

Über den Mechanismus der Fernwirkung elektrischer Kräfte.

Von Dr. **J. Odstrčil.**

(Mit 1 Holzschnitt.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 6. December 1883.)

1. Innerhalb eines sich ins Unendliche ausdehnenden elastischen festen Mediums (wie etwa Kautschuk) sei eine kugelförmige Höhlung vom Radius ρ. Auf die inneren Wandungen derselben werde (etwa durch ein Gas) ein Druck ausgeübt, der auf die Flächeneinheit bezogen, gleich p sei. Die Wandung wird dem Drucke nachgeben und in radialer Richtung um eine Strecke Δ, die dem auf die Flächeneinheit ausgeübten Drucke p proportional ist, verschoben werden, so dass $\Delta = kp$. Der Druck wird sich von Schichte zu Schichte fortpflanzen und ähnliche Verschiebungen in den folgenden Schichten bewirken. Bei dem Halbmesser r wird der Druck auf die Flächeneinheit $\frac{\rho^2}{r^2} p$ und die Verschiebung eines Elementes der concentrischen Kugelschichte

$$\delta = kp\frac{\rho^2}{r^2} = \Delta\frac{\rho^2}{r^2}$$

betragen. Die Verschiebungen nehmen also bei wachsendem r ab und werden in grosser Entfernung vom Mittelpunkte der Höhlung unmerklich werden.

Um in dem elastischen Medium diese Verschiebungen hervorzubringen, ist ein Aufwand von Arbeit nothwendig, die in Form von potentieller Energie in dem deformirten Medium verbleibt, so lange derselbe Druck in unveränderter Stärke fortbesteht, die aber gewonnen wird, wenn der Druck verschwindet.

Um die Grösse dieser Energie W aus den Verschiebungen zu berechnen, beachten wir, dass das verschobene Flächenelement während der Verschiebung einen seiner Grösse proportionalen

Widerstand leistete, der überdies dem jedesmaligen Abstand desselben von der Gleichgewichtslage proportional war, so dass das arithmetische Mittel aus dem Werthe des Widerstandes am Anfang und jenem am Ende, sobald die Verschiebung stationär geworden war, als mittlerer Widerstand genommen werden kann. Dieser Widerstand ist aber auch gleich dem jedesmaligen Druck. Dieser Druck war anfänglich 0 am Ende $\frac{\rho^2}{r^2}p$, das arithmetische Mittel ist $\frac{1}{2}\frac{\rho^2}{r^2}p$ auf die Flächeneinheit, auf das Flächenelement entfällt daher $\frac{1}{2}\frac{\rho^2}{r^2}p\,d\sigma$ oder $\frac{1}{2}\frac{\delta}{k}d\sigma$, der Druck wurde überwunden auf die Strecke δ, so dass also die Arbeit zur Verschiebung des Flächenelementes beträgt $\frac{1}{2}\frac{\delta^2}{k}d\sigma$.[1]

Auf der kleinen Strecke des Radius dr liegen einige solcher Flächenelemente, die merklich dieselben Verschiebungen erlitten haben, ihre Anzahl ist proportinal dr und somit gleich $k'dr$, wo k' eine neue von der Dichte des Mediums abhängige Constante bedeutet. Die Arbeit, die zur Verschiebung eines Volumelementes nothwendig ist, beträgt also

$$dW = \frac{1}{2}\frac{\delta^2}{k}d\sigma\,.\,k'dr$$

oder

$$dW = \frac{k'k}{2}\quad p^2\frac{\rho^4}{r^4}d\sigma\,dr,$$

somit ist die gesammte Energie des deformirten Mediums

$$W = \frac{k'k}{2}\quad p^2\rho^4\iiint\frac{d\sigma\,dr}{r^4},$$

wobei das Integral über den ganzen die Höhlung umgebenden Raum auszudehnen ist.

---

[1] Zwar wurden die Theilchen des Flächenelementes auch in Richtungen senkrecht auf den Radius verschoben, da sie aus einem engeren Querschnitte in einen weiteren gelangten, der Betrag dieser Verschiebung ist aber jenem der Verschiebungen im radialen Sinne proportional und es kann der Proportionalitätsfactor, wenn es sich nicht um absolute Berechnungen handelt, in k aufgenommen werden.

Nun ist aber

$$\iiint \frac{d\sigma\, dr}{r^4} = \int \frac{dr}{r^4} \iint d\sigma = 4\pi \int_\rho^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{4\pi}{\rho}$$

und daher

$$W = \frac{k'k}{2} \; \frac{4\pi p^2 \rho^4}{\rho} = \frac{k'k}{2} \; \frac{(4\pi \rho^2 p)^2}{4\pi\rho}.$$

2. Nehmen wir nun an, in demselben Medium seien zwei solche Höhlungen vom Radius ρ vorhanden, die Entfernung ihrer Mittelpunkte sei f. Wird nun auf die Wandungen der einen der Druck p, auf die der anderen der Druck p_1 per Flächeneinheit ausgeübt, so wird das umgebende Medium in Folge des einen und des andern Druckes Deformationen erleiden, die sich übereinander lagern werden. Offenbar wird die Gestalt jeder Höhlung durch den von der anderen ausgehenden Druck verändert werden, nehmen wir aber an, dass die Radien derselben so klein und die Entfernung der Mittelpunkte derselben so beträchtlich seien, dass wir von den Deformationen derselben und von der Wirkung, welche die letzteren auf das Medium äussern würden, absehen können.

Betrachten wir nun ein Theilchen M in dem umgebenden Raume, das von dem Mittelpunkte der Höhlung A die Entfernung r und von jenem der Höhlung B die Entfernung r_1 hat, so wird dasselbe in der Richtung AM und BM bezüglich die Verschiebungen $\delta = kp\frac{\rho^2}{r^2}$ und $\delta_1 = kp_1 \frac{\rho^2}{r_1^2}$ erfahren, welche sich zu einer einzigen nach dem Parallelogramm zusammensetzen lassen.

Um uns zunächst über die Richtung der resultirenden Verschiebung in einem beliebigen Punkte des Raumes zu orientiren, legen wir durch diesen Punkt und durch AB eine Ebene und durch den Punkt A als Ursprung ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen Abscissenaxe durch B geht, der Punkt M habe dann die Coordinaten x, y. Die von A ausgegangene Verschiebung des Theilchens M zerlegen wir in zwei zur Abscissen- und Ordinatenaxe parallele Componenten ξ und η, ebenso die von B ausgegangene in ξ_1, η_1.

Es ist dann

$$\xi = k\rho^2 \frac{p}{r^2} \cos MAB = k\rho^2 \frac{p}{r^3} x$$

$$\eta = k\rho^2 \frac{p}{r^2} \cos MAY = k\rho^2 \frac{p}{r^3} y$$

ebenso

$$\xi_1 = k\rho^2 \frac{p_1}{r_1^3} (x - f), \quad \eta_1 = k\rho^2 \frac{p_1}{r_1^3} y.$$

Die Summe der Verschiebungen in der Richtung X ist

$$\xi + \xi_1 = k\rho^2 \left[\left(\frac{p}{r^3} + \frac{p_1}{r_1^3}\right) x - \frac{p_1 f}{r_1^3}\right],$$

jene in der Richtung Y

$$\eta + \eta_1 = k\rho^2 \left[\frac{p}{r^3} + \frac{p_1}{r_1^3}\right] y.$$

Heisst nun der Winkel, den die Richtung der Resultirenden mit der Abscissenaxe einschliesst ν, so ist

$$\operatorname{tg} \nu = \frac{\eta + \eta_1}{\xi + \xi_1}.$$

Sehen wir nun die Richtung der resultirenden Verschiebung als die Normale einer Curve $F(x, y) = 0$ an, so ist die trigonometrische Tangente des Winkels, den die im Punkte x, y an die Curve gezogene Tangente mit der Abscissenaxe bildet

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\operatorname{tg} \nu} = -\frac{\xi + \xi_1}{\eta + \eta_1}$$

oder nach Einsetzung der Werthe

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} + \frac{p_1 f}{r_1^3\left(\frac{p}{r^3} + \frac{p_1}{r_1^3}\right) y}.$$

Eine solche Curve, die dieser Bedingung entspricht, ist diejenige, welche die Gleichung hat

$$\frac{p}{r} + \frac{p_1}{r_1} = \text{const.},$$

denn differentiirt man diese Gleichung, so erhält man

$$-\frac{p\,dr}{r^2}-\frac{p_1\,dr_1}{r_1^2}=0.$$

Da nun

$$r=(x^2+y^2)^{1/2} \quad r_1=[(x-f)^2+y^2]^{1/2}$$

ist, so hat man

$$dr=\frac{x\,dx}{r}+\frac{y\,dy}{r} \text{ und } dr_1=\frac{(x-f)\,dx}{r_1}+\frac{y\,dy}{r_1},$$

so dass die Differentialgleichung durch Substitution übergeht in

$$-\frac{px\,dx}{r^3}-\frac{py\,dy}{r^3}-\frac{p_1(x-f)\,dx}{r_1^3}-\frac{p_1y\,dy}{r_1^3}=0,$$

aus welcher folgt

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}+\frac{p_1f}{r_1^3\left(\frac{p}{r^3}+\frac{p_1}{r_1^3}\right)y},$$

wie gefordert wurde.

Indem man der Constanten in der Curvengleichung verschiedene Werthe ertheilt, erhält man eine Schar von Curven, durch deren Umdrehung um die Abscissenaxe eine Schar von Flächen erzeugt wird, die alle die Eigenschaft haben, dass die resultirenden der von A und von B ausgehenden Verschiebungen auf ihnen überall senkrecht stehen. Diese Flächen entsprechen den, im Falle einer einzigen Höhlung, um ihren Mittelpunkt construirten concentrischen Kugelflächen.

Die Grösse der resultirenden Verschiebung als der Diagonale eines Parallelogrammes, dessen Seiten δ und δ_1 den Winkel AMB einschliessen, sei D, so ist

$$D^2=k^2\rho^4\left[\frac{p^2}{r^4}+\frac{p_1^2}{r_1^4}+\frac{2pp_1}{r^2r_1^2}\cos AMB\right],$$

da aber

$$\cos AMB=\frac{r^2+r_1^2-f^2}{2rr_1}$$

ist, so ist auch

$$D^2=k^2\rho^4\left[\frac{p^2}{r^4}+\frac{p_1^2}{r_1^4}+\frac{pp_1(r^2-f^2)}{r^3r_1^3}+\frac{pp_1}{r^3r_1}\right].$$

Um die Arbeit, die zur Verschiebung eines Flächenelementes nöthig ist, zu finden, hat man das Element jener Fläche, auf der die Verschiebung senkrecht steht, mit D^2 zu multipliciren und durch $2k$ zu dividiren; sie ist also

$$\frac{D^2 ds}{2k}.$$

Bezeichnet man mit dn eine kurze Strecke der auf diese Fläche errichteten Normalen, so liegen auf dieser kleinen Strecke übereinander die Elemente der durch die Gleichung

$$\frac{p}{r} + \frac{p_1}{r_1} = \text{const.}$$

characterisirten Flächen, in denen allen die Verschiebungen merklich gleich sind. Die Anzahl dieser Flächen ist mit dn proportional und also gleich $k'dn$, wo k' wieder die von der Dichte des Mediums abhängige Constante bedeutet. Die zur Verschiebung dieser Flächenelemente nothwendige Arbeit ist

$$\frac{k'}{2k} D^2 \, ds \, dn.$$

Statt $ds \,.\, dn$ kann aber ein Volumelement dv gesetzt werden, das auf beliebige Art berechnet werden mag. Es ist also die zur Verschiebung eines Volumelementes benöthigte Arbeit

$$dW = \frac{k'}{2k} D^2 \, dv.$$

Die gesammte Arbeit, die zur Deformation des Mediums unter den angenommenen Bedingungen aufgewendet werden muss, ist das Integral des vorhergehenden Ausdruckes genommen über den ganzen umgebenden Raum, also, wenn wir D^2 ersetzen

$$W = \frac{k' k \rho^4}{2} \iiint \left[\frac{p^2}{r^4} + \frac{p_1^2}{r_1^4} + \frac{p p_1 (r^2 - f^2)}{r^3 r_1^3} + \frac{p p_1}{r^3 r_1}\right] dv.$$

Dies Integral zerlegen wir in seine Bestandtheile und bezeichnen

$$M = \iiint \frac{p^2}{r^4}\, dv, \quad N = \iiint \frac{p_1^2}{r_1^4}\, dv$$

$$P = \iiint \frac{pp_1\,(r^2 - f^2)}{r^3 r_1^3}\, dv, \quad Q = \iiint \frac{pp_1}{r^3 r_1}\, dv.$$

Um M zu erhalten, denken wir uns den ganzen Raum um den Punkt A in unendlich nahe liegende concentrische Kugelschalen zerlegt. Bezeichnet $d\sigma$ ein Flächenelement einer Kugelfläche, so ist $d\sigma\, dr = dv$ ein Raumelement, daher

$$M = \iiint \frac{p^2}{r^4}\, d\sigma\, dr = p^2 \int \frac{dr}{r^4} \iint d\sigma = p^2 \int \frac{dr}{r^4} \cdot 4r^2\pi$$

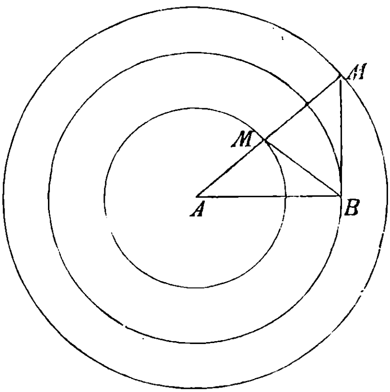
oder

$$M = 4\pi p^2 \int_\rho^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{4\pi\, p^2}{\rho}.$$

Ebenso ist

$$N = \frac{4\pi\, p_1^2}{\rho}.$$

Behufs der Ermittlung des Werthes von Q zeichnen wir zunächst unter den um A construirten concentrischen Kugelflächen jene aus, die durch B geht (s. Fig.).



Dann liegt B bezüglich jener Kugelschalen, deren Halbmesser kleiner als f ist, ausserhalb derselben, bezüglich jener dagegen, deren Radius grösser als f ist, innerhalb.

Wir zerlegen nun das Integral in eins des inneren und das des äusseren Raumes in $Q_{,}$ und $Q_{,,}$.

Es ist also

$$Q_{,} = pp_1 \iiint \frac{dv}{r^3 r_1} = pp_1 \int \frac{dr}{r^3} \iint \frac{d\sigma}{r_1},$$

weil bei der Integration nach $d\sigma$ r constant bleibt. Wir wählen die Polarcoordinaten $\vartheta = MAB$ und den Winkel φ zwischen der Ebene MAB und einer durch AB gehenden festen Ebene. Dann ist

$$d\sigma = r^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$$

durch Integration von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$ ergibt sich

$$\iint \frac{d\sigma}{r_1} = 2\pi r^2 \int_0^\pi \frac{\sin\vartheta \, d\vartheta}{r_1}.$$

Es ist aber

$$r_1^2 = r^2 + f^2 - 2rf \cos\vartheta,$$

folglich

$$2r_1 \, dr_1 = 2rf \sin\vartheta d\vartheta,$$

woraus

$$\sin\vartheta d\vartheta = \frac{r_1 \, dr_1}{rf},$$

folgt. Demnach ist

$$\iint \frac{d\sigma}{r_1} = 2\pi r^2 \int \frac{dr_1}{rf};$$

da, wenn

$$\vartheta = 0, \; r_1 = f - r$$
$$\vartheta = \pi, \; r_1 = f + r,$$

so ist

$$\iint \frac{d\sigma}{r_1} = \frac{2\pi r^2}{rf} [f + r - f + r] = \frac{4\pi r^2}{f}.$$

Es ist nun

$$Q_{,} = pp_1 \int_\rho^f \frac{4\pi r^2}{f} \cdot \frac{dr}{r^3} = \frac{4\pi pp_1}{f} \int_\rho^f \frac{dr}{r}.$$

Das Integral im äusseren Raume

$$Q_{,,} = pp_1 \int \frac{dr}{r^3} \iint \frac{d\sigma}{r_1}.$$

kann ebenso gefunden werden. Es ist nämlich wie früher

$$\iint \frac{d\sigma}{r_1} = \frac{2\pi r}{f} \int dr_1,$$

aber diesmal entspricht der Grenze

$$\vartheta = 0,\ r_1 = r - f$$
$$\vartheta = \pi,\ r_1 = r + f,$$

woraus sich

$$\iint \frac{d\sigma}{r_1} = \frac{2\pi r}{f} [r + f - r + f] = 4\pi r$$

ergibt. Es ist demnach

$$Q_{,,} = 4\pi p p_1 \int_f^\infty \frac{dr}{r^2} = 4\pi p p_1 \cdot \frac{1}{f}.$$

Um das Integral

$$P = \iiint \frac{p p_1 (r^2 - f^2)}{r^3 r_1^3}\, dv$$

auszuwerthen, werden wir wieder das Integral in dem inneren und äusseren Raum für sich rechnen, die wir bezüglich mit P' und $P_{,,}$ bezeichnen.

Es ist also

$$P_{,} = p p_1 \int_\rho^f \frac{(r^2 - f^2)\, dr}{r^3} \iint \frac{d\sigma}{r_1^3}.$$

Auf einem Wege, der ganz analog ist jenem, den wir bei Auswerthung von $Q_{,}$ eingeschlagen haben, findet man

$$\iint \frac{d\sigma}{r_1^3} = \frac{r}{f} \cdot \frac{4\pi r}{f^2 - r^2},$$

wenn $f > r$.

Es ist demnach

$$P_{,} = -\frac{4\pi p p_1}{f} \int_\rho^f \frac{dr}{r}$$

Anderseits ist

$$P_{,,} = pp_1 \int_f^\infty \frac{(r^2 - f^2)\,dr}{r^3} \iint \frac{d\sigma}{r_1^3}$$

und zwar für $f < r$; man findet leicht

$$\iint \frac{d\sigma}{r_1^3} = \frac{4\pi r}{r^2 - f^2},$$

daher

$$P_{,,} = 4\pi pp_1 \int_f^\infty \frac{dr}{r^2} = 4\pi pp_1 \;\frac{1}{f}.$$

Es ist somit der gesammte Aufwand an Arbeit, der zur Deformation des Mediums nothwendig war, oder die gesammte potentielle Energie des Mediums

$$W = \frac{k_1 k\rho^4}{2} \left[M + N + P_{,} + P_{,,} + Q_{,} + Q_{,,}\right]$$

oder, wenn man für M, N, $P_{,,}$ und $Q_{,,}$ die Werthe einsetzt und berücksichtigt, dass $P_{,} = -Q_{,}$ und $P_{,,} = Q_{,,}$ ist,

$$W = \frac{k' k\rho^4}{2} \quad 4\pi \left[\frac{p^2}{\rho} + \frac{p_1^2}{\rho} + \frac{2pp_1}{f}\right].$$

3. Nimmt man an, dass auf die Wandungen der Höhlung nicht ein Druck, sondern auf irgend eine Art ein Zug ausgeübt wird, so haben die Verschiebungen nur die entgegengesetzte Richtung, das Gesetz ihrer Abnahme bleibt dasselbe und in den Formeln für die durch die Deformation geweckte potentielle Energie ist einfach p mit negativem Zeichen zu nehmen.

4. Die Optik fordert, dass der Äther als Träger einer transversalen Wellenbewegung die Gesetze der Elasticität fester Körper befolge. Wir machen ferner die Annahme, ohne auf das Wesen der Elektricität einzugehen, dass

a) ein positiv elektrischer Körper auf den umgebenden Äther einen Druck,

b) ein negativ elektrischer dagegen einen Zug ausübe, dessen Grösse auf die Flächeneinheit bezogen gleich (oder wenigstens proportional) der Dichte der Elektricität sei.

Setzen wir nun in der Entwicklung (1) an die Stelle des angenommenen Mediums den Äther, an Stelle der Höhlung eine elektrisirte Kugel vom Radius ρ, auf deren Oberfläche positive oder negative Elektricität von der Dichte p sich befindet, so ist der Arbeitsaufwand, der zur Elektrisirung der Kugel benöthigt wird:

$$W = \frac{k' k}{2 \cdot 4\pi} \frac{(4\pi\rho^2 p)^2}{\rho} = C . \frac{E^2}{\rho},$$

wo C eine Constante und E die gesammte Ladung bedeutet; es ist also der Arbeitsaufwand und zugleich die durch die Deformation des Äthers geweckte potentielle Energie proportional dem Quadrate der Ladung und umgekehrt proportional dem Radius der Kugel, wie es die Elektricitätslehre fordert.

Nehmen wir zwei elektrische Kugeln vom Radius ρ an, auf denen die Elektricitäten die Dichten p und p_1 haben, so ist der Arbeitsaufwand

$$W = \frac{k' k}{2 \cdot 4\pi} \left[\frac{(4\pi\rho^2 p)^2}{\rho} + \frac{(4\pi\rho^2 p_1)^2}{\rho} \pm \frac{2(4\pi\rho^2 p)(4\pi\rho^2 p_1)}{f} \right]$$

$$= C \left[\frac{E^2}{\rho} + \frac{E_1^2}{\rho} \pm \frac{2EE_1}{f} \right],$$

dieser Arbeitsaufwand hängt also auch von f ab.

Die Elasticität des deformirten Äthers sucht zu bewirken, dass die Verschiebungen seiner Theilchen geringer werden, entweder dadurch, dass die elektrischen Körper ihre gegenseitige Entfernung ändern, was, wenn sie in ihren Lagen nicht festgehalten werden, geschehen kann, da der Äther der Bewegung keinen Widerstand entgegensetzt, oder dadurch, dass die Elektricitäten an der Oberfläche der Körper sich ausbreiten, oder in den Körpern sich ausgleichen, kurz, dass jene Erscheinungen eintreten, die man aus der Abstossung und Anziehung der Elektricitäten abzuleiten pflegt.

Das Gesetz der Abstossung und Anziehung erhält man, wenn man überlegt, dass wenn die gegenseitige Entfernung der elektrischen Körper eine Zu- oder Abnahme df erfährt, auch die Energie eine solche dW erleidet. Dieses dW kann man sich vorstellen als das Product aus einer Kraft P, welche auf der Strecke df gewirkt hat, also

$$P = \frac{dW}{df} = \pm\ 2C \cdot \frac{EE_1}{f^2},$$

je nachdem E und E' gleich oder entgegengesetzt bezeichnet sind. Dieses ist aber das Coulomb'sche Gesetz, auf dem die gesammte Potentialtheorie aufgebaut ist, welches aber nur gilt, wenn die elektrischen Körper klein und in so beträchtlicher Entfernung angenommen werden, dass in der Vertheilung der Elektricitäten durch gegenseitige Einwirkung keine Änderung eintritt; dieselbe Bedingung machten wir aber in (2), dass nämlich durch gegenseitige Einwirkung die Höhlungen nicht deformirt werden dürfen.

Die Kraftlinien haben die physikalische Bedeutung, dass sie überall die Richtung des Druckes und der Hauptverschiebung der Theilchen angeben, während die Flächen gleichen Potentials als Flächen, auf denen der Druck überall senkrecht steht, Niveauflächen sind.