Über einige allgemeine, auf Knotenverbindungen bezügliche Gesetze.

Von **Ludwig Koller,**

Hörer an der Wiener Hochschule für Bodencultur.

(Mit 1 Tafel.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 31. Jänner 1884.)

Führt man durch biegsame Ringe längs deren Mittellinien in sich selbst zurücklaufende Schnitte, so entstehen bekanntlich[1] bei gewissen Umlaufs- und Drehungszahlen der letzteren eigenthümliche Verschlingungen, welche je nach dem Sinne der Drehung als positive oder negative Knotenverbindungen auftreten, sich also stets aus gleichsinnigen Knoten zusammensetzen. Die Anzahl und die Reihenfolge dieser Knoten ist im Allgemeinen eine fixe; nur dann, wenn deren Windungszahlen theilweise verschwinden, wird eine weitere Reduction der betreffenden Knotenverbindung möglich, und zwar gelten speciell für positive Knotenverbindungen die nachstehenden empirischen Transformationsgleichungen:

$$(1). \quad [(+)_0^k(+)_a(+)_b(+)_c \cdot \quad] = [(+)_a(+)_b(+)_c \cdot \quad],$$

$$(2) \quad [A_1^{a_3} A_2^{a_5} A_3^{a_7} \quad A_{r-1}^{a_{2r-1}}] =$$

$$[(C^{a_2-1} C_1^{a_4} C_2^{a_6} . \quad . C_{r-2}^{a_{2r-2}}) C_{r-2} (DC^{a_2-1} C_1^{a_4} C_2^{a_6} \ldots C_{r-2}^{a_{2r-2}})^{a_{2r-1}-1}],$$

(3).

$$[(A_1^{a_3} A_2^{a_5} A_3^{a_7} \quad A_{r-1}^{a_{2r-1}}) A_{r-1} (BA^{a_1-1} A_1^{a_3} A_2^{a_5} . \quad A_{r-1}^{a_{2r-1}})^{a_{2r}-1}] =$$

$$= C^{a_2-1} C_1^{a_4} C_2^{a_6} C_3^{a_8} . \quad . C_{r-1}^{a_{2r}}],$$

---

[1] S. h. die im LXXXV LXXXVII. und LXXXVIII. Bande der Sitzb. der k. Akad. erschienene Abhandlung meines Lehrers, Prof. Dr Oskar Simony: „Über eine Reihe neuer mathematischer Erfahrungssätze“ dessen für Knotenverbindungen gewählte Nomenclatur ich in Folgendem unverändert beibehalten habe.

in welchen die Grössen: $k, a, b, c, \ldots a_1, a_2, a_3, \ldots a_{2r-1}, a_{2r}$ beliebige positive ganze Zahlen bedeuten, und die Symbole: $A, B, C, D; A_1, C_1; A_2, C_2; A_3, C_3; \ldots A_n, C_n;$ ihrerseits durch die Formeln:

$$A = (+)_0,\ B = (+)_1,\ C = (+)_{a_1},\ D = (+)_{a_1+1};$$

$$A_1 = A(BA^{a_1-1})^{a_2},\ C_1 = C(DC^{a_2-1})^{a_3};$$

$$A_2 = A_1(BA^{a_1-1}A_1^{a_3})^{a_4},\ C_2 = C_1(DC^{a_2-1}C_1^{a_4})^{a_5}$$

$$A_n = A_{n-1}(BA^{a_1-1}A_1^{a_3}A_2^{a_5}A_3^{a_7}\ldots A_{n-1}^{a_{2n-1}})^{a_{2n}},$$

$$C_n = C_{n-1}(DC^{a_2-1}C_1^{a_4}C_2^{a_6}C_3^{a_8}\ldots C_{n-1}^{a_{2n}})^{a_{2n+1}}$$

definirt werden. Eine Vertauschung von $(+)$ mit $(-)$ liefert die correspondirenden Transformationsgleichungen für negative Knotenverbindungen, womit sämmtliche Beziehungen gegeben sind, welche die möglichen Umformungen von, in biegsamen Ringen erzeugbaren Knotenverbindungen betreffen.

Indem ich mir die Aufgabe stellte,[1] auch für andere aus gleichsinnigen[2] Knoten gebildete Knotenverbindungen analoge Transformationsgleichungen aufzufinden, gelangte ich nach zahlreichen, mit 2—8 Meter langen, biegsamen Hanfschnüren von 3 mm. Dicke vorgenommenen Experimenten zu folgenden empirischen Relationen:

$$[BA^4\,BA] = [(+)_2\,(+)_5],$$

$$[BA^6\,BA^3] = [(+)_4\,(+)_7],$$

$$[BA^8\,BA^3\,BA^5] = [(+)_6\,(+)_4\,(+)_9],$$

$$[BA\,BA^2\,BA^3\,BA^4] = [(+)_5\,(+)_4\,(+)_3\,(+)_2],$$

$$[BA^8\,BA^7\,BA^6\,BA^5] = [(+)_6\,(+)_7\,(+)_8\,(+)_9],$$

$$[BA^8\,BA^2\,BA^7\,BA^5] = [(+)_6\,(+)_8\,(+)_3\,(+)_9],$$

---

[1] Ich erhielt die Anregung hiezu in zwei, im Juni 1883 über diesen Gegenstand gehaltenen Vorträgen Prof. Simony's und spreche ihm hier auch für die Unterstützung, welche er mir bei der definitiven Formulirung meiner Beweise zu Theil werden liess, meinen Dank aus.

[2] In Folgendem habe ich lediglich die auf positive Knotenverbindungen bezüglichen Typengleichungen angeführt, da hieraus jene für negative Knotenverbindungen durch einfache Vertauschung von $(+)$ mit $(-)$ resultiren.

$$[BA^2\, BABA^3BA^7] = [(+)_8\,(+)_4\,(+)_2\,(+)_3],$$
$$[BA^5BA^3\,BAB^2] = [(+)_1^2\,(+)_2\,(+)_4\,(+)_6],$$
$$[BA^7\,BA^2\,B^2\,A^3\,BA^5] = [(+)_6\,(+)_4\,(+)_1\,(+)_3\,(+)_8],$$
$$[(BA^2)^3\,(BA^4)^2\,BA^3] = [(+)_4\,(+)_5^2\,(+)_3^3].$$
$$[B^4A^5\,BA^4\,BA^3\,B] = [(+)_1\,(+)_4\,(+)_5\,(+)_6\,(+)_1^3],$$
$$[(BA^6)^3\,(BA)^4\,B^3] = [(+)_1^3\,(+)_2^4\,(+)_7^3],$$
$$[(BA^6)^3\,(BA)^4\,(BA^3)^3\,(BA^2)^4] = [(+)_3^4\,(+)_4^3\,(+)_2^4\,(+)_7^3],$$
$$[(BA^2)^2\,(BAB)^2] = [\{(+)_1\,(+)_2\}^2\,(+)_3^2],$$
$$[(BA^2\,B)^2\,BA^3\,B] = [(+)_1\,(+)_4\,\{(+)_1\,(+)_3\}^2],$$

welche sich unter keine einzige der Gleichungen: (1), (2), (3) subsumiren lassen und daher den empirischen Ausdruck eines bisher unbekannt gebliebenen Transformationsgesetzes bilden. Ihre inductive Verallgemeinerung führte mich zu der nachstehenden symbolischen Beziehung:

$$\text{(I).}\qquad [BA^{p_1}\,BA^{p_2}\,BA^{p_3}.\quad BA^{p_m}] =$$
$$= [(+)_{p_m+1}.\quad (+)_{p_3+1}\,(+)_{p_2+1}\,(+)_{p_1+1}],$$

in welcher $p_1, p_2, p_3, .\quad p_m$ beliebige positive ganze Zahlen vorstellen, aber auch theilweise oder insgesammt verschwinden können, ohne die Giltigkeit von (I) aufzuheben.

Diese Relation ist übrigens noch weiterer Verallgemeinerungen fähig.

Sind nämlich die Exponenten: $p_1, p_2, p_3, .\quad p_m$ zum Theile einander gleich, also beispielsweise q_1 der gemeinsame Werth der ersten r_1-Exponenten, q_2 der gemeinsame Werth der nächsten r_2, auf jene r_1-Exponenten folgenden Exponenten, . endlich q_n der gemeinsame Werth der r_n- letzten Exponenten, so verwandelt sich (I) in:

$$[(BA^{q_1})^{r_1}\,(BA^{q_2})^{r_2}\,(BA^{q_3})^{r_3}.\quad (BA^{q_n})^{r_n}] =$$
$$= [(+)_{q_n+1}^{r_n}\,(+)_{q_{n-1}+1}^{r_{n-1}}\qquad (+)_{q_3+1}^{r_3}\,(+)_{q_2+1}^{r_2}\,(+)_{q_1+1}^{r_1}],$$

welche Gleichung die vorhergehende als Specialfall in sich schliesst und in leicht verständlicher, abkürzender Symbolik durch:

$$\text{(II)}\qquad [G_n] = [H_n]$$

ersetzt werden mag. Es ist dann — unter $m_1, m_2, m_3, .\;.m_s$;

$n_1, n_2, n_3, \ldots n_s$ beliebige positive ganze Zahlen gedacht — offenbar:

$$[G_{n_1}^{m_1}] = [H_{n_1}^{m_1}],\quad [G_{n_2}^{m_2}] = [H_{n_2}^{m_2}],$$

$$[G_{n_3}^{m_3}] = [H_{n_3}^{m_3}],\qquad [G_{n_s}^{m_s}] = [H_{n_s}^{m_s}],$$

also kraft dem in (I) enthaltenen Gesetze schliesslich:

$$\text{(III)}.\quad [G_{n_1}^{m_1} G_{n_2}^{m_2} G_{n_3}^{m_3} \qquad G_{n_s}^{m_s}] =$$

$$= [H_{n_s}^{m_s} \qquad H_{n_3}^{m_3} H_{n_2}^{m_2} H_{n_1}^{m_1}],$$

womit die weitgehendste theoretische Verallgemeinerung gewonnen ist, welche die Relation (I) überhaupt gestattet.

Die grosse Allgemeinheit, welche den Beziehungen (II) und (III) zukommt, macht es nunmehr wahrscheinlich, dass auch die Transformationsgleichungen (2) und (3) indirect in denselben enthalten sind.

Jedenfalls gilt dies zunächst von den beiden einfachsten, aus (3) und (2) für $r=1$, $r=2$ entspringenden Specialisirungen:

$$[(BA^{a_1-1})^{a_2-1}] = [C^{a_2-1}],$$

$$[\{A(BA^{a_1-1})^{a_2}\}^{a_3}] = [C^{a_2}(DC^{a_2-1})^{a_3-1}],$$

da in der zweiten derselben das symbolische Product linker Hand[1] auch in der Gestalt:

$$A\{(BA^{a_1-1})^{a_2-1}BA^{a_1}\}^{a_3-1}(BA^{a_1-1})^{a_2}$$

darstellbar, also gemäss (1) dem Ausdrucke:

$$\{(BA^{a_1-1})^{a_2-1}BA^{a_1}\}^{a_3-1}(BA^{a_1-1})^{a_2}$$

äquivalent ist. — Denn setzen wir in (II) $n=1$, $q_1 = a_1-1$, $r_1 = 1$, beziehungsweise $n=2$, $q_1 = a_1-1$, $r_1 = a_2-1$; $q_2 = a_1$, $r_2 = 1$, so ergibt sich sofort:

$$[BA^{a_1-1}] = [(+)_{a_1}]$$

$$[(BA^{a_1-1})^{a_2-1}BA^{a_1}] = [(+)_{a_1+1}(+)_{a_1}^{a_2-1}],$$

[1] Natürlich sind hiebei nur solche Umformungen ohne weiteren Commentar zulässig, welche das Princip der Unvertauschbarkeit sämmtlicher Factoren in keinerlei Weise alteriren.

folglich unter Anwendung unserer dritten Fundamentalgleichung einerseits:

$$[(BA^{a_1-1})^{a_2-1}] = [(+)_{a_1}^{a_2-1}],$$

anderseits:

$$[\{(BA^{a_1-1})^{a_2-1}\, BA^{a_1}\}^{a_3-1}\,(BA^{a_1-1})^{a_2}] =$$
$$= [(+)_{a_1}^{a_2}\{(+)_{a_1+1}\,(+)_{a_1}^{a_2-1}\}^{a_3-1}],$$

welche Resultate vorläufig die Richtigkeit unserer speciellen Behauptung erweisen.

Um im Anschlusse hieran auch unsere allgemeine Behauptung zu rechtfertigen, gehen wir von der Betrachtung des symbolischen Productes:

$$A_1^{a_3}\, A_2^{a_5}\, A_3^{a_7} \qquad A_{r-1}^{a_{2r-1}}$$

aus, welches infolge der Bedeutung von A_1 und der Gleichung (1) die Schreibweise:

$$P = (BA^{a_1-1})^{a_2}\, A_1^{a_3-1}\, A_2^{a_5}\, A_3^{a_7} \qquad A_{r-1}^{a_{2r-1}}$$

erlaubt, mithin in letzter Linie aus lauter Factoren von der Form BA^q besteht. Es wird daher auch gestattet sein, den, durch die Relation (2) diesem Producte zugeordneten Ausdruck:

$$Q = (C^{a_2-1}\, C_1^{a_4}. \qquad C_{r-2}^{a_{2r-2}})\, C_{r-2}\,(DC^{a_2-1}\, C_1^{a_4}. \qquad C_{r-2}^{a_{2r-2}})^{a_{2r-1}-1}$$

in demselben Sinne P gleichzusetzen, wie dies mit H in Bezug auf G geschehen ist, und ebenso das Product:

$$P' = PA_{r-1},$$

welches durch Vertauschung von a_{2r-1} mit $a_{2r-1}+1$ direct aus P abgeleitet werden kann, mit:

$$Q' = (C^{a_2-1}\, C_1^{a_4}. \qquad C_{r-2}^{a_{2r-2}})\, C_{r-2}\,(DC^{a_2-1}\, C_1^{a_4}. \quad . C_{r-2}^{a_{2r-2}})^{a_{2r-1}} =$$
$$= (C^{a_2-1}\, C_1^{a_4}. \quad . C_{r-2}^{a_{2r-2}})\, C_{r-1}$$

zu identificiren. Dies vorausgeschickt ergeben sich dann für:

$$PA_r^{a_{2r+1}} = (BA^{a_1-1})^{a_2}\, A_1^{a_3-1}\, A_2^{a_5}\, A_3^{a_7} \quad . A_r^{a_{2r+1}}$$

nach Einführung der Gleichung:

$$A_r = A_{r-1}\,(BA^{a_1-1}\,A_1^{a_3}\,A_2^{a_5}\,A_3^{a_7}\,.\;\;.\,A_{r-1}^{a_{2r-1}})^{a_{2r}} =$$

$$= A_{r-1}\,\{BA^{a_1}(BA^{a_1-1})^{a_2}\,A_1^{a_3-1}\,A_2^{a_5}\,A_3^{a_7}\,.\quad A_{r-1}^{a_{2r-1}}\}^{a_{2r}} =$$

$$= A_{r-1}\,(BA^{a_1}\,P)^{a_{2r}}$$

folgende einfache Transformationen:

$$PA_r^{a_{2r+1}} = P\{A_{r-1}\;(BA^{a_1}\,P)^{a_{2r}}\}^{a_{2r+1}} =$$

$$= PA_{r-1}\,\{(BA^{a_1}\,P)^{a_{2r}}\,A_{r-1}\}^{a_{2r+1}-1}\,(BA^{a_1}\,P)^{a_{2r}}$$

$$= P'\,\{(BA^{a_1}\,P)^{a_{2r}-1}\,BA^{a_1}\,P'\}^{a_{2r+1}-1}\,(BA^{a_1}\,P)^{a_{2r}},$$

deren letzte eine directe Anwendung der *dritten* Fundamentalgleichung ermöglicht und so auf das Resultat:

$$PA_r^{a_{2r+1}} = (QD)^{a_{2r}}\,\{Q'D(QD)^{a_{2r}-1}\}^{a_{2r+1}-1}Q'$$

führt. Nun ist aber, wenn wir $C^{a_2-1}\,C_1^{a_4}\,C_2^{a_6}\,.\;\;.\,C_{r-2}^{a_{2r-2}}$ der Kürze wegen mit E bezeichnen:

$$C_{r-1} = C_{r-2}\,(DE)^{a_{2r-1}},\quad Q = EC_{r-2}\,(DE)^{a_{2r-1}-1},$$

$$(QD)^{a_{2r}} = EC_{r-1}^{a_{2r}-1}\,C_{r-2}\,(DE)^{a_{2r-1}-1}\,D,$$

$$Q'D(QD)^{a_{2r}-1} = EC_{r-1}\,DEC_{r-1}^{a_{2r}-2}\,C_{r-2}\,(DE)^{a_{2r-1}-1}\,D,$$

$$\{Q'D(QD)^{a_{2r}-1}\}^{a_{2r+1}-1}\,Q' =$$

$$= E(C_{r-1}\,DEC_{r-1}^{a_{2r}-1})^{a_{2r+1}-2}\,C_{r-1}\,DEC_{r-1}^{a_{2r}} =$$

$$= EC_{r-1}\,(DE\,C_{r-1}^{a_{2r}})^{a_{2r+1}-1},$$

also schliesslich:

$$PA_r^{a_{2r+1}} = EC_{r-1}^{a_{2r}-1}\,C_{r-1}^2\,(DE\,C_{r-1}^{a_{2r}})^{a_{2r+1}-1} =$$

$$= (E\,C_{r-1}^{a_{2r}})\,C_{r-1}\,(DE\,C_{r-1}^{a_{2r}})^{a_{2r+1}-1},$$

wonach für $PA_r^{a_{2r+1}}$ auf Grundlage der Relationen (II) und (III) *dieselbe Transformationsgleichung* resultirt, welche für den diesem Producte äquivalenten Ausdruck: $APA_r^{a_{2r+1}}$ aus (2) durch Vertauschung von r mit $r+1$ hervorgeht. Auf diese Art bildet die Gleichung (2) eine nothwendige Consequenz von (II) und (III) für $r = r+1$, sobald sie für $r = r$ eine solche vorstellt, und da wir die der Specialisirung $r = 2$ entsprechende Specialform von (2) direct aus (II) und (III) abgeleitet haben, ist nunmehr apagogisch nachgewiesen, dass sich sämmtliche Specialisirungen von (2) unter (II) und (III) subsummiren lassen.

Es sind also auch in den bereits mehrfach verwertheten Relationen:

$$[P] = [Q], \;\; [P'] = [Q']$$

die Ausdrücke: P, Q; P', Q' einander nicht nur in demselben Sinne, sondern auch nach denselben Gesetzen wie G und H zugeordnet, welche Folgerung im Verein mit (1) und (III) einen directen Beweis von (3) ermöglicht.

Gemäss der Gleichung (1) ist nämlich das in (3) linker Hand stehende symbolische Product gleichbedeutend mit:

$$P' \, (BA^{a_1} P)^{a_{2r}-1},$$

folglich nach (III) transformirbar in:

$$(QD)^{a_{2r}-1} \, Q' =$$
$$= E \, C_{r-1}^{a_{2r}-2} \, C_{r-2} \, (DE)^{a_{2r-1}-1} \, DE \, C_{r-1} = E \, C_{r-1}^{a_{2r}},$$

welch' letzterer Ausdruck in der That mit dem in (3) rechter Hand stehenden symbolischen Producte zusammenfällt.

Nachdem so die Richtigkeit unserer allgemeinen Behauptung für beide Relationen (2) und (3) dargethan ist, recurriren wir nochmals auf Gleichung (I), weil wir dieselbe vorläufig wohl als Ausgangspunkt analytischer Betrachtungen benützt, aber noch nicht geometrisch interpretirt haben.

Zu diesem Zwecke ermitteln wir jetzt die Ordnungszahlen: s, s' jener Knotenverbindungen, deren Typen durch die linke und rechte Seite von (I) wiedergegeben werden.

Da bekanntlich die Ordnungszahl jeder Knotenverbindung der um 1 verminderten Anzahl ihrer Knoten entspricht, ist im vorliegenden Falle:

$$s = m + (p_1 + p_2 + p_3 + \cdot \; \cdot + p_m) - 1,$$
$$s' = m - 1,$$

also, wenn wir die Summe $p_1+p_2+p_3+\cdot\;\cdot+p_m$ kurz mit s_1 bezeichnen:

$$s'=s-s_1,$$

d. h. es gilt in Hinblick darauf, dass die linke Seite von (I) durch passende Wahl von $p_1, p_2, p_3, \cdot\;\cdot p_m$ jeder beliebigen Knotenverbindung mit den Windungszahlen 0 und 1 angepasst werden kann, der nachstehende Schluss[1]:

(a) Jede Knotenverbindung s^{ter} Ordnung, von deren $s+1$ Windungszahlen etwa s_1 mit der Null zusammenfallen, während die $s-s_1+1$ übrigen Windungszahlen gleich 1 werden, lässt sich in eine Knotenverbindung $(s-s_1)^{\text{ter}}$ Ordnung transformiren.

Diesem Satze steht aber noch ein zweiter gegenüber, der sich sofort ergibt, wenn man die rechte Seite von (I) durch Einführung der Bedingungen:

$$p_m+1=a,\; p_{m-1}+1=b,\; p_{m-2}+1=c$$

$$p_3+1=u,\; p_2+1=v,\; p_1+1=w$$

mit dem Typus: $[(+)_a\,(+)_b\,(+)_c\cdot\;\cdot(+)_u\,(+)_v\,(+)_w]$ einer Knotenverbindung von irgend welcher Ordnungszahl $m-1$ und beliebigen Windungszahlen: $a, b, c,\quad u, v, w$ in Übereinstimmung bringt. Denn substituirt man die aus jenen Bedingungen für $p_1, p_2, p_3,\quad p_{m-2}, p_{m-1}, p_m$ resultirenden Werthe in (I), so verwandelt sich (I) in:

$$\text{(IV)}\ldots\;[(+)_a\,(+)_b\,(+)_c\qquad(+)_u\,(+)_v\,(+)_w]=$$
$$=[BA^{w-1}\,BA^{v-1}\,BA^{u-1}\qquad BA^{c-1}\,BA^{b-1}\,BA^{a-1}],\text{ d. h.:}$$

(b) Jede, aus Knoten von beliebigen, aber nicht verschwindenden Windungszahlen bestehende Knotenverbindung ist einer Knotenverbindung äquivalent, deren Ordnungszahl der um 1 verminderten Summe jener Windungszahlen gleichkommt, und

---

[1] Derselbe ist zuerst von Prof. Simony (s. dessen früher citirte Abhandlung, I. Theil, pag. 915) ausgesprochen aber lediglich für die Gleichungen (2) und (3 bewiesen worden, während die vorliegenden Betrachtungen dessen allgemeine Giltigkeit ausser allen Zweifel stellen.

deren Knoten insgesammt solche nullter und erster Art vorstellen.

Unsere letzte Folgerung führt nunmehr auf die Frage, ob auch für solche, aus lauter positiven Knoten zusammengesetzte Knotenverbindungen, welche theils verschwindende, theils beliebige positive ganze Windungszahlen: $a_1, a_2, a_3, \quad a_m$ aufweisen und daher durch Typenschemata von der Form:

$$[(+)\,a_1\,(+)_0^{p_1}\,(+)\,a_2\,(+)_0^{p_2}\,(+)\,a_3\,(+)_0^{p_3}\,. \quad (+)\,a_m\,(+)_0^{p_m}]$$

beschrieben werden, analoge Äquivalenzen bestehen? — Indem ich diese Frage zunächst für die in nachstehender Tabelle:

a_1	a_2	a_3	p_1	p_2	p_3	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7
2			2			2	3	2					0	0	2				
2			3			3	1	2					1	2	0				
2			5			2	1	3					0	1	1				
3			1			4	1	2					1	5	3				
3			3			4	2	2					2	4	3				
3			6			1	2	3					4	5	1				
4			2			3	4	5					4	0	1				
4			4			2	3	2	1				3	1	4	3			
4			5			2	1	1	2				4	4	4	3			
5			2			2	3	1	2				3	1	5	4			
5			5			4	3	2	2				4	2	3	0			
6			8			4	1	1	3				1	2	4	0			
2	3		1	1		2	3	2	1				2	1	2	1			
2	4		2	0		1	2	3	2	1			1	1	0	2	1		
3	3		1	3		2	3	2	1	2			4	5	3	5	3		
5	2		1	2		3	1	2	1	3			1	3	0	4	2		
4	3		2	1		2	2	2	2	2			1	2	3	0	4		
4	3		1	1		2	1	1	3	3			4	5	3	1	3		
5	1		1	3		2	2	3	1	4	1		3	2	1	4	3	5	
5	2		0	1		2	2	1	1	1	3		4	0	3	2	1	1	
4	1		2	5		3	1	2	1	3	1		0	4	2	3	1	2	
4	2		4	2		3	2	4	3	1	5		1	0	0	3	4	3	
5	2		2	6		2	2	1	3	1	2	2	3	2	4	1	3	4	2
2	2	1	3	2	1	3	1	2	3	1	3	1	1	4	0	3	5	4	3
4	3	2	1	3	5	2	3	1	2	1	2	3	3	1	3	0	1	4	3

angegebenen Werthe von $a_1, a_2, a_3, \quad a_m$; $p_1, p_2, p_3, \quad p_m$ experimentell zu erledigen suchte, ging ich bei meinen Experimenten von einer eigenthümlichen Darstellungsweise der in

Betracht gezogenen Knotenverbindungen aus, die sich am einfachsten wieder auf Grundlage einer speciellen Knotenverbindung, z. B. jener von dem Typus:

$$T = [(+)_2\,(+)_0^2\,(+)_3\,(+)_0\,(+)_1\,(+)_0]$$

erörtern lässt. Da die Knoten nullter Art die gemeinschaftliche Basis sämmtlicher Knoten nicht umschlingen, wohl aber mit ihren Schlusstheilen gemäss der Definition des Gattungsbegriffes:[1] „Knotenverbindung der $(r-1)^{\text{ten}}$ Ordnung" sämmtliche Umschlingungen der vorangehenden Knoten durchsetzen müssen, entspricht dem erwähnten Typus ursprünglich die schematische Figur 1 (Taf. I). Es ist aber unmittelbar ersichtlich, dass die Schlusstheile der Knoten nullter Art von Fall zu Fall gegen die Bögen der ihnen vorangehenden Knoten in demselben Sinne verschoben werden können, wie dies speciell für die in Fig. 1 dargestellte Knotenverbindung durch die schematische Figur 2 versinnlicht ist. Dreht man hierauf die betreffende Knotenverbindung derart um 180°, dass ihre Basis hiebei dem Beobachter zugekehrt bleibt, und sucht das auf solche Weise umgewendete Gebilde ohne weitere Drehung abermals als eine Knotenverbindung in ihrer Normalstellung zu legen, so erhält man für die fünfzig, durch die obige Tabelle präcisirten Specialfälle Resultate,[2] welche sich ausnahmslos unter die symbolische Gleichung:

$$\text{(V)}$$

$$[(+)_{a_1}(+)_0^{p_1}(+)_{a_2}(+)_0^{p_2}(+)_{a_3}(+)_0^{p_3}\,.\;\;.(+)_{a_m}(+)_0^{p_m}] =$$
$$= [(+)_{p_m+1}(+)_0^{a_m-1}$$
$$(+)_{p_3+1}(+)_0^{a_3-1}(+)_{p_2+1}(+)_0^{a_2-1}(+)_{p_1+1}(+)_0^{a_1-1}]$$

subsumiren lassen. Auch hier verdient jene Reihe von Fällen eine besondere Besprechung, in welchen die in (V) linker Hand auftretenden Knotengruppen:

$$(+)_{a_1}(+)_0^{p_1},\;(+)_{a_2}(+)_0^{p_2},\qquad(+)_{a_m}(+)_0^{p_m}$$

---

[1] S. h. die früher citirte Abhandlung I. Thl. p. 913.

[2] Da die inductive Verallgemeinerung dieser Resultate in ganz analoger Weise wie jene der früher mitgetheilten experimentellen Ergebnisse erfolgt, scheint es überflüssig, die ersteren hier detaillirt anzuführen.

theilweise derart einander gleich sind, dass z. B. die ersten r_1-Knotengruppen den gemeinsamen Typus: $[(+)_{c_1}(+)_0^{q_1}]$, die nächsten r_2, auf jene r_1-Knotengruppen folgenden Knotengruppen den gemeinsamen Typus: $[(+)_{c_2}(+)_0^{q_2}]$, endlich die r_n-letzten Knotengruppen den gemeinsamen Typus: $[(+)_{c_n}(+)_0^{q_n}]$ besitzen.

An die Stelle von (V) tritt dann offenbar die allgemeinere Relation:

$$[\{(+)_{c_1}(+)_0^{q_1}\}^{r_1}\{(+)_{c_2}(+)_0^{q_2}\}^{r_2}\{(+)_{c_3}(+)_0^{q_3}\}^{r_3}.$$
$$\{(+)_{c_n}(+)_0^{q_n}\}^{r_n}] =$$
$$= [\{(+)_{q_n+1}(+)_0^{c_n-1}\}^{r_n}\ldots\ \{(+)_{q_3+1}(+)_0^{c_3-1}\}^{r_3}$$
$$\{(+)_{q_2+1}(+)_0^{c_2-1}\}^{r_2}\{(+)_{q_1+1}(+)_0^{c_1-1}\}^{r_1}],$$

oder in, der correspondirenden Umformung von (I) nachgebildeter Symbolik:

$$\text{(VI)}.\qquad [M_n] = [N_n],$$

welche Gleichung — unter $m_1, m_2, m_3, \ldots\ m_s;\ n_1, n_2, n_3, \ldots\ n_s$ wieder beliebige positive ganze Zahlen verstanden — die weiteren Beziehungen:

$$[M_{n_1}^{m_1}] = [N_{n_1}^{m_1}],\ \ [M_{n_2}^{m_2}] = [N_{n_2}^{m_2}],$$
$$[M_{n_3}^{m_3}] = [N_{n_3}^{m_3}], .\quad [M_{n_s}^{m_s}] = [N_{n_s}^{m_s}]$$

begründet, mithin kraft dem in (V) enthaltenen Gesetze in letzter Linie zu der symbolischen Formel:

$$\text{(VII)}.\qquad [M_{n_1}^{m_1} M_{n_2}^{m_2} M_{n_3}^{m_3}.\quad M_{n_s}^{m_s}] =$$
$$= [N_{n_s}^{m_s}\qquad N_{n_3}^{m_3} N_{n_2}^{m_2} N_{n_1}^{m_1}]$$

führt. Setzt man in (V): $a_1 = a_2 = a_3 = \qquad = a_m = 1$ und analog in (VI) und (VII): $c_1 = c_2 = c_3 \qquad = c_n = 1$, so erhält man direct die früher aufgestellten Typenrelationen (I), (II) und (III), so dass auf Grundlage unserer zweiten Gruppe von Experimenten nunmehr eine, der theoretischen Verallgemeinerung von (I) weit überlegene empirische Verallgemeinerung derselben Gleichung ermöglicht worden ist.

Ausserdem liefert eine geometrische Interpretation von (V) die gewünschte allgemeine Erledigung unserer früher aufgeworfenen Frage in folgender Fassung:

Jede Knotenverbindung, deren Typus die Gestalt:

$$[(+)_{a_1}(+)_0^{p_1}(+)_{a_2}(+)_0^{p_2}(+)_{a_3}(+)_0^{p_3}\,.\quad .\,(+)_{a_m}(+)_0^{p_m}]$$

besitzt, also: $p_1+p_2+p_3+\ldots+p_m=s_1$ verschwindende und m — von der Null verschiedene Windungszahlen: $a_1, a_2, a_3, \ldots a_m$ aufweist, ist einer Knotenverbindung mit ebenso vielen von der Null verschiedenen und $(a_1+a_2+a_3+\quad+a_m)-m = s_2-m$ verschwindenden Windungszahlen äquivalent.

Es kann demnach die vorgelegte Knotenverbindung für $m+s_1>s_2$ stets in eine solche von kleinerer Ordnungszahl transformirt werden, wobei die Anzahl der Knoten von $m+s_1$ auf s_2, also um den Betrag: $m+s_1-s_2$ sinkt.[1]

Ist dagegen für die gegebene Knotenverbindung $m+s_1$ kleiner als s_2, so repräsentirt dieselbe bereits die reducirte Form einer Knotenverbindung von höherer Ordnungszahl, welche ebenso viele Knoten erster oder höherer Art, aber eine um: s_2-s_1-m grössere Anzahl von Knoten nullter Art aufweist.[2]

Ist endlich für die in Betracht gezogene Knotenverbindung: $m+s_1 = s_2$, so liefert deren Transformation jedesmal eine Knotenverbindung von derselben Ordnungszahl, aber anderem Typus, jene Fälle ausgenommen, für welche zwischen $a_1, a_2, a_3, \quad a_m$ und $p_1, p_2, p_3, \quad p_m$ die Relationen:

$$a_1 = p_m+1,\ \ a_2 = p_{m-1}+1,\ \ a_3 = p_{m-2}+1$$

$$a_{m-2} = p_3+1,\ \ a_{m-1} = p_2+1,\ \ a_m = p_1+1$$

bestehen, indem die linke und rechte Seite von (V) bei Erfüllung

---

[1] Für $a_1=a_2=a_3=\ldots=a_m=1$ wird $s_2=m$, so dass diese Folgerung dann mit dem Erfahrungssatze (a) zusammenfällt.

[2] Dieser Schluss liefert für: $p_1=p_2=p_3=\ldots=p_m=0$; $a_1=a$, $a_2=b$, $a_3=c$, .. $a_{m-2}=u$, $a_{m-1}=v$, $a_m=w$ den in Gleichung (IV) formulirten Erfahrungssatz (b).

der genannten Bedingungen mit einander auch formal identisch werden.

Auf diese Art characterisirt das Schema:

$$[(+)_{a_1}(+)_0^{a_m-1}(+)_{a_2}(+)_0^{a_{m-1}-1}(+)_{a_3}(+)_0^{a_{m-2}-1}\ldots(+)_{a_m}(+)_0^{a_1-1}]$$

speciell jene Knotenverbindungen, welche durch keine wie immer gearteten Transformationen in solche von anderer Ordnungszahl oder von gleicher Ordnungszahl, aber anderem Typus umgeformt werden können und daher kurzweg als eintypige Verschlingungen bezeichnet werden mögen, während alle übrigen Knotenverbindungen insoferne mehrtypige Verschlingungen vorstellen, als sich jede derselben auch in eine Knotenverbindung von anderem Typus und grösserer oder gleicher oder kleinerer Ordnungszahl transformiren lässt.

Gemäss der hier gegebenen Definition einer eintypigen Verschlingung gibt es also speciell unter sämmtlichen positiven Knotenverbindungen nullter, erster und zweiter Ordnung nur sieben eintypige, nämlich jene von den Typen:

$$T=[(+)_1];\ [(+)_1^2],\ [(+)_2(+)_0];\ [(+)_1^3]\\ [(+)_1(+)_0(+)_2],\ [(+)_2(+)_1(+)_0],\ [(+)_3(+)_0^2],$$

hingegen, wie das nebenstehende empirische Schema:

(Ordnungszahl 3)

$$T=[(+)_1^4],\ [(+)_1(+)_0(+)_1(+)_2],\ [(+)_1(+)_2(+)_0(+)_1],\\ [(+)_2(+)_1^2(+)_0],\ [(+)_1(+)_0^2(+)_3],\ [(+)_3(+)_1(+)_0^2],\\ [\{(+)_2(+)_0\}^2],\ [(+)_4(+)_0^3],$$

(Ordnungszahl 4)

$$T=[(+)_1^5],\ [(+)_1(+)_0(+)_1^2(+)_2],\ [(+)_1^2(+)_0(+)_2(+)_1],\\ [(+)_1(+)_2(+)_1(+)_0(+)_1],\ [(+)_2(+)_1^3(+)_0],\\ [(+)_1(+)_0^2(+)_1(+)_3],\ [(+)_1(+)_3(+)_0^2(+)_1],\\ [(+)_3(+)_1^2(+)_0^2],\ [(+)_1(+)_0(+)_2(+)_0(+)_2],\\ [(+)_2(+)_0(+)_1(+)_2(+)_0],\ [(+)_2^2(+)_0(+)_1(+)_0],\\ [(+)_1(+)_0^3(+)_4],\ [(+)_4(+)_1(+)_0^3],\\ [(+)_2(+)_0^2(+)_3(+)_0],\ [(+)_3(+)_0(+)_2(+)_0^2),\ [(+)_5(+)_0^4]$$

ersichtlich macht, bereits acht eintypige positive Knotenverbindungen dritter, und sechzehn eben solche vierter Ordnung, an welche Thatsache sich mit Nothwendigkeit die Frage knüpft, wie gross allgemein die einer beliebigen anderen Ordnungszahl: s zugehörige Anzahl: S eintypiger positiver[1] Knotenverbindungen ausfällt?

Um hierüber Aufschluss zu gewinnen, berücksichtigen wir, dass die Summen $m+s_1$ und s_2 für die genannte Ordnungszahl den gemeinsamen Werth: $s+1$ erhalten, mithin S als Summe aller Zahlen: $z_0, z_1, z_2, \quad z_k, \quad z_s$ aufzufassen ist, welche angeben, wie viele eintypige positive Knotenverbindungen $s$ter Ordnung für

$$m = 1, 2, 3, \quad k, \quad s+1$$

bestehen. Da nun für die Summanden der diesen Specialisirungen von m entsprechenden Summen s_2, nämlich:

$$a_1, \; a_1+a_2, \; a_1+a_2+a_3,$$
$$a_1+a_2+\ldots+a_k, \quad a_1+a_2+ \quad + a_{s+1}$$

nur ganze positive Zahlen zulässig sind, und bei eintypigen Knotenverbindungen gemäss deren allgemeinem Typenschema jedem Werthsysteme der Grössen: $a_1, a_2, a_3, \;\ldots a_k$ ein einziges, durch die Relationen:

$$p_1 = a_k - 1, \; p_2 = a_{k-1} - 1, \quad p_k = a_1 - 1$$

präcisirtes Werthsystem der symbolischen Exponenten: $p_1, p_2, p_3,$ p_k zugehört, repräsentiren $z_0, z_1, z_2, \quad z_k, \quad z_s$ zugleich jene Zahlen, welche anzeigen, wie viele Lösungen in positiven ganzen Zahlen die Gleichungen:

$$a_1 = s+1, \; a_1+a_2 = s+1, \; a_1+a_2+a_3 = s+1$$
$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{k-1}+a_k = s+1$$
$$a_1+a_2+a_3+\ldots \quad +a_s+a_{s+1} = s+1$$

---

[1] Die Gesammtzahl aller, dieser Ordnungszahl zugehörigen eintypigen Knotenverbindungen ist dann $2S$, da keine einzige positive Knotenverbindung in das Spiegelbild ihrer Rückseite, d. i. in die ihr correspondirende negative Knotenverbindung derselben Ordnungszahl transformirbar ist.

besitzen. — Auf Grundlage dieser einfachen Schlüsse ergeben sich nunmehr unter Anwendung bekannter Sätze aus der Combinationslehre für z_0, z_1, z_2, z_k, z_s der Reihe nach die Werthe:

$$z_0 = 1,\ z_1 = \binom{s}{1},\ z_2 = \binom{s}{2},\quad s_k = \binom{s}{k}.$$

$$z_{s-1} = \binom{s}{s-1},\ z_s = 1,$$

deren Addition für die fragliche Anzahl: S das einfache Resultat:

$$S = 1 + \binom{s}{1} + \binom{s}{2} + \quad + \binom{s}{s-1} + \binom{s}{s} = 2^s$$

liefert. — Die Gesammtzahl aller positiver eintypiger Knotenverbindungen von der nullten bis inclusive s^{ten} Ordnung ist dann weiter gleich $2^{s+1}-1$.

Zum Schlusse der vorliegenden Arbeit sei es noch gestattet, deren Ergebnisse auf jene Verschlingungen anzuwenden, welche in biegsamen Ringen durch, längs deren Mittellinien in sich selbst zurücklaufende Schnitte herstellbar sind, wobei wir jedoch, da bekanntlich alle derartigen Verschlingungen schon durch Schnitte erster Art erzeugt werden können, lediglich die den letzteren zugeordneten Knotenverbindungen in Betracht zu ziehen haben.

Zur Ableitung unserer Folgerungen genügt hienach die Thatsache, dass — unter u die Umlaufszahl, unter t die Drehungszahl irgend eines Schnittes erster Art verstanden — allgemein für:

$$u = a,\ t = \pm(ak+\rho) \text{ resp. } u = ak+\rho,\ t = \pm a$$

eine und dieselbe negative beziehungsweise positive Knotenverbindung $(a-2)^{\text{ter}}$ Ordnung mit $(a-\rho)$ Knoten k^{ter} Art und $(\rho-1)$ Knoten $(k+1)^{\text{ter}}$ Art entsteht, und die ursprünglich in Form von Überkreuzungen auftretende Gesammtverdrehung des betreffenden Gebildes im ersten Falle: $\mp(a-1)\times 360°$ im zweiten: $\mp(ak+\rho-1)\times 360°$ beträgt. Es ist also hier:

$$m = a-1,\ s_1 = 0,\ s_2 = k(a-1)+(\rho-1)$$

mithin die Bedingung: $m+s_1 = s_2$ ausschliesslich für $k = \rho = 1$ erfüllbar, indem ρ der Natur der Sache nach höchstens gleich $a-1$ werden kann. Hieraus ergibt sich der merkwürdige Satz:

Fig. 1.

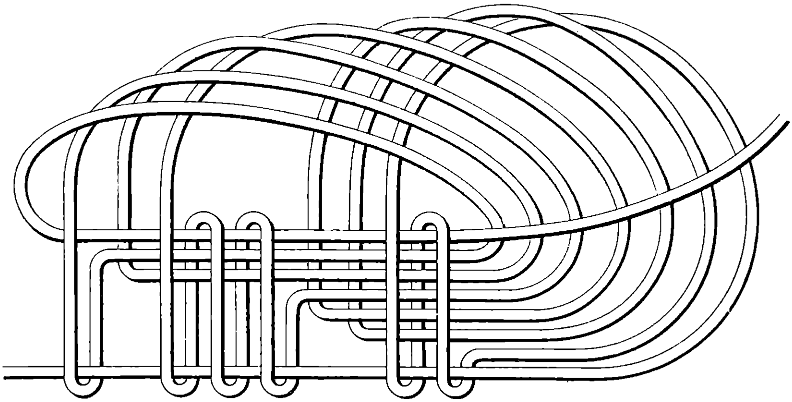
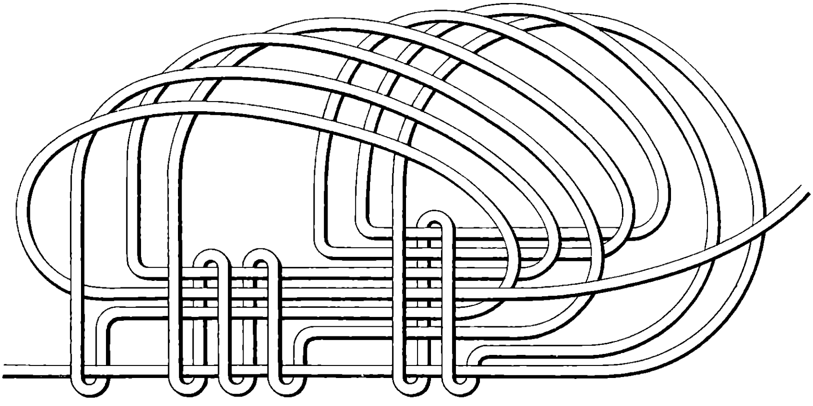


Fig. 2.



Autor del. F. Hesse lith. K.k. Hof- u. Staatsdruckerei

Unter allen in biegsamen Ringen erzeugbaren Knotenverbindungen sind nur jene eintypig, welche für

$$u = a,\ t = \pm(a+1) \text{ resp. } u = a+1,\ t = \pm a$$

entstehen und daher Specialisirungen der beiden Relationen: $T = [(+)_1^{a-1}]$, $T = [(-)_1^{a-1}]$ bilden.

Dagegen repräsentirt jede andere Knotenverbindung $(a-2)$ter Ordnung kraft dem Erfahrungssatze (𝔟) zugleich die reducirte Form einer anderen Knotenverbindung von der Ordnungszahl $k(a-1)+(\rho-2)$, welche aus: $(a-1)$ Knoten erster Art und aus: $\{(k-1)(a-1)+(\rho-1)\}$ Knoten nullter Art besteht, und würde somit die Herstellung der letzteren Knotenverbindung im Ganzen $\{(ak+\rho)-k-1\}$ Drehungen um je 360° in Form von Überkreuzungen beanspruchen, indem bekanntlich jede Knotenverbindung so viele Drehungen um je 360° in sich aufnimmt, als der Schlusstheil des letzten Knotens Knotenbögen überkreuzt.

Da nun in dem betreffenden Ringe für $u = ak+\rho$, $t = \pm a$ noch um k-Überkreuzungen mehr vorhanden sind, so ist die reductible Form der Knotenverbindung für diese Specialisirungen von u und t die ursprünglich sich darbietende, folglich auch der wichtige Erfahrungssatz, laut welchem der Typus einer Knotenverbindung durch eine Vertauschung der numerischen Werthe von u und t keine Änderung erfährt, in letzter Linie eine theoretisch ableitbare Consequenz des Erfahrungssatzes (𝔟).

Beitrag zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen mehrerer Veränderlichen.

Von Dr. **Otto Biermann.**

Herr Appell hat in dem 2. Bande der Zeitschrift von Mittag-Leffler zwei Sätze über eine besondere Classe eindeutiger Functionen zweier unabhängiger Veränderlichen aufgestellt, deren erster die Construction einer Function betrifft, welche im Endlichen nur die singulären Stellen einer vorgelegten unendlichen Reihe eindeutiger Functionen

$$f_1(xy), \quad f_2(xy), \ldots \quad f_\nu(xy) \ldots$$

besitzt, für die eine mit ν ins Unendliche wachsende Umgebung ρ_ν der Stelle $(x=0,\ y=0)$ existirt, wo f_ν regulären Verhaltens ist; der zweite Satz betrifft die Construction einer ganzen Function, deren Nullstellen mit denjenigen einer vorgelegten unendlichen Reihe ganzer Functionen $g_\nu(xy)$ übereinstimmen, für welche eine mit ν ins Unendliche wachsende Umgebung ρ_ν der Stellen (0,0) existirt, wo g_ν keine Nullstellen besitzt.

Die beiden Sätze lassen sich ohne Weiteres auf die gleichartigen Functionen von n Veränderlichen ausdehnen. Den Beweis für das erste Theorem will ich in der Art, wie sie von Herrn Weierstrass für Functionen einer Veränderlichen herrührt, wiederholen, den Beweis für das zweite Theorem aber stütze ich nicht auf das erste Theorem, sondern ich suche für den Fall ganzer rationaler Functionen g_ν wieder den Beweis von Herrn Weierstrass für die Darstellung einer ganzen Function in Form eines unbedingt convergenten Productes auszudehnen. Wenn dies gelingt, sieht man, dass eine Function, die sich im Endlichen wie eine rationale Function verhält und deren Null und Unendlichkeitsstellen mit den Nullstellen zweier unendlicher Reihen ganzer rationaler Functionen

$$g_\nu(x_1, x_2 \ldots x_n) \quad g'_\nu(x_1 x_2 \ldots x_n)$$

zusammenfallen, für die eine ins Unendliche wachsende Umgebung ρ_ν, respective ρ'_ν der Stelle $(0, 0, \ldots 0)$ existirt, wo g_ν, respective g'_ν nicht Null ist, durch den Quotienten zweier beständig convergenter Potenzreihen darstellbar ist. (Eine genauere Formulirung des Satzes folgt.)

Doch bevor ich auf diese Sätze eingehe, glaubte ich einige Begriffe aus der Theorie der Functionen mehrerer Veränderlichen vorausschicken zu sollen, welche noch nicht die genügende Verbreitung gefunden habe. Dieselben sind der Abhandlung von Herrn Weierstrass im 51. Bande des Journals von Crelle und der Abhandlung: „Einige auf die Theorie der analytischen Functionen mehrerer Veränderlichen sich beziehende Sätze“ entnommen.

§. 1.

Die n von einander unabhängigen, unbeschränkt veränderlichen Grössen seien

$$x_1\ x_2, \ldots x_n.$$

Ihr Bereich besteht aus einem einfach zusammenhängenden $2n$-fach ausgedehnten Continuum. Ein Werthsystem

$$x_1 = a_1,\ x_2 = a_2 \ldots . x_n = a_n$$

definirt die Stelle (a) des Bereiches, und die Umgebung ρ dieser Stelle ist durch die Gesammtheit der Werthsysteme bestimmt, für welche

$$|x_1 - a_1| < \rho, |x_2 - a_2| < \rho \ldots |x_n - a_n| < \rho.$$

Das oder die Elemente der monogenen analytischen Function der n Veränderlichen bilden Potenzreihen:

$$\mathfrak{P}(x_1 \ldots x_n | a_1 \ldots a_n) = \sum_{\nu_1, \nu_2 \ldots \nu_n = 0}^{\infty} A_{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_n} (x_1 - a_1)^{\nu_1} (x_2 - a_2)^{\nu_2} \ldots (x_n - a_n)^{\nu_n}.$$

Von einer eindeutigen Function sagt man, sie verhält sich an einer Stelle (a) regulär, wenn sie in einer gewissen Umgebung derselben durch eine solche Reihe dargestellt werden kann und darnach wieder heisst die Reihe ein reguläres Element der Function.

Wenn der absolute Betrag jedes Gliedes der Reihe für Werthe der Veränderlichen, für die etwa

$$|x_k - a_k| = \xi_k \quad (k = 1, 2 \ldots n)$$

sein mag, kleiner oder gleich ist einer angebbaren Grösse g, so ist die Reihe für Werthsysteme, für die:

$$|x_k - a_k| < \xi_k,$$

unbedingt und gleichmässig convergent.

Die gleichmässige Convergenz ist in gleicher Weise zu definiren, wie für Functionen einer Veränderlichen, also man sagt:

Eine Reihe:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(x_1 \ldots x_n)$$

convergirt in einem Bereich (A) gleichmässig, wenn nach Angabe einer beliebig kleinen Grösse ε ein $\nu = m - 1$ so bestimmt werden kann, dass der absolute Betrag jeder Summe

$$\sum_{\nu=\mu}^{\infty} f_\nu(x_1 \ldots x_n) \qquad (\mu \gtreqless m)$$

für jedes dem Bereich (A) angehörige Werthsystem kleiner ist als ε.

Nehmen wir also an, dass der absolute Betrag jedes Gliedes

$$|A_{\nu_1 \ldots \nu_n}(x_1 - a_1)^{\nu_1} \ldots (x_n - a_n)^{\nu_n}|$$

für

$$|x_1 - a_1| = \xi_1 \,. \qquad |x_n - a_n| = \xi_n$$

gleich oder kleiner sei als g, so gilt doch für Werthsysteme, welche der Bedingung genügen:

$$|x_k - a_\nu| = X_k < \xi_k \quad (k = 1, 2 \ldots n)$$

$$|A_{\nu_1 \ldots \nu_n}(x_1 - a_1)^{\nu_1} \cdot \quad \cdot (x_n - a_n)^{\nu_n}| < g \left(\frac{X_1}{\xi_1}\right)^{\nu_1} \left(\frac{X_2}{\xi_2}\right)^{\nu_2} \qquad \left(\frac{X_n}{\xi_n}\right)^{\nu_n}.$$

Zerlegt man die ursprüngliche Reihe in $S_1 + S_2$, wo

$$|S_2| < g \left(\frac{X_1}{\xi_1}\right)^{\nu_1} \cdots \left(\frac{X_n}{\xi_n}\right)^{\nu_n} \frac{1}{1 - \frac{X_1}{\xi_1}} \qquad \frac{1}{1 - \frac{X_n}{\xi_n}},$$

so ist ersichtlich, dass man $\nu_1, \nu_2 \ldots \nu_n$ derart wählen kann, dass der absolute Betrag von S_2 kleiner wird als eine vorgegebene Grösse ε.

Um die hinreichende Anzahl von Anfangsgliedern der Reihe zu finden, die uns zu einem Rest der verlangten Art führt, wählen wir die kleinste der Grössen ξ_ν — sie heisse ξ — dann convergirt die Reihe sicher für solche x, die den Bedingungen

$$|x_k - a_k| < \xi \quad (k = 1, 2 \ldots n),$$

unterliegen, und in der nun entstehenden Reihe

$$A_0 + A_1 \xi + A_2 \xi^2 + .$$

kann man ohne Weiteres die Anzahl der abzusondernden Glieder derart bestimmen, dass der Rest dem absoluten Betrage nach kleiner ist als ε.

Das Element einer eindeutigen Function $F(x_1, x_2 \cdot \quad \cdot x_n)$ kann man fortsetzen. Die Gesammtheit der Stellen, an denen sich $F(x_1 \ldots . x_n)$ regulär verhält, bildet ein einfach zusammenhängendes $2n$fach ausgedehntes Continuum im Bereich der Grössen (x), doch ist dieses nothwendig durch Stellen begrenzt, an denen sich die Function nicht regulär verhält. Ist (a') eine solche „singuläre Stelle", so kann es eine Reihe

$$\mathfrak{P}_1(x_1 \ldots x_n \,|\, a'_1 \ldots a'_n)$$

geben, die in (a') verschwindet und so beschaffen ist, dass das Product derselben in die Function in einer gewissen Umgebung von (a') regulären Verhaltens bleibt. Dann heisst (a') eine ausserwesentlich singuläre Stelle und zwar eine erster Art, wenn $F(x_1 \ldots x_n)$ für alle einer unendlich kleinen Umgebung von (a')

angehörigen Stellen unendlich gross ist, dagegen eine zweiter Art, wenn $F(x_1 \ldots x_n)$ daselbst unbestimmt ist.

Gibt es keine Reihe $\mathfrak{P}_1$, so heisst die Stelle (a') eine wesentlich singuläre.

Die Gesammtheit der nicht singulären und ausserwesentlich singulären Stellen bildet ein $2n$fach ausgedehntes Continuum, in dem sich $F(x_1 \ldots x_n)$ wie eine rationale Function verhält, und die Begrenzung bilden nunmehr die wesentlich singulären Stellen.[1]

§. 2.

Nachdem dies vorausgeschickt ist, wollen wir die Erweiterung des folgenden Satzes von Mittag-Leffler aufstellen.

Ist eine Reihe rationaler Functionen gegeben

$$f_1(x), f_2(x) \ldots f_\nu(x) \ldots$$

von denen $f_\nu(x)$ nur an einer Stelle a_ν unendlich gross wird und für $x = \infty$ verschwindet, und hat die Reihe der Unendlichkeitsstellen a_ν die in den Beziehungen:

$$|a_\nu| < |a_{\nu+1}|, \quad \lim_{\nu=\infty} |a_\nu| = \infty$$

ausgesprochenen Eigenschaften, so lässt sich eine eindeutige analytische Function in Form einer unendlichen Summe solcher rationaler Functionen $\Phi_\nu(x)$ bilden, dass jede einzelne Differenz

$$\Phi_\nu(x) - f_\nu(x)$$

eine ganze Function oder eine Constante ist. $F(x)$ wird an den Stellen a_ν derart unendlich, dass sich

$$F(x) - f_\nu(x)$$

[1] Siehe hierzu den Beweis von Herrn Hurwitz für das Weierstrass'sche Theorem, „dass jede Function, die überall den Charakter einer rationalen Function besitzt, nothwendig in rationaler Weise von ihren Argumenten abhängt“.

Journal für die reine und angewandte Mathematik. B. 95; H. 3.

in einer gewissen Umgebung von a_ν regulär verhält, und an der Stelle ∞ besitzt $F(x)$ eine wesentliche Singularität.

Die beabsichtigte Erweiterung dieses Satzes lautet folgendermassen:

Ist

$$f_1(x_1 \ldots x_n),\ f_2(x_1 \ldots x_n) \quad\ldots\quad f_\nu(x_1 \ldots x_n),$$

eine gegebene Reihe eindeutiger (analytischer) Functionen der Beschaffenheit, dass für jede Function f_ν — sobald ν nur eine angebbare Grenze μ überschritten hat — eine Umgebung ρ_ν der Stelle (o) existirt, wo dieselbe regulären Verhaltens ist, und wachsen diese Umgebungen mit ν ins Unendliche, so kann man eine eindeutige Function $F(x_1 x_2 \ldots x_n)$ bilden, welche im Endlichen nur die singulären Stellen der Functionen f_ν besitzt und sich in einer gewissen Umgebung einer solchen derart verhält, dass

$$F(x_1, x_2 \ldots x_n) - f_\nu(x_1, x_2 \ldots x_n)$$

daselbst in eine Potenzreihe mit bloss positiven Potenzen zu entwickeln ist, sofern die in Rede stehende Stelle nicht noch singuläre Stelle einer anderen Function $f_{\nu'}$ ist.

Hier ist die Art der eindeutigen Function nicht in gleicher Weise wie oben beschränkt, doch lässt ja der Mittag-Leffler'sche Satz im Gebiete der Functionen einer Veränderlichen die entsprechenden Erweiterungen zu.[1]

Der Beweis unseres Satzes wird, wie schon hervorgehoben, in derselben Weise bewerkstelligt, wie Herr Weierstrass den des Mittag-Leffler'schen Theorems erledigt hat.[2]

Wir fassen die ersten μ Functionen f_ν zusammen:

$$\sum_{\nu=1}^{\mu} f_\nu(x_1 \ldots x_n) = F_1(x_1, x_2 \ldots x_n);$$

für jede weitere $f_{\mu+\nu}(\nu = 1, 2, 3 \ldots)$ gilt, so lange die Veränderlichen auf die Umgebung ρ_ν der Stelle (0) beschränkt sind, eine convergente Entwicklung der Form:

---

[1] Siehe F. Casorati. Annali di Matematica pura ed applicata Serie II. T. X.

[2] Berliner Monatsberichte 5. Aug. 1880.

$$f_{\mu+\nu}(x_1\ldots x_n)=\sum_{\nu_1,\nu_2\ldots\nu_n=0}^{\infty} A^{(\mu+\nu)}_{\nu_1\ldots\nu_n} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2}\ldots x_n^{\nu_n},$$

und in dieser können wir eine positive ganze Zahl m_ν so angeben, dass für die Werthsysteme des genannten Bereiches der absolute Betrag

$$\left|\sum_{\nu_1=\,\ldots\nu_n=m_\nu}^{\infty} A^{(\mu+\nu)}_{\nu_1\ldots\nu_n} x_1^{\nu_1}\ldots x_n^{\nu_n}\right|$$

kleiner ist als eine beliebig kleine vorgegebene positive Grösse $\varepsilon_{\mu+\nu}$, d. h. die Reihe convergirt gleichmässig.

Bezeichnet man die Summe:

$$\sum_{\nu_1\ldots\nu_n=0}^{\infty} A^{(\mu+\nu)}_{\nu_1\ldots\nu_n} x_1^{\nu_1}\ldots x_n^{\nu_n} - \sum_{\nu_1\ldots\nu_n=m_\nu}^{\infty} A^{(\mu+\nu)}_{\nu_1\ldots\nu_n} x_1^{\nu_1}\ldots x_n^{\nu_n}$$

mit

$$\varphi_\nu(x_1\ldots x_n)$$

und setzt

$$f_{\mu+\nu}-\varphi_\nu=\Phi_\nu(x_1\ldots x_n),$$

so convergirt die Summe eindeutiger Functionen Φ_ν, welche die singulären Stellen der Functionen $f_{\mu+\nu}$ besitzen:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\Phi_\nu(x_1\ldots x_n)=F_2(x_1\ldots x_n)$$

zunächst an allen Stellen der Umgebung ρ_1 der Stelle (0) gleichmässig, wenn nur

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\varepsilon_{\mu+\nu}$$

convergirt, und so seien die Grössen ε gewählt. In dem genannten Bereich kann $F_2(x_1\ldots x_n)$ in Form einer Potenzreihe $\mathfrak{P}(x_1, x_2\ldots x_n)$ dargestellt werden und offenbar besitzt daselbst die Function

$$F_1(x_1\ldots x_n)+F_2(x_1\ldots x_n)=F(x_1\ldots x_n)$$

nur die singulären Stellen der ersten μ-Functionen f_ν so zwar, dass

$$F(x_1 \ldots x_n) - f_\nu(x_1 \ldots x_n)$$

an einer singulären Stelle von f_ν regulär ist, wenn dieselbe keiner zweiten dieser Functionen $f_{\nu'}$ angehört.

Ist (a) eine singuläre Stelle von $f_{\mu+\nu}$ allein, so setzen wir die die Function

$$F_2(x_1 \ldots x_n) - \Phi_\nu(x_1 \ldots x_n)$$

in der Umgebung ρ_1 der Stelle (0) darstellende Potenzreihe fort, gewinnen eine Entwicklung

$$\mathfrak{P}_1(x_1 \ldots x_n \,|\, a_1 \ldots a_n),$$

so dass wir haben

$$\begin{aligned} F_2(x_1 \ldots x_n) &= \Phi_\nu(x_1 \ldots x_n) + \mathfrak{P}_1(x_1 \ldots x_n \,|\, a_1 \ldots a_n) \\ &= f_{\mu+\nu}(x_1 \ldots x_n) + \mathfrak{P}_2(x_1 \ldots x_n \,|\, a_1 \ldots a_n) \end{aligned}$$

und nun ist klar, dass sich

$$F(x_1 \ldots x_n) - f_{\mu+\nu}(x_1 \ldots x_n)$$

in einer gewissen Umgebung von (a) regulär verhält.

$F(x_1 \ldots x_n)$ ist also in der That eine Function der verlangten Beschaffenheit und jede andere hat ihren Ausdruck in

$$F(x_1 \ldots x_n) \,.\, G(x_1 \ldots x_n),$$

wenn unter $G(x_1 \ldots x_n)$ eine ganze Function verstanden ist, das heisst eine solche, die sich an allen im Endlichen liegenden Stellen regulär verhält.

Die Bedeutung des M i t t a g - L e f f l e r'schen Theorems erhellt aus dem daraus folgenden Satze:

Wenn eine eindeutige Function $F(x)$ — mit der wesentlich singulären Stelle ∞ — im Endlichen nur die Unendlichkeitsstellen der rationalen Functionen

$$f_\nu(x) = \sum_{\mu=1}^{m_\nu} A_\mu^{(\nu)} \,.\, (x - a_\nu)^{-\mu} \quad (\nu = 1, 2, 3 \ldots)$$

besitzt, so dass $F(x)$ in einer gewissen Umgebung von a_ν durch

$$f_\nu(x) + \mathfrak{P}_\nu(x \,|\, a_\nu)$$

darstellbar ist, und ist

$$\lim_{\nu=\infty} |a_\nu| = \infty$$

so lässt sich $F(x)$ als Summe derartiger rationaler Functionen $F_\nu(x)$ darstellen, dass jede derselben im Endlichen nur eine Unendlichkeitsstelle a_ν hat.

Zum Beweis hat man aus den Functionen $f_\nu(x)$ in der angegebenen Weise die rationalen Functionen $\Phi_\nu(x)$ zu bilden. Dann ist

$$F(x) - \sum_\nu \Phi_\nu(x)$$

eine ganze Function $G(x)$, die wir in eine unendliche Summe ganzer rationaler Functionen $g_\nu(x)$ zerlegt denken. Bezeichnet man dann

$$\Phi_\nu(x) + g_\nu(x)$$

mit $F_\nu(x)$, so ist

$$F(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(x).$$

Die entsprechende Umkehrung unseres Satzes wollen wir nur für den Fall aussprechen, dass die eindeutigen Functionen $f_\nu(x_1, \ldots x_n)$ rationale Functionen sind, und schon für die erste f_1 eine Umgebung ρ_1 der Stelle (0) existirt, wo f_1 sich regulär verhält.

Wenn eine eindeutige Function $F(x_1 \ldots x_n)$ im Endlichen nur die singulären Stellen der rationalen Functionen

$$f_1(x_1 \ldots x_n), f_2(x_1 \ldots x_n) \ldots f_\nu(x_1 \ldots x_n) \ldots$$

besitzt und die Differenz

$$F(x_1 \ldots x\ ) - f_\nu(x_1 \ .\ \ . x_n)$$

in einer gewissen Umgebung der singulären Stellen von f_ν, die keiner weiteren Function f_ν angehören, in eine Potenzreihe zu entwickeln ist, zudem aber jeder Function f_ν eine Umgebung ρ_ν

der Stelle (0) zukommt, innerhalb deren sie keine singuläre Stelle hat und

$$\lim_{\nu=\infty} \rho_\nu = \infty$$

ist, so lässt sich eine Function $F_1(x_1 \ldots x_n)$ als Summe rationaler Functionen $\Phi_\nu(x_1 \ldots x_n)$ bilden, deren jede im Endlichen nur die singulären Stellen von f_ν besitzt.

Aber

$$F(x_1 \ldots x_n) - F_1(x_1 \ldots x_n)$$

weist dann im Endlichen keine anderen singulären Stellen mehr auf, als die mehreren f_ν angehörigen; und sicher ist dann $F(x_1 \ldots x_n)$ als Summe rationaler Functionen $F_\nu(x_1 \ldots x_n)$ darstellbar, die einzeln nur die singulären Stellen von f_ν haben.

§. 3.

Aus der Theorie der eindeutigen Functionen einer Veränderlichen ist folgender Satz bekannt:[1]

Ist eine unendliche Reihe derartiger ganzer rationaler Functionen $g_\nu(x)$ gegeben, dass für jede eine Umgebung ρ_ν der Stelle $x=0$ existirt, wo sie nicht Null ist, und wächst ρ_ν mit ν ins Unendliche, auf dass die Nullstellen der Functionen:

$$a_1, a_2, a_3 \ldots$$

so zu ordnen sind, wie es die Beziehungen:

$$|a_1| > 0, \quad |a_{\nu+1}| \geqq |a_\nu|, \quad \lim_{\nu=\infty} |a_\nu| = \infty$$

aussprechen, dann gibt es immer eine ganze Function, welche diese Reihe zur Reihe der Nullstellen hat.

Bedeuten $\gamma_\nu(x)$ für $x=0$ verschwindende ganze rationale Functionen, deren Summe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_\nu(x)$$

[1] R. Weierstrass: Abhandlungen der Berliner Akademie 1876.

gleichmässig, unbedingt und beständig convergirt, ist ferner

$$m_1, m_2, m_3 \ldots$$

eine Folge positiver ganzer Zahlen, die der Reihe der Nullstellen so zugeordnet ist, dass

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left| \frac{1}{a_\nu} \left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{m_\nu} \right|$$

bei jedem Werth von x convergirt, so ist

$$C . \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right) . e^{\sum\limits_{r=1}^{m_\nu} \frac{1}{r} \left(\frac{x}{a_\nu}\right)^r + \gamma_\nu(x)}$$

der allgemeine Ausdruck der genannten Function und zwar ist das Product zufolge der Wahl der Zahlen m_ν und Functionen $\gamma_\nu(x)$ unbedingt convergent und lässt sich in eine beständig convergente Potenzreihe entwickeln.

Da aber die Nullstellen einer ganzen Function — die für $x = 0$ nicht verschwindet — immer in eine Reihe genannter Beschaffenheit zu ordnen sind, ist jede ganze Function einer solchen Darstellung fähig. Ist $x = 0$ eine $n$fache Nullstelle, so tritt der Factor x^n zu dem Product.

Ist nun — in Übereinstimmung mit der oben eingeführten Vereinfachung — eine unendliche Reihe ganzer rationaler Functionen $g_\nu(x_1 \ldots x_n)$ gegeben, und existirt für jede Function γ_ν eine Umgebung ρ_ν der Stelle (0), wo g_ν nicht Null wird, ist zudem

$$\lim_{\nu=\infty} \rho_\nu = \infty,$$

so kann man eine ganze Function $G(x_1 \ldots x_n)$ angeben, welche an allen Nullstellen der Functionen g_ν derart verschwindet, dass der Quotient

$$\frac{G(x_1 \ldots x_n)}{g_\nu(x_1 \ldots x_n)^{k_\nu}}$$

— wo k_ν eine positive ganze Zahl bedeutet — an diesen Stellen endlich und von Null verschieden ist, ausgenommen an denjenigen, welche noch Nullstellen anderer ganzer Functionen g_ν sind, und zwar ist die Darstellung von $G(x_1 \ldots x_n)$

$$G(x_1 \ldots x_n) = \prod_{\nu=1}^{\infty} g_\nu(x_1 \ldots x_n)^{k_\nu} \cdot e^{\gamma_\nu(x_1 \ldots x_n)},$$

wo — wie Appell sagen würde — „$\gamma_\nu(x_1 \ldots x_n)$ ein passend bestimmtes Polynom bezeichnet“, d. h. eine solche ganze rationale Function, dass das Product unbedingt convergirt und sich in eine beständig convergente Potenzreihe entwickeln lässt.

Wir wollen den Beweis für dieses Theorem nicht dadurch erbringen, dass wir den Satz des vorigen Par. auf die Functionen

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \log g_\nu^{k_\nu}(x_1 \ldots x_n) = f_\nu(x_1 \ldots x_n)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \log G(x_1 \ldots x_n)$$

anwenden, sondern wollen gleich zum Zweck der Ermittlung der Functionen $\gamma_\nu(x_1 \ldots x_n)$ den Beweis von Weierstrass für den eben genannten Satz der ganzen Function einer Veränderlichen auf unseren Fall auszudehnen suchen.

Wir bezeichnen

$$g_\nu(0, 0 \ldots 0) = c_\nu,$$

Dann gilt in derjenigen Umgebung r_ν der Stelle (0), wo

$$|g_\nu - c_\nu| < |c_\nu|$$

$$\frac{1}{1 - \frac{g_\nu - c_\nu}{-c_\nu}} = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{g_\nu - c_\nu}{-c_\nu}\right)^r = \frac{d}{d\left(\frac{g_\nu - c_\nu}{-c_\nu}\right)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r+1} \left(\frac{g_\nu - c_\nu}{-c_\nu}\right)^{r+1}$$

und

$$1 - \frac{g_\nu - c_\nu}{-c_\nu} = e^{-\sum\limits_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r+1}\left(\frac{g_\nu - c_\nu}{-c_\nu}\right)^{r+1}}.$$

Offenbar werden die in Rede stehenden Umgebungen r_ν der Stelle (0) auch mit ν ins Unendliche wachsen.

Führt man darauf die im Endlichen nur an den Nullstellen der ganzen rationalen Functionen g_ν verschwindende ganze Function ein:

$$E_\nu(x_1, x_2 \ldots x_m;\, m_\nu) = \left(1 - \frac{g_\nu - c_\nu}{-c_\nu}\right) . e^{\sum\limits_{r=1}^{m_\nu} \frac{1}{r}\left(\frac{g_\nu - c_\nu}{-c_\nu}\right)^r}$$

— wo m_ν eine vorderhand willkürliche positive ganze Zahl bedeutet — so hat diese Function in dem durch die Bedingung

$$|\, g_\nu - c_\nu \,| < |\, c_\nu \,|$$

definirten Bereiche auch die Darstellung:

$$E_\nu(x_1 \ldots x_m;\, m_\nu) = e^{-\sum\limits_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r+m_\nu}\left(\frac{g_\nu - c_\nu}{-c_\nu}\right)^{r+m_\nu}};$$

andererseits aber lässt sie sich in Form einer beständig convergenten Potenzreihe darstellen.[1]

Wir bilden nun

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} E_\nu(x_1 \ldots x_n;\, m_\nu)$$

und fragen, ob man die mit den Zahlen m_ν noch willkürlichen Functionen E so wählen kann, dass das Product innerhalb der Umgebung r_n der Stelle (0) unbedingt convergirt.

Das Product der ersten n-Factoren trennen wir ab und dann hängt die Convergenz von der der Doppelsumme

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r+m_\nu} \left(\frac{g_\nu - c_\nu}{-c_\nu}\right)^{r+m_\nu}$$

ab. Da aber für die Werthsysteme (x) des besagten Bereiches

$$\sum_\nu \sum_r \frac{1}{r+m_\nu} \left|\frac{g_\nu - c_\nu}{c_\nu}\right|^{r+m_\nu} < \sum_\nu \sum_r \left|\frac{g_\nu - c_\nu}{c_\nu}\right|^{r+m_\nu}$$

$$= \sum_\nu \frac{1}{1 - \left|\frac{g_\nu - c_\nu}{c_\nu}\right|} \left|\frac{g_\nu - c_\nu}{c_\nu}\right|^{m_\nu + 1}$$

---

[1] $E_\nu\,(x_1 \ldots . x_m;\, 0)$ ist gleich $\left(1 - \frac{g_\nu - c_\nu}{-c_\nu}\right)$ zu setzen.

und die letzte Summe kleiner ist, als

$$\frac{1}{1-H}\sum_{\nu}\left|\frac{g_\nu-c_\nu}{c_\nu}\right|^{m_\nu+1},$$

wenn H den grössten der Werthe

$$h_\nu = \left|\frac{g_\nu-c_\nu}{c_\nu}\right|$$

bedeutet, so hängt die Convergenz von der der Summe:

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\left|\frac{g_\nu-c_\nu}{c_\nu}\right|^{m_\nu+1} \quad \text{oder} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty}\left|\frac{g_\nu-c_\nu}{c_\nu}\right|^{m_\nu+1}$$

ab, doch hier ist die Convergenz sicher dadurch zu erreichen, dass man

$$m_\nu = \nu-1$$

setzt, denn für $\nu > n$ ist innerhalb unseres Bereiches um die Stelle (0)

$$\left|\frac{g_\nu-c_\nu}{c_\nu}\right| < 1.$$

Bei dieser Wahl der positiven ganzen Zahlen m_ν convergirt somit das unendliche Product innerhalb der Umgebung r_n der Stelle (0) unbedingt. Entwickelt man die Doppelsumme oben in eine Potenzreihe

$$\mathfrak{P}(x_1, \ldots x_n; n+1)$$

so convergirt sie in demselben Bereiche.

Für die der Umgebung r_1 der Stelle (0) angehörigen Werthsysteme der (x) ist

$$\mathfrak{P}(x_1, \ldots x_n; 1) - \mathfrak{P}(x_1 \ldots x_n; n+1) = \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r+m_\nu}\left(\frac{g_\nu-c_\nu}{c_\nu}\right)^{r+m_\nu}$$

und auch

$$e^{-\mathfrak{P}(x_1\ldots x_n;\, 1)} = \prod_{\nu=1}^{n} E_\nu(x_1 \ldots x_n;\, \nu-1) . e^{-\mathfrak{P}(x_1\ldots x_n;\, n+1)}.$$

Entwickelt man beide Seiten in eine Potenzreihe, so besteht also für alle Werthsysteme der Umgebung r_1 der Stelle (0) eine Übereinstimmung zwischen den Werthen der beiden Reihen. Da nun die Reihe rechts in der Umgebung r_n der Stelle (0) convergirt, muss auch die Reihe links soweit eine Bedeutung haben, d. h. convergiren.

Nehmen wir nun n beliebig gross an, so ist ersichtlich, dass die Potenzreihe, in welche

$$e^{-\mathfrak{P}(x_1 \dots x_n;\ 1)}$$

zu entwickeln ist, für jedes endliche Werthsystem der (x) convergirt und somit eine ganze Function $G(x_1 \dots x_n)$ ist.

Beachten wir noch, dass bei der vorgenommenen oder entsprechender Wahl der Zahlen m_ν

$$\lim_{n=\infty} \mathfrak{P}(x_1 \dots x_n;\ n+1) = 0$$

ist, so erhält die ganze Function die Darstellung

$$G(x_1, \dots x_n) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{g_\nu}{c_\nu}\right) . e^{\sum_{r=1}^{m_\nu} \frac{1}{r} \left(\frac{g_\nu - c_\nu}{-c_\nu}\right)^r}.$$

Diese Function hat die verlangte Eigenschaft, an den Nullstellen der ganzen rationalen Functionen g_ν derart zu verschwinden, dass der Quotient

$$\frac{G(x_1 \dots x_n)}{g_\nu^{k_\nu}(x_1 \dots x_n)}$$

daselbst einen endlichen von Null verschiedenen Werth besitzt, — ausgenommen an denjenigen, welche noch anderen Functionen $g_{\nu'}$ angehören. Dann aber ist $\dfrac{G}{g_\nu^{k_\nu} . g_\nu^{k_{\nu'}}}$ an einer solchen Stelle endlich und von Null verschieden.[1]

Jede andere ganze Function derselben Eigenschaft ist in

$$G(x_1 \dots x\ ) . e^{\Gamma(x_1 \dots x_n)}$$

enthalten, wenn unter $\Gamma(x_1 \dots x_n)$ wieder eine ganze Function verstanden ist, denn der Quotient zweier ganzer Functionen mit

[1] Die positiven ganzen Zahlen $k_\nu, k_{\nu'}$ geben an, wie oft g_ν resp. $g_{\nu'}$ in unserer Reihe ganzer rationaler Functionen auftreten.

den Nullstellen derselben Reihe ganzer rationaler Functionen — denen dieselben ganzen Zahlen k_ν zugehören — hat im Endlichen stets einen endlichen von Null verschiedenen Werth.

Zerlegt man $\Gamma(x_1 \ldots x_n)$ in

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \Gamma_\nu(x_1 \ldots x_n)$$

wo $\Gamma_\nu(x_1 \ldots x_n)$ ganze rationale Functionen bezeichnen, deren Summe beständig gleichmässig convergirt, und setzt

$$\sum_{r=1}^{m_\nu} \frac{1}{r}\left(\frac{g_\nu - c_\nu}{-c_\nu}\right)^r + \Gamma_\nu(x_1 \ldots x_n) = \gamma_\nu(x_1 \ldots x_n),$$

so erhält die ganze Function die Darstellung:

$$G(x_1, \ldots x_n) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{g_\nu(x_1 \ldots x_n)}{g_\nu(0, \ldots 0)} \cdot e^{\gamma_\nu(x_1 \ldots x_n)}.$$

Jetzt können wir auch den Satz aussprechen:

Wenn die Nullstellen einer ganzen Function G mit denjenigen einer unendlichen Reihe ganzer rationaler Functionen $g_\nu(x_1 \ldots x_n)$ mit den früheren Eigenschaften übereinstimmen und zwar so, dass der Quotient

$$\frac{G(x_1 \ldots x_n)}{g_\nu^{k_\nu}(x_1 \ldots x_n)}$$

an einer Nullstelle (a) von g_ν einen endlichen von Null verschiedenen Werth hat, wenn die Stelle (a) nicht noch Nullstelle einer anderen Function $g_{\nu'}$ ist, in welchem Falle

$$\frac{G}{g_\nu^{k_\nu} \cdot g_{\nu'}^{k_{\nu'}}}$$

an der Stelle (a) endlich und von Null verschieden ist, dann lässt sich die ganze Function in obiger Weise darstellen.

Eine Function $F(x_1 \ldots x_n)$ aber, die im Endlichen vom Charakter der rationalen Function ist, die sich an den Nullstellen und deren reciproker Werth $\frac{1}{F}$ sich an den im Endlichen gelegenen ausserwesentlich singulären Stellen erster Art von F— welche je mit den Nullstellen einer unendlichen Reihe ganzer rationaler Functionen $g_\nu(x_1 \ldots x_n)$ resp. $\gamma_\nu(x_1 \ldots x_n)$ von den früheren Eigenschaften zusammenfallen — in eben beschriebener Weise verhält, eine Function, die ferner im Endlichen nur solche ausserwesentlich singuläre Stellen zweiter Art besitzt, wie sie in dem Quotienten rationaler Functionen g_ν und γ_ν vorkommen, so dass an gemeinsamen Nullstellen von g_ν und γ_ν der Quotient

$$\frac{F}{\dfrac{g_\nu^{k_\nu}}{\gamma_\nu^{\lambda_\nu}}}$$

wieder einen bestimmten Werth hat, ist durch den Quotienten zweier in obiger Art darstellbaren ganzen Functionen und darnach auch durch den Quotienten zweier beständig convergenter Potenzreihen auszudrücken.

Es ist bekanntlich eine noch unbeantwortete Frage, ob jede eindeutige Function von n Veränderlichen, die sich im Endlichen durchaus wie eine rationale Function verhält, immer durch den Quotienten zweier beständig convergenter Potenzreihen dargestellt werden kann. Hier begegnete uns eine Classe eindeutiger Functionen, für welche diese Frage zu entscheiden ist. Um aber diese Classe übersehen zu können, ist die Lösung der Frage nothwendig, wie die Nullstellen einer ganzen Function im Allgemeinen zu ordnen sind, und meiner Meinung nach steigt und fällt die Schwierigkeit der ersten Frage mit dieser.