

Notiz über die Lemniscate.

Von Dr. **P. H. Schoute,**
Professor an der Universität in Gröningen.

(Vorgelegt in der Sitzung am 20. December 1883.)

In der Arbeit: „Die Lemniscate in rationaler Behandlung“ (Abhandlungen der kgl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften 1873) entwickelte Herr Prof. Emil Weyr unter anderen, die in dem folgenden Satze zusammengefassten Resultate:

„Die Lemniscate $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)$. (L) wird von jeder Tangente U der gleichseitigen Hyperbel $x^2-y^2 = \frac{1}{2} a^2$. (H) in vier Punkten geschnitten, deren Tangenten durch einen Punkt u von (L) hindurchgehen; den Punkt u erhält man, wenn die doppelte Entfernung des Mittelpunktes O von der Tangente U von O aus auf die Senkrechte von O auf U nach der von U abgewandten Seite aufgetragen wird.“

Die vorliegende Mittheilung enthält einige Erweiterungen dieses Satzes.

---

1. „Die Berührungspunkte der sechs durch irgend einen Punkt P der Ebene an die (L) gelegten Tangenten liegen in einem Kegelschnitte K_p^2.“

Mittelst des Kreisbüschels $x^2+y^2 = u(x+y)\sqrt{2}$, dessen Elemente die gegebene Lemniscate (L) nur in einem mit u veränderlichen Punkte treffen, hat Herr Weyr die Coordinaten dieses Lemniscatenpunktes als rationale Functionen des Radius u dargestellt. Aus den Gleichungen

$$x = \frac{(a^2+u^2)u\sqrt{2}}{a^4+u^4}, \qquad y = \frac{(a^2-u^2)u\sqrt{2}}{a^4+u^4} \qquad 1),$$

welche diese Parameterdarstellung angeben, fand er dann für die Gleichung der Tangente im Punkte u von (L):

$$(a^2+u^2)(a^4-4a^2u^2+u^4)x-(a^2-u^2)(a^4+4a^2u^2+u^4)\,y$$
$$+4a^4u^3\sqrt{2} = 0,$$

woraus er ableitete, dass die Gleichung

$$u^6-3a^2\frac{x-y}{x+y}u^4+\frac{4a^4\sqrt{2}}{x+y}u^3-3a^4u^2+a^6\frac{x-y}{x+y}=0 \qquad 2)$$

die Parameterwerthe der sechs Lemniscatenpunkte bestimmt, deren Tangenten durch einen gegebenen Punkt P der Ebene gehen der x, y zu Coordinaten hat. Weiter zeigte er, dass die Parameter v der acht Schnittpunkte von (L) mit dem Kegelschnitte

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \qquad 3)$$

der Gleichung

$$\begin{aligned}&Fv^8+2a^2(D-E)v^7\sqrt{2}+2a^4(A-2B+C)v^6+2a^4(D+E)v^5\sqrt{2}\\&+2a^4\{F+2a^2(A-C)\}v^4+2a^6(D-E)v^3\sqrt{2}+2a^8(A+2B+C)v^2\\&+2a^8(D+E)v\sqrt{2}+Fa^8=0\end{aligned} \qquad 4)$$

Genüge leisten und dass unabhängig von den Coefficienten der Kegelschnittsgleichung 3) zwischen ihnen die Relationen

$$(v)_5=a^4(v)_1,\quad (v)_7=a^4(v)_3,\quad (v)_8=a^8 \qquad 5)$$

bestehen, worin das Symbol $(v)_k$ die Summe aller Producte von je k-Factoren der acht Parameterwerthe v bedeutet.

Bilden nun die sechs Punkte u von 2) mit den zwei Punkten P_1 und P_2 von (L), die den Paramentenwerthen π_1, π_2 entsprechen mögen, die acht Schnittpunkte v von (L) mit irgend einem Kegelschnitte 3), so hat man mittelst der sich auf ganz analoge Weise auf die sechs Punkte u von 2) beziehenden Bezeichnung $(u)_k$

$$\left.\begin{aligned}(v)_1&=(u)_1+\pi_1+\pi_2=\pi_1+\pi_2\\(v)_2&=(u)_2+(\pi_1+\pi_2)(u)_1+\pi_1\pi_2=-3a^2\frac{x-y}{x+y}+\pi_1\pi_2\\(v)_3&=(u)_3+(\pi_1+\pi_2)(u)_2+\pi_1\pi_2(u)_1=-\frac{4a^4\sqrt{2}}{x+y}\\&\qquad-3a^2\frac{x-y}{x+y}(\pi_1+\pi_2)\\(v)_4&=(u)_4+(\pi_1+\pi_2)(u)_3+\pi_1\pi_2(u)_2=-3a^4-\frac{4a^4\sqrt{2}}{x+y}(\pi_1+\pi_2)\\&\qquad-3a^2\frac{x-y}{x+y}\pi_1\pi_2\end{aligned}\right\} \qquad 6)$$

$$\left.\begin{aligned}
(v)_5 &= (u)_5+(\pi_1+\pi_2)(u)_4+\pi_1\pi_2(u)_3 = -3a^4(\pi_1+\pi_2) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -\frac{4a^4\sqrt{2}}{x+y}\pi_1\pi_2 \\
(v)_6 &= (u)_6+(\pi_1+\pi_2)(u)_5+\pi_1\pi_2(u)_4 = a^6\frac{x-y}{x+y}-3a^4\pi_1\pi_2 \\
(v)_7 &= (\pi_1+\pi_2)(u)_6+\pi_1\pi_2(u)_5 = a^6\frac{x-y}{x+y}(\pi_1+\pi_2) \\
(v)_8 &= \pi_1\pi_2(u)_6 = v^6\frac{x-y}{x+y}\pi_1\pi_2,
\end{aligned}\right\} \quad 6)$$

wodurch die Gleichungen 5) übergehen in

$$\left.\begin{aligned}
(x+y)(\pi_1+\pi_2)+\pi_1\pi_2\sqrt{2} &= 0 \\
(x-y)(\pi_1+\pi_2)+\quad a^2\sqrt{2} &= 0 \\
(x+y)a^2-\quad (x-y)\pi_1\pi_2 &= 0
\end{aligned}\right\} \quad 7).$$

Diese drei Gleichungen sind — unabhängig von der Lage des Punktes P — den zwei Gleichungen

$$\pi_1+\pi_2 = -\frac{a^2\sqrt{2}}{x-y}, \quad \pi_1\pi_2 = \frac{x+y}{x-y}a^2 \qquad 8)$$

äquivalent; so dass man bei gegebenen x, y zu den sechs Punkten u von 2) immer ein Punktepaar P_1, P_2 fügen kann, dass die hierdurch erhaltenen acht Punkte den Gleichungen 5) Genüge leisten. Also ist der obige Satz bewiesen.

Wir nennen die beiden weiteren Schnittpunkte P_1 und P_2 von K_p^2 mit (L) die Restpunkte von K_p^2 oder kürzer die Restpunkte von P.

2. „Der geometrische Ort der Punkte P, deren Restpunkte zusammenfallen, ist die gleichseitige Hyperbel (H).[1]

Wenn der Punkt P eine willkürliche Gerade g durchläuft, so bilden seine Restpunkte auf (L) eine quadratische Involution, welche degenerirt sobald g eine Tangente von (H) wird."

Für $\pi_1 = \pi_2 = \pi$ gehen die Gleichungen 7) über in

$$(x+y)\sqrt{2}+\pi = 0$$
$$\pi(x-y)\sqrt{2}+a^2 = 0$$

und man erhält durch Elimination von π die Curve $x^2-y^2 = \frac{1}{2}a^2$.

---

[1] Dieser Theil des Satzes wird erst später in seiner wahren Bedeutung hervortreten (vergleiche Art. 7).

Weiter erhält man durch Auflösung der Gleichungen 8) nach x und y unmittelbar

$$x = -\frac{a^2+\pi_1\pi_2}{(\pi_1+\pi_2)\sqrt{2}}, \qquad y = \frac{a^2-\pi_1\pi_2}{(\pi_1+\pi_2)\sqrt{2}} \tag{9}$$

Durchläuft der Punkt x, y nun die Gerade $Ax+By+C=0$, so besteht zwischen den Parametern π_1 und π_2 der Punkte P_1, P_2 die Relation

$$(A+B)\pi_1\pi_2 - C(\pi_1+\pi_2)\sqrt{2} + (A-B)a^2 = 0$$

und dies ist die allgemeinste Verwandtschaftsgleichung der quadratischen Involution.

Aus den beiden nun bewiesenen Theilen des Satzes folgt, dass die Doppelpunkte der den Punkten P der Geraden g entsprechenden Involution die Restpunkte der beiden Schnittpunkte von g und (H) sind. Desshalb fallen diese Doppelpunkte in einen Punkt zusammen, wenn g die (H) berührt und wird die Involution dann eine uneigentliche, indem jedes ihrer Paare den Doppelpunkt enthält.

3. „Die Lemniscate (L) bestimmt in ihrer Ebene eine einfache quadratische Transformation. Auch liefert sie eine doppelt unendliche Anzahl von Vierseiten, die der gleichseitigen Hyperbel (H) umschrieben sind, und von welchen jedes durch einen seiner sechs Eckpunkte individualisirt wird."

Nimmt man in der Ebene von (L) den Punkt P willkürlich an und bestimmt man die Gerade $P_1\ P_2$, welche die Restpunkte P_1 und P_2 von P verbindet, so wird diese Gerade die (L) noch in zwei Punkten P_1' und P_2' scheiden, die umgekehrt wieder einen Punkt P' der Ebene bestimmen, dessen Restpunkte sie sind. Es leuchtet ein, dass die Verwandtschaft der Punkte P und P' eine involutorische ist.

Sind nun π_1, π_2, π_1', π_2' die Parameterwerthe der Punkte P_1, P_2, P_1', P_2', so ist, wie Herr Weyr in Art. 6 zeigt

$$\pi_1' + \pi_2' = -\frac{a^4+\pi_1^2\pi_2^2}{\pi_1\pi_2(\pi_1+\pi_2)}$$

$$\pi_1'\pi_2' = \frac{a^4}{\pi_1\pi_2}$$

Wendet man hierauf die Formeln 8) sowohl in Bezug auf π_1' und π_2' als auf π_1 und π_2 an, so findet man zwischen den Coordinaten der Punkte P und P' die Relationen

$$-x_1+y_1 = \frac{a^2(x+y)}{x^2+y^2},$$

$$x_1y+xy_1 = 0$$

oder nach Auflösung nach x_1 und y_1

$$x_1 = -\frac{a^2x}{x^2+y^2},$$

$$y_1 = \frac{a^2y}{x^2+y^2}.$$

Diese Formeln characterisiren die Verwandtschaft der Punkte P und P' als eine um die y-Axe umgelegte Transformation durch reciproke Radien, welche 0 zum Centrum und a^2 zur Potenz hat.

Die vier Schnittpunkte von (L) mit einer willkürlichen Geraden g lassen sich sechsmal zu je zweien zu Punktepaaren P_1, P_2 combiniren und erzeugen also sechs Punkte P der Ebene, die so mit einander verknüpft sind, dass einer von ihnen die übrigen bestimmt. Da es unter den sechs Paaren P_1, P_2 viermal vorkommt, dass drei Paare einen Punkt gemein haben, liegen die sechs Punkte P dem zweiten Theile des vorhergehenden Satzes zufolge viermal zu je dreien auf einer Tangente von (H). Und die Sextupel P, deren wahre Bedeutung erst weiterhin einleuchten wird, sind zweifach unendlicher Anzahl, da die Geraden g in der Ebene es sind, u. s. w.

4. „Geht der Kegelschnitt K_p^2 von P durch Q, so geht auch der Kegelschnitt K_q^2 von Q durch P.“

Wir suchen die Gleichung des Kegelschnittes K_p^2. Substituiren wir die Werthe für $\pi_1+\pi_2$ und $\pi_1\,\pi_2$ aus 8) in die Formeln 6), so ergibt sich

$$(v)_1 = -\frac{a^2\sqrt{2}}{x-y}, \qquad (v)_3 = -\frac{a^4\sqrt{2}}{x+y},$$

$$(v)_2 = -\frac{2a^2(x^2+y^2-4xy)}{x^2-y^2}, \qquad (v)_4 = \frac{8a^6}{x^2-y^2}-6a^4.$$

$$(v)_5 = -\frac{a^6\sqrt{2}}{x-y}, \qquad (v)_7 = -\frac{a^8\sqrt{2}}{x+y},$$

$$(v)_6 = -\frac{2a^6(x^2+y^2+4xy)}{x^2-y^2}, \qquad (v)_8 = a^8.$$

Desshalb ist die Gleichung in v, welche diese acht Punkte bestimmt

$$v_8 + \frac{a^2\sqrt{2}}{x-y}v^7 - 2a^2\frac{x^2+y^2-4xy}{x^2-y^2}v^6 + \frac{a^4\sqrt{2}}{x+y}v^5 +$$

$$+\left(\frac{8a^6}{x^2-y^2} - 6a^4\right)v^4 + \frac{a^6\sqrt{2}}{x-y}v^3 - 2a^6\frac{x^2+y^2+4xy}{x^2-y^2}v^2 +$$

$$+\frac{a^8\sqrt{2}}{x+y}v + a^8 = 0.$$

Die Vergleichung dieser Gleichung mit 4) giebt weiter

$$A = \frac{2a^2-3x^2+y^2}{2a^2(x^2-y^2)}, \quad B = \frac{-2xy}{a^2(x^2-y^2)}, \quad C = \frac{-2a^2+x^2-3y^2}{2a^2(x^2-y^2)},$$

$$D = \frac{x}{2(x^2-y^2)}, \quad E = \frac{-y}{2(x^2-y^2)}, \quad F = 1.$$

Somit ist der dem Punkte $P(x, y)$ der Ebene zugeordnete Kegelschnitt

$$(2a^2-3x^2+y^2)X^2 - 8xyXY + (-2a^2+x^2-3y^2)Y^2$$
$$+2a^2xX - 2a^2yY + 2a^2(x^2-y^2) = 0 \qquad 10).$$

Aber diese Gleichung ändert sich nicht, wenn man x, y mit X, Y vertauscht, u. s. w.

5. „Der Ort der Punkte P, deren Restpunkte P_1, P_2 mit einem gegebenen Punkte Q in einer Gerade liegen, ist eine cyclische Curve dritten Grades C_q^3, deren reelle Asymptote auf OQ senkrecht steht; diese Curve geht durch O und berührt in diesem Punkte die in Beziehung auf die Axen zu OQ symmetrische Gerade.“

Wie Herr Weyr angegeben hat, lautet die Gleichung der Gerade P_1P_2

$$(a^2+\pi_1\pi_2)\{a^4-a^2(\pi_1+\pi_2)^2+\pi_1^2\pi_2^2\}X-$$

$$-(a^2-\pi_1\pi_2)\{a^4+a^2(\pi_1+\pi_2)^2+\pi_1^2\pi_2^2\}Y+2a^4\pi_1\pi_2(\pi_1+\pi_2)\sqrt{2}=0.$$

Die Bedingung, dass diese Gerade durch den Punkt $Q(x_q, y_q)$ hindurchgeht, ist in Verbindung mit 8):

$$x(x^2+y^2-a^2)\,x_q+y(x^2+y^2+a^2)\,y_q = (x^2-y^2)a^2 \qquad 11),$$

was den ganzen Satz beweist.

6. „Die Curve C_q^3 ist die erste Polare von Q in Bezug auf (L). Die sechs Punkte P der Ebene, deren Restpunktepaare auf einer Geraden g liegen, sind die beweglichen Pole von g in Bezug auf (L). Die Gerade P_1P_2 ist die gerade Polare von P in Bezug auf (L). Aus der Polarentheorie folgt dann noch, dass je zwei Polsextupel auf einer durch O gehenden cyclischen Curve C^3 liegen, nämlich auf der C_q^3, welche dem Schnittpunkte Q der den Sextupeln zugeordneten Geraden entspricht.

In Bezug auf (L) hat jede Gerade g also sechs bewegliche Pole, welche viermal zu je dreien auf einer Tangente von (H) gelegen sind. Die auf einer C_q^3 gelegenen Polsextupel bilden auf dieser Curve eine Involution sechster Ordnung, die mit dem Büschel der zugeordneten Geraden durch Q projectivisch ist. Wenn Q ein Punkt u von (L) ist, so zerfällt C_q^3 in eine bestimmte Tangente U von (H) und einen Kegelschnitt C_u^2; dabei theilt sich jedes Sextupel in zwei Tripel, so dass die Tripel auf U eine cubische Involution auf dieser Geraden, und die Tripel auf C_u^2 eine cubische Involution auf diesem Kegelschnitte bilden. Die letztere Involution hat (H) zum Involutionskegelschnitt.“

Die homogene Gleichung der (L) ist

$$(x^2+y^2)^2-2a^2z^2(x^2-y^2) = 0;$$

also ist die erste Polare

$$x_q\frac{\partial f}{\partial x}+y_q\frac{\partial f}{\partial y}+z_q\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

von Q die Curve

$$x(x^2+y^2-a^2z^2)\,x_q+y(x^2+y^2+a^2z^2)\,y_q-a^2z(x^2-y^2)z_q = 0$$

und diese Gleichung wird mit 11) identisch, wenn man z und z_q durch die Einheit ersetzt.

Dieses Resultat findet man auch, ohne sich der Differentialrechnung zu bedienen, mittelst des Hauptsatzes von Herrn Weyr. Wenn P ein Punkt von (L) ist, so zerfällt die K_p^2 in zwei Geraden, die Tangente von (L) in P und eine nicht durch P gehende Tangente von (H); dabei sind die zwei übrigen Schnittpunkte der ersten Geraden mit (L) die Restpunkte von P. Aber hieraus folgt nach Artikel 4, dass die C_q^3 die Berührungspunkte der von Q an die (L) gelegten Tangenten enthalten muss. Also hat C_q^3 schon neun Punkte mit der ersten Polare von Q in Bezug auf (L) gemein, diese sechs Berührungspunkte und die drei Doppelpunkte von (L). Diese neun Punkte lassen aber nur eine durch sie hindurchgehende Curve dritter Ordnung zu; denn während die sechs Berührungspunkte auf einem Kegelschnitte K_q^2 liegen, liegen die drei Doppelpunkte von (L) nicht in einer Geraden. Desshalb ist C_q^3 mit der ersten Polare von Q in Bezug auf (L) identisch.

Von dieser Seite beleuchtet sind die sechs Punkte P der Ebene, deren Restpunktepaare auf einer Gerade g liegen, offenbar die beweglichen Pole dieser Geraden in Bezug auf (L). Denn die Curven C_q^3, die den verschiedenen Punkten Q von g entsprechen, haben nach ihrer ersten Definition ausser den Doppelpunkten von (L) die sechs erwähnten Punkte P gemein; nach der Polarentheorie sind die gemeinschaftlichen Punkte der ersten Polaren der Punkte einer Geraden gerade die Pole dieser Geraden, u. s. w. Aber dann ist auch $P_1 P_2$ die gerade Polare von P.

Am Schlusse von Artikel 3) ist gezeigt worden, dass die sechs Punkte P, welche wir weiterhin als Polsextupel bezeichnen wollen, viermal zu je dreien auf Tangenten U von (H) liegen. Und die weiter im Satze angeführten Relationen sind unmittelbar der allgemeinen Polarentheorie zu entnehmen. Es soll nur noch Einiges erwähnt werden in Beziehung auf die Verzweigungsgruppen der beschriebenen Involutionen, zu deren Aufsuchung wir die Lage der sechs Punkte eines Polsextupels ein wenig näher ins Auge fassen.

Die vier Schnittpunkte u_1, u_2, u_3, u_4 einer Geraden g mit (L) kann man auf drei Arten in zwei Paare theilen, nämlich als $u_1 u_2$ und $u_3 u_4$, als $u_1 u_3$ und $u_2 u_4$, als $u_1 u_4$ und $u_2 u_3$; diesen drei Paaren von Punktepaaren entsprechen selbstverständlich die drei Paare von gegenüberliegenden Eckpunkten des Vierseits der Tangenten an die (H), dessen Eckpunkte das Polsextupel bilden.

Legt man also vom Punkte P, welcher der Combination $u_1 u_2$ entspricht, die Tangenten an (H), so enthält die eine die den Combinationen $u_1 u_3$ und $u_1 u_4$ entsprechenden Punkte P, die andere die den Combinationen $u_2 u_3$ und $u_2 u_4$ entsprechenden Punkte P und es entspricht der übriggebliebenen Combination $u_3 u_4$ der Gegenpunkt des Ausgangspunktes P. Nun ist einleuchtend, dass zwei Punkte eines Polsextupels nur dann zusammenfallen können, wenn die zugeordnete Gerade g die (L) berührt (nicht jedoch, wenn z. B. g durch einen Doppelpunkt von (L) hindurchgeht, da doch die beiden in diesem Punkte von (L) zusammenfallenden Punkte verschiedenen Parameterwerthen angehören). Und in diesem Falle reducirt sich das im Allgemeinen aus drei Paaren von Gegenpunkten bestehende Sextupel auf ein Paar von Doppelelementen und ein Paar Verzweigungselemente. Fallen nämlich u_3 und u_4 zusammen, so coïncidiren sowohl die Pole, welche den Combinationen $u_1 u_3$ und $u_1 u_4$ als die gegenüberliegende Pole, welche den Combinationen $u_2 u_4$ und $u_2 u_3$ entsprechen. Dabei fällt der Pol der Combination $u_1 u_2$ in den Punkt $u_3 u_4$ auf (L), zufolge des Hauptsatzes von Herrn Weyr, der im nächsten Artikel nochmals ausgesprochen wird, und der Pol der Combination $u_3 u_4$ fällt nach Artikel 2 auf (H) in einen Punkt, dessen Abhängigkeit vom Lemniscatenpunkte $u_3 u_4$ ebenfalls im nächsten Artikel näher betrachtet werden soll. Alles zusammengenommen, erhält man also das Verzweigungssextupel, welches der Tangente in P an (L) entspricht, wenn man den Punkt P und den diesem Punkte zugeordneten Punkt u von (H) als Verzweigungspaar und die Schnittpunkte der Tangente in u an (H) mit den Tangenten aus P an (H) als Doppelpaar annimmt.

Hieraus folgt nun unmittelbar, dass die Involution sechster Ordnung auf jeder C_q^3 sechs Verzweigungsgruppen aufweist, die den Tangenten aus Q an (L) entsprechen, und dass eine jede dieser Gruppen aus einem Verzweigungspaare und einem Doppelpaare besteht. Überdies sind die sechs Verzweigungspaare die sechs freien Schnittpunkte von C_q^3 mit (L) und die sechs Schnittpunkte von C_q^3 mit (H).

Liegt Q auf (L), so zerfällt C_q^3 in eine Tangente U von (H) und eine Kreislinie C_u^2 durch o, welche, jede für sich Träger einer cubischen Involution sind. Man findet leicht, dass jede dieser

Involutionen vier Verzweigungsgruppen hat, dass die vier Schnittpunkte von U mit (L) die Verzweigungspunkte der Involution auf U, die vier Schnittpunkte von C_u^2 mit (H) die Verzweigungspunkte der Involution auf C_u^2 sind und endlich (H) die Involutionscurve der Involution auf C_u^2 ist, u. s. w. [1]

Endlich bemerke ich in aller Kürze, dass auf jeder C_q^3 die drei Paare von Gegenpunkten eines Polsextupels drei Paare conjugirter Punkte desselben Systems sind; woraus dann ohne Mühe folgt, dass die Involutionscurve der Involution sechsten Grades auf der C_q^3 zusammengesetzt ist aus der dreimal gezählten (H) und aus einer Curve C_3^6 sechster Ordnung dritter Classe, nämlich der Cayley'schen Curve einer der Curven dritter Ordnung, für welche C_q^3 Hesse'sche Curve ist.

7. „Der Kegelschnitt K_p^2 von P zerfällt in zwei Gerade, erstens wenn P ein Punkt der (L), zweitens wenn P ein Punkt von (H) ist. Im ersten Falle besteht der Kegelschnitt K_p^2 aus der Tangente U von (H) und aus der Tangente von (L) im Punkte P, welche letztere hier zugleich die Gerade P_1P_2 ist. Im zweiten Falle schneiden sich die beiden Geraden, aus denen K_p^2 besteht und von welchen jede drei der sechs Berührungspunkte enthält, in einem Punkte u von (L) und bilden mit dem Leitstrahle Ou Winkel von 30°; dabei wird der Winkel POu von der y-Axe halbirt und ist die gerade Polare P_1P_2 von P die Tangente von (L) in u". [2]

---

[1] Man vergleiche die Abhandlung des Herrn Weyr: „Grundzüge einer Theorie der cubischen Involutionen" (Abhandlungen der kgl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften. Prag 1874).

[2] Der letzte Theil dieses und des folgenden Satzes findet sich in den Aufgaben 314 und 315 der Aufgabensammlung von Ralph A. Roberts (A collection of examples and problems on conics and some of the higher plane curves, London 1882), welche mir jedoch erst zur Hand kam, als ich meine Notiz schon eingeliefert hatte. Ausgehend von der Lemniscatengleichung $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=0$ findet dieser Mathematiker, dass die Discriminante des Kegelschnittes K_p^2 der Form $(x^2+y^2+z^2)(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)$ proportional ist und nun betrachtet er wohl den Fall $x^2+y^2+z^2=0$ der gleichseitigen Hyperbel aber nicht die (L) selbst, so dass der Satz von Herrn Weyr nicht hervortritt.

Ich bemerke nur noch, dass seine Aufgabe 311 zeigt, wie die Ellipse von Cassini die analoge Eigenschaft hat, dass die Berührungspunkte der sechs von einem Curvenpunkte an die Curve gelegten Tangenten auf einem Kegelschnitte liegen.

Bekanntlich ist die Bedingung, welche aussagt, dass der Kegelschnitt 10) in zwei Geraden zerfallen soll

$$\begin{vmatrix} 2a^2-3x^2+y^2 & -4xy & a^2x \\ -4xy & -2a^2+x^2-3y^2 & -a^2y \\ a^2x & -a^2y & 2(x^2-y^2) \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$2(x^2+y^2)^2(x^2-y^2)-(5x^4-6x^2y^2+5y^4)a^2+2(x^2-y^2)a^4=0,$$

was sich in die Form

$$2(x^2+y^2)^2(x^2-y^2)-(x^2+y^2)^2a^2-4(x^2-y^2)^2a^2+2(x^2-y^2)a^4=0$$

oder

$$\{(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)\}\,\{2(x^2-y^2)-a^2\}=0$$

bringen lässt. Also ist der erste Theil des Satzes bewiesen.

Ich übergehe den ersten Fall der Zerlegung von K_p^2, weil dieser von Herrn Weyr eingehend untersucht worden ist und wende mich sogleich zum zweiten. Da hier die Bedingung $x^2-y^2=\frac{1}{2}a^2$ obwaltet, so kann die Gleichung 10) von K_p^2 auch in der Form

$$(3a^2-4x^2)X^2-16xyXIJ-(3a^2+4y^2)IJ^2$$
$$+4a^2xX-4a^2yIJ+2a^4=0$$

geschrieben werden. Sind nun

$$m_1X+n_1IJ+a^2=0, \qquad m_2X+n_2IJ+a^2=0$$

die beiden Theile von K_p^2, so hat man die Relationen

$$\left.\begin{aligned} m_1+m_2 &= 2x \\ m_1m_2 &= \frac{3}{2}a^2-2x^2 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} n_1+n_2 &= -2y \\ n_1n_2 &= -\frac{3}{2}a^2-2y^2 \end{aligned}\right\} m_1n_2+m_2n_1=-8xy$$

und erhält also

$$m_1=x-y\sqrt{3}, \qquad n_1=-y-x\sqrt{3},$$
$$m_2=x+y\sqrt{3}, \qquad n_2=-y+x\sqrt{3}.$$

Desshalb sind die beiden Geraden von K_p^2 gegeben durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}(x-y\sqrt{3})X-(x\sqrt{3}+y)IJ+a^2=0\\(x+y\sqrt{3})X+(x\sqrt{3}-y)IJ+a^2=0\end{aligned}\right\} \qquad 12)$$

und die Coordinaten ihres Schnittpunktes durch

$$X=-\frac{a^2x}{x^2+y^2}, \qquad IJ=\frac{a^2y}{x^2+y^2} \qquad 13).$$

Eliminirt man nun x und y zwischen den Gleichungen 12) und der Bedingung $x^2-y^2=\frac{1}{2}a^2$, so findet man die Gleichung der (L); also schneiden sich die beiden Geraden von K_p^2 in einem Punkte u von (L).

Die durch die Bedingung $x^2-y^2=\frac{1}{2}a^2$ gegebenen Relationen sind den Gleichungen 12) und 13) unmittelbar zu entnehmen.

Mit Rücksicht auf den ersten Theil des zweiten Satzes gibt es offenbar keine eigentliche K_p^2, die (L) in den zusammenfallenden Restpunkten von P berührt; denn die Punkte P, deren Restpunkte zusammenfallen, liegen auf (H) und den Punkten P von (H) entsprechen zerfallende Kegelschnitte K_p^2.

Aus den Gleichungen 13) leitet man ab, dass die Curven (L) und (H) einander punktweise entsprechen in der um die y-Axe umgelegten Transformation durch reciproke Radien mit dem Centrum O und der Potenz a^2, welche in Art. 3 schon gefunden ist. In Verbindung mit den schon erhaltenen Resultaten ergibt sich hieraus, dass die sechs Pole einer willkürlichen Geraden g sich einfach definiren lassen als die sechs Schnittpunkte der vier Tangenten von (H), welche diese Curve berühren in den vier Punkten, die in obenstehender quadratischer Transformation den vier Schnittpunkten von g mit (L) entsprechen. Ein Resultat, welches die Reduction des Polsextupels einer Tangente von (L) sehr übersichtlich macht und die weitere Reduction der den Doppeltangenten von (L) entsprechenden Sextupel auf einfache Weise angibt.

Die die sechs Punkte eines Polsextupels tragenden vier Tangenten von (H) berühren somit diese Curve in vier Punkten eines durch O gehenden Kreises, u. s. w.

8 „Die beiden Geraden, welche im zweiten Falle den K_p^2 bilden, sind die Polaren von P in Beziehung auf diezwe gleichseitigen Hyperbeln $(\rotatebox{90}{$H$})$ und $(\rotatebox{45}{$H$})$, die man erhält wenn (H) in

positivem und negativem Sinne um O um den Winkel von 60° gedreht wird; überdies berühren diese beiden Geraden ( ), respective ( )“.

Nach den Regeln der Differentialrechnung ist die Umhüllende der Geraden $(x-y\sqrt{3})X-(x\sqrt{3}+y)IJ+a^2=0$ unter der Bedingung $x^2-y^2=\frac{1}{2}a^2$ die gleichseitige Hyperbel $IJ^2-2XIJ\sqrt{3}-X^2=a^2$, ebenso jene der Geraden $(x+y\sqrt{3})X+(x\sqrt{3}-y)\,IJ+a^2=0$ die gleichseitige Hyperbel $IJ^2+2XIJ\sqrt{3}-X^2=a^2$; die erste ist ( ) die zweite ( ). Für die erste ist die Polare von x, y die zweite, für die zweite ist die Polare von x,y die erste der beiden Geraden.

9. „Die drei gleichseitigen Hyperbeln (H), ( ) und ( ) stehen zu einander in der besonderen Beziehung, dass jede von ihnen in Bezug auf irgend eine der beiden übrigen die Polarfigur der dritten ist“.

Nach dem vorhergehenden Satze ist ( ) die Polarfigur von (H) in Bezug auf ( ) und ebenso ( ) die Polarfigur von (H) in Bezug auf ( ). Der regelmässigen Lage der drei Curven wegen ist nun auch die ( ) die Polarfigur von ( ) in Bezug auf (H).

Man findet leicht, dass drei Kegelschnitte, welche in dieser Beziehung zu einander stehen, ein gemeinschaftliches Polardreieck haben und man zur Bestimmung eines solchen Systemes einen der Kegelschnitte und das Polardreieck beliebig wählen kann. Dabei ergibt sich dann auch der Satz dieses Artikels unabhängig von der regelmässigen Lage der drei Curven als eine unmittelbare Folge der zwei aus dem vorhergehenden Satze gefolgerten Schlüsse.

Der vorgeführte Fall ist der einzige, wobei die drei Curven des Systemes gleich und concentrisch sind.

10. „Nennt man die Combination der drei gleichseitigen Hyperbel eine Trihyperbel und ebenso die Combination der drei Lemniscaten (L) ( ) und ( ), von denen die beiden letzteren aus der ersten ebenfalls durch Drehung um O um den Winkel von 60° entstehen, eine Trilemniscate, so schneidet jede Tangente der Trihyperbel die Trilemniscate in zwölf Punkten, die eine besondere Gruppirung zulassen. Die Trilemniscatentangenten in vier dieser zwölf Punkte gehen durch einen Punkt der Trilemniscate und von den übrigen acht lassen sich zwei Tripel

absondern, deren Tangenten einander auf der Trihyperbel schneiden.

11. „Zum Orte des Scheitels eines Winkels von 60°, von dessen Schenkeln der eine ($\rotatebox{90}{$H$}$) und der andere ($\rotatebox{150}{$H$}$) berührt, gehört die (L)“.

Dieser Satz ist eine unmittelbare Folge des letzten Theiles des achten Satzes.

12. „Lässt man (H) um O beiderseits um den Winkel α rotiren, so erhält man zwei neue gleichseitige Hyperbeln. Ein Theil des Ortes der Scheitel eines Winkels 2α, von dessen Schenkeln jedes eine dieser beiden Hyperbeln berührt, ist eine Lemniscate mit der Gleichung $(x^2+y^2)^2 = \frac{1}{2}a^2(x^2-y^2)\sec^2\alpha$.“

Die Tangente im Punkte $x = \frac{1}{2}a\sec\varphi\sqrt{2}$, $y = \frac{1}{2}a\,\mathrm{tg}\,\varphi\sqrt{2}$ von (H) ist bekanntlich $x\sec\varphi - y\,\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Betrachten wir sie in den verschiedenen Lagen, die sie durch beide Drehungen erhält, so haben wir es offenbar mit zwei Geraden zu thun, deren Schnittpunkt ein Punkt des betrachteten Ortes ist. In Bezug auf die ungeänderten Axen haben diese Geraden aber die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}(x\cos\alpha+y\sin\alpha)\sec\varphi+(x\sin\alpha-y\cos\alpha)\,\mathrm{tg}\,\varphi &= \tfrac{1}{2}a\sqrt{2}\\ (x\cos\alpha-y\sin\alpha)\sec\varphi-(x\sin\alpha+y\cos\alpha)\,\mathrm{tg}\,\varphi &= \tfrac{1}{2}a\sqrt{2}\end{aligned}\right\} \quad 14).$$

Und nun liefert die Elimination von φ uns den angegebenen Theil des Ortes als $(x^2+y^2)^2 = \frac{1}{2}a^2(x-y^2)\sec^2\alpha$.

Ich schliesse diese Notiz mit einem anderen Beweise des von Herrn Weyr herrührenden Satzes, der für alle Curven vierter Ordnung gilt, die drei Doppelpunkte mit Inflexionstangenten besitzen.

---

1 Man erhält die Lemniscate $(x^2+y^2)^2 = \frac{1}{2}a^2(y^2-x^2)\,\mathrm{cosec}^2\alpha$ als zweiten Theil, wenn man von den Paaren von vor der Drehung parallelen Tangenten ausgeht. Endlich wird für $\alpha \gtreqless 45°$ ein dritter Theil geliefert von den Paaren der Tangenten, die vor der Drehung mit einander einen Winkel 4α bilden. Wie gestaltet sich dieser dritte Theil?

Gegeben sei ein Kegelschnitt C^2 und eines seiner Polardreiecke ABC. Ist ABC Coordinatendreieck, so kann die Gleichung von C^2 in die Form $x^2+y^2=z^2$ gebracht werden und individualisiren also die Relationen $x=z\cos\varphi$, $y=z\sin\varphi$ einen Punkt Q dieser Curve. Dann ist die Gleichung des dem Dreiecke ABC umschriebenen Kegelschnittes, welcher C^2 in Q berührt

$$\begin{vmatrix} yz & zx & xy \\ \sin\varphi & \cos\varphi & \sin\varphi\cos\varphi \\ \cos\varphi & -\sin\varphi & \cos^2\varphi-\sin^2\varphi \end{vmatrix}=0$$

oder

$$\frac{\cos^3\varphi}{x}+\frac{\sin^3\varphi}{y}=\frac{1}{z}.$$

Soll dieser Kegelschnitt nun überdies noch durch den festen Punkt P $(x=z\cos\alpha,\ y=z\sin\alpha)$ von C^2 gehen, so tritt für φ die Bedingungsgleichung

$$\frac{\cos^3\varphi}{\cos\alpha}+\frac{\sin^3\varphi}{\sin\alpha}=1$$

auf. Drückt man $\sin\varphi$ durch $\cos\varphi$ aus, so wird sie nach zweimaliger Theilung durch $\cos\varphi-\cos\alpha$ übergehen in:

$$\cos^4\varphi+2\cos\alpha\cos^3\varphi-2\cos\alpha\cos\varphi-\cos^2\alpha=0 \qquad 1a).$$

Also gehen durch A, B, C und den Punkt P von C^2 vier Kegelschnitte, die C^2 in einem von P verschiedenen Punkt berühren.

Die vier Schnittpunkte eines durch A, B, C gehenden Kegelschnittes $ayz+bzx+cxy=0$ mit C^2 sind bestimmt durch die Gleichung

$$a\sin\varphi+b\cos\varphi+c\cos\varphi\sin\varphi=0$$

oder

$$c^2\cos^4\varphi+2ac\cos^3\varphi+(a^2+b^2-c^2)\cos^2\varphi-2ac\cos\varphi-a^2=0.$$

Diese Gleichung stimmt mit 1a) überein, wenn

$$c^2=a^2+b^2,\quad a=c\cos\alpha.$$

Da diese zwei Gleichungen die Verhältnisse der Coëfficienten a, b, c unzweideutig bestimmen, so liegen die vier Berührungspunkte 1a) auf einem dem Dreiecke ABC umschriebenen Kegelschnitte. Diese Curve hat

$$\frac{\cos\alpha}{x}+\frac{\sin\alpha}{y}+\frac{1}{z}=0$$

zur Gleichung und in Bezug auf das Dreieck der Tangenten in *A, B, C* den Punkt *P* zum Brianchon'schen Punkte.

Durchläuft nun der Punkt *P* die gegebene C^2, so wird der Kegelschnitt $\frac{\cos\alpha}{x}+\frac{\sin\alpha}{y}+\frac{1}{z}=0$ von der Curve $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{z^2}$ umhüllt. Diese Curve vierter Ordnung hat die Punkten *A, B, C* zu Doppelpunkten und die Tangenten in diesen Punkten zu Inflexionstangenten.

Nimmt man nun endlich das Dreieck *ABC* als Fundamentaldreieck einer quadratischen Transformation an, so erhält man den Satz:

„Eine Curve C^4 mit drei Doppelpunkten *A, B, C* und zwei Inflexionstangenten in jedem von diesen, lässt aus jedem ihrer Punkte *P* vier Tangente zu; die Berührungspunkte dieser Tangenten liegen in einer Geraden *g*. Und bei Bewegung von *P* auf C^4 umhüllt *g* einen Kegelschnitt, welcher *ABC* zum Polardreieck hat und auf den Seiten dieses Dreieckes von den dem gegenüberliegenden Eckpunkte angehörenden Inflexionstangenten der C^4 berührt wird“.

Diese Betrachtung der mehr allgemeinen Curve C^4 mit drei Inflexionsdoppelpunkten, die sich ganz leicht durchführen und auf den Kegelschnitt der Berührungspunkte der sechs durch einen beliebig gewählten Punkt *P* der Ebene gehenden Tangenten ausdehnen lässt, hat mich zu einem rein geometrischen Beweise des schönen Weyr'schen Satzes geführt. Da er schon zur Vorlage gebracht ist (in der kgl. Akademie der Wissenschaften zu Amsterdam, Sitzung vom 29. December 1883), so lasse ich ihn hier weg. Ich weise nur noch hin auf die reciproke Eigenschaft der reciproken Curven vierter Classe mit drei Rückkehrdoppeltangenten, wovon die Evolute eines Mittelpunktskegelschnittes ein bekanntes Beispiel darbietet.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1883

Band/Volume: 88_2

Autor(en)/Author(s): Schoute P. H.

Artikel/Article: Notiz über die Lemniscate. 1252-1267