringsten Elongation von der Sonne zusammenfällt und wenn die heliocentrischen und geocentrischen Wege des Kometen vor und nach dem Perihel zu dem Ort, den die Erde während des Periheldurchganges des Kometen einnimmt, symmetrisch liegen. Dies wird erreicht, wenn er sich zur Zeit des Perihels in Conjunction mit der Sonne und zugleich in der Ekliptik befindet. Unter dieser Voraussetzung hat jeder der beiden Äste an den Sichtbarkeitsverhältnissen ganz denselben Antheil, auf jedem macht sich der Komet in derselben Masse bemerkbar. Dagegen treibt ihn jedes Abgehen von dieser Symmetrie zwar auf dem einen Ast noch mehr in die Sonnenstrahlen hinein, dafür aber auf dem andern um ebensoviel wieder heraus; hier würde also schon ein Plus von Helligkeit entstehen, was eben vermieden werden soll.

Erst dann, wenn die Periheldistanz schon sehr gross (viel grösser als die Einheit) ist, entfällt die Forderung einer symmetrischen Lage der Parabeläste gegen die Erde. Dieser Fall entzieht sich aber beinahe schon der Rechnung, denn für bedeutende Periheldistanzen kann die Bahn selbstverständlich jede beliebige

Lage haben, ohne dass wir solche Kometen zu Gesicht bekommen. Eher noch könnte man für dieselben eine, der vorliegenden entgegengesetzte Untersuchung anstellen, nämlich (so wie für sehr unansehnliche Körper auch hier) nachsehen, nicht, wann sie trotz geringer Distanzen unsichtbar bleiben, sondern, wann sie trotz bedeutender Entfernungen für uns sichtbar werden können. Mit Ausnahmen dürfen wir uns hier nicht beschäftigen, und dass ein Komet mit einer enormen Periheldistanz, wie der von 1729, beobachtet werden konnte, steht bisher vereinzelt da.

In dieser ersten Bedingung ist eine weitere, mehr specielle enthalten, nämlich die, dass die Axe der Kometenbahn ganz oder nahezu in der Ekliptik liegen muss. Nennen wir den Winkel, den diese Axe mit der Ekliptik bildet, also die heliocentrische Breite des Perihels, b_0 , ist ferner ω der Abstand des Perihels vom Knoten und i die Neigung, so besteht die Gleichung

$$\sin b_0 = \sin \omega \sin i.$$

Soll daher $\sin b_0 = 0$ werden, so muss entweder ω oder $= 0^\circ$ oder $= 180^\circ$ sein.

Diese Bedingung ist insoferne etwas einfacher als die erste, als aus den vorgelegten Elementen einer Kometenbahn direct entschieden werden kann, wie weit dieselbe erfüllt ist, während bei der vorigen auch noch die Kenntniss der zur Perihelzeit stattfindenden Erd- oder Sonnenlänge erfordert wird.

Entfernt man sich von der Bedingung, dass die heliocentrische Breite des Perihels Null sein soll, so kann die Symmetrie der beiden Äste gegen den Erdort entweder gewahrt bleiben oder nicht. Der erste Fall wird später noch untersucht werden, der andere aber könnte zur Folge haben, dass die Distanz von der Erde auf dem einen Ast wesentlich grösser oder kleiner wird, als auf dem andern, und daher das Verborgenbleiben auf dem einen Ast nur durch das Sichtbarwerden auf dem anderen zu Stande kommt, und dieser Fall ist daher schon von vorneherein auszuschliessen.

Betrachten wir, um schon hier eine kleine Untersuchung über die Helligkeiten anzustellen, den Fall, dass $q > 1$ ist, und denken wir uns, damit die theoretische Lichtintensität klein wird, das Perihel jenseits der Sonne, wobei wir vorerst die Bahnebene in der Ekliptik liegend annehmen; wie gross ist

die Helligkeit des Kometen im Perihel? (Natürlich abgesehen davon, dass er jetzt nicht wahrzunehmen wäre, da er sich hinter der Sonne befindet.) Da unter dieser Voraussetzung $r = q$ und $\rho = q+1$ ist, ergibt sich:

für $\log q = 0.00$	$J = 0.25$
0.04	0.19
0.08	0.14
0.12	0.11
0.16	0.08
0.20	0.06

Wenn wir nun die einem bestimmten q entsprechende Bahn aus der Ekliptik herausdrehen, etwa um den Parameter als Axe, so wird die im Perihel stattfindende Helligkeit grösser, weil ρ abnimmt. Wir können aber unter anderen auch die Forderung stellen, die Bahnebene für eine Reihe von verschiedenen q gerade so weit zu drehen, dass die Helligkeit J stets dieselbe bleibt. Soll z. B. im Perihel $J = 0.11$ betragen, so ist es gestattet, von $\log q = 0.12$ aufwärts, die Bahn aus der Ekliptik zu drehen, also von der Bedingung $\sin b_0 = 0$ abzugehen, und zwar umsomehr, je grösser q ist; wird gefordert, dass die Helligkeit 0.06 beträgt, so ist diese Änderung erst für $\log q > 0.20$ erlaubt.

Wir bestimmen nun die für b_0 zulässigen Werthe. Da der Parameter in der Ekliptik bleiben soll, ist $\omega = \pm 90^\circ$, wovon wir nur den positiven Werth benützen wollen, und somit der Winkel der Bahnaxe mit der Ekliptik zugleich auch die Neigung der Bahnebene.

Es sind nun in dem ebenen Dreieck zwischen Erde, Sonne und Komet, worin die Seite Erde—Sonne = 1, Sonne—Komet = $r = q$ ist und die Seite Erde—Komet, ρ , aus der Relation $r^2 \rho^2 = \frac{1}{J}$ hervorgeht, alle drei Seiten bekannt; b_0 , also auch i , ist sonach das Supplement des der Seite ρ gegenüberliegenden Winkels. Da das Product der beiden Seiten r und ρ constant ist, so liegen alle Schnittpunkte derselben auf einer Cassinischen Curve.¹

¹ Diese Curve, für die vorliegende Arbeit nur von nebensächlicher Bedeutung, ist von Olbers, zum Theil auch von Bessel in Bezug auf die

Soll z. B. $J = 0.0625$ sein, so ist $\rho = \frac{4}{q}$; man findet:

$\log q$	b_0
0.21	41°
0.23	61
0.25	75
0.27	88

Wenn man also bei einem gewissen q angelangt ist, so steigt der für eine bestimmte Helligkeit in der Neigung und auch in der Lage der Bahnaxe zulässige Spielraum mit wachsendem q sehr rasch an. Dieses specielle Beispiel gibt schon einen Beleg dafür, dass man von den aufgestellten Bedingungen nur bei grossen Periheldistanzen abgehen darf. Auf die Änderungen von i und b_0 kommen wir bei Betrachtung der Elongationen wieder zurück.

Die zuerst vorgeführte Bedingung, dass nämlich der Komet während seines Periheldurchganges nahe in Conjunction mit der Sonne sein muss, zerfällt in zwei, da er sich entweder jenseits oder diesseits der Sonne befinden kann. Bei Mercur und Venus werden diese Constellationen bekanntlich als obere und untere Conjunction unterschieden. In jenem Fall muss, wie sich herausstellt, q ziemlich gross (um 1 herum), in diesem dagegen sehr klein sein.

Diese beiden Fälle werde ich nun gesondert betrachten: Ich wähle zunächst jene Verhältnisse, unter denen der Komet am leichtesten in den Sonnenstrahlen verborgen bleibt, solange er eine Helligkeit besitzt, die bei grösserer Elongation seiner Auffindung günstig wäre, und beginne dann hievon allmählig abzugehen, indem ich untersuche, wie weit man die Bahnelemente variiren kann, ohne dass ein Sichtbarwerden zu erwarten steht. Gelangt man auf

Sichtbarkeit der Kometen näher untersucht worden. Siehe den Briefwechsel zwischen Olbers und Bessel aus dem Jahre 1806 und „Einige Bemerkungen über die Aufsuchung der Kometen“ von Olbers im Berliner Astronomischen Jahrbuch für 1809, ferner den Aufsatz in den Astr. Nachr. Band 103 von P. Harzer: „Über die Wahrscheinlichkeit, einen Kometen aufzufinden als Function seines geocentrischen Winkelabstandes von der Sonne“, welcher hauptsächlich eine Berichtigung der von Olbers aufgestellten Principien ist.

unzulässige Elongationen und Intensitäten, so bricht die Rechnung an dieser Stelle ab. Da die Grenzwerte größeres Interesse bieten, so sind sie meist etwas umständlicher mitgetheilt.

Da die Erdbahn als Kreis angenommen ist, entsteht der Vortheil, dass man die Verhältnisse in allen jenen Fällen, in denen der Komet zur Zeit des Perihels zugleich in Conjunction mit der Sonne ist, nur für die eine Seite vom Perihel aus zu rechnen braucht, weil die zu beiden Seiten symmetrisch liegenden Partien congruent sind.

Ist L_0 die geocentrische Länge der Sonne zu der Zeit, in welcher der Komet im Perihel steht, und m ihre mittlere tägliche Bewegung ($59'8''$), so ist die jeweilige Länge der Sonne $L = L_0 + mt$, worin t nach dem Perihel positiv, vor demselben negativ genommen wird. In den folgenden Rechnungen ist, wo zwei congruente Partien bestehen, immer nur die nach dem Perihel liegende angeführt.

Als Fundamentalebene ist durchaus die Ekliptik gewählt.

I. Fall.

Komet im Perihel jenseits der Sonne.

Damit der Komet längere Zeit mit der Sonne nahezu in Conjunction bleiben kann, muss er directe Bewegung besitzen, und damit er nicht weit nördlich oder südlich von der Sonne heraustritt, muss die Ebene seiner Bahn nahezu mit der Ekliptik zusammenfallen. Die Rechnung wurde zuerst unter der einfachsten Voraussetzung, $i = 0$, geführt.

Da zur Zeit des Perihels die Länge der Sonne L_0 ist, so hat man unter der Annahme, dass der Komet im Perihel mit der Sonne in Conjunction ist, $\pi = L_0$, und somit ist schon über vier Elemente verfügt: $T =$ Moment, für welchen $t = 0$ ist; $\pi = L_0$; $i = 0$; Ω entfällt.

Es sind nun die Periheldistanzen q so zu wählen, dass der Forderung des Verborgenbleibens entsprochen wird. Ist l die heliocentrische Länge des Kometen, r sein Radius vector, ferner λ seine geocentrische Länge und ρ seine Entfernung von der Erde, so gelten, da sämmtliche Breiten Null sind, die Relationen:

$$\left. \begin{aligned} \rho \cos(\lambda - L) &= r \cos(l - L) + R \\ \rho \sin(\lambda - L) &= r \sin(l - L) \end{aligned} \right\} \quad 1)$$

woraus

$$\operatorname{tg}(\lambda - L) = \frac{r \sin(l - L)}{r \cos(l - L) + R} \quad 2)$$

$(\lambda - L)$ ist die Differenz zwischen der geocentrischen Länge des Kometen und der der Sonne, und da $i = 0$, auch identisch mit der gesuchten Elongation ψ ; ist dieselbe $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{smallmatrix} \right\}$, so befindet sich der Komet $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{östlich} \\ \text{westlich} \end{smallmatrix} \right\}$ von der Sonne. Diese Unterscheidung genügt vollkommen, da Elongationen im zweiten und dritten Quadranten gar nicht in Betracht kommen; es ist daher $\cos(\lambda - L)$ stets positiv. Da die Erdbahn als Kreislinie angenommen wird, ist durchgehends $R = 1$ gesetzt worden; der Conformität halber habe ich jedoch in den Formeln den Buchstaben R beibehalten.

Wegen $i = 0$ ist die heliocentrische Länge des Kometen l identisch mit der Länge in der Bahn, $\pi + v$, also, da $\pi = L_0$ ist.

$$l = L_0 + v \quad (v = \text{wahre Anomalie})$$

ferner ist

$$L = L_0 + mt$$

somit

$$l - L = v - mt.$$

L_0 fällt heraus, da es sich nicht um Längen selbst, sondern nur um Differenzen von Längen handelt.

Ich habe nun für mehrere Werthe von q ephemeridenmässig je eine längere Reihe von Elongationen $(\lambda - L)$ sammt den zugehörigen Distanzen berechnet. Indem ich die erhaltenen speciellen Zahlenwerthe unterdrücke, führe ich blos den Verlauf der Erscheinung im Allgemeinen an.

Ist q nicht weit von 1 entfernt, so kommt der Komet nach dem Perihel östlich von der Sonne langsam hervor, erreicht nach etwa 40 Tagen das Maximum seiner östlichen Elongation (jedoch kleiner als 15°) und nähert sich hierauf wieder der Sonne, mit welcher er nach ungefähr ebenso langer Zeit abermals in Conjunction tritt, während er hinter ihr vorbeigeht. Nun wandert er

immer rascher auf der Westseite heraus, doch ist, wenn er $\psi = -15^\circ$ passirt, $r\rho$ bereits grösser als 4, also $J < 0.0625$.

Es kommt zwar später noch zu einer secundären Annäherung an die Erde, doch sind die Distanzen schon so gewachsen, dass die Helligkeit nicht mehr diesen Grenzwert erreichen kann. Es sei hier gleich bemerkt, dass alle späteren Elongationen und deren Maxima, sowie die bei jedem Erdumlauf eintretenden secundären Annäherungen, die vom mathematischen Gesichtspunkt zwar ebenso interessant, für unseren praktischen Fall jedoch wegen der zu grossen Distanzen bedeutungslos sind, ganz ausser Acht gelassen werden.

Genau denselben Verlauf nimmt nun die Erscheinung des Kometen auch vor dem Perihel, nur mit dem Unterschiede, dass für negative Werthe von t die östlichen und westlichen Elongationen mit einander tauschen. Nach unseren Voraussetzungen bleibt also das Gestirn unter den hier kurz dargestellten Verhältnissen für die Erde ganz unsichtbar.

Besonderes Interesse und auch besondere Wichtigkeit hat das Maximum der östlichen Elongation, weil gerade hier eine ansehnliche Intensität des Kometen mit einem beträchtlichen Winkelabstand von der Sonne zusammenfällt. Eine directe Bestimmung desselben führt auf eine transcendente Gleichung auch dann, wenn man sich die Vereinfachung erlauben würde, für den Sinus oder die Tangente der Elongation den Bogen zu setzen. Ich habe daher die Maxima empirisch ermittelt.

Aus der schon erwähnten, ephemeridenmässig abgeleiteten Reihe von Elongationen lässt sich nämlich leicht durch Interpolation sowohl die grösste Elongation selbst, als auch das zugehörige t angenähert bestimmen, worauf eine directe Berechnung von zwei oder drei nahe an einander liegenden Positionen hinreichend genau entscheiden lässt, wo und in welcher Grösse dieses Maximum auftritt. Hat man auf diese Weise die Zeit des Maximums für ein bestimmtes q gefunden, so ist es leicht, sie auch für ein benachbartes q zu erhalten, und man kann daher, wenn man den Gang der Werthe einmal kennt, weiter schreiten, ohne eine überflüssige Rechnung machen zu müssen.

Tabelle I gibt für eine Reihe von Periheldistanzen mit dem Argument $\log q$ die Maxima der Elongationen ψ . Da sich die

Elongation in der Nähe des Maximums nur langsam ändert, hielt ich es für hinreichend, t bis auf halbe Tage genau anzugeben.

Beigesetzt sind auch in grösseren Intervallen die während dieser Elongation stattfindenden Helligkeiten J ; die für $\psi < 15^\circ$ geltenden sind zwar jetzt ohne Interesse, später jedoch, wenn die Bahn etwas aus der Ekliptik gedreht werden wird, sind sie insgesamt von Wichtigkeit. Man sieht, dass sie für die einzelnen q nur wenig von einander verschieden sind; es hat also q auf die Helligkeit innerhalb der hier betrachteten Grenzen nur wenig Einfluss, während dagegen die Elongationen viel bedeutender alterirt werden.

Tabelle der grössten Elongationen.

$\log q$	t	ψ	J	II. Con- junction
	Tage			Tage
0.08	21	0°32'	0.13	37.0
0.06	28½	1 28		51.2
0.04	33½	2 35		61.6
0.02	37½	3 51		69.9
0.00	40½	5 12	0.14	76.9
0.98	42½	6 38		82.9
9.96	44½	8 6		88.2
9.94	46	9 35		92.9
9.92	47	11 6	0.15	97.2
9.90	48½	12 38		101.1
9.88	49	14 9		104.6
9.86	49½	15 41		107.9
9.84	50	17 12	0.16	110.9
9.82	50½	18 42		113.7
9.80	51	20 11		116.3
9.78	51	21 39		118.8
9.76	51½	23 6	0.16	121.1

I)

Die letzte Columnne enthält die Zeitpunkte der zweiten Conjunction, beantwortet also die Frage, wann $\lambda - L = 0$, somit auch $v - mt = 0$ wird. Zum ersten Male wird der Gleichung $v = mt$ im Perihel genügt, da hier v und t gleichzeitig Null sind,

und zwar für jedes beliebige q . Um nun auch die erste nach dem Perihel eintretende Conjunction (in der Tabelle als II. Conjunction bezeichnet) zu finden, hat man die Gleichung $v = mt$ für ein vorgelegtes q durch Versuche zu lösen. Man wählt, wenn sonst keine Näherung bekannt ist, einen beliebigen Werth von t , entnimmt mittelst $\frac{t}{q^{3/2}} = M$ aus der Barker'schen Tafel die wahre

Anomalie v , identificirt dieselbe mit mt , worauf man nach Division durch m ein neues t bekommt, welches der Wahrheit näher ist und als Ausgangswerth für den zweiten Versuch zu benützen ist.

Aus den Anfangs- und Endwerthen dieser beiden Versuche lässt sich auf bekannte Weise ein neuer Werth für t bestimmen, der je nach dem gewünschten Genauigkeitsgrade dem wahren Werth schon ganz oder nahezu gleichkommt. Von den Zahlen dieser Columnne wird bei der Variation der Neigung Gebrauch gemacht werden.

Geht man mit $\log q$ bis 9.86 und 9.76 herunter, so übersteigt, wie die Tabelle lehrt, die Elongation ψ bereits 15° , beziehungsweise $22\frac{1}{2}^\circ$, während die Helligkeit J noch immer 0.16 beträgt. Soll also der Komet unsichtbar bleiben, so darf man mit q nicht weiter herabgehen, sondern muss hier abbrechen. Durch Interpolation findet man, dass der genaue Grenzwert für $\psi = 15^\circ 0'$ bei $\log q = 9.8689$, also bei $q = 0.7395$ liegt, und für $\psi = 22^\circ 30'$ bei $\log q = 9.7683$, also bei $q = 0.5865$.

Wird $\log q > 0.1003$, nämlich $q > \sqrt[3]{2}$, so bleibt stets $v < mt$, somit $l - L < 0$, also auch $\lambda - L < 0$, d. h. der Komet tritt gar nicht mehr östlich von der Sonne, oder bestimmter gesagt vom Sonnenmittelpunkte heraus. Diese Bedingung kann man auf folgende Art finden. Für kleine v darf die bekannte Gleichung

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{v}{2} = \frac{kt}{q^{3/2}\sqrt{2}}$$

geschrieben werden:

$$\frac{v}{2} + \frac{1}{3} \left(\frac{v}{2} \right)^3 = \frac{kt}{q^{3/2}\sqrt{2}}$$

worin aber jetzt k in Bogen zu verstehen und in Folge dessen mit m , der mittleren täglichen Bewegung der Erde, zu identificiren ist; man erhält somit

$$q^{3/2} \sqrt{2} \left(\frac{v}{2} + \frac{1}{3} \frac{v^3}{2^3} \right) = mt.$$

Da nun für jedes auch noch so kleine r stets $mt > r$ bleiben soll, so muss auch, wenn für mt der soeben gefundene Werth substituirt wird:

$$q^3 \sqrt[2]{2} \left(\frac{v}{2} + \frac{1}{3} - \frac{v^3}{2^3} \right) > v$$

oder

$$q^3/2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{v^2}{2^3}\right)>1 \text{ sein.}$$

Lässt man nun r gegen Null convergiren, so resultirt:

$$q^3/2 > \sqrt{2} \text{ oder } q^3 > 2.$$

Da also für diesen Grenzfall $q = r = 1.26$, so ist $\varphi = q+1 = 2.26$, demnach $\frac{1}{r^2 \varphi^2} = 0.12$, und aus diesem Grunde habe ich in der Einleitung für die obere Grenze des Minimums der Entdeckungshelligkeit eines Kometen die Zahl 0.12 gewählt.

Wir haben jetzt die Elongationen auf der Ostseite betrachtet. Auf der Westseite haben dieselben kein Maximum, sondern wachsen fortwährend; sobald aber die Elongation $\psi = -15^\circ$ und $\psi = -22\frac{1}{2}^\circ$ passirt wird, ist, wie schon erwähnt, $J < 0.06$. Für $\log q > 0.10$ tritt der Komet zwar nicht mehr östlich heraus, dafür werden aber, wie die Rechnung lehrt, seine Sichtbarkeitsverhältnisse auf der Westseite etwas günstiger, aber auch nur bis dorthin, wo ungefähr $\log q = 0.16$ ist. Für $\psi = -15^\circ$, zum Theil auch für $\psi = -22\frac{1}{2}^\circ$ habe ich die Helligkeiten durch Rechnung einiger Nachbarwerthe und nachherige Interpolation ermittelt; sie sind in der That so klein, dass der Komet unbeachtet bleiben muss. Für $\psi = -22\frac{1}{2}^\circ$ habe ich sie darum nicht alle berechnet, weil sie hier noch kleiner sind, als für $\psi = -15^\circ$.

Helligkeiten für die Elongation -15° und $-22\frac{1}{2}^\circ$

$\log q$	$\psi = -15^\circ$		$\psi = -22\frac{1}{2}^\circ$	
	t	J	t	J
0.24	56	0.035	77	0.030
0.20	66	0.039		
0.16	78	0.040		
0.12	89	0.038	107	0.029
0.08	99	0.034		
0.04	108	0.029		
0.00	116	0.025	130	0.020
9.96	123	0.022		
9.92	129	0.019		
9.88	134	0.016	147	0.013

II)

Da die Intensitäten von $\log q = 0.00$ aufwärts mit wachsendem q noch immer zunehmen, wurden hier ausnahmsweise auch grosse Werthe von q in Betracht gezogen, um die Versicherung zu erlangen, dass das Maximum von J überschritten oder doch wenigstens schon erreicht ist.

Die in den beiden Columnen t angeführten Zahlen bezeichnen — der Voraussetzung gemäss — jenen Zeitraum, in welchem der Komet den Weg vom Perihel zum Maximum der östlichen Elongation, hernach zur zweiten Conjunction mit der Sonne und schliesslich auf der Westseite bis zu der (nun stetig wachsenden) Elongation von -15° , beziehungsweise $-22\frac{1}{2}^\circ$ zurücklegt. Da nun ganz dieselben Verhältnisse auch vor dem Perihel (in umgekehrter Reihenfolge) stattfinden, so verbleibt der Komet $2t$ Tage innerhalb des zugehörigen „Strahlenkreises“.

Z. B. für $\log q = 9.88$ bleibt die Elongation ψ durch den langen Zeitraum von $2 \times 134 = 268$ Tagen kleiner als 15° und während $2 \times 147 = 294$ Tage kleiner als $22\frac{1}{2}^\circ$.

Verschiebung des Perihels.

Bisher ist $\pi = L_0$ angenommen. Da erst für $\log q < 9.87$ (beziehungsweise < 9.77) das Maximum der östlichen Elongation 15° (beziehungsweise $22\frac{1}{2}^\circ$) übersteigt, so lässt sich für alle Werthe von $\log q$, die grösser als die beiden bezeichneten sind, π nach West oder Ost variiren, ohne dass in Folge dessen die grösste Elongation über 15° (beziehungsweise $22\frac{1}{2}^\circ$) steigt. Diese für π zulässige Variation $d\pi$ ist um so grösser, je grösser q ist.

Da jetzt

$$\pi = L_0 \pm d\pi$$

so ist

$$l = L_0 \pm d\pi + v$$

und da

$$L = L_0 + mt$$

so hat man jetzt

$$l - L = v - mt \pm d\pi. \quad 3)$$

Da die Resultate für $+d\pi$ und $-d\pi$ congruent sein müssen, wurde die Rechnung nur für positive Werthe von $d\pi$ geführt.

Ich habe nun die Maximalwerthe von $d\pi$ ermittelt, und zwar ausführlicher diejenigen, welche das Maximum der östlichen Elongation gerade bis 15° steigen lassen. Einen Näherungswerth für das, einem bestimmten q entsprechende $d\pi$ kann man sich leicht verschaffen, wenn man der früheren Berechnung des jeweiligen Maximums die Werthe von $(l - L)$ und r entlehnt. Da in der Gleichung 2) die Winkelwerthe — unserer Voraussetzung gemäss — nicht sehr gross werden können, ist es gestattet, in erster Annäherung zu schreiben:

$$\lambda - L = \frac{r(l - L)}{r + R}$$

oder auch, wenn man gleichzeitig $R = 1$ setzt:

$$\lambda - L = \frac{l - L}{1 + \frac{1}{r}}.$$

Nun kann man zufolge der Relation 3) eine Verschiebung des Perihels um $d\pi$ dadurch ausführen, dass man diese Änderung einfach an die für $\pi = L_0$ geltende Differenz $(l-L)$ anbringt. Nennt man den Werth, welchen $(\lambda-L)$ in diesem Falle annimmt, ψ^0 , so ist

$$\psi^0 = \frac{(l-L) + d\pi}{1 + \frac{1}{r}}$$

und daraus

$$d\pi = \psi^0 \left(1 + \frac{1}{r} \right) - (l-L). \quad (4)$$

Ist $d\pi$ gefunden, so ergibt sich durch directe Berechnung einer Reihe von Elongationen der Zeitpunkt, auf welchen das Maximum fällt, worauf die zwischen der gefundenen Elongation und ψ^0 gewöhnlich noch auftretende Differenz $d\psi$ sofort beseitigt werden kann, wenn an $d\pi$ noch die Correction $d\psi \times \left(1 + \frac{1}{r} \right)$ angebracht wird. Ist auf diese Weise der genaue Werth von $d\pi$ für ein bestimmtes q bekannt, so lässt sich der Übergang auf ein benachbartes q bewerkstelligen, ähnlich wie man bei Berechnung einer Planetenephemeride leicht einen nahezu richtigen Werth der excentrischen Anomalie erhält, wenn die Rechnung schon begonnen hat.

Tabelle III enthält die für $\psi^0 = 15^\circ$ in der Perihellänge π zulässigen Variationen, denen in grösseren Intervallen auch jene Helligkeiten beige-setzt sind, die der Komet beim Passiren dieser, einem Maximum angehörenden Elongation von 15° hat.

$\log q$	t	$d\pi$ $\pm$	J
9.92	49	$7^\circ 6'$	0 15
9.94	$48\frac{1}{2}$	9 50	
9.96	48	12 33	0.14
9.98	46	15 10	
0.00	45	17 43	0.13
0.02	42	20 7	
0.04	39	22 20	0.12
0.06	$34\frac{1}{2}$	24 18	
0.08	$27\frac{1}{2}$	25 53	0.11

III)

Fragen wir im Vorbeigehen, was in Folge dieser Verschiebung des Perihels mit dem auf der Westseite, also vor dem Perihel, stattfindenden Maximum geschieht, welches wir sonst in der Regel nicht speciell betrachten. Solange $\pi = L_0$ ist, sind die geocentrischen Wege des Kometen vor und nach dem Perihel congruent, jetzt aber, wo das östliche Maximum in Folge der Anbringung von $d\pi$ noch weiter vergrössert wurde, nämlich bis $\psi = 15^\circ$, kann das westliche Maximum nicht mehr so wie früher bestehen. Man findet nun durch directe Rechnung, dass durch Vergrösserung des östlichen Maximums das westliche verkleinert wird, ja sogar, wenn $d\pi$ hinreichend gross ist, auf die Ostseite hertübberrückt, wodurch also aus den negativen positive Elongationen entstehen und daher das Maximum scheinbar zu einem Minimum wird.

Ausser der bisher betrachteten, einem Maximum angehörigen Elongation passirt der Komet noch zweimal die Elongation von 15° , zuerst wenn er zur Sonne hereinkommt, dann wenn er wieder hinausgeht; an diesen beiden Stellen ist nun noch die Helligkeit zu untersuchen. Da die Elongationen zu beiden Seiten des Perihels jetzt nicht mehr symmetrisch liegen, müssen sowohl die Verhältnisse vor als nach dem Perihel gesondert betrachtet werden; da jedoch durch eine Verschiebung von π die Sichtbarkeitsverhältnisse auf der einen Seite zwar günstiger, dafür aber auf der anderen ungünstiger werden als früher, wo $\pi = L_0$ war, braucht man nur die erste Seite zu untersuchen, da jetzt der Komet auf der zweiten noch weniger sichtbar werden kann als früher.

Wenn wir $d\pi$ positiv wählen, die Länge des Perihels also vergrössern, so finden die günstigeren Verhältnisse auf der Ostseite der Sonne, und zwar vor dem Perihel statt ¹, somit bei negativem $d\pi$ auf der Westseite, und zwar nach dem Perihel. Ich habe die Rechnung für den ersten Fall ausgeführt, und theile hier die

¹ Als Beispiele für diesen Fall kann man die gegenwärtigen Erscheinungen der periodischen Kometen von d'Arrest und Tempel (1873 II) betrachten. Jener passiert sein Perihel: 1884, Januar 13, also bei $L_0 = 293^\circ$, während $\pi = 319^\circ$ ist, somit $\pi = L_0 + 26^\circ$; dieser: 1883, November 20, also bei $L_0 = 238^\circ$, während $\pi = 306^\circ$ ist, somit $\pi = L_0 + 68^\circ$. Für beide ist also diesmal $d\pi$ positiv.

Helligkeiten mit, welche der Komet unter Zugrundelegung der in Tabelle III enthaltenen jeweiligen Werthe von $+d\pi$ beim Passiren der Elongation von $22\frac{1}{2}^\circ$ und 15° besitzt.

log q	$\psi = 22\frac{1}{2}^\circ$		$\psi = 15^\circ$	
	t	J	t	J
9.96	—120	0.024	—105	0.032
0.00	—106	0.032	— 89	0.045
0.04	— 91	0.044	— 68	0.068
0.08	—	0.059	— 39	0.106

IV)

Man sieht, dass durch die in Rede stehenden Änderungen von π bei grösseren Werthen der Periheldistanz ein Sichtbarwerden des Kometen auf der einen Seite vom Perihel ermöglicht wird (für $\log q = 0.08$ ist J bereits 0.106) und kann daraus die Regel ziehen, dass, wenn der Komet auf keiner Seite, also weder am Morgen- noch am Abendhimmel sichtbar werden soll, die Änderung von π sowohl für kleine als für grosse q nur mässig sein darf, dass man sich somit von der Forderung $\pi = L_0$ nirgends sehr weit entfernen darf.

Wir haben jetzt $d\pi$ unter der Bedingung ermittelt, dass die einem Maximum entsprechende Elongation $\psi^\circ = 15^\circ$ sein soll. Wäre $\psi^\circ = 22\frac{1}{2}^\circ$ gefordert, so würde man durch die Formel 4) in Verbindung mit der nach Gleichung 2) durchgeführten directen Rechnung finden, dass z. B. für $\log q = 0.00$ die Änderung $d\pi = 31^\circ$ und für $\log q = 0.08$ schon $d\pi = 39^\circ$ sein darf, wobei das Maximum, nämlich $\psi = 22\frac{1}{2}^\circ$, im ersten Beispiel 48 Tage, im zweiten 31 Tage nach dem Perihel eintritt.

Eine ausführliche Rechnung für diesen Fall unterlasse ich aber, denn durch noch grössere Änderung von π würden die Sichtbarkeitsverhältnisse auf der einen Seite zwar noch ungünstiger als für $\psi^\circ = 15^\circ$, auf der andern dagegen noch günstiger werden, und letzteres soll eben vermieden werden.

Änderung der Neigung.

Alle bis jetzt behandelten Elongationen finden in der Ekliptik statt. Es sind daher die für die Sichtbarkeitsverhältnisse eines Kometen bisher abgeleiteten Bedingungen nur dort anwendbar, wo die Ekliptik Abends oder Morgens auf dem Horizont nahe senkrecht steht, was für die Tropenländer während des ganzen Jahres ziemlich zutrifft. Elongationen nördlich oder südlich von der Sonne haben hier jedoch wenig Bedeutung, weil das Gestirn in diesem Fall nahe gleichzeitig mit der Sonne auf- und untergeht. Anders verhält sich die Sache aber für höhere geographische Breiten, wo sich die Ekliptik schon stark gegen den Horizont niedersenkt. Hier kann ein in der Ekliptik befindliches Gestirn auch bei sehr grossen Elongationen immer noch in der Dämmerung bleiben, während andererseits Elongationen ausserhalb der Ekliptik eine besondere Wichtigkeit erlangen.

Ich gehe also jetzt von der früher gemachten Voraussetzung, $i = 0$, ab und nehme, ähnlich wie mit π , so auch mit i Variationen vor, um die für dieses Element zulässigen Grenzen zu ermitteln. Jetzt ist auch die Länge des Knotens in Rechnung zu ziehen, und ich habe, an der Bedingung $\pi - \Omega_0 = 0^\circ$ oder $= 180^\circ$ festhaltend, $\Omega_0 = \pi = L_0$ angenommen, wodurch das Argument der Breite mit der wahren Anomalie v identisch wird und somit der auf die Ekliptik reducirte Abstand des Gestirns vom Knoten $(l - \Omega_0)$ aus

$$\operatorname{tg} (l - \Omega_0) = \operatorname{tg} v \cos i \quad 5)$$

gefunden wird. Da nun

$$l = L_0 + (l - \Omega_0)$$

und

$$L = L_0 + mt$$

so ist

$$l - L = (l - \Omega_0) - mt.$$

Die Elongation $(\lambda - L)$ und β , sowie die geocentrische Distanz ρ ergibt sich aus

$$\left. \begin{aligned} \rho \cos \beta \cos (\lambda - L) &= r \cos b \cos (l - L) + R \\ \rho \cos \beta \sin (\lambda - L) &= r \cos b \sin (l - L) \\ \rho \sin \beta &= r \sin b \end{aligned} \right\} \quad 6)$$

worin $\sin b = \sin v \sin i$ ist; aus $\sin b$ kann, da b ein mässiger Winkel ist, $\cos b$ genügend sicher bestimmt werden.

$(\lambda - L)$ ist die parallel zur Ekliptik, β (die geocentrische Breite) die senkrecht zur Ekliptik stattfindende Elongation; man findet demnach die totale Elongation ψ als Hypotenuse des rechtwinkligen sphärischen Dreieckes aus

$$\cos \psi = \cos(\lambda - L) \cos \beta. \quad 7)$$

Es ist nun zu untersuchen, wie weit die Neigung für ein gegebenes q ansteigen darf, wenn der Komet, ausser auf der West- und Ostseite der Sonne, auch noch auf der Nord- und Südseite der Ekliptik unsichtbar bleiben soll.

Solange die Neigung klein ist, sind die Bewegungsumstände fast dieselben wie für $i = 0$. Der Komet erreicht also einige Zeit nach dem Perihel auf der Ostseite ein Maximum und tritt sodann mit der Sonne in Conjunction, aber jetzt unter einer von Null verschiedenen geocentrischen Breite, und diese habe ich zunächst ins Auge gefasst.

Da während der Conjunction sowohl $l - L = 0$ als $\lambda - L = 0$ ist, so hat man für diesen speciellen Fall zur Bestimmung von φ und β aus r und v die beiden Gleichungen

$$\varphi \cos \beta = r \cos b + R$$

$$\varphi \sin \beta = r \sin b$$

worin wie früher $\sin b = \sin v \sin i$ und von $\sin b$ mittelst der trigonometrischen Tafeln gleich der Übergang auf $\cos b$ auszuführen ist.

Es handelt sich nun um die Beziehung zwischen dieser geocentrischen Breite und der zugehörigen Neigung der Bahn. Ein einfacher und für mässige Neigungen doch ziemlich richtige Resultate liefernder Ausdruck ergibt sich durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{r \sin b}{r \cos b + R} = \frac{r \sin v \sin i}{r \cos b + R} \quad 8)$$

aus der man erhält:

$$\sin i = \operatorname{tg} \beta \frac{r \cos b + R}{r \sin v}$$

oder in erster Annäherung:

$$i = \beta \frac{r+1}{r \sin v}$$

Wird noch r durch $\frac{q}{\cos^2 \frac{v}{2}}$ ersetzt, so resultirt

$$i = \beta \frac{1 + \cos^2 \frac{v}{2}}{\sin v} \quad 9)$$

worin — der Conjunction wegen — v an die Bedingung gebunden ist:

$$v = mt.$$

Ein vorläufiger Werth von t , der dieser Bedingung für ein vorgelegtes q genügt, kann aus Tabelle I, letzte Columnne, genommen werden, d. h. man ermittelt eigentlich in erster Annäherung die Zeit der Conjunction mit der Sonne unter der Voraussetzung $i = 0$ und identificirt die zugehörige wahre Anomalie mit der, welche für die gesuchte Neigung stattfinden würde, was eben um so mehr zutrifft, je kleiner diese Neigung ist.

Ist ein Näherungswerth für i ermittelt, so kann also, da die Zeit der Conjunction noch nicht bekannt ist, mit dem aus $v = mt$ folgenden t die Rechnung begonnen werden. Hat man v , so bestimmt man $(l - \Omega)$ aus 5) und untersucht, ob die Differenz $(l - \Omega) - mt$ gleich Null ist. Da dies in der Regel nicht der Fall ist, rechnet man für ein in der Nähe befindliches t in derselben Weise, worauf man, die Änderungen der Differenzen proportional annehmend, schon ziemlich genau jenes t findet, welches der Bedingung $(l - \Omega) = mt$ genügt, d. h. also jenem Zeitpunkt, in welchem der Komet unter Annahme der Neigung i in Conjunction mit der Sonne ist. Hierauf ergibt sich β aus 8).

Weicht β von 15° , beziehungsweise $22\frac{1}{2}^\circ$, welche beiden Werthe gemeinschaftlich β^0 heissen mögen, ab, so erhält man, die Änderungen der Breite und der Neigung proportional voraussetzend, die gesuchte Neigung i^0 schon hinreichend genau aus

$$i^0 = i \frac{\beta_0}{\beta}$$

oder auch aus dem differentiellen Verhältniss

$$di = d\beta \frac{\rho \cos \beta}{r \sin v \cos i},$$

welches aus der Gleichung

$$\rho \sin \beta = r \sin v \sin i$$

resultirt, wenn man darin nur β und i als variabel betrachtet, die anderen Grössen (v , r , ρ) dagegen als constant gelten lässt, was natürlich um so eher zutrifft, je weniger i und damit auch β geändert wird.

Auf diese Weise ist das Schema V entstanden, welches jene Neigungen enthält, für welche ein Komet, der im Perihel mit der Sonne in oberer Conjunction sich befindet, die zweite Conjunction unter der geocentrischen Breite 15° und $22\frac{1}{2}^\circ$ passirt.

Alle Zahlen sind direct nachgerechnet, wobei sich herausstellte, dass die durch Näherung gefundenen Werthe für i nirgends mehr als um einen halben Grad von dem wirklichen abwichen. Beigesetzt ist jedesmal der Zeitpunkt t , in welchem der Komet die zweite Conjunction passirt, ebenso die Lichtintensität J .

log q	$\beta = 15^\circ$			$\beta = 22\frac{1}{2}^\circ$		
	t		J	t		J
0.00	73	25°	0.06	—	$—^\circ$	—
9.96	88	24	0.05	$86\frac{1}{2}$	$35\frac{1}{2}$	0.05
9.92	98	23	0.04	$99\frac{1}{2}$	$34\frac{1}{2}$	0.04
9.88	106	23	0.03	109	35	0.03
9.84	113	$23\frac{1}{2}$	0.02	$116\frac{1}{2}$	$35\frac{1}{2}$	0.02
9.80	119	24	0.02	123	$36\frac{1}{2}$	0.02

V)

Nimmt man also zwischen $\log q = 0.00$ und 9.80 (eigentlich noch etwas weiter herab) die Neigung der Bahn zu etwa 24° , so beträgt die geocentrische Breite während der zweiten Con-

der Komet gleich auf der Westseite hervortritt; dies geschieht dann, wenn der aus der Gleichung

$$\operatorname{tg} (l - \Omega) = \operatorname{tg} v \cos i$$

resultirende Werth von $(l - \Omega)$ für jedes t kleiner als mt ausfällt.

In diesem allgemeineren Falle ist der schon früher behandelte enthalten. Setzt man nämlich hier $i = 0$, so ist $(l - \Omega) = v$ und die Bedingung, dass der Komet auf der Ostseite nicht zum Vorschein kommen soll, lautet: $v < mt$, wie früher. Was also für $i = 0$ erst dann eintritt, wenn $\log q > 0.10$ ist, tritt, wenn i einen von Null verschiedenen Werth hat, auch schon für etwas kleinere q ein.

Je grösser nun q ist, um so kleiner wird, wie man in VI angedeutet sieht, jenes i sein dürfen, welches bewirkt, dass $(l - \Omega) < mt$ wird, d. h. also, dass der Komet gar nicht mehr auf der Ostseite, sondern gleich auf der Westseite zum Vorschein kommt.

Für diese grösseren Werthe von q wäre es angezeigt, die in der Neigung zulässigen Grenzen unter der Bedingung zu ermitteln, dass gleichzeitig auch der Knoten, etwa gemeinschaftlich mit π verschoben würde, und zwar so, dass das Maximum der östlichen Elongation, welches unter der Annahme $\pi = L_0$ hier schon sehr klein ist, weiter nach Osten rückt, etwa bis 15° . Diese Arbeit habe ich jedoch unterlassen, hauptsächlich darum, weil solche Kometen weniger Interesse bieten, da sie der grossen Radii vectores wegen nur dann eine bedeutendere theoretische Helligkeit erlangen können, wenn sie zur Zeit des Perihels in sehr beträchtlichen Elongationen sich befinden, etwa in der Quadratur oder gar in der Opposition, während die vorliegende Untersuchung nur den Fall zu betrachten hat, dass der Komet nahe in Conjunction mit der Sonne steht. Später wird sich zeigen, dass in der That noch kein Komet mit parabolischer Bahn unter solchen Verhältnissen beobachtet wurde, welche den hier behandelten gleichen.

Die zuletzt betrachteten Elongationen finden nördlich oder südlich von der Sonne statt. So lange nun der Werth von q nicht weit unter 1 heruntersinkt, bleibt der Komet wirklich, wie man durch directe Berechnung einer Reihe von Positionen findet, auf dem ganzen Wege vom Perihel bis zur Passage der vorgeschriebenen Elongation innerhalb des „Strahlenkreises“, worauf

sich seine, beim Heraustreten ungefähr 0.06 betragende Helligkeit immer mehr vermindert; er wird somit nicht gesehen.

Geht man aber mit q weiter abwärts, so gelangt man von einem gewissen Punkte an zu solchen Stellen, an welchen er zwar noch immer die Conjunction mit der Sonne unter der vorgeschriebenen Breite passirt, seine grösste Elongation aber schon früher, nämlich in dem Quadranten zwischen dem Nord- und Ostpunkte erreicht und zwar in einem Abstand von der Sonne, der bereits mehr als 15° , beziehungsweise $22\frac{1}{2}^\circ$ beträgt. Er tritt also hier einige Zeit aus dem Strahlenkreise heraus, während gleichzeitig seine Helligkeit von 0.20 bis 0.06 herabsinkt, also theilweise noch immer zu gross ist.

Rechnet man z. B. mit $\log q = 9.84$ und $i = 35^\circ 0'$ für eine Reihe von Tagen die Elongationen (nach den Gleichungen 6), so erhält man in der Nähe des Maximums folgende Zahlen:

t	$\lambda - L$	β	ψ	J
65	$14^\circ 41'$	$21^\circ 7'$	$25^\circ 31'$	0.099
66	14 36	21 12	25 32	0.096
67	14 30	21 16	25 33	0.093
68	14 24	21 20	25 33	0.090
69	14 18	21 24	25 32	0.087
70	14 10	21 27	25 31	0.084.

ψ ergibt sich aus $(\lambda - L)$ und β durch die Relation 7).

Da ψ nur ein mässiger Winkel ist und somit die Bestimmung von ψ aus $\cos \psi$ unsicher wäre, habe ich noch die Formeln benützt

$$\sin \psi \cos P = \sin(\lambda - L) \cos \beta$$

$$\sin \psi \sin P = \sin \beta$$

worin P jener Winkel ist, unter welchem der den Kometen mit der Sonne verbindende Bogen gegen die Ekliptik geneigt ist.

Der Komet tritt also, wie die Werthe von ψ in diesem kleinen Rechnungsauszug lehren, über den Strahlenkreis, dessen Radius $22^\circ 30'$ beträgt, um $3^\circ 3'$ heraus. Die Helligkeiten sind zwar hier nicht mehr besonders gross, haben jedoch für kleinere t , also während der Komet von $\psi = 22\frac{1}{2}^\circ$ bis $\psi = 25\frac{1}{2}^\circ$ wandert (im Schema nicht enthalten), noch beträchtliche Werthe.

Man muss daher, wenn der Komet hier nicht zum Vorschein kommen soll, einen Theil der im Schema V enthaltenen Neigungen herabdrücken, und es ist zu diesem Zweck vorerst das Verhältniss zwischen ψ und i zu suchen.

Da an dieser Stelle, abgesehen von den Distanzen, der Sinus der Elongation in Breite dem Sinus der Neigung proportional ist (Gleichungen 6), dagegen der Sinus der Elongation in Länge mit dem Cosinus der Breite multiplicirt ist, während gleichzeitig sowohl die Neigung und Breiten, als auch die Maxima der östlichen Elongation nur mässige Winkel sind, wird durch eine Änderung der Neigung hauptsächlich die Breite, sehr wenig dagegen die Länge beeinflusst. Man kann daher in der Gleichung 7) in erster Annäherung $\cos(\lambda - L)$ als constant betrachten und erhält, wenn man unter dieser Voraussetzung differenzirt:

$$\sin \psi \cdot d\psi = \cos(\lambda - L) \sin \beta \cdot d\beta.$$

Verbindet man diese Gleichung mit der schon früher aufgestellten:

$$r \sin v \cos i \cdot di = \rho \cos \beta \cdot d\beta,$$

indem man $d\beta$ eliminirt, so ist

$$di = \frac{\rho \sin \psi}{r \sin v \cos i \cos(\lambda - L) \operatorname{tg} \beta} \cdot d\psi \quad 10)$$

$d\psi$ ist die Differenz zwischen ψ^0 (also 15° , beziehungsweise $22\frac{1}{2}^\circ$) und dem unter einer beliebigen Annahme für i abgeleiteten Werthe von ψ . Diese Formel habe ich nun zunächst auf das letzte Beispiel angewendet. Da in demselben, wenn $\psi^0 = 22^\circ 30'$ betragen soll, $d\psi = -3^\circ 3'$ ist und die Zahlenwerthe für alle anderen Grössen unmittelbar jener Berechnung entnommen werden können, welche zur Bestimmung von ψ geführt hat, lässt sich di sofort ermitteln. Es ergibt sich vorerst $di = -7^\circ$, somit als neuer Werth von $i = 35^\circ - 7^\circ = 28^\circ$, worauf bei abermaliger directer Rechnung der grössten Elongationen für ψ der Werth $22^\circ 34' 4''$ resultirt, der also nur mehr um $4' 4''$ zu gross ist. In Folge dieser bedeutenden Änderung hat sich aber auch der Zeitpunkt des Maximums verschoben; es findet nicht mehr bei $t = 67$ oder $t = 68$ statt, sondern für $t = 61$ oder $t = 62$;

es waren daher mehrere Columnen versuchsweise durchzurechnen, um die Zeit des Maximums zu finden. Bei nochmaliger Anwendung der Formel 10) ergibt sich $di = -11'$, also $i = 27^{\circ}49'$, mit welchem Werth in der That genau $\psi = 22^{\circ}30'$ wird.

Ausschlaggebend, weil am meisten veränderlich, erweist sich bei der Rechnung der Factor $\operatorname{tg} \beta$ im Nenner von 10).

Diese Berechnung ist schon etwas umständlicher als alle anderen bisherigen, weil hier die Formeln 6) ohne jede Vereinfachung zur Anwendung kommen, indem sowohl i als $(\lambda - L)$ einen von Null verschiedenen Werth besitzt; ich habe sie übrigens nur für den äusseren Strahlenkreis gemacht.

Nach dem angedeuteten Vorgange sind nun die Werthe von i auch für die anderen Periheldistanzen bestimmt worden, wie sie sich in Tabelle VII vorfinden. Beigesetzt sind nebst den Helligkeiten auch die Winkel P , welche angeben, an welcher Stelle des Strahlenkreises, vom Ostpunkte nach Norden gezählt, das in Rede stehende Maximum $\psi = 22\frac{1}{2}^\circ$ stattfindet (Positionswinkel), überdies die beiden Katheten ($\lambda - L$) und β , deren zugehörige Hypotenuse eben ψ ist. Die wichtigsten Zahlen dieses Schemas sind natürlich in der Columnne i enthalten, und das sind also jene Neigungen, für welche die grösste Elongation ψ genau $22\frac{1}{2}^\circ$ beträgt.

$\log q$	t		$\psi = 22^\circ 5$		P	J
			$\lambda - L$	β		
9.90	76	34.2	7.9	21.1	70°	0.06
9.88	70	32.7	10.9	19.8	62	0.08
9.86	65	30.6	13.3	18.3	55	0.10
9.84	61	27.8	15.5	16.5	48	0.11
9.82	58	24.2	17.6	14.3	41	0.12
9.80	55	19.5	19.5	11.5	32	0.14
9.78	52	12.0	21.4	7.0	18	0.15

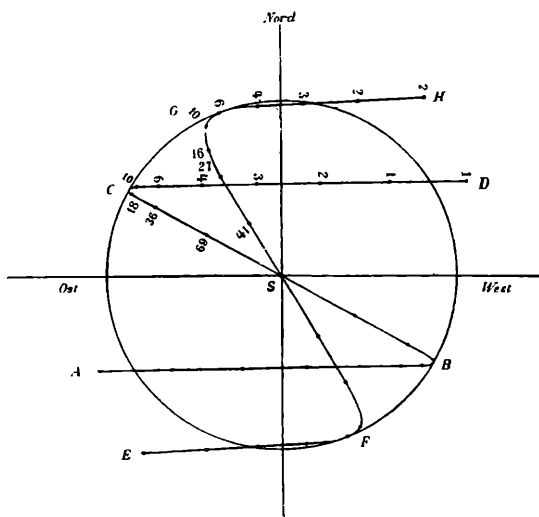
VII)

Man sieht, dass die Neigung, während sie für $\log q = 9.90$ noch 34° betragen darf, für kleinere Periheldistanzen immer

rascher vermindert werden muss, wenn der Komet beim Maximum nicht über den Strahlenkreis mit dem Radius $22\frac{1}{2}^\circ$ hinausgehen soll. Geht man mit $\log q$ bis 9.768 herab, so ist man ohnehin schon an jener Stelle angelangt, wo, wie wir bereits wissen, nur mehr $i = 0$ zulässig ist. Für noch kleinere Periheldistanzen ginge der Komet schon für $i = 0$ über $22\frac{1}{2}^\circ$ hinaus.

Solange P nicht besonders gross ist, findet eine scharfe Berührung des Kometenweges mit der Peripherie des Strahlenkreises statt. Rückt aber die Berührungsstelle weiter von der Ekliptik weg, d. h. wird P grösser, so streicht der Komet einige Zeit an der Peripherie hin und verlässt sie sodann für immer, ohne vorerst noch beträchtlich ins Innere des Kreises zurückgekehrt zu sein. Das Maximum von ψ und die Durchschneidung des Strahlenkreises verschwimmen also allmählig in einander, wenn P gegen 90° ansteigt, was für $\log q > 9.90$ rasch erreicht ist. Hier ist die östliche Elongation ($\lambda - L$) nur mehr gering, dagegen jene Breite β , welche während des Maximums von ψ statthat, beinahe so gross wie ψ selbst. Da sonach der Komet zwischen dem Ost- und Nordpunkt in keinem erheblichen Grade mehr heraus-treten kann, sind von jetzt an, also von etwa $\log q = 9.92$ auf-

Fig. 1.



wärts, für i wirklich die früheren Werthe zulässig, wie sie im Schema V (freilich nur für zwei specielle Werthe von q) aufgestellt sind. Von der zugehörigen Helligkeit J ist auch nichts zu besorgen, da sie nur gering ist.

Um diese Auseinandersetzungen deutlicher zur Anschauung zu bringen, habe ich für die beiden Fälle

$$\begin{aligned} &1) \log q = 9.80, \quad i = 19^\circ 30' \\ \text{und } &2) \log q = 9.90, \quad i = 34 \quad 10 \end{aligned}$$

den Lauf des Kometen gerechnet und in Fig. 1 dargestellt. S , die Sonne, bildet den Mittelpunkt des Strahlenkreises mit dem Radius $22\frac{1}{2}^\circ$; ein Grad grössten Kreises ist = 1 Millimeter gewählt. Der Kreis nimmt nicht einen bestimmten Ort am Himmel ein, sondern wandert mit der Sonne stetig weiter, während sich der Komet relativ zur Sonne auf einer der beiden ∞ -förmigen Curven bewegt. Da sich der Komet während des Perihels in oberer Conjunction mit der Sonne befinden soll, fällt S mit dem Perihel zusammen, und da er hier zugleich durch den aufsteigenden Knoten gehen soll, durchläuft er die beiden Curven von unten nach oben.

Die Rechnung wurde in 16tägigen Intervallen geführt; die Lichtintensitäten sind dem Weg des Kometen beigesetzt, und zwar, um ganze Zahlen verwenden zu können, die Werthe $100J$. Dem ersten Beispiel, nämlich $\log q = 9.80$ und $i = 19^\circ 30'$ gehört die Curve $ABSCD$ an; sie berührt den Kreis ziemlich scharf, und da J beim Heraustreten aus dem Kreis (bei D), also auch beim Hineintreten (bei A) nur 0.01 beträgt, ist ein Sichtbarwerden nicht zu erwarten. Die Curve $EFSGH$ entspricht der Annahme 2); sie berührt den Kreis nicht mehr so scharf, sondern gleitet an der Peripherie hin, während die Werthe von J zwischen 0.10 und 0.03 sich befinden. Da demnach hier der Komet sichtbar werden könnte, dürfte man, um dies zu verhindern, für die Periheldistanz $\log q = 9.90$ die Neigung i nicht, wie es hier geschehen ist, bis 34° ansteigen lassen, sondern müsste sie kleiner wählen.

Die beiden Endpunkte der ersten Curve, A und D , gehören zwei Zeitpunkten an, deren jeder $10 \times 16 = 160$ Tage vom Perihel entfernt liegt; für die Endpunkte der zweiten Curve, E und H ,

ist dieser Betrag $9 \times 16 = 144$ Tage. Die erste Curve zeigt daher den Lauf des Kometen relativ zur Sonne während eines Zeitraumes von 320, die zweite von 288 Tagen.

Da S mit dem Perihel zusammenfällt, lehrt der Anblick der Zeichnung, dass die hier dargestellten Umstände das Unsichtbarbleiben des Kometen am meisten begünstigen, indem die Partien vor und nach dem Perihel an ihrer geocentrischen Stellung zur Sonne ganz denselben Antheil nehmen. Jede Verschiebung würde das Verborgensein zwar auf der einen Seite noch leichter, auf der anderen dagegen noch schwieriger machen, und dieser Fall, dass der Komet auf dem einen Ast seiner Bahn fast gar nicht, auf dem anderen aber um so besser gesehen wird, muss hier ausser Acht gelassen werden.

Drehung der Bahnaxe aus der Ekliptik.

Die Bahnaxe wurde bis jetzt immer in der Ekliptik liegend angenommen, und es soll nur in Kürze noch angedeutet werden, wie weit man von dieser Forderung abgehen darf. Zu diesem Zweck drehen wir, wie es schon in der Einleitung geschehen ist, die Bahn aus der Ekliptik heraus, fassen aber jetzt nicht so sehr die Intensitäten als vielmehr die Elongationen ins Auge.

Beschäftigen wir uns einen Augenblick mit dem Perihel, wo also $r = q$ ist. Da der Parameter in der Ekliptik bleiben, also $\pi - \varrho = \pm 90^\circ$, und der Komet im Breitenkreis der Sonne sich befinden soll, haben wir wieder das ebene Dreieck zwischen Erde, Sonne und Komet vor uns, worin aber jetzt nicht J , sondern der der Seite r gegenüber liegende Winkel, die vorgeschriebene Elongation ψ , als gegeben zu betrachten ist, während der der Seite gegenüberliegende Winkel bestimmt werden soll; das Supplement dieses Winkels ist sodann $= b_0$. Da $\pi - \varrho = \pm 90^\circ$, so ist hier, abgesehen vom Vorzeichen, b_0 identisch mit i .

Als im vorigen Abschnitt bloß die Neigung geändert wurde, befand sich der eine Parabelast ebenso weit über, wie der andere unter der Ekliptik, da die Bahnaxe in der Ekliptik liegen blieb; bei der jetzigen Änderung werden aber beide Äste gemeinschaftlich und zwar in demselben Maass über oder unter die Ekliptik gedreht.

Man findet nun aus dem angedeuteten Dreieck, wenn $\psi = 15^\circ$ sein soll, u. a. folgende Werthe:

für $\log q = 0.10$	$b_0 = 27^\circ$
0.00	30
9.90	34
9.80	39.

Dieser Winkel dürfte also, wenn blos der Moment des Perihels in Betracht käme, die Bahnaxe mit der Ekliptik bilden, damit die, unserer Annahme gemäss nördlich oder südlich von der Sonne stattfindende Elongation 15° beträgt; die Winkel wachsen mit abnehmender Periheldistanz.

In Wirklichkeit sind aber diese Zahlen, da sie blos für einen einzigen Punkt der Bahn gelten, ohne Werth; denn obgleich die Elongation gerade hier die vorgeschriebene Grösse hat, würde der Komet doch, ähnlich wie wir es bei der Neigung gesehen haben, wenn auch nicht auf der Nord- oder Südseite, so doch an einer anderen Stelle der Peripherie des Strahlenkreises und namentlich beim Maximum der östlichen Elongation heraustreten.

Früher, als $b_0 = 0$ war, ging der Komet während der Wanderung von der Sonne bis zur grössten Elongation und von da zurück auf einem Durchmesser des Strahlenkreises; jetzt aber, wo er sich etwas über oder unter der Ekliptik befindet, kann sein Weg als eine diesem Durchmesser parallele Sehne betrachtet werden, deren Länge, da das Maximum der Elongation im gegenwärtigen Falle von dem früheren, für $i = 0$, also auch für $b_0 = 0$ geltenden nur wenig abweichen kann, ungefähr dieselbe ist wie früher.

Zieht man in einem Kreis eine Sehne, die dem Durchmesser an Länge gleich ist, so geht sie über die Peripherie hinaus, und zwar um so mehr, je weiter man sich von der Mitte des Kreises entfernt, also in unserem Falle, je grösser b_0 ist. Andererseits kann aber eine Sehne, an welche die Forderung geknüpft ist, dass ihre Endpunkte gerade auf der Peripherie liegen sollen, um so weiter vom Mittelpunkt abstehen, je kürzer sie ist. Dies vorausgeschickt, stellen wir nun, indem wir uns Tabelle I vor Augen halten, die Forderung, dass die grösste Elongation, auch wenn b_0 einen von Null verschiedenen Werth hat, nur 15° betragen soll. Diese Forderung kann aber erst für $\log q > 9.87$ erfüllt werden,

wobei dann b_0 um so grösser sein darf, je weiter wir mit q aufwärts gehen, weil auf diese Weise die Maxima der östlichen Elongationen, also die Sehnen, immer mehr abnehmen und daher auch die Gefahr, dass der Komet über die Peripherie des Strahlenkreises heraustritt, immer kleiner wird. Ist man endlich bei $\log q = 0.10$ angelangt, wo gar keine östliche Elongation mehr stattfindet, so ist für b_0 jener Werth zulässig, den wir soeben bei Betrachtung eines einzigen mit der Sonne in Conjunction befindlichen Punktes gefunden haben, nämlich $b_0 = 27^\circ$.

Wir sind also zu dem Schluss gelangt, dass b_0 , wenn $\psi = 15^\circ$ sein soll, successive alle Werthe von 0° bis 27° annimmt, während $\log q$ von 9.87 bis 0.10 steigt.

Rechnet man aber auch noch die Helligkeiten J , so findet man, dass für $\log q = 0.10$ und $b_0 = 27^\circ$ zu jener Zeit, wenn der Komet die Peripherie des Strahlenkreises passirt, noch immer $J = 0.13$ ist. Soll dieser ziemlich grosse Werth so zu sagen ungefährlich werden, so darf eben die Bahnaxe nicht einmal so weit aus der Ekliptik gedreht werden, als es hier angedeutet wurde.

Würde man nur den äusseren Strahlenkreis ($\psi = 22\frac{1}{2}^\circ$) in Betracht ziehen, so könnte die Axe schon von $\log q = 9.77$ an aus der Ekliptik gedreht werden, und es könnte z. B. für $\log q = 0.10$ der Winkel b_0 bereits auf 40° steigen, so lange man für die Unsichtbarkeit nur die Elongationen ins Auge fassen wollte. Da aber hier, wie man gleichfalls durch Rechnung findet, die Helligkeit noch immer 0.14 ist, so darf von der Bedingung, dass b_0 klein bleiben soll, nicht so weit abgegangen werden. Wir können vielleicht als durchschnittliche Grenze $b_0 = 30^\circ$ wählen. Weitere Ausführungen und nähere Ermittlung von b_0 unterlasse ich, da die Verhältnisse bei wachsendem q ziemlich dieselben sind, wie sie sich bei der Neigung gezeigt haben.

Der erste Fall kann nun als erledigt angesehen werden. Ich habe zuerst jene Verhältnisse untersucht, welche das Verborgengeblieben des Kometen am meisten fördern, und hierauf drei Änderungen vorgenommen. Die Bahn wurde 1. in ihrer eigenen Ebene und der Ekliptik gedreht (π geändert), 2. um die Bahnaxe gedreht (i geändert) und 3. um den Parameter gedreht (b_0 und damit auch i geändert). Jede Variation wurde einzeln vorgenommen;

sie betraf, abgesehen von q , immer nur eines dieser Bahnelemente, während die übrigen jene Werthe behielten, welche das Sichtbarwerden am leichtesten verhindern. Da sich nun gezeigt hat, dass schon unter diesen speciellen Voraussetzungen keine bedeutende Variation zulässig ist, so leuchtet ein, dass bei gleichzeitiger Änderung mehrerer Elemente von der idealen Grundbedingung noch weniger abgegangen werden darf. Es können daher die hier abgeleiteten Zahlen sämmtlich nur als obere Grenzen gelten.

Über die Lage des Knotens habe ich eine genauere Untersuchung nicht angestellt, da schon aus der Forderung der Symmetrie zur Genüge hervorgeht, dass der Komet während seiner Conjunction mit der Sonne nicht nur im Perihel, sondern auch im (auf- oder absteigenden) Knoten sich befinden soll, dass jedoch von dieser Forderung um so mehr abgegangen werden darf, je kleiner die Neigung ist. Übrigens ist dieser Satz auch schon in der Bedingung enthalten, dass $\sin(\pi - \Omega) \sin i$ eine kleine Grösse sein soll.

Man kann also für die Knotenlänge die Bedingung aufstellen, dass für die grösste zulässige Neigung ($i = 35^\circ$) nahezu $\frac{\Omega}{\gamma} = L_0$ sein soll, dass man sich aber mit abnehmender Neigung von dieser Bedingung mehr und mehr entfernen darf.

II. Fall.

Komet im Perihel diesseits der Sonne.

Unter dieser Voraussetzung ist die heliocentrische Länge des Perihels $l_0 = L_0 \pm 180^\circ$, also identisch mit der zur Zeit des Perihels stattfindenden heliocentrischen Länge der Erde; die Bahnaxe wird vorerst wieder in der Ekliptik liegend angenommen.

Da in dem jetzigen Falle retrograde Bewegungen eine grosse Rolle spielen werden, scheint es nicht unnütz, daran zu erinnern, dass das Bahnelement π etwas ganz anderes bedeutet, als die „heliocentrische Länge des Perihels“, welche wir hier mit l_0 bezeichnet haben.

Im I. Fall, wo nur directe Bewegungen in Betracht kommen und die Neigung sich nicht allzuweit von 0° entfernt, ist es gestattet, behufs einer vorläufigen Untersuchung π mit l_0 zu iden-

tificiren, jetzt aber nicht mehr. Da nun hier nicht das Element π , sondern l_0 gemeint ist, sollen die Formeln, welche zur Bestimmung der heliocentrischen Länge und Breite des Perihels, l_0 und b_0 , dienen, hierher gesetzt werden:

$$\left. \begin{aligned} \cos b_0 \cos l_0 &= \cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos i \\ \cos b_0 \sin l_0 &= \cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos i \\ \sin b_0 &= \sin \omega \sin i \end{aligned} \right\} \quad 11)$$

oder auch, wenn man die Längen von Ω aus zählt:

$$\left. \begin{aligned} \cos b_0 \cos (l_0 - \Omega) &= \cos \omega \\ \cos b_0 \sin (l_0 - \Omega) &= \sin \omega \cos i \\ \sin b_0 &= \sin \omega \sin i \end{aligned} \right\} \quad 12)$$

Die dritte dieser Gleichungen hat ohnehin schon mehrfache Anwendung gefunden.

Ist nun q sehr klein, so kann die Neigung der Bahn auf die Sichtbarkeit nur wenig Einfluss haben, indem alle Bahnen, welche einem bestimmten Rotationsparaboloid als Erzeugungslinie dienen, ziemlich dieselbe Erscheinung darbieten. Mit wachsendem q ändern sich jedoch die Verhältnisse sehr rasch, und bald kommt man zu einer Stelle, an der man beginnen muss die Neigungen mehr und mehr zu beschränken, wenn der Komet unsichtbar bleiben soll. Zuerst sind Neigungen in der Nähe von 0° auszuschliessen, hierauf Neigungen von 90° u. s. f., so dass endlich, wenn q noch weiter ansteigt, für unsere Zwecke nur mehr Neigungen, die grösser als 90° sind, somit retrograde Bewegungen übrig bleiben.

Die Grösse der Sonnenkugel zieht übrigens eine scharfe Grenze, unter welche q nicht sinken kann. Untersuchen wir zuerst diesen minimalen Werth, setzen wir also q gleich dem Radius der Sonne, also $\log q = 7.668$. Ich habe für i drei Annahmen gemacht, nämlich $i = 0^\circ$, 90° und 180° . Die Rechnung geschieht wieder nach den Gleichungen 6) beziehungsweise 1), worin nur $(l-L)$ von Fall zu Fall anders zu ermitteln ist.

$$i = 0^\circ$$

Hier ist

$$l = L_0 + 180^\circ + v$$

und da

$$L = L_0 + mt$$

so ist

$$l - L = 180^\circ + v - mt.$$

Man findet nun, wenn man für eine Reihe von t die Elongationen ψ und die Intensitäten J berechnet und die letzteren für $\psi = 15^\circ$ und $\psi = 22\frac{1}{2}^\circ$ interpolirt, dass der Komet 24 Tage nach dem Perihel die westliche Elongation von 15° mit $J = 0.36$ passirt und 35 Tage nach dem Perihel die Elongation von $22\frac{1}{2}^\circ$ mit $J = 0.18$.

$$i = 90^\circ$$

Jetzt kommen die Gleichungen 6), welche auch b enthalten, zur Anwendung. Für $i = 90^\circ$ ist nun

$$\sin b = \sin r$$

ferner

$$\cos b = \cos v, \text{ wenn } v < 90^\circ$$

$$\cos b = -\cos v, \text{ wenn } v > 90^\circ$$

da $\cos b$ immer positiv bleiben muss. Die heliocentrische Länge ist constant und zwar

$$l = L_0 + 180^\circ, \text{ wenn } v < 90^\circ$$

$$l = L_0, \text{ wenn } v > 90^\circ$$

Da bei einer so kleinen Periheldistanz für unseren Zweck nur $v > 90^\circ$ Interesse hat, ist zu setzen:

$$l - L = -mt.$$

Es ergibt sich nun, dass der Komet die Elongation von 15° nach 30 Tagen mit $J = 0.23$ und die Elongation von $22\frac{1}{2}^\circ$ nach $40\frac{1}{2}$ Tagen mit $J = 0.13$ passirt und zugleich 4° über die Ekliptik hinaustritt.

$$i = 180^\circ$$

Jetzt ist

$$l = L_0 + 180^\circ - v$$

da ferner

$$L = L_0 + mt,$$

so ist

$$l-L = 180^\circ - v - mt.$$

Unter der jetzigen Annahme geht der Komet zuerst etwas auf der Ostseite heraus, sodann hinter der Sonne vorbei und passirt die westliche Elongation von 15° nach $35\frac{1}{2}$ Tagen mit $J = 0.16$ und die Elongation von $22\frac{1}{2}^\circ$ nach $45\frac{1}{2}$ Tagen mit $J = 0.10$.

Soll demnach ein Komet mit der kleinstmöglichen Periheldistanz für jede Neigung verborgen bleiben, so müsste seine Constitution eine derartige sein, dass er für $\psi = 15^\circ$ bei einer Helligkeit zwischen 0.16 und 0.36 nicht wahrgenommen werden kann, oder, falls $\psi = 22\frac{1}{2}^\circ$ gewählt wird, dass er bei $J = 0.10$ bis $J = 0.18$ nicht mehr zu bemerken ist.

Für $\log q = 8.00$ habe ich die Rechnung ebenfalls durchgeführt und die Verhältnisse natürlich von den vorigen nicht wesentlich verschieden gefunden. Geht man aber mit q weiter aufwärts, so gestalten sich die Umstände schon bedeutend anders; betrachten wir z. B. $\log q = 9.00$.

Ist $i = 0^\circ$, so erreicht der Komet schon nach 6 Tagen die westliche Elongation von 15° mit $J = 9.4$ und die von $22\frac{1}{2}^\circ$ nach 15 Tagen mit $J = 1.6$, muss also ohne Zweifel gesehen werden.

Ist $i = 90^\circ$, so passirt er $(\lambda - L) = -15^\circ$ nach 33 Tagen mit $J = 0.27$ und $(\lambda - L) = -22\frac{1}{2}^\circ$ nach 44 Tagen mit $J = 0.15$, steigt aber gleichzeitig schon bis zu 20° ($=\beta$) über die Ekliptik hinaus, so dass die totale Elongation ψ bereits 24° , beziehungsweise 29° ist; diese Annahme kann man also auch nicht mehr zulassen.

Ist aber $i = 180^\circ$, so tritt der Komet vorerst auf der Ostseite bis 14° heraus, worauf seine Helligkeit beim Herausrücken auf der Westseite nur mehr 0.06 beträgt. Jetzt entschlüpft er uns also fast mit Gewissheit, wenn er nicht etwa ausnahmsweise während der kurzen Zeit, in welcher er das Maximum der östlichen Elongation mit $J = 4.0$ passirt, bemerkt wird.

Für diese letzte Annahme, retrograde Bewegung, welche somit bei kleinen Periheldistanzen das meiste Interesse bietet, habe ich die Rechnungen ausführlicher gemacht.

Vorerst theile ich die Tabelle VIII mit, welche unter der Annahme $i = 180^\circ$ für eine Reihe von speciellen Werthen der Periheldistanz die Maxima der östlichen Elongation sammt dem zugehörigen t enthält, welchen Zahlen für $(\lambda - L) > 15^\circ$ auch J beigefügt ist. Da sich die Distanzen hier mit der Zeit sehr rasch ändern und der Zeitpunkt der grössten Elongation nicht scharf zu bestimmen ist, kann auch J nicht streng gegeben werden; es wurde daher nur eine Decimale angesetzt. Ausserdem wurden die Helligkeiten für jene Tage berechnet, an denen der Komet die westlichen Elongationen 15° und $22\frac{1}{2}^\circ$ passirt. Damit die Werthe der grössten Elongationen gleichmässiger weiter schreiten, ist hier nicht mehr $\log q$, sondern q selbst als Argument gewählt.

q	Ostseite			Westseite			
	Maximum			$(\lambda - L) = -15^\circ$		$(\lambda - L) = -22\frac{1}{2}^\circ$	
	t	$(\lambda - L)$	J	t	J	t	J
0.00	—	—		29.7	0.227	40.3	0.128
0.02	$4\frac{1}{2}$	$5^\circ 43'$		41.4	0.118	51.3	0.079
0.04	6	8 26		46.1	0.098	55.8	0.068
0.06	7	10 33		49.8	0.087	59.3	0.061
0.08	8	12 22		52.8	0.079	62.2	0.057
0.10	$8\frac{1}{2}$	13 59		55.5	0.073	64.8	0.054
0.12	9	15 28	3.8	58.0	0.069	67.2	0.052
0.14	10	16 51	3.5	60.2	0.066	69.4	0.050
0.16	11	18 10	3.3	62.3	0.063	71.4	0.048
0.18	$11\frac{1}{2}$	19 26	3.1	64.3	0.060	73.3	0.046
0.20	12	20 38	3.0	66.2	0.057	75.1	0.044
0.22	$12\frac{1}{2}$	21 49	2.9	68.0	0.055	76.9	0.043
0.24	13	22 58	2.8	69.7	0.054	78.6	0.042

VIII)

Nach dem in dieser Abhandlung üblichen Vorgang gibt die Tabelle zunächst nur die nach dem Perihel geltenden Sichtbarkeitsverhältnisse; die Zahlen liefern aber ebenso gut auch die Umstände vor dem Perihel, wenn nur die Vorzeichen von t und $(\lambda - L)$ gleichzeitig geändert werden, wodurch Ost- und Westseite einfach ihre Stellen vertauschen.

Um für ganz kleine Periheldistanzen das Schema vollständig ausführen zu können, ist noch der ideale Fall $q = 0.00$ mit aufgenommen, welcher eine geradlinige Bewegung des Kometen zum und vom Sonnenmittelpunkt voraussetzt. Die heliocentrische Länge ist hier ähnlich wie für $i = 90^\circ$ constant und zwar durchaus $l = L_0$, so dass also $l - L = -mt$ zu setzen ist. Die Werthe für den Radius vector r sind aus der „Tabula lapsus parabolici cometarum in solem“ in Lambert's „Insigniores orbitae cometarum proprietates“ genommen, können jedoch fast ebenso schnell direct berechnet werden durch die Formel

$$r^3 = \frac{(3kt)^2}{2}$$

oder

$$r = \frac{(3k)^{2/3}}{2^{1/3}} \cdot t^{2/3}.$$

worin

$$\log \frac{(3k)^{2/3}}{2^{1/3}} = 9.04146 - 10$$

ist.

Die Tabelle VIII lehrt nun u. a. folgendes. Für grössere q (etwa 0.18 bis 0.24) lassen zwar die auf der Westseite stattfindenden sehr geringen Helligkeiten ein Sichtbarwerden nicht erwarten, dafür werden aber die Maxima von $(\lambda - L)$ auf der Ostseite schon zu gross, während gleichzeitig die zugehörigen Helligkeiten sehr bedeutende Werthe haben (3.1 bis 2.8). Für ganz kleine q werden dagegen die Helligkeiten auf der Westseite grösser als 0.06.

Ein geradlinig sich bewogender Komet, also mit der idealen Periheldistanz Null, müsste sichtbar werden, da er beim Passiren der Elongationen 15° und $22\frac{1}{2}^\circ$ die Helligkeiten 0.227 und 0.128 besitzt. Da also für grössere Periheldistanzen ($q > 0.23$) die beim Maximum der Elongation stattfindenden Helligkeiten schon sehr beträchtlich, für ganz kleine aber (etwa $q < 0.06$) die vom Perihel weiter entfernt liegenden Helligkeiten noch immer ziemlich ansehnlich ausfallen, so kann man behaupten, dass sich jene Periheldistanzen, für welche das Gestirn am leichtesten verborgen bleibt, zwischen diesen Grenzen befinden, also etwa um $q = 0.10$ oder 0.12 herum.

Durch Interpolation findet man, dass jenes q , für welches die grösste Elongation genau $\left\{ \begin{smallmatrix} 15^\circ & 0' \\ 22 & 30 \end{smallmatrix} \right\}$ beträgt, $= \left\{ \begin{smallmatrix} 0.114 \\ 0.232 \end{smallmatrix} \right\}$ ist.

Weiter aufwärts als bis 0.23 darf man mit der Periheldistanz gewiss nicht mehr gehen, wenn der Komet, wie auf der Westseite, so auch auf der Ostseite unsichtbar bleiben soll; denn die Helligkeiten werden hier schon sehr gross.

Dass das Maximum der östlichen Elongation, sobald es einmal über 15° , beziehungsweise $22\frac{1}{2}^\circ$ steigt, fast durchgehends als entscheidend für die in den Elementen und besonders in der Periheldistanz zulässigen Grenzen betrachtet wird, hat, wie schon einmal gesagt wurde, darin seinen Grund, dass der Komet einzig an dieser Stelle gleichzeitig sowohl eine bedeutendere Elongation, als auch eine ansehnliche Helligkeit besitzt, da r wegen der Nähe des Perihels noch klein ist. Wenn er also in der Nähe der Sonne überhaupt wahrgenommen wird, so kann es am leichtesten nur hier geschehen (denn später, auf der Westseite, sind die Distanzen schon viel grösser geworden), und wenn er auf der Ostseite unbemerkt bleibt, so wird er es auf der Westseite noch mehr bleiben.

Hält man die Tabellen VIII und I sammt den für q gezogenen Grenzen gegen einander, so zeigt sich, dass, wenn der Komet unter der Annahme $\psi = 15^\circ$ unsichtbar bleiben soll, alle Periheldistanzen zwischen 0.11 und 0.74 auszuschliessen sind; wäre dagegen für den Radius des Strahlenkreises die weitere Grenze, $\psi = 22\frac{1}{2}^\circ$, als Bedingung gesetzt, so dürften blos die Periheldistanzen zwischen 0.23 und 0.59 unberücksichtigt bleiben. Je grösser daher ψ gewählt wird, umso enger rücken die Grenzen von q aneinander, umso kleiner wird also die Zahl der auszuschliessenden Periheldistanzen. Man gelangt daher, wenn man die Tabellen I und VIII genügend weit fortsetzt, zu einer Stelle, an welcher die Grenzen von q zusammenfallen und gleichzeitig auch die beiden ψ -Werthe, von denen der eine zu $i = 0$, der andere zu $i = 180^\circ$ gehört, einander gleich werden.

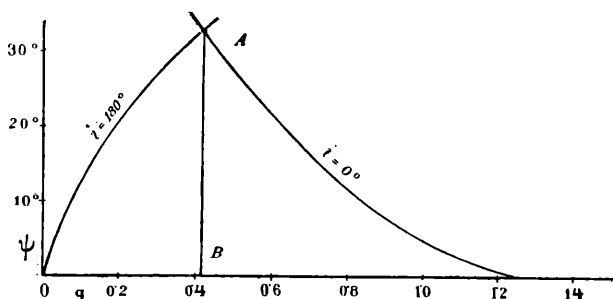
Es ist nun von Interesse, diesen Grenzwertb von q zu ermitteln; das zugehörige Maximum der Elongation ($\lambda - L$) kann sodann leicht durch mehrmalige Durchrechnung der Formel 2) gefunden werden. Eine directe Bestimmung von q stösst auf

Schwierigkeiten, weil auf den beiden Elongationen, die einander gleich werden sollen, die Forderung des Maximums haftet; man gelangt jedoch auch durch Versuche leicht ans Ziel. Ich fand dieses fragliche $q = 0.417$.

Rechnet man also mit dieser Periheldistanz das Maximum der östlichen Elongation sowohl für den I. Fall ($i = 0$), als für den II. ($i = 180^\circ$), so erhält man denselben Werth; er beträgt $32^\circ 34'$. Zur näheren Bestimmung sei noch beigesetzt, dass dieses Maximum, wenn $i = 0$ ist, für $t = 51\frac{1}{2}$ Tage, und wenn $i = 180^\circ$ ist, für $t = 16\frac{1}{2}$ Tage eintritt; die Intensität J ist im ersten Fall $= 0.17$, im zweiten aber 2.3 .

Aus dieser Betrachtung ziehen wir folgenden Schluss. Wollte man die Forderung stellen, dass ein für uns unsichtbar bleibender Komet jede beliebige Periheldistanz besitzt (abgesehen von solchen, welche die Einheit schon bedeutend übersteigen), so müsste man gleichzeitig zugeben, dass er innerhalb der Elongation $\psi = 32^\circ 34'$ nicht mehr wahrzunehmen ist. Diese Zahl fällt noch etwas über die von Olbers gezogene Grenze hinaus und ist für die meisten Kometen — sehr lichtschwache ausgenommen — sicher zu gross. Da wir also wissen, dass die

Fig. 2.



Kometen bei $\psi < 32^\circ 34'$ noch zu erkennen sind, so kann ein solches Gestirn, welches bei seiner Anwesenheit in unserem Sonnensystem trotz sorgfältiger Durchmusterung des Himmels nicht gesehen wird, eine circa 0.4 betragende Periheldistanz nicht besitzen.

In Figur 2 sind die Maxima aus den Tabellen VIII und I durch Curven dargestellt und dabei die Periheldistanzen als

Abscissen ($0.02 = 1mm$), die Maxima der Elongationen als Ordinaten ($1^\circ = 1mm$) aufgetragen. Für die in den Tabellen nicht mehr enthaltenen q sind die Curven mit Hilfe des gemeinsamen Punktes A ausgezogen. Die Ordinate AB repräsentirt die gemeinsame grösste Elongation von $32^\circ 34'$, gehört also zur Abscisse $q = 0.417$.

Verschiebung des Perihels.

Wie weit darf man hier von der Bedingung, dass die heliocentrische Länge des Perihels $l_0 = L_0 + 180^\circ$ ist, abgehen? Die Tabelle der Maxima (VIII) lehrt, dass eine solche Variation, falls die grösste Elongation $22\frac{1}{2}^\circ$ betragen soll, nur für $q < 0.232$ eintreten, dann jedoch um so bedeutender sein kann, je kleiner q ist. Soll die grösste Elongation bloss 15° betragen, so ist die Verschiebung des Perihels, dl_0 , erst für $q < 0.114$ gestattet.

Um einen Näherungswerth für jene Perihellänge zu finden, welche die grösste östliche Elongation gerade bis zu einem bestimmten ψ° steigen lässt, darf man hier nicht mehr so wie im I. Fall vorgehen. Denn wenn auch, da $(\lambda - L)$ nicht grösser als $22\frac{1}{2}^\circ$ werden kann, für $\sin(\lambda - L)$ in erster Annäherung der Bogen gesetzt werden darf, so findet diese Vereinfachung doch auf die heliocentrische Winkeldifferenz $(l - L)$ jetzt keine Anwendung mehr, da dieser Bogen in Folge der raschen Bewegung des Kometen durchaus nicht klein zu sein braucht und es in den hier betrachteten Fällen wirklich auch gar nicht ist.

Man kann jedoch ein differentielles Verhältniss zwischen l_0 und ψ° auf folgende Art finden. Betrachten wir die Gleichung 2), so kann zunächst, da alle Bewegungen in der Ekliptik vor sich gehen ($i = 180^\circ$), die Längendifferenz $(\lambda - L)$ durch ψ ersetzt und daher geschrieben werden:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{r \sin(l - L)}{r \cos(l - L) + R}$$

Differenzirt man nun, r und damit indirect auch ρ als constant annehmend, so kann $d(l - L)$ mit dl_0 identificirt werden, weil sich eine Verschiebung des Perihels um dl_0 einfach dadurch bemerkbar macht, dass die heliocentrische Länge l , also auch $(l - L)$ um dl_0 geändert wird. Man erhält so, wenn schliesslich

noch der Nenner $r \cos(l-L) + R$ durch $\rho \cos \psi$ ersetzt wird (Gleichungen 1):

$$dl_0 = \frac{\rho^2 \cdot d\psi}{r[R \cos(l-L) + r]} \quad (13)$$

Mit dieser Formel findet man unter Benützung jener Grössen, welche zur Berechnung der Maxima in der Tabelle VIII geführt haben, einen ersten Näherungswerth für dl_0 , der jedoch von der Wahrheit noch weit entfernt sein kann, da insbesondere die Zeit des Maximums ganz anderswohin fällt, als für $dl_0 = 0$. Der nächste Versuch liefert aber dl_0 schon viel genauer.

Unter der Voraussetzung $\psi^\circ = 22\frac{1}{2}^\circ$ habe ich für mehrere q die Maximalwerthe von dl_0 ermittelt und in Tabelle IX zusammengestellt. Es sei erwähnt, dass bei dieser Berechnung für $d\psi$ in erster Näherung die Differenz: $22\frac{1}{2}^\circ$ minus [Maximum aus Tabelle VIII] gesetzt wurde; als mit dem so erhaltenen dl_0 das Maximum der östlichen Elongation ψ' direct gerechnet war, wurde für den zweiten Versuch $d\psi = 22\frac{1}{2}^\circ - \psi'$ gesetzt und die Rechnung wiederholt, welche dann dl_0 meist schon so genau lieferte, dass das Maximum kaum mehr um eine Bogenminute von $22^\circ 30'$ abwich.

q	t	dl_0 $\pm$	J	IX)
0.08	16	33° 59'	1.2	
0.10	16	29 13	1.4	
0.12	15½	24 41	1.5	
0.14	15½	20 19	1.7	
0.16	15	15 59	1.9	
0.18	14½	11 40	2.1	

Nachdem wir nun die Maxima auf der Ostseite möglichst weit, nämlich bis $\psi = 22\frac{1}{2}^\circ$, herausgedreht haben, ist es nothwendig nachzusehen, ob dieser Vorgang für die vom Perihel weiter entlegenen Partien nachtheilige Folgen hat. Ich habe zu

diesem Zweck unter Annahme der hier für d_0 gefundenen Winkelwerthe mehrere Elongationen vor und nach dem Perihel berechnet, dieselben auf $\pm 15^\circ$ und $\pm 22\frac{1}{2}^\circ$ interpolirt und für diese zwei besonderen Stellen die Intensitäten J bestimmt. Dadurch entstanden die Tabellen X und XI. Die Rechnung musste für die Partien vor und nach dem Perihel separat geführt werden, weil dieselben jetzt nicht congruent sind.

Vor dem Perihel.

q	$\psi = +22\frac{1}{2}^\circ$		$\psi = +15^\circ$	
	t	J	t	J
0·08	—38	0·17	—30	0·28
0·10	—44	0·13	—35	0·21
0·12	—49	0·11	—40	0·16
0·14	—54	0·09	—46	0·12
0·16	—59	0·07	—51	0·10
0·18	—64	0·06	—56	0·08

X)

Nach dem Perihel.

q	$\psi = -15^\circ$		$\psi = -22\frac{1}{2}^\circ$	
	t	J	t	J
0·08	81	0·030	90	0·024
0·10	80	0·032	89	0·026
0·12	78	0·035	87	0·028
0·14	76	0·038	86	0·030
0·16	75	0·040	84	0·032
0·18	73	0·043	82	0·034

XI)

Wird also das Perihel um dl_0 (dessen Beträge im Schema IX enthalten sind) verschoben, so nimmt, wie wir bereits wissen, die Wahrscheinlichkeit des Sichtbarwerdens auf der einen Seite ab (Schema XI), auf der anderen dagegen zu (Schema X). Tabelle XI, welche somit die „ungefährlichen“ Intensitäten enthält, ist nur der Vollständigkeit wegen angesetzt worden; Tabelle X aber klärt uns in Verbindung mit Tabelle VIII darüber auf, um wie viel die Intensitäten in Folge der Addition von dl_0 wachsen.

Ist q noch ziemlich gross (0.14—0.18), so nimmt zwar J wenig zu, aber bloß aus dem Grunde, weil hier das an l_0 hinzugefügte dl_0 nur mässig ist. Für kleinere q aber, bei denen dl_0 schon bedeutend ist, erhält J bereits Werthe, deren Grösse mit unserer Voraussetzung nicht mehr verträglich ist (für $q = 0.08$ ist $J = 0.17$, beziehungsweise 0.28).

Wir schliessen daraus, dass es nur für etwas grössere q gestattet ist, l_0 um die im Schema IX aufgestellten Beträge von dl_0 zu ändern, die unter der Bedingung abgeleitet sind, dass das Maximum der östlichen Elongation genau bis $22^\circ 30'$ steigt.

Dagegen ist für kleinere q (etwa < 0.10) die im Schema IX vorgeführte Änderung nicht mehr erlaubt, weil sonst auf dem einen Parabelast J die von uns gesteckten Grenzen übersteigt.

Wir können also ungefähr sagen, dass dl_0 an dieser Stelle höchstens $25^\circ - 30^\circ$ betragen darf, und gelangen, wie im I. Fall, zu dem Schluss, dass die Verschiebung des Perihels für sämtliche hier in Betracht kommende Periheldistanzen nur mässig sein darf. Wäre die Verschiebung bedeutend, so würde der Komet für etwas grössere q (in der Nähe von 0.20) beim Maximum der östlichen Elongation über $22\frac{1}{2}^\circ$ heraustreten, während $J > 1$ ist; für kleinere q (in der Nähe von 0.10) würde er in einer vom Perihel weiter entlegenen Partie auf dem einen Parabelast beim Passiren des Strahlenkreises eine zwar nicht sehr grosse, aber immerhin mehr als 0.12 betragende Intensität besitzen.

Es ist hier wie sonst durchgehends angenommen, dass eine beträchtliche Intensität ($J > 1$) in der Nähe eines Maximums der Elongation (aber noch unter 15° , beziehungsweise $22\frac{1}{2}^\circ$) das Auffinden weniger begünstigt, als eine viel geringere (etwa $J = 0.12$) zu der Zeit, in welcher die Elongation bereits kontinuierlich wächst. Diese vielleicht befremdende Voraussetzung

möge man darin begründet finden, dass der Komet beim Maximum der Elongation wieder umkehrt (gegen die Sonne hin) und daher die Möglichkeit seiner Auffindung fraglicher ist als dort, wo er aus den Sonnenstrahlen endgiltig heraustritt (wenn auch mit kleinerer Intensität).

Änderung der Neigung.

Bis jetzt wurden die Elongationen für $i = 180^\circ$ gerechnet, und es ist nun zu untersuchen, wie weit man sich von dieser Bedingung entfernen darf, ohne dass der Komet sichtbar wird.

Ich habe zu diesem Zweck ganz so wie im I. Fall damit begonnen, für ein bestimmtes q jene Werthe von $180^\circ - i$ zu ermitteln, welche das Maximum der östlichen Elongation genau auf $22\frac{1}{2}^\circ$ ansteigen lassen, und dazu wieder das differentielle Verhältniss 10) benützt. Da zeigte sich nun, nachdem unter Annahme eines willkürlichen i eine Reihe von Elongationen berechnet waren und sodann die Formel 10) in Anwendung kam, dass der Winkel $180^\circ - i$, also die Abweichung von der Bedingung $i = 180^\circ$ sehr beträchtlich ausfällt und dass die Sichtbarkeitsverhältnisse selbst dann noch nicht wesentlich von den für $i = 180^\circ$ geltenden verschieden sind, wenn man mit i bis auf 135° und noch weiter heruntergeht.

Diese bedeutenden Änderungen haben zur Folge, dass die Rechnung unter Anwendung der Formel 10) öfter als im I. Fall wiederholt werden muss, wenn man jene Neigung erreichen will, durch welche die grösste Elongation gerade bis $\psi = 22\frac{1}{2}^{\circ}$ steigt. Um nun solche Rechnungen, von denen schliesslich der grösste Theil wieder beseitigt werden müsste, ganz unterlassen zu können, und doch ein Bild über die Sichtbarkeitsverhältnisse zu erhalten, habe ich einen anderen Weg eingeschlagen, nämlich für das Maximum der östlichen Elongation nicht mehr an der Erfüllung der Bedingung $\psi = 22^{\circ}30'$ festgehalten, sondern gleich von vorneherein mit einem speciellen Werthe von i die Umstände der Sichtbarkeit berechnet und zwar zunächst mit $i = 135^{\circ}$

Die Hauptformeln bleiben dieselben (Gleichungen 6), nur b und $(l-L)$ sind jetzt anders zu ermitteln. Da nämlich b nicht

mehr, wie im I. Fall, klein zu sein braucht, lässt sich $\cos b$ nicht sicher aus $\sin b$ bestimmen, wesshalb die Formeln anzuwenden sind:

$$\left. \begin{aligned} \cos(l - \Omega) \cos b &= \cos u \\ \sin(l - \Omega) \cos b &= \sin u \cos i \\ \sin b &= \sin u \sin i \end{aligned} \right\} \quad 14)$$

aus denen b und $(l - \Omega)$ hervorgeht. Da $\pi - \Omega = 0$ gewählt wurde, ist wieder $u = v$; auf Grund dieser Voraussetzung ist ferner

$$\Omega = L_0 \pm 180^\circ$$

somit

$$l = (l - \Omega) + L_0 \pm 180^\circ$$

und da

$$L = L_0 + mt$$

so ist

$$l - L = (l - \Omega) \pm 180^\circ - mt.$$

Es wurde also für $i = 135^\circ$ ein ähnliches Schema (XII) angelegt wie für $i = 180^\circ$ (Tabelle VIII), jedoch in kleinerem Umfange, da es mir jetzt weniger darum zu thun war, eine lange Zahlenreihe abzuleiten, als bloß zu erforschen, wie sich die Sichtbarkeitsverhältnisse von den früheren unterscheiden.

Berechnet ist für jedes q zuerst das Maximum der Elongation, welches aber jetzt nicht genau auf der Ostseite, sondern in dem Quadranten zwischen dem Ost- und Nordpunkte stattfindet, und sodann jene Intensität J , welche der Komet beim Passiren der beiden westlichen Elongationen von 15° und $22\frac{1}{2}^\circ$ besitzt.

Zur Auffindung der letzteren habe ich versuchsweise für eine Reihe von Tagen die Elongationen gerechnet, um vorerst zu sehen, wie sich die Verhältnisse auf der Westseite im Allgemeinen gestalten, und hierauf zwischen diesen Elongationen interpolirt, um zu erkennen, für welches t die gesammte Elongation ψ die Werthe 15° und $22\frac{1}{2}^\circ$ annimmt.

ψ und J für $i = 135^\circ$

q	Ostseite			Westseite			
	Maximum			$\psi = 15^\circ$		$\psi = 22.5^\circ$	
	t	ψ	J	t	J	t	J
0.20	14 $\frac{1}{2}$	21.7	2.2	—	—	59	0.080
0.18	13 $\frac{1}{2}$	20.4	2.3	—	—	58 $\frac{1}{2}$	0.079
0.16	13	19.1	2.4	—	—	58	0.078
0.14				—	—	57	0.079
0.12				40	0.16	56	0.079
0.10				41	0.15	55	0.080

XII)

Vergleicht man in den Tabellen VIII und XII zuvörderst die Maxima der Elongationen, so sieht man, dass sie für dasselbe q nur um etwa 1° verschieden sind. Würde die Forderung gestellt werden, dass der Maximalwerth von ψ in XII bis 22.5° steigen soll, so würde das zugehörige q , wie der Gang der ψ -Werthe lehrt, bei 0.21 liegen, während für $i = 180^\circ$ der höchste für q zulässige Werth 0.23 beträgt, also ein sehr geringfügiger Unterschied. Da die Maxima für kleinere q stetig abnehmen und daher für die Sichtbarkeit ohnehin weniger Bedeutung haben, ist in XII die Berechnung derselben unterblieben.

Geht man nun auf die Westseite, so fällt zunächst auf, dass die zu $\psi = 22\frac{1}{2}^\circ$ gehörende Intensität für alle in der Tabelle enthaltenen Periheldistanzen nahe 0.080 ist. Ginge man mit q noch unter $q = 0.10$ herab, so würden die Helligkeiten wieder langsam ansteigen und sich immer mehr jenen nähern, welche für $i = 180^\circ$ gelten. Die Columne $\psi = 15^\circ$ musste für grössere q leer bleiben, weil hier das Gestirn, wenn es einmal die grösste östliche Elongation passirt hat und hierauf nach Westen hinüber wandert, sich der Sonne gar nicht mehr bis auf 15° nähert.

Nachdem sich also herausgestellt hatte, dass die Sichtbarkeitsverhältnisse für $i = 135^\circ$ nicht wesentlich von jenen abweichen, welche für $i = 180^\circ$ gelten, stieg ich mit der Neigung

noch weiter herab und zwar bis $i = 120^\circ$, machte hier aber die Rechnung nur für etwas grössere Periheldistanzen (Tabelle XIII).

ψ und J für $i = 120^\circ$.

q	Ostseite			Westseite	
	Maximum			$\psi = 22^\circ 5'$	
	t	ψ	J	t	J
0·20	$17\frac{1}{2}$	$22^\circ 7'$	1·4	41	0·19
0·18	$16\frac{1}{2}$	$21^\circ 4'$	1·5	44	0·16
0·16	16	$20^\circ 1'$	1·5	$45\frac{1}{2}$	0·14

XIII)

Durch Interpolation findet man zunächst, dass zu $\psi = 22^\circ 30'$ die Periheldistanz $q = 0\cdot197$ gehört, die nur wenig kleiner ist, als die Werthe, welche den Neigungen 180° und 135° entsprechen, nämlich $0\cdot23$ und $0\cdot21$. Auf der Ostseite bleibt also, soweit nur die Elongation in Betracht kommt, für $i = 120^\circ$ alles ziemlich so, wie für $i = 180^\circ$, beziehungsweise 135° ; man braucht, um den Anforderungen gerecht zu werden, bloß eine geringfügige Änderung vorzunehmen, nämlich die obere Grenze von q statt auf $0\cdot23$ jetzt auf $0\cdot20$ zu setzen. Dagegen wird jetzt auf der Westseite schon $J > 0\cdot12$, und aus diesem Grund darf man für $q = 0\cdot20$ wohl bis $i = 135^\circ$, aber nicht mehr bis $i = 120^\circ$ herabgehen.

Wählt man q kleiner, so nehmen die Maxima immer mehr ab, man gelangt zu einer Stelle, an der sie nicht mehr $22\frac{1}{2}^\circ$, dann nicht einmal mehr 15° erreichen, wenn man auch mit i unter 120° u. s. w. geht, kurz, die Maxima sind mit abnehmendem q immer weniger zu fürchten; gleichzeitig convergiren aber (mit abnehmendem q) auch die Sichtbarkeitsverhältnisse auf der Westseite gegen diejenigen, welche für $q = 0\cdot00$ gelten, ein Umstand, der ohne Weiters klar ist, denn je mehr die Periheldistanz zusammenschrumpft, um so gleichgiltiger wird die Neigung. Es genügt daher, die Verhältnisse nur für etwas grössere Periheldistanzen zu rechnen.

Geht man also mit i etwas unter 120° herab, so nähert man sich einer kritischen Stelle, die vollends erreicht wird, wenn man die Neigung noch weiter verkleinert; für $i = 90^\circ$ endlich wird selbst für die kleinstmögliche Periheldistanz, wie wir schon aus der Einleitung zum II. Fall wissen, auf der Westseite J noch immer etwas grösser als 0.12.

Um das Verhältniss der Neigung zu den Elongationen und Intensitäten noch anschaulicher vorzuführen, habe ich die beiden Periheldistanzen $q = 0.20$ und $q = 0.10$ mit den Neigungen $i = 135^\circ$, 120° und 105° verbunden, unter jeder dieser Annahmen in 8stägigen Intervallen ψ und J berechnet (Schema XIV und XV) und die Resultate in Fig. 3 und 4 graphisch dargestellt.

Die Katheten ($\lambda - L$) und β sind in die Tabellen nicht aufgenommen, sondern nur die Hypotenusen ψ . Damit sich der Vergleich weiter ausdehnen lässt, enthält jedes Schema auch noch die für $i = 180^\circ$ geltenden Umstände, und da hier ψ mit ($\lambda - L$) identisch ist, also die ganze Bewegung in der Ekliptik vor sich geht, ist dem ψ auch das Vorzeichen (+ östlich, — westlich) beigesetzt. Für $q = 0.10$ ist auch die schon in der Einleitung zum II. Fall erwähnte Specialisirung $i = 90^\circ$ aufgenommen. Der Vollständigkeit halber ist überdies die gemeinsame Columnne $\log r$ beigesetzt.

ψ und J für $q = 0.20$.

t	$\log r$	$i = 180^\circ$		$i = 135^\circ$		$i = 120^\circ$		$i = 105^\circ$	
		ψ	J	ψ	J	ψ	J	ψ	J
8	9.545	+19°	7.23	20°	7.41	20°	7.55	20°	7.72
16	9.753	20	1.62	22	1.69	23	1.75	24	1.82
24	9.884	16	0.611	20	0.648	22	0.677	25	0.713
32	9.977	11	0.305	18	0.326	22	0.343	26	0.365
40	0.050	+ 6	0.178	17	0.192	22	0.203	27	0.218
48	0.108	0	0.116	18	0.126	24	0.134	30	0.145
56	0.158	— 7	0.0823	21	0.0895	27	0.0955	34	0.1036
64	0.200	—13	0.0618	25	0.0675	31	0.0723	38	0.0787

XIV)

ψ und J für $q = 0.10$.

t	$\log r$	$i = 180^\circ$		$i = 135^\circ$		$i = 120^\circ$		$i = 105^\circ$		$i = 90^\circ$	
		ψ	J	ψ	J	ψ	J	ψ	J	ψ	J
8	9.563	+14°	4.81	14°	4.89	15°	4.95	15°	5.02	16°	5.10
16	9.788	12	1.09	14	1.13	16	1.15	17	1.18	19	1.22
24	9.918	8	0.448	13	0.466	16	0.479	18	0.496	21	0.516
32	10.008	+3	0.237	13	0.248	17	0.257	20	0.268	24	0.281
40	0.077	-3	0.146	15	0.154	19	0.160	23	0.167	27	0.177
48	0.134	9	0.099	18	0.105	23	0.109	27	0.115	32	0.122
56	0.181	15	0.0720	23	0.0765	28	0.0802	32	0.0848	37	0.0905
64	0.222	-22	0.0553	29	0.0590	33	0.0620	38	0.0659	43	0.0706

XV)

Fig. 3.
 $q = 0.20$.

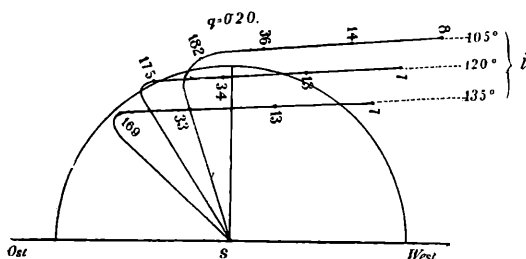
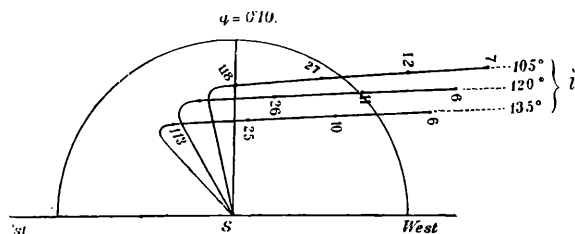


Fig. 4.
 $q = 0.10$.



Figuren 3 und 4 sind nach demselben Massstab entworfen, wie Fig. 1; es sind jedoch bloss die Umstände nach dem Perihel gezeichnet, wesshalb die untere Hälfte des Strahlenkreises wegbleiben konnte. Die Intensität J ist nur für $t = 16, 32, 48$ und 64 eingetragen und zwar wieder ihr 100facher Betrag.

Man sieht nun vor allem sowohl in der einen als in der anderen Tabelle, dass die demselben t , aber verschiedenen Neigungen entsprechenden Intensitäten nur wenig differiren. Ganz anders verhält sich dagegen die Sache, wenn man jedes J mit seinem ψ vergleicht. Von $i = 180^\circ$ bis $i = 135^\circ$ ist der Abfall noch nicht stark, von hier an rückt aber die Stelle, an welcher der Komet den Strahlenkreis endgiltig durchschneidet, d. h. wo $\psi > 22\frac{1}{2}^\circ$ wird, mit abnehmender Neigung immer rascher auf ein früheres Datum, also gegen das Perihel zu, wo somit in Folge der kleinen Distanzen J noch einen bedeutenden Werth hat. Diese Stellen sind in jedem Schema durch einen kleinen Horizontalstrich angedeutet.

Für $q = 0.20$ darf man, wie schon gesagt wurde, mit i bis 135° , aber nicht mehr bis 120° herabsteigen, da sonst für $\psi = 22\frac{1}{2}^\circ$ schon $J > 0.12$ ist; überdies würde der Komet auch für etwa $t = 16$ mit einer grossen Intensität ($J = 1.75$) einige Zeit hindurch sich ausserhalb des Strahlenkreises befinden, was auch in Fig. 3 zu bemerken ist.

Für $q = 0.10$ sind die Umstände nicht viel anders. Man darf mit der Neigung ohne weiters bis 135° und auch noch bis circa 120° heruntergehen, weiter aber nicht mehr, denn für $i = 105^\circ$ ist an der fraglichen Stelle schon $J > 0.12$.

Der Hauptunterschied zwischen $q = 0.20$ und $q = 0.10$ liegt, wie aus Fig. 3 und 4 ersichtlich ist, darin, dass sich für $q = 0.20$ das Maximum der östlichen Elongation mit einer ansehnlichen Helligkeit bemerkbar machen kann, für $q = 0.10$ jedoch nicht mehr, da es hier noch weit innerhalb der Peripherie des Strahlenkreises bleibt.

Da in der Nähe dieses Maximums, welches sich in der Curve als Wendepunkt manifestirt, die Intensitäten noch gross sind, wenn sie auch rasch kleiner werden, muss man trachten, den Kometen längere Zeit nach Passirung dieses Wendepunktes innerhalb der Peripherie zu erhalten, darf also die Neigung nur

soweit ansteigen lassen, dass die Umkehrstelle sammt ihrer nächsten Umgebung noch ganz in den Kreis hineinfällt. Ist aber diese Stelle so gelegen, dass der Komet gleich nach Passirung derselben hinausgeht (siehe Fig. 3 die Curve für $i = 120^\circ$ und noch mehr für $i = 105^\circ$), so ist wegen zu grosser Intensität ein Sichtbarwerden ermöglicht.

Die beiden Zeichnungen lehren auch, dass der Wendepunkt des Kometenweges mit abnehmender Neigung immer weiter von der Ost- nach der Westseite hinübertückt. Es ergibt sich also wieder dieselbe Folgerung: Je mehr sich die Neigung von 180° entfernt, um so kürzere Zeit verweilt der Komet innerhalb des Strahlenkreises, um so kleiner sind die Distanzen beim Heraus-treten, umso grösser also die Intensitäten, umso leichter kann er gesehen werden.

Die wechselseitigen Verhältnisse der drei eingezeichneten Curven geben schon einen Fingerzeig, wie sich der Lauf für noch kleinere Neigungen gestalten würde. Man sieht, dass die geocentrische Breite nach Passirung des Wendepunktes (wenigstens auf der hier betrachteten Strecke) fast dieselbe bleibt; sie steigt zwar mit abnehmender Neigung, aber immer langsamer, und bald würde man zu einer Stelle kommen, an der sie mit abnehmender Neigung ebenfalls abzunehmen beginnt. Gleichzeitig rückt der Wendepunkt von der Ost- ganz nach der Westseite, und der an dieser Stelle gebildete Winkel (wenn es überhaupt gestattet ist, in erster Annäherung hier von einem Winkel zu sprechen) wird immer mehr stumpf.

Ich setze die geocentrischen Breiten β für die letzten berechneten Punkte ($t = 64$) und zwar für $q = 0.10$ hier an.

	β	Diff.
135°	13°	
120	16 $\frac{1}{2}$	3 $\frac{1}{2}$
105	19	2 $\frac{1}{2}$
90	20 $\frac{1}{2}$	1 $\frac{1}{2}$

Die abnehmenden Differenzen zeigen also, dass die Breite bald ihr Maximum erreicht. Geht i bis 0° herunter, so wird natürlich auch $\beta = 0$, ganz so wie bei $i = 180^\circ$

Für jede bestimmte Periheldistanz gibt es eine bestimmte Neigung, bis zu der man heruntergehen kann. Diese dürfte aber nicht mehr so wie im I. Fall (Tabelle VII) ermittelt werden. Dort ist es in dieser Hinsicht viel einfacher, indem man bloß das Maximum der Elongation zu untersuchen braucht und sich um die Intensität, welche der Komet beim definitiven Heraustreten besitzt, nur mehr wenig kümmern darf, da die Distanzen dort schon bedeutend angewachsen sind.

Jetzt aber, im II. Fall, hat man sein Augenmerk auf jede dieser beiden Stellen zu richten, und man sollte eigentlich, um die für eine gegebene Periheldistanz zulässige Neigung zu ermitteln, nebst der Elongation auch eine bestimmte Intensität (etwa 0·06 oder 0·12) der Rechnung zu Grunde legen. Darauf lasse ich mich jedoch nicht ein, denn eine solche Rechnung (die übrigens am Besten wohl empirisch zu führen wäre) könnte nur sehr vage Resultate liefern, und ich habe überhaupt immer daran festgehalten, in erster Linie die Elongationen und nur in zweiter die Helligkeiten in Betracht zu ziehen.

Das Hauptresultat lässt sich also dahin aussprechen, dass für den II. Fall ($q < 0·23$) directe Bewegung ausgeschlossen ist und nur bei minimalen Periheldistanzen gerade noch für zulässig erklärt werden kann.

Drehung der Bahnaxe aus der Ekliptik.

Die Drehung soll wieder um den Parameter als Drehungsaxe geschehen, so dass also der zwischen $v = \pm 90^\circ$ befindliche Bahntheil auf der einen und der zu $v < -90^\circ$ und $v > +90^\circ$ gehörende Theil auf der anderen Seite der Ekliptik liegt. Unter dieser Annahme liegen die beiden Äste der Parabel gegen die Ekliptik symmetrisch. Fände eine solche Symmetrie nicht statt, so würde der Komet zwar auf dem einen Ast noch leichter, dafür aber auf dem anderen noch weniger verborgen bleiben, denn was man auf der einen Seite gewinnt, geht auf der anderen verloren, wie wir schon bei der Variation der Perihellänge gesehen haben.

Es ist also $\pi - \varpi = \pm 90^\circ$, daher $b_0 = i$, oder, da hier nur retrograde Bewegungen untersucht werden, b_0 identisch mit $180^\circ - i$.

Wie weit darf nun b_0 ansteigen, ohne dass der Komet sichtbar wird? Tabelle VIII lehrt, dass die Abweichung von der Bedingung $\sin b_0 = 0$ für $q < 0.23$ eintreten darf, falls ψ auf der Ostseite höchstens $22\frac{1}{2}^\circ$ betragen soll, die Abweichung darf aber dann wieder um so bedeutender sein, je kleiner q ist, doch werden dann die Intensitäten, welche der Komet beim definitiven Heraus-treten besitzt, zu gross.

Da also, wenn die Bahnaxe aus der Ekliptik gedreht wird, für grössere Periheldistanzen (etwa 0.20) die beim Maximum der Elongationen stattfindenden Helligkeiten zu bedeutend werden, für kleinere (etwa $q < 0.10$) die vom Perihel weiter abliegenden Helligkeiten zwar nicht sehr gross, aber immerhin doch grösser als 0.12 werden, so liegt jenes q , für welches die Drehung am stärksten sein darf, zwischen den extremen Werthen.

Ich habe die Rechnung nur für $q = 0.10$ gemacht und der Reihe nach $b_0 = 15^\circ$, 30° und 45° gesetzt. Da hier hauptsächlich solche Breiten von Interesse sind, welche weiter vom Perihel entfernt liegen und somit zu $v > 90^\circ$ (also auch $v < -90^\circ$) gehören, wurde, damit dieselben positiv ausfallen, $\pi - \Omega = -90^\circ$, demnach $u = v - 90^\circ$ gewählt; es liegt also der aufsteigende Knoten bei $v = +90^\circ$, und zwar ist

$$\Omega = L_0 + 90^\circ$$

somit

$$l = (l - \Omega) + L_0 + 90^\circ,$$

wobei $(l - \Omega)$ wieder aus den Formeln 14) zu bestimmen ist.

Tabelle XVI enthält die zur Entscheidung nöthigen Resultate und ist ähnlich wie die beiden Tabellen XIV und XV angelegt.

ψ und J für $q = 0.10$.

t	$b_0 = 0^\circ$ $i = 180$		$b_0 = 15^\circ$ $i = 165$		$b_0 = 30^\circ$ $i = 150$		$b_0 = 45^\circ$ $i = 135$	
	ψ	J	ψ	J	ψ	J	ψ	J
40	-3°	0.1457	7°	0.1473	13°	0.1523	20°	0.1608
48	-9	0.0983	11	0.0998	16	0.1028	22	0.1080
56	-15	0.0720	17	0.0726	20	0.0744	25	0.0776
64	-22	0.0553	23	0.0557	25	0.0568	28	0.0588

XVI)

Die Discussion dieser Zahlen kann in derselben Weise geschehen, wie bei der Neigung (Tabelle XIV und XV) und braucht daher nur kurz zu sein. Zieht man blos die weitere Elongation, $\psi = 22\frac{1}{2}^\circ$, in Betracht, so darf man mit b_0 ohne weiters bis 30° steigen, indem dann J erst 0.06 beträgt; dreht man die Axe bis 45° heraus, so ist an der fraglichen Stelle etwa $J = 0.10$.

Da mit gleichmässig wachsendem b_0 , wie die Vergleichung der Zahlen lehrt, sowohl die Elongationen als die Intensitäten immer rascher zunehmen, wird man die Axe nur mehr wenig über 45° drehen dürfen, bis für $\psi = 22\frac{1}{2}^\circ$ endlich $J = 0.12$ wird, und das ist noch der weiteste von uns zugelassene Spielraum.

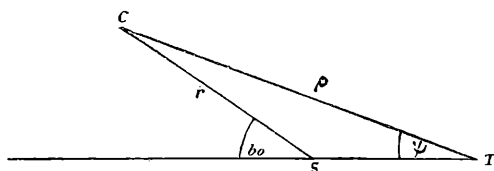
Da jetzt nur die Umstände betrachtet wurden, welche der vom Perihel weiter entlegenen Partie angehören, könnte noch gefragt werden, ob nicht etwa durch das Herausdrehen der Bahnaxe das in der Nähe des Perihels eintretende Maximum zu gross wird. Das ist jedoch, wenn nur q kleiner als etwa 0.20 und b_0 mässig gewählt wird, nicht der Fall. Es sei zur Bestätigung nur angeführt, dass für $q = 0.16$ und $b_0 = 30^\circ$ dieses Maximum berechnet und dafür $18^\circ 52'$ gefunden wurde, während es für $b_0 = 0$ (siehe Tabelle VIII) den Werth $18^\circ 10'$ hat, so dass also die Differenz kaum in Betracht kommt. Für noch kleinere Periheldistanzen ist natürlich auf dieser Seite noch weniger zu besorgen, weil das Maximum weit innerhalb des Strahlenkreises bleibt, und nur jene Partie zu untersuchen ist, wo der Komet endgiltig heraustritt; und das ist eben in Tabelle XVI für ein specielles q geschehen.

Da die Drehung der Bahnaxe in der Weise stattgefunden hat, dass beide Äste der Parabel an den Sichtbarkeitsverhältnissen ganz denselben Antheil haben, können die für b_0 erhaltenen Zahlen nur als obere Grenzen gelten. Will man eine Durchschnittsgrenze, die für alle Periheldistanzen nahe richtig ist, so wird man $b_0 = 30^\circ$ wählen können, und somit lautet die Bedingung für die Lage der Bahnaxe gegen die Ebene der Ekliptik:

$$\sin \omega \sin i < \frac{1}{2}.$$

Ausgedehntere Rechnungen habe ich unterlassen hauptsächlich darum, weil b_0 kein übliches Bahnelement ist. Ich will nur noch einen idealen Fall behandeln, nämlich die Frage, wie gross r sein muss, damit der Komet beim Passiren der Elongation ψ eine bestimmte Intensität J besitzt; von der Bewegung der Erde soll dabei abgesehen werden. Wir haben zu diesem Zwecke das Dreieck zwischen Erde, Sonne und Komet, welches schon zweimal, zuerst für eine bestimmte Intensität, dann für eine bestimmte Elongation betrachtet wurde, abermals aufzulösen, aber unter der Bedingung, dass jetzt sowohl die Intensität als die Elongation vorgeschrieben ist.

Fig. 5.



Sei in T die Erde, in S die Sonne und in C der Komet, so ist ψ die gegebene Elongation. In dem Dreieck ist also die Seite $ST = R$, der anliegende Winkel ψ und das Product der beiden anderen Seiten $r\rho$ bekannt und es soll r, ρ und der Winkel b_0 gefunden werden. Es besteht nun die Relation

$$r^2 = R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos \psi$$

oder, wenn $r\rho = p$ und, wie immer, $R = 1$ gesetzt wird:

$$r^4 - r^2 + 2pr \cos \psi - p^2 = 0.$$

Stellen wir nun die Forderung, dass $J = \frac{1}{16}$, somit $p = 4$ sein soll, so ist aus der Gleichung

$$r^4 - r^2 + 8r \cos \psi - 16 = 0$$

r zu ermitteln; hierauf ergibt sich $\rho = \frac{4}{r}$, und der Winkel b_0 durch eine der bekannten Relationen. Ich habe die Gleichung für $\psi = 15^\circ$ und $\psi = 22\frac{1}{2}^\circ$ aufgelöst und gefunden:

ψ	r		b_0
15°	1.5827	2.5273	$24^\circ 25'$
$22\frac{1}{2}^\circ$	1.6087	2.4864	36 16

Die zweite Wurzel der Gleichung ist negativ, die beiden anderen sind imaginär.

Die Werthe von b_0 beantworten unter anderen die Frage, welchen Winkel die Bahn eines geradlinig zum oder vom Sonnenmittelpunkt wandernden Gestirns mit der Ekliptik bilden muss, damit beim Passiren der vorgeschriebenen Elongation ψ die Helligkeit $J = 0.0625$ ist. Das Gestirn muss dabei, wie die Werthe von r und ρ lehren, weit jenseits der Sonne sich befinden, denn sonst könnte eine so geringe Helligkeit nicht zu Stande kommen. ρ ist fast um die Einheit grösser als r , und dieses Verhältniss findet mehr oder minder genau bei sämmtlichen in dieser Abhandlung vorgeführten Beispielen statt, was von selbst einleuchtet, da sich der Komet von der Geraden ES nie sehr weit entfernen darf.

Als dieses Dreieck in der Einleitung betrachtet wurde, war die Elongation ψ willkürlich und darum resultirte als Durchschnitt der Geraden r und ρ kein fixer Punkt, sondern eine Curve.

Ich betrachte nun auch den II. Fall als erledigt. Er hat das Eigenthümliche, dass es hier nicht mehr möglich ist, so geringe Helligkeiten zu erzielen wie im I., weil jetzt der Komet sehr nahe zur Sonne hereinkommt. Geht man dort unter das zu $\psi = 22\frac{1}{2}^\circ$ gehörige q herab, so ist $J = 0.16$, hier dagegen schon $J = 2.8$. Im II. Falle ist also besonders darauf zu achten, dass die kritische Grenze für q (nämlich 0.23) nicht überschritten wird, während im I. ein Herabgehen unter $q = 0.59$, also ein Vergrössern von ψ über $22\frac{1}{2}^\circ$ hinaus minder gefährlich ist, da ja hier J erst 0.16 beträgt. Dies gilt für das in der Nähe des Perihels eintretende Maximum der Elongation. Für die andere Elongation, welche einem viel weiter vom Perihel entlegenen Wegstücke angehört, können zwar auch im II. Falle sehr kleine Intensitäten zu Stande kommen ($J = 0.04$ in Tabelle VIII), doch sind sie im I. Falle an dieser Stelle noch geringer ($J = 0.013$ in Tabelle II). Dass man in Folge dessen nebst dem Maximum der Elongation im II. Falle auch noch die Intensität für die vom

Perihel weiter entfernte Passage des Strahlenkreises zu beachten hat, im I. jedoch fast gar nicht mehr, wurde schon früher hervorgehoben.

Für die Lage des Knotens braucht, wie bereits zum Schlusse des I. Falles gesagt wurde, eine eigene Bedingung nicht aufgestellt zu werden, indem durch die Forderung, dass $\sin(\pi - \varrho) \sin i$ eine kleine Grösse sein soll, über die Knotenlänge ohnehin schon verfügt ist. Für Neigungen, die schon gegen 180° liegen, wird die Länge des Knotens gleichgiltig, es kann sogar $\pi - \varrho = 90^\circ$, also $\left. \begin{matrix} \varrho \\ \varphi \end{matrix} \right\} = L_0 + 90^\circ$ werden, während sonst im Allgemeinen stets $\left. \begin{matrix} \varrho \\ \varphi \end{matrix} \right\} = L_0$ sein soll.

Wenn ich auch die Resultate dieser hypothetischen Rechnungen nicht nach jeder Richtung hin als erschöpfend bezeichnen darf, schon darum nicht, weil ich mich in manchen Theilen mit kurzen Andeutungen begnügt habe, werden sie doch hinreichen zu einer allgemeinen Beurtheilung des in Rede stehenden Problems, das in voller Strenge überhaupt gar nicht behandelt werden kann, nämlich zur Beantwortung der Frage, ob und unter welchen Umständen ein zur Sonne hereinkommender Komet für uns unsichtbar bleiben kann oder sogar muss.

Es hat sich also herausgestellt, dass ein Verborgenbleiben in der That möglich ist, freilich unter sehr eigenartigen Verhältnissen, und diese stelle ich hier in Kürze zusammen.

Allgemeine Bedingungen. Die Bahnaxe soll nahe in der Ekliptik liegen, d. h. es soll $\sin b_0 = \sin(\pi - \varrho) \sin i = 0$ oder doch nur mässig sein. Der Komet soll zur Zeit des Perihels ganz oder nahezu in Conjunction mit der Sonne und zugleich in der Ekliptik sein. Diese Bedingung zerfällt in zwei, je nachdem er sich jenseits oder diesseits der Sonne befindet.

Ist er jenseits (I. Fall), so muss die Periheldistanz q gegen 1 und darüberhinaus liegen, die Bewegung direct und die Neigung gering sein. Bezeichnet man mit L_0 die am Tage des Perihels stattfindende geocentrische Länge der Sonne, so muss, um der Forderung der Conjunction zu genügen, die heliocentrische Länge des

Perihels $l_0 = L_0$ sein, wofür auch, da hier die Neigung nicht gross ist, das Bahnelement π substituirt werden kann, und die Bedingung lautet: $\pi = L_0$.

Befindet sich der Komet zur Zeit des Perihels diesseits der Sonne (II. Fall), d. h. ist $l_0 = L_0 + 180^\circ$, so muss vor Allem q klein sein. Was die Neigung betrifft, so ist sie zwar, so lange q einen der kleinsten, überhaupt möglichen Werthe hat, ziemlich gleichgiltig, muss jedoch, sobald q etwas grösser wird, schon mehr als 90° betragen. Je mehr sie gegen 180° steigt, um so leichter kann der Komet verborgen bleiben.

Specielle Bedingungen. Diese ergaben sich dann, wenn über die kleinste Elongation ψ , in zweiter Linie auch über die kleinste Intensität J , bei welcher ein Komet noch zu erkennen ist, eine bestimmte Annahme gemacht wird. Soll $\psi \begin{Bmatrix} 15^\circ \\ 22\frac{1}{2}^\circ \end{Bmatrix}$ betragen, so muss q entweder grösser als $\begin{Bmatrix} 0.74 \\ 0.59 \end{Bmatrix}$ (I. Fall) oder kleiner als $\begin{Bmatrix} 0.11 \\ 0.23 \end{Bmatrix}$ (II. Fall) sein; die zwischenliegenden Periheldistanzen sind ausgeschlossen.

Nur für diese Grenzwerte von q muss den drei Forderungen $l_0 = L_0$ (bez. $= L_0 + 180^\circ$), $i = 0^\circ$ (bez. $= 180^\circ$), $b_0 = 0^\circ$ strenge genügt werden. Hat dagegen q noch grössere Werthe als die für den I. Fall, oder noch kleinere als die für den II. Fall angeführten, so sind Abweichungen von der strengen Forderung zulässig, die sodann um so grösser sein dürfen, je mehr sich q von dieser kritischen Grenze entfernt. Dieser Spielraum ist für l_0 , i und b_0 , und zwar für jeden der beiden Hauptfälle, ermittelt worden. Dabei wurde die Aufgabe meist nur für die eine von den beiden Annahmen $\psi = 15^\circ$ oder $\psi = 22\frac{1}{2}^\circ$ vollständig gelöst, während die andere bloß kurz behandelt wurde. Der Spielraum ist fast durchgehends nicht sonderlich gross; ausgenommen ist nur die für kleine Periheldistanzen (II. Fall) zulässige Neigung, welche alle Werthe zwischen 180° und 120° , für ganz kleine q noch etwas weiter herab annehmen kann, ohne dass die Sichtbarkeitsverhältnisse wesentlich von einander verschieden werden.

Ich deute hier die Resultate nochmals in aller Kürze an und begnüge mich dabei mit etwas abgerundeten Zahlen; genauere

Angaben, sowohl über nothwendige Beschränkungen, als zulässige Erweiterungen sind in den früheren Ausführungen selbst zu finden. Für ψ ist die weitere Grenze, $22\frac{1}{2}^\circ$, gewählt.

I. Fall.

$$q > 0.6$$

$$i < 35^\circ$$

$$\pi(=l_0) = L_0 \pm 30^\circ$$

II. Fall.

$$q < 0.2$$

$$i > 90^\circ$$

$$l_0 = (L_0 + 180^\circ) \pm 25^\circ$$

für beide Fälle gemeinschaftlich: $\sin(\pi - \varpi) \sin i < \frac{1}{2}$

$$\left. \begin{array}{l} \varpi \\ \varphi \end{array} \right\} \text{nahe} = L_0.$$

XVII

Da bei der Bestimmung des Spielraumes immer nur eines der drei Stücke i , l_0 und b_0 variirt wurde, die anderen zwei dagegen so gelassen wurden, dass sie das Verborgensein am meisten begünstigen, können die erhaltenen Zahlenwerthe nur als obere Grenzen gelten. Trotzdem wird, wenn wir nun auf die Praxis übergehen, ein Komet gewiss auch dann manchmal übersehen werden, wenn die abgeleiteten Bedingungen nicht strenge zutreffen und die aufgestellten Grenzen noch etwas weiter gezogen werden, einfach darum, weil es zeitweilig wegen andauernder und weit ausgedehnter trüber Witterung auch beim Zusammenwirken zahlreicher Kometenjäger nicht möglich ist, Tag für Tag die ganze Peripherie des Strahlenkreises, oder vielleicht richtiger die Fläche des zwischen 15° und $22\frac{1}{2}^\circ$ befindlichen Kreisringes abzusuchen.

Noch ein anderer Umstand nimmt den gefundenen Resultaten etwas von ihrer Strenge, nämlich der, dass bedeutend von einander verschiedene Helligkeiten, wenn nur die zugehörige Elongation kleiner als 15° oder $22\frac{1}{2}^\circ$ ist, als gleichwerthig betrachtet werden. Es ist z. B. angenommen worden, dass ein Komet, so lange er sich zwischen den Elongationen 15° und $22\frac{1}{2}^\circ$ befindet, bei einer Helligkeit von $J = 3.0$ (siehe Tabelle VIII) ebenso wenig gesehen wird, wie bei $J = 0.16$ (Tabelle I). Das ist aber nicht der Fall, indem zwischen diesen beiden Intensitäten eine ansehnliche Differenz besteht, die in Grössenklassen ausgedrückt schon 3.2 Mg. beträgt.

Man sollte also eigentlich für grössere Elongationen eine kleinere Intensität und für kleinere Elongationen eine grössere Intensität als untere Grenze wählen. Um jedoch auf einer sicheren Basis operiren zu können, brauchte man verlässliche Angaben über das photometrische Verhältniss zwischen Elongation und Intensität, gültig für sehr geringe Abstände von der Sonne.

Man kann jedoch, ohne eine neue Untersuchung anstellen zu müssen, der angeregten Forderung zum Theil dadurch gerecht werden, dass man die Grenzen für die Bahnelemente im I. Fall weiter, im II. aber enger zieht, als in der vorliegenden Arbeit geschehen ist, in welcher hauptsächlich die Elongationen und nur im untergeordneten Masse die Intensitäten ausschlaggebend waren. Man wird daher zum Beispiel mit den Periheldistanzen im I. Fall auch noch unter 0.6 herabgehen, im II. aber nicht einmal bis 0.2 hinaufgehen dürfen.

Mit Hilfe der in XVII gegebenen kurzen Übersicht lassen sich aus dem Verzeichniss der berechneten Kometen rasch diejenigen herausfinden, welche den Bedingungen des Verborgengebleibens genügen können. Vollständig, namentlich in Bezug auf den zwischen Perihelzeit und Perihellänge aufgestellten Zusammenhang, genügt, abgesehen von den periodischen, kein einziger Komet und kann es auch nicht, denn sonst hätte er ja, ausgenommen den Fall besonderer Helligkeit, überhaupt gar nicht beobachtet werden können.

I. Fall. (Directe Bewegung, mässige Neigung, $(\pi - \Omega)$ mit wachsender Neigung immer mehr einem der Werthe 0° oder 180° sich nähernd, Periheldistanz gegen 1 und darüber hinaus, und zwar $\log q$ etwa zwischen 9.7 und 0.2). Für diesen Fall haben wir eine lange Reihe von Kometen, die somit, wenn zur Zeit des Perihels ungefähr $L = \pi$ gewesen wäre, unsichtbar geblieben wären. In Wirklichkeit wird jedoch dieser Bedingung von den meisten Kometen nicht einmal in einem entfernten Grade genügt, was der Hauptsache nach gewiss daher rührt, dass unter solchen Verhältnissen die theoretische Helligkeit eben der bedeutenden Distanzen wegen nur gering ist ($J = 0.16$ oder nur wenig grösser). Ausserdem mag aber in diesem Umstande vielleicht auch angedeutet sein, dass in der Nähe der Morgen- und Abenddämmerung

mit besseren Instrumenten noch wenig nach Kometen gesucht wurde.

Bei einigen Kometen waren die Verhältnisse geradezu entgegengesetzt, d. h. zur Zeit des Perihels war beinahe $L = \pi \pm 180^\circ$, somit der Komet im Perihel zugleich in Opposition mit der Sonne, bot uns also die möglichst günstigen Sichtbarkeitsverhältnisse dar. Ein solcher war de Vico's periodischer Komet vom Jahre 1844, der am 2. September sein Perihel in der Länge 342° passirte, während die geocentrische Länge der Sonne 160° betrug, somit die heliocentrische Differenz nur 2° . Geht jedoch dieser Komet in der entgegengesetzten Jahreszeit durch sein Perihel, also Februar oder März, so bleibt er unsichtbar, ein Umstand, der allgemein bekannt ist; so geschah es gleich im Jahre 1850, als, die Umlaufszeit zu $5\frac{1}{2}$ Jahren vorausgesetzt, nahezu $L_0 = \pi$ war.

Hier sind auch zwei interessante periodische Kometen aus den letzten Jahren zu zählen, nämlich 1869 III = 1880 IV, und 1881 V (Denning). Für den ersteren ist $\pi = 43^\circ$, für den letzteren $\pi = 18^\circ$; beide können daher unsichtbar bleiben, wenn sie im Frühling durch das Perihel gehen.

Überhaupt gehören in diese Classe auch die meisten jener Kometen, welche, obwohl sie der Rechnung zufolge eine kurze Umlaufszeit besitzen, später nicht mehr zu finden waren oder erst nach mehreren Umläufen ganz neu entdeckt wurden; solche sind: 1819 III = 1858 II (Winnecke), 1819 IV (Blanpain), 1846 III (Brorsen), 1846 VI (C. H. F. Peters), ferner 1873 VII, der vermuthlich mit 1818 I identisch ist.

Es sind nun freilich die Bahnen der hier speciell genannten Kometen streng ausgesprochene Ellipsen und daher können unsere Betrachtungen, da sie auf eine parabolische Kometenbahn gegründet sind, hier keine directe Anwendung finden; dennoch geben sie einen richtigen Fingerzeig, weil in der dem Perihel zunächst liegenden Strecke der Charakter der Ellipse noch nicht stark hervortritt.

Anderseits ist damit aber auch der Grund angedeutet, warum Kometen mit $q > 1$, welche hinsichtlich der Excentricität von der Parabel gegen die Ellipse hin schon sehr bedeutend

abweichen (wie zum Beispiel der Komet von Faye), bei jeder bisher eingetretenen Wiederkehr gefunden wurden. Sie sind nämlich auch in einem vom Perihel schon weitab liegenden Bahnstück der Erde hinreichend nahe, was bei grösserer Excentricität nicht jedesmal stattfinden könnte. Auch der periodische Komet von d'Arrest wäre wohl nicht so oft gesehen worden, wenn die Excentricität seiner Bahn grösser wäre. Nur im Jahre 1864, als die Bedingung der Unsichtbarkeit ganz erfüllt war ($L_0 = \pi + 20^\circ$), blieb der Komet trotz der geringeren Excentricität unsichtbar. Auch bei der jetzigen Rückkehr kommt diese Bedingung zur Geltung, indem (13. Jänner 1884) die Sonnenlänge $L_0 = \pi - 26^\circ$ ist.

Der II. Fall (kleine Periheldistanz, retrograde Bewegung) bietet darum ein besonderes Interesse, weil es sich hier um Kometen handelt, die unsichtbar bleiben, obwohl sie sehr nahe zur Sonne hereinkommen. Die Ausbeute an bekannten Kometen ist hier weniger reichhaltig als im I. Fall, hauptsächlich darum, weil q grösseren Beschränkungen unterliegt. Um nun jene Gestirne zu finden, die bei geeigneter Wahl der Perihelzeit die Bedingungen der Unsichtbarkeit erfüllen, hat man die Bahnen mit $q < 0.23$ und $i > 90^\circ$ ins Auge zu fassen und darauf zu achten, dass $\sin(\pi - \Omega) \sin i < \frac{1}{2}$ ist, dass somit, je weiter man sich von $i = 180^\circ$ entfernt, der Bedingung $\pi - \Omega = 0^\circ$ oder $= 180^\circ$ immer näher entsprochen wird.

Man wird dadurch, wenn man mit $i = 180^\circ$ beginnt, zunächst auf den Kometen 1826 III geführt, dessen Bahn jedoch sehr unsicher ist, ferner auf den Kometen von 1689 (aber nur bei Zugrundelegung der von Ed. Vogel gerechneten Elemente) und den von 1821. Diese Gestirne wären also, wenn sie zur Zeit des Perihels nahe zwischen Erde und Sonne gestanden hätten, höchst wahrscheinlich gar nicht entdeckt worden. Auch der berühmte Komet von 1680 könnte, abgesehen von seiner Grösse, hieher gerechnet werden ($b_0 = -8^\circ$), aber nur in einem entfernten Grade, da die Neigung nur mehr 61° beträgt; doch ist dafür die Periheldistanz ausserordentlich klein ($q = 0.006$). In Wirklichkeit waren jedoch bei diesem Kometen, da er bei sehr kleiner Periheldistanz sein Perihel jenseits der Sonne passirte, die Sichtbarkeitsverhältnisse besonders günstig.

In diese zweite Classe wird man nun vielleicht auch den zu Sohag gesehenen Kometen einreihen dürfen, insbesondere dann, wenn es gestattet ist, aus dem Vorhandensein des hübschen Schweifes auf eine kleine Periheldistanz und ausserdem von seiner ansehnlichen Helligkeit, welche die der äusseren Partie der Sonnen-Corona übertraf, auf einen kleinen Radius vector, also gleichfalls auf eine geringe Periheldistanz zu schliessen.

Der Komet 418 II kann nur zum Theil als Seitenstück zum Sohag-Kometen gelten. Er wurde zwar auch während einer totalen Sonnenfinsterniss (19. Juli 418) gesehen, doch können die hier abgeleiteten Beziehungen auf ihn keine Anwendung finden, da er noch mehrere Monate später beobachtet wurde.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse](#)

Jahr/Year: 1883

Band/Volume: [88_2](#)

Autor(en)/Author(s): Holetschek Johann

Artikel/Article: [Über die Bahn eines Kometen, der während seiner günstigen Helligkeit nicht ans den Sonnenstrahlen heraustreten kann. 1099-1162](#)