Über die Berechnung der Inductionscoëfficienten von Drahtrollen.

Von dem w. M. J. **Stefan**.

Die Herstellung der Widerstandseinheit (Ohm) nach der vom Comité der British Association angenommenen Methode hat die Veranlassung gegeben, den Coëfficienten der Selbstinduction des angewendeten Erdinductors zu bestimmen. Mit besonderer Sorgfalt ist diese Bestimmung von Lord Rayleigh und A. Schuster, welche die Versuche des Comité's wiederholten, ausgeführt worden.[1] Lord Rayleigh hat später noch einen zweiten Inductor zu dem gleichen Zwecke benützt und auch für diesen den Inductionscoëfficienten bestimmt.[2]

Nach der Theorie der elektrodynamischen Induction ist der bestimmte Coëfficient gleichbedeutend mit dem doppelten elektrodynamischen Potential der entsprechenden Stromleitung auf sich selbst, eigentlich mit dem speciellen Werthe, welchen dieses doppelte Potential annimmt, wenn die Leitung von der elektromagnetischen Stromeinheit durchflossen wird. Dieses Potential lässt sich in den beiden Fällen auch durch Rechnung finden, da die Form der Stromleitungen geometrisch bestimmt und verhältnissmässig einfach ist. Diese Rechnung wurde auch für den ersten der zwei Inductoren zuerst von Maxwell und für beide von Lord Rayleigh ausgeführt.

Es ist wohl als selbstverständlich betrachtet worden, dass der berechnete Inductionscoëfficient mit dem beobachteten übereinstimmen müsse. Es ist aber doch hervorzuheben, dass durch diese Übereinstimmung, welche sich für die aus Kupferdraht hergestellten Inductoren auch thatsächlich ergeben hat, doch erst der Beweis für die Richtigkeit der angewandten Formeln geliefert

---

[1] Proceedings of the R. Soc. No. 213, p. 104, 1881.

[2] Phil. Transactions of the R. Soc. Vol. 173, p. 661, 1882.

wird. Der Begriff des elektrodynamischen Potentials ist aus den Fernwirkungen, welche zwischen Leitern elektrischer Ströme bestehen, abgeleitet worden. Dass diese Fernwirkungen durch den Potentialausdruck richtig wiedergegeben werden, dafür werden die dynamometrischen Versuche von Wilhelm Weber als Beweis angeführt. Man kann nun auch den Bestimmungen der Inductionscoëfficienten die Bedeutung geben, dass durch dieselben die Giltigkeit der Potentialformel nicht nur für die Fernwirkungen, sondern auch für die elektromotorischen Wechselwirkungen von Stromleitern, die sich unmittelbar berühren, geprüft wird.

Die erste experimentelle Bestimmung des Coëfficienten des englischen Inductors ist nicht sehr genau. Auch die erste von Maxwell ausgeführte Berechnung dieses Coëfficienten ist fehlerhaft. Die dazu dienende Formel, welche von Maxwell entwickelt wurde, ist eine Näherungsformel und gibt das Potential einer Drahtrolle auf sich selbst unter der Voraussetzung, dass der Querschnitt des von den Drahtwindungen erfüllten ringförmigen Raumes ein Rechteck ist und dass die Dimensionen dieses Rechteckes klein sind gegen den mittleren Durchmesser der Rolle. Die Formel besteht aus zwei Theilen, einem ersten Näherungswerthe und aus einer Correction. Die Glieder der letzteren tragen die zweiten Potenzen der Verhältnisse der Breite und Höhe des Rechteckes zu dem Durchmesser der Rolle als Factoren. Von dieser Maxwell'schen Formel ist jedoch nur der erste Näherungswerth exact, in den Correctionsgliedern sind hingegen zwei numerische Coëfficienten unrichtig. Nicht nur diese Unrichtigkeit, sondern ausserdem auch noch ein bei der numerischen Berechnung begangener Fehler hatten eine beträchtlich zu kleine Zahl als Resultat zur Folge.

Lord Rayleigh hat die Maxwell'sche Formel mit einigen speciellen leichter zu behandelnden Fällen verglichen und wurde dadurch veranlasst, ihre Richtigkeit zu bezweifeln. Er machte desshalb bei der Berechnung des Inductionscoëfficienten von den Correctionsgliedern dieser Formeln keinen Gebrauch. Da die Entwicklung und Anwendung der correcten Formel zu umständlich erschien, substituirte er zum Theil der wirklich vorhandenen Aufgabe eine einfachere, zum Theil wandte er ein anderes als das von Maxwell angegebene Rechnungsverfahren an. Der von ihm gefundene Werth $P = 451448$ Met. stimmt mit dem aus den Beobachtungen von A. Schuster abgeleiteten Werthe $P = 451300$ ausserordentlich nahe überein. Den wahrscheinlichen Fehler des letzteren Werthes gibt Schuster $= \pm 1100$ an.

Ich habe diesen Coëfficienten ebenfalls berechnet nach dem in dieser Abhandlung mitzutheilenden Verfahren und $P = 451500$ gefunden. Die Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung lässt also in diesem Falle nichts zu wünschen übrig.

Der Inductor besteht aus zwei gleichen neben einander gestellten Rollen, deren Axen in eine gerade Linie fallen. Der mittlere Radius einer Rolle beträgt 15·8194, der Abstand der Mittelebenen der beiden Rollen 3·851. Der Querschnitt des von den Drahtwindungen ausgefüllten Ringes ist ein Rechteck, dessen Breite (Dimension parallel der Axe) 1·841, dessen Höhe 1·608 beträgt. Alle diese Grössen sind in Centimetern ausgedrückt. Jede Rolle enthält 156·5 Windungen, nämlich 156 Windungen in 12 Lagen zu 13 Windungen und eine halbe Windung noch ausserhalb. Bei der Berechnung wurde vorausgesetzt, dass die 156·5 Windungen gleichförmig in dem Ringe vertheilt sind. Die Dicke des aufgewundenen Drahtes ist 0·137.

Der zweite von Lord Rayleigh benützte Inductor besteht aus zwei gleichen Rollen vom mittleren Radius 23·625 in einem Abstande 6·595. Die Breite des Ringquerschnittes ist 1·99, die Höhe 1·565. Jede Rolle enthält 288 Windungen in 16 Lagen zu 18 Windungen eines 0·1104 dicken Drahtes. Aus seinen Beobachtungen leitet Rayleigh für den Inductionscoëfficienten dieses Inductors den Werth $P = 2402800$ Met. ab, nach seiner Berechnung ist $P = 2400000$ und nach meiner Berechnung $P = 2401500$. Es ist also auch in diesem Falle die Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung eine sehr gute.

Nicht so günstig stellt sich die Sache in einem dritten Falle. Nach einem der englischen Methode analogen Verfahren hat auch Heinrich Weber eine Bestimmung des Ohm ausgeführt und auch den Inductionscoëfficienten des von ihm verwendeten Inductors gemessen und berechnet.[1] Die Dimensionen dieses Inductors sind

[1] Der Rotationsinductor, seine Theorie und seine Anwendung zur Bestimmung des Ohm. Leipzig, Teubner, 1882.

folgende: Mittlerer Radius einer Rolle 26·361, Abstand der Mittelebenen der beiden Rollen 11·230, Breite des Ringquerschnittes 4·325, Höhe desselben 1·573. Jede Rolle enthält 87 Windungen. Diese sind in 6 Lagen vertheilt, von welcher die erste, dritte und fünfte je 15, die drei übrigen je 14 Windungen enthalten, so dass die Windungen jeder folgenden Lage in die Vertiefungen, welche die Windungen der vorhergehenden darbieten, eingelegt sind. Der aufgewundene Draht hatte, die Umspinnung eingerechnet, die Dicke 0·2883, ohne Umspinnung 0·253.

Aus seinen Beobachtungen leitet H. Weber für diesen Inductor den Werth $P = 225900$ Met. ab, hingegen berechnet er nach der Maxwell'schen Formel den viel grösseren Werth $P = 287510$. Diese bedeutende Differenz zwischen den beiden Werthen ist jedoch hauptsächlich durch Fehler in der Rechnung begründet. H. Weber gibt den ersten Näherungswerth von $P = 284350$ und die Correction $= 3160$ an. Die letztere ist nach der unrichtigen Maxwell'schen Formel berechnet. Der grössere Fehler ist aber schon bei der Berechnung des Hauptgliedes gemacht worden. Ich finde dasselbe $= 201490$ und die Correction $= 4680$, so dass im Ganzen $P = 206200$ nunmehr nicht grösser, sondern kleiner ausfällt, als der aus den Beobachtungen abgeleitete Werth.

Ich finde übrigens auch aus den von H. Weber mitgetheilten Beobachtungen einen kleineren Werth für P, nämlich $P = 214900$. Vielleicht ist diese Zahl noch aus folgendem Grunde zu gross. Bei der Bestimmung von P kommt ein Hilfswiderstand Δw zur Anwendung, welchem der Werth von P direct proportional ist. Dieser Hilfswiderstand wurde aus demselben Drahte, welcher zum Inductor verwendet wurde, hergestellt. Das Verhältniss von Δw zum Widerstande w des Inductors setzt H. Weber dem Verhältnisse der Längen der beiden Drähte gleich, es ist aber wahrscheinlich, dass der specifische Widerstand des Inductordrahtes durch das Aufwickeln eine Vergrösserung erfahren hat.

Die Bemerkungen, welche H. Weber an die von ihm gefundene Differenz zwischen dem beobachteten und berechneten Werthe von P knüpft, haben nicht die Berechtigung, welche er ihnen beimisst. Man erhält auch nach dem gewöhnlichen Rechnungsverfahren für den Inductionscoëfficienten dieses Apparates ein genügend genaues Resultat. Die Genauigkeit ist allerdings geringer als in den beiden früheren Fällen, hauptsächlich wegen der ungleichförmigen Bewickelung des Inductors.

Die Bestimmung eines Inductionscoëfficienten im absoluten Masse ist wie jede derartige Messung eine schwierige Aufgabe. In solchen Fällen, wie die hier behandelten, kann man wohl annehmen, dass die Rechnung ein ebenso sicheres Resultat liefert, als eine sorgfältige Messung. Viel leichter als eine absolute Messung ist die genaue Vergleichung zweier solcher Coëfficienten auszuführen, und da bietet die Berechenbarkeit der elektrodynamischen Potentiale das Mittel, solche relative Bestimmungen in absolute zu verwandeln, indem man Rollen von zweckmässig gewählten Dimensionen als Maasse von bekannten absoluten Werthen herstellen und bei den Vergleichungen verwenden kann.

Ich habe zu diesem Behufe mehrere Formeln abgeleitet und auch einige Tafeln berechnet, welche bei der Berechnung elektrodynamischer Potentiale verwendet werden können. Ich will hier diejenigen mittheilen, welche sich auf den von Maxwell behandelten Fall beziehen, dass die Querdimensionen des Rollenringes klein sind gegen den mittleren Durchmesser desselben und wenn es sich um das Potential einer Rolle auf eine zweite handelt, dass ihr Abstand kleiner ist als der mittlere Durchmesser derselben.

Der mittlere Radius der Rolle sei a, die Anzahl ihrer Drahtwindungen n. Das doppelte Potential der Rolle auf sich selbst oder ihr Coëfficient der Selbstinduction ist durch die Formel

$$P = 4\pi a n^2 z$$

bestimmt, worin z eine reine Zahl ist. Diese theile ich in zwei Theile z_1 und z_2, so dass

$$z = z_1 + z_2$$

und z_1 einen ersten Näherungswerth von z bedeutet, z_2 eine hinzuzufügende Correction, welche um so kleiner ausfällt, je kleiner die Dimensionen des Rollenringes gegen den mittleren Radius a sind.

Ist der Querschnitt des von den Drahtwindungen erfüllten Ringes ein Rechteck, von der Breite b und der Höhe c, so ist, wie schon Maxwell berechnet hat,

$$z_1 = \log\frac{8a}{\sqrt{b^2+c^2}} + \frac{c^2}{6b^2}\log\frac{\sqrt{b^2+c^2}}{c} + \frac{b^2}{6c^2}\log\frac{\sqrt{b^2+c^2}}{b} - \frac{2c}{3b}\operatorname{arctg}\frac{b}{c} - \frac{2b}{3c}\operatorname{arctg}\frac{c}{b} + \frac{1}{12}.$$

Die Logarithmen in dieser Formel sind natürliche. Zerlegt man z_1 in zwei Theile, indem man setzt

$$z_1 = \log\frac{8a}{\sqrt{b^2+c^2}} - y_1,$$

so ist y_1 nur von dem Verhältnisse der beiden Grössen b und c abhängig und ändert seinen Werth nicht, wenn man b mit c vertauscht. Setzt man $\frac{c}{b} = x$, so wird

$$y_1 = \frac{2x}{3}\operatorname{arctg}\frac{1}{x} + \frac{2}{3x}\operatorname{arctg} x - \frac{x^2}{6}\log\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} - \frac{1}{6x^2}\log\sqrt{1+x^2} - \frac{1}{12}.$$

Man braucht y_1 nur für solche Werthe von x, welche kleiner sind als 1, zu kennen, und da die Werthänderungen von y_1, wenn x von 0 bis 1 wächst, keine grossen sind, so kann schon eine kleine Tafel die umständliche directe Berechnung von y_1 ersetzen. Ich theile hier eine solche Tafel mit:

Tafel I.

x	y_1	x	y_1
0	0·50000	0·50	0·79600
0·05	0·54899	0·55	0·80815
0·10	0·59243	0·60	0·81823
0·15	0·63102	0·65	0·82648
0·20	0·66520	0·70	0·83311
0·25	0·69532	0·75	0·83831
0·30	0·72172	0·80	0·84225
0·35	0·74469	0·85	0·84509
0·40	0·76454	0·90	0·84697
0·45	0·78155	0·95	0·84801
0·50	0·79600	1	0·84834

Für gewöhnlich wird die Bestimmung von y_1 auf drei Stellen genügen, es wird dann P um weniger als den tausendsten Theil seines Werthes fehlerhaft sein. Ich habe die Rechnung auf mehr Stellen ausgedehnt, um eine genauere Interpolation möglich zu machen.

Die mit z_2 bezeichnete Correction, welche zu z_1 hinzuzufügen ist, besteht aus einer Reihe, welche nach den geraden Potenzen der Verhältnisse von b und c zu a ansteigt. Von dieser Reihe ist nur der Theil, welcher die Quadrate dieser Verhältnisse enthält, von Maxwell, jedoch wie schon bemerkt, nicht richtig berechnet worden. Nach meiner Rechnung ist dieser Theil von z_2, für den ich auch das Zeichen z_2 gebrauchen will, durch folgende Formel bestimmt:

$$z_2 = \frac{3b^2+c^2}{96a^2}\log\frac{8a}{\sqrt{b^2+c^2}} - \frac{c^4}{480a^2b^2}\log\frac{\sqrt{b^2+c^2}}{c} + \frac{b^4}{96a^2c^2}\log\frac{\sqrt{b^2+c^2}}{b} - \frac{b^3}{30a^2c}\operatorname{arctg}\frac{c}{b} + \frac{23b^2}{640a^2} + \frac{221c^2}{5760a^2}.$$

Die Breite b des Rollenringes ist parallel der Axe desselben, die Höhe c nach der Richtung des Radius der Rolle gemeint.

Zerlegt man z_2 in zwei Theile, indem man setzt

$$z_2 = \frac{3b^2+c^2}{96a^2}\log\frac{8a}{\sqrt{b^2+c^2}} + \frac{b^2}{16a^2}\cdot y_2,$$

so ist y_2 nur von dem Verhältnisse $\frac{c}{b} = x$ abhängig und durch

$$y_2 = \frac{23}{40} + \frac{221x^2}{360} - \frac{x^4}{30}\log\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + \frac{1}{6x^2}\log\sqrt{1+x^2} - \frac{8}{15x}\operatorname{arctg}x$$

bestimmt.

Zur Berechnung von y_2 kann man folgende Tafel benützen.

Tafel II.

x	y_2	x	y_2
0	0·1250	0·50	0·3066
0·05	0·1269	0·55	0·3437
0·10	0·1325	0·60	0·3839
0·15	0·1418	0·65	0·4274
0·20	0·1548	0·70	0·4739
0·25	0·1714	0·75	0·5234
0·30	0·1916	0·80	0·5760
0·35	0·2152	0·85	0·6317
0·40	0·2423	0·90	0·6902
0·45	0·2728	0·95	0·7518
0·50	0·3066	1	0·8162

Zum Zwecke der Übersicht über die vorzunehmenden Rechnungen stelle ich noch den Ausdruck für P in folgender Form hieher:

$$P = 4\pi a n^2 \left[\left(1+\frac{3b^2+c^2}{96a^2}\right)\log\frac{8a}{\sqrt{b^2+c^2}} - y_1 + \frac{b^2}{16a^2}y_2\right].$$

Da die angewandten Erdinductoren aus zwei Rollen bestehen, so setzt sich der Inductionscoëfficient eines solchen Apparates aus drei Theilen zusammen, aus dem doppelten Potentiale jeder einzelnen Rolle auf sich selbst und aus dem doppelten gegenseitigen Potentiale der beiden Rollen. Zur Berechnung der letzteren wendet Maxwell dieselbe Formel an, wie zur Berechnung des Potentials einer Rolle auf sich selbst und zwar in folgender Weise. Er denkt sich auch den Zwischenraum der beiden Rollen mit Drahtwindungen ausgefüllt in derselben Art, wie sie in den Rollen vertheilt sind. Der Zwischenraum mit den beiden Rollen zusammen bildet nun eine grosse Rolle, deren Potentiale auf sich selbst gerechnet werden. Ebenso bildet der Zwischenraum mit jeder der Rollen zusammen eine Rolle, deren Potential wieder gerechnet werden kann. Aus diesen Potentialen und aus denen der einzelnen gegebenen Rollen auf sich selbst lässt sich das Potential der einen Rolle auf die zweite gegebene Rolle ableiten. Die dazu nöthigen Rechnungen sind, wie leicht zu ersehen, sehr weitläufig, namentlich wenn sie ohne Zuhilfenahme einer Tafel ausgeführt werden müssen.

Stehen die beiden Rollen einander sehr nahe, so ist bis jetzt kein anderer Weg zur Berechnung des gegenseitigen Potentials derselben gegeben. Für den Fall, dass sie weit von einander abstehen, kann man eine von Niven berechnete Tafel benützen, welche der zweiten Auflage von Maxwell's Treatise on Electricity und auch der deutschen Übersetzung dieses Werkes beigegeben ist. Die unmittelbare Anwendung dieser Tafel beruht jedoch auf der Voraussetzung, dass man alle Windungen einer Rolle in ihrer mittleren Windung concentrirt annehmen darf, eine Voraussetzung, die bei einem rechteckigen Querschnitte der Ringe um so weniger zulässig ist, je näher die beiden Rollen einander stehen.

Wenn die Mittelpunkte der Querschnitte der beiden Rollen in einem Abstande sich befinden, welcher grösser ist als die Diagonale eines Querschnittes, wie dies bei den bisher angewandten Inductoren der Fall war, dann kann die Berechnung noch auf eine andere rasch zum Ziele führende Weise geschehen. Es lässt sich dann das Potential der beiden Rollen in eine Reihe entwickeln, welche nach den Potenzen der Verhältnisse der Breite und Höhe der Querschnitte zum Abstande ihrer Mittelpunkte fortschreitet und rasch convergirt.

Das gegenseitige Potential Q zweier Rollen von gleichem Radius a und gleicher Windungszahl n ist durch

$$Q = 4\pi a n^2 . z$$

bestimmt, worin z eine reine Zahl bedeutet. Bezeichnet man wieder mit b die Breite und mit c die Höhe des rechteckigen Ringquerschnittes und mit d den Abstand der beiden Mittelpunkte der Rollen, so gibt die Formel

$$z_1 = \log \frac{8a}{d} - 2 + \frac{b^2 - c^2}{12 d^2} + \frac{2b^4 + 2c^4 - 5b^2c^2}{120 d^4} + \frac{3b^6 - 7b^4c^2 + 7b^2c^4 - 3c^6}{504 d^6}$$

einen ersten Näherungswerth von z, bei dessen Ableitung die Quadrate der Verhältnisse von b, c und d zu a so wie die höheren

Potenzen derselben weggelassen wurden. Werden die Quadrate von $\frac{b}{a}$ und $\frac{c}{a}$ und von $\frac{d}{a}$ auch noch die vierten Potenzen bei der Entwicklung beibehalten, so geben diese Glieder eine zu z_1 hinzukommende Ergänzung z_2, von folgender Form:

$$z_2 = \left(\log\frac{8a}{d} - 2\right)\left(\frac{3b^2+c^2+18d^2}{96a^2} - \frac{15d^4}{1024a^4}\right) + \frac{7b^2+23c^2+60d^2}{192a^2} - \frac{29d^4}{2048a^4}.$$

Das gegenseitige Potential zweier Rollen ist die Summe der gegenseitigen Potentiale ihrer einzelnen Windungen, das Potential einer Rolle auf sich selbst ist die Summe der Potentiale der einzelnen Windungen auf sich selbst und der gegenseitigen Potentiale dieser Windungen. Bei der Ableitung der mitgetheilten Formeln sind die vorzunehmenden Summirungen durch Integrationen über die Querschnitte der von den Windungen erfüllten Räume ersetzt worden. Bei dieser Art der Rechnung ist also eigentlich vorausgesetzt, dass die Windungen diese Räume continuirlich erfüllen, dass keine nichtleitenden Zwischenräume vorhanden sind. Letzteres ist nicht der Fall, wenn, wie gewöhnlich, die Drähte einen kreisförmigen Querschnitt haben und ausserdem von einer isolirenden Hülle umgeben sind. Die nach den mitgetheilten Formeln berechneten Werthe der Potentiale bedürfen daher noch einer Correction wegen der discontinuirlichen Vertheilung der Windungen. Diese Correction ist sehr klein, wenn es sich um gegenseitige Potentiale zweier Rollen handelt, sie ist beträchtlicher für das Potential einer Rolle auf sich selbst. Wie diese Correction für den Fall, dass die Windungen in der Rolle gleichförmig vertheilt sind, näherungsweise berechnet werden kann, ist schon von Maxwell angegeben worden, nur ist das von ihm gefundene Resultat nicht richtig. Hat die Rolle n Windungen, ist ihr mittlerer Radius a, Δ der Durchmesser des umsponnenen, δ der Durchmesser des nackten Drahtes, so ist der Inductionscoëfficient P der Rolle grösser als der nach der oben mitgetheilten Formel berechnete, und zwar um den Betrag

$$4\pi an\left(\log\frac{\Delta}{\delta}+0\cdot 15494\right).$$

Maxwell gibt statt 0·15494 die Zahl 0·11835 an.

Diese Correction wird um so grösser, je dicker die isolirende Schichte ist. Sie wächst mit der Anzahl der Windungen im geraden Verhältniss. Da aber der Hauptwerth des Inductionscoëfficienten mit dieser Anzahl im quadratischen Verhältniss zunimmt, so wird der relative Einfluss dieser Correction mit wachsender Zahl der Windungen immer kleiner. Für die angeführten Inductoren ist ihr Werth so klein, dass sie bei der Vergleichung von Beobachtung und Rechnung ausser Betracht bleiben kann.

Auf den von H. Weber construirten Inductor ist diese Formel jedoch nicht anwendbar. Die Correction, welche an dem für diesen Inductor berechneten Werthe von P angebracht werden muss, ist viel grösser, als sie nach dieser Formel gefunden wird. Der Grund davon liegt in der ungleichförmigen Vertheilung der Windungen. Man erhält bei einer solchen Anordnung der Windungen einen genaueren Werth von P, wenn man die Breite des Ringquerschnittes um die halbe Dicke des Windungsdrahtes kleiner annimmt. Dadurch wird annähernd der Einfluss der leeren Räume, welche die um eine Windung weniger enthaltenden Lagen übrig lassen, eliminirt. Auf diese Weise erhält man zu dem oben als berechnet angegebenen Werthe $P = 206200$ eine Correction von 1500, so dass der Werth von P auf 207700 erhöht und dadurch dem beobachteten Werthe noch etwas näher gerückt wird.