Über das Legendre-Jacobi'sche Symbol.

Von dem c. M. Leopold **Gegenbauer.**

Ich werde in den folgenden Zeilen einige Sätze über das verallgemeinerte Legendre'sche Symbol ableiten und eine Regel zur Bestimmung dieses Zeichens angeben.

Sind m und n zwei positive ungerade, theilerfremde Zahlen, so besteht, wie ich unlängst gezeigt habe („Über das quadratische Reciprocitätsgesetz." Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften, mathematisch-naturwissenschaftliche Classe XC. Band, II. Abtheilung), folgende Relation:

1) $$\left(\frac{m}{2rm\pm n}\right)=(-1)^{\sum\limits_{x=1}^{x=rm+\frac{\pm n-1}{2}}\left[\frac{xm}{2rm\pm n}+\frac{1}{2}\right]-\sum\limits_{x=1}^{x=rm+\frac{\pm n-1}{2}}\left[\frac{xm}{2rm\pm n}\right]} \qquad (n\leqq 2m-1).$$

Der grösste Werth, welchen $\left[\frac{xm}{2rm\pm n}\right]$ im Exponenten von -1 annehmen kann, ist, wie man sofort ersieht:

$$\frac{m-1}{2}+\left[\frac{1}{2}-\frac{m}{2(2rm\pm n)}\right]$$

während die Werthe von $\left[\frac{xm}{2rm\pm n}+\frac{1}{2}\right]$ die ganze Zahl:

$$\frac{m-1}{2}+\left[1-\frac{m}{2(2rm\pm n)}\right]$$

nicht übersteigen.

Es soll zunächst, falls n mit dem positiven Vorzeichen versehen ist, $r>0$ oder $r=0$ und zugleich $n>m$ sein, ist aber n mit dem negativen Vorzeichen behaftet, so soll entweder $r>1$

oder $r=1$ und gleichzeitig $n<m$ sein. Alsdann sind die zwei eben angegebenen ganzen Zahlen gleich $\frac{m-1}{2}$.

Nun ist:

$$\left[\frac{xm}{2rm\pm n}\right]=\lambda$$

wenn x der Bedingung:

$$2(\lambda+1)r\pm\frac{(\lambda+1)n}{m}>x\geqq 2\lambda r\pm\frac{\lambda n}{m}$$

genügt, und daher ist die Anzahl derjenigen Glieder der zweiten Summe im Exponenten von -1, welche den Werth λ besitzen, für $\lambda<\frac{m-1}{2}$;

$$2r\pm\left[\frac{(\lambda+1)n}{m}\right]\mp\left[\frac{\lambda n}{m}\right]$$

da:

$$[-\alpha]=-1-[\alpha]$$

ist, während diese Anzahl für $\lambda=\frac{m-1}{2}$ den Werth:

$$r+\frac{\pm n+1}{2}\mp\left[\frac{n}{2}-\frac{n}{2m}\right]$$

erhält.

Es ist daher:

$$\sum_{x=1}^{x=rm+\frac{\pm n-1}{2}}\left[\frac{xm}{2rm\pm n}\right]\equiv\frac{m-1}{2}\left\{r+\frac{\pm n+1}{2}-\left[\frac{n}{2}-\frac{n}{2m}\right]\right\}+$$
$$+\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\frac{m-3}{2}}\lambda\left\{\left[\frac{(\lambda+1)n}{m}\right]-\left[\frac{\lambda n}{m}\right]\right\}\ (\mathrm{mod.}\ 2).$$

Nun ist aber:

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\frac{m-3}{2}}\lambda\left\{\left[\frac{(\lambda+1)n}{m}\right]-\left[\frac{\lambda n}{m}\right]\right\}=-\sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}}\left[\frac{xn}{m}\right]+\frac{m-1}{2}\left[\frac{n}{2}-\frac{n}{2m}\right]$$

und daher auch:

$$\sum_{x=1}^{x=rm+\frac{\pm n-1}{2}}\left[\frac{xm}{2rm\pm n}\right] \equiv -\sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}}\left[\frac{xn}{m}\right]+\frac{m-1}{2}\left\{r+\frac{\pm n+1}{2}\right\} \pmod{2}.$$

Es ist ferner:

$$\left[\frac{xm}{2rm\pm n}+\frac{1}{2}\right]=\lambda$$

wenn x der Bedingung:

$$(2\lambda+1)r\pm\frac{(2\lambda+1)n}{2m}>x\geqq(2\lambda-1)r\pm\frac{(2\lambda-1)n}{2m}$$

genügt, und daher ist die Anzahl derjenigen Glieder der ersten Summe im Exponenten von -1, welche gleich λ sind:

$$2r\pm\left[\frac{\lambda n}{m}+\frac{n}{2m}\right]\mp\left[\frac{\lambda n}{m}-\frac{n}{2m}\right]$$

für $\lambda<\frac{m-1}{2}$, während sie für $\lambda=\frac{m-1}{2}$:

$$2r+\frac{\pm n+1}{2}-\left[\frac{n}{2}-\frac{n}{m}\right]$$

beträgt.

Es ist also:

$$\sum_{x=1}^{x=rm+\frac{\pm n-1}{2}}\left[\frac{xm}{2rm\pm n}+\frac{1}{2}\right]\equiv\frac{m-1}{2}\left\{\frac{\pm n+1}{2}-\left[\frac{n}{2}-\frac{n}{m}\right]\right\}+$$

$$+\sum_{x=1}^{x=\frac{m-3}{2}}x\left\{\left[\frac{xn}{m}+\frac{n}{2m}\right]-\left[\frac{xn}{m}-\frac{n}{2m}\right]\right\} \pmod{2}.$$

Nun hat man:

$$\sum_{x=1}^{x=\frac{m-3}{2}}x\left\{\left[\frac{xn}{m}+\frac{n}{2m}\right]-\left[\frac{xn}{m}-\frac{n}{2m}\right]\right\}=$$

$$=-\sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}}\left[\frac{xn}{m}-\frac{n}{2m}\right]+\frac{m-1}{2}\left[\frac{n}{2}-\frac{n}{m}\right]$$

und daher:

$$\sum_{x=1}^{x=rm+\frac{\pm n-1}{2}}\left[\frac{xm}{2rm\pm n}+\frac{1}{2}\right]\equiv-\sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}}\left[\frac{xn}{m}-\frac{n}{2m}\right]+\frac{m-1}{2}.\frac{\pm n+1}{2} (\text{mod.} 2)$$

Man hat demnach unter den gemachten Voraussetzungen:

$$2)\qquad \left(\frac{m}{2rm\pm n}\right)=(-1)^{\frac{m-1}{2}r-\sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}}\left[\frac{xn}{m}\right]+\sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}}\left[\frac{xn}{m}-\frac{n}{2m}\right]}.$$

Es lässt sich leicht zeigen, dass diese Gleichung auch dann noch bestehen bleibt, wenn die über die Grösse von r und n gemachten beschränkenden Annahmen fallen gelassen werden.

Wenn man sich des quadratischen Reciprocitätsgesetzes bedienen will, so kann man die Gleichung 2) kürzer in folgender Weise ableiten. Nach dem quadratischen Reciprocitätsgesetze ist:

$$\left(\frac{m}{2rm\pm n}\right)=(-1)^{\frac{m-1}{2}\left\{r+\frac{\pm n-1}{2}\right\}}\left(\frac{2rm\pm n}{m}\right)$$

oder, weil:

$$\left(\frac{sm\pm n}{m}\right)=\left(\frac{\pm n}{m}\right)$$

ist:

$$\left(\frac{m}{2rm\pm n}\right)=(-1)^{\frac{m-1}{2}\left\{r+\frac{\pm n-1}{2}\right\}}\left(\frac{\pm n}{m}\right)$$

welche Gleichung sich mit Hilfe der Formel:

$$\left(\frac{-n}{m}\right)=(-1)^{\frac{m-1}{2}}\left(\frac{n}{m}\right)$$

in die folgende verwandeln lässt:

$$\left(\frac{m}{2rm\pm n}\right)=(-1)^{\frac{m-1}{2}\left\{r+\frac{n-1}{2}\right\}}\left(\frac{n}{m}\right).$$

Es besteht aber, wie ich a. a. O. gezeigt habe, die Relation:

$$\left(\frac{n}{m}\right)=(-1)^{\frac{(n+1)(m-1)}{4}+\varepsilon}$$

wo s die Anzahl derjenigen Zahlen λ der Reihe $1, 2, 3, \ldots, \frac{m-1}{2}$ bezeichnet, für welche der in $\frac{\lambda n}{m}$ enthaltene Bruchrest grösser als $\frac{n-1}{2m}$ wird.

Man hat daher:

$$\left(\frac{m}{2rm \pm n}\right) = (-1)^{\frac{m-1}{2}(r+1)+s}$$

oder, wenn σ die Anzahl derjenigen Zahlen λ bezeichnet, für welche der betreffende Bruchrest nicht grösser als $\frac{n-1}{2m}$ wird:

$$3) \qquad \left(\frac{m}{2rm \pm n}\right) = (-1)^{\frac{m-1}{2}r+\sigma}$$

wo, wie ich gezeigt habe:

$$4) \qquad \sigma = \sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}} \left[\frac{xn}{m}\right] - \sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}} \left[\frac{xn}{m} - \frac{n}{2m}\right]$$

ist.

Die Formel 3) wurde auf anderem Wege für den Fall, dass $2rm+n$ eine Primzahl ist und n das positive Vorzeichen besitzt, von Herrn V. Buniakowsky abgeleitet („Sur un théorème relatif à la théorie des résidus et de son application à la démonstration de la loi de réciprocité de deux nombres premiers." Par V. Bouniakowsky. Bulletin de l'académie impériale des sciences de St. Pétersbourg. Tome quatorzième, p. 432—447). Die hier gegebene Ableitung lässt deutlich erkennen, dass der Buniakowsky'sche Beweis des Reciprocitätsgesetzes in die Kategorie der sich auf das Gauss'sche Lemma stützenden Beweise dieses Theorems gehört.

Für die Grösse σ hat Herr V. Buniakowsky etwas später die Gleichung:

$$\sigma = -\sum_{x=1}^{x=\frac{n-m}{2}} \left[\frac{(x-1)m-1}{n-m}\right] + \sum_{x=1}^{x=\frac{n-m}{2}} \frac{(x-1)m+\frac{n-1}{2}}{n-m} \qquad (n>m)$$

abgeleitet („Sur le symbole de Legendre $\left(\frac{a}{p}\right)$." Par V. Bouniakowsky. Bulletin de l'académie impériale des sciences de St. Pétersbourg. Tome quatorzième, p. 497—512).

Da m und n ungerade Zahlen sind, so hat man entweder:

$$n = m + 2\varkappa$$

oder:

$$n = m - 2\varkappa$$

welchen Werthen von n die Gleichungen:

$$\left(\frac{m}{2rm+m+2\varkappa}\right) = (-1)^{\frac{m-1}{2}r+\sigma_1}$$

$$\left(\frac{m}{2rm+m-2\varkappa}\right) = \left(\frac{m}{2(r+1)m-m-2\varkappa}\right) = (-1)^{\frac{m-1}{2}(r+1)+\sigma_1}$$

entsprechen, wo:

$$\sigma_1 = -\sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}}\left[\frac{(m+2\varkappa)x}{m}\right] + \sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}}\left[\frac{(m+2\varkappa)x}{m} - \frac{1}{2} - \frac{\varkappa}{m}\right]$$

$$= -\sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}}\left[\frac{2\varkappa x}{m}\right] + \sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}}\left[\frac{2\varkappa x}{m} - \frac{1}{2} - \frac{\varkappa}{m}\right]$$

ist.

Es soll zunächst σ_1 für einige specielle Werthe von $\varkappa$ ermittelt werden.

Ist $\varkappa = 1$, so wird:

$$\sigma_1 = -\sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}}\left[\frac{2x}{m}\right] + \sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}}\left[\frac{2x}{m} + \frac{1}{2} - \frac{1}{m}\right] - \frac{m-1}{2}.$$

Beachtet man, dass $\frac{2x}{m}$ für alle angegebenen Werthe von x kleiner als 1 ist, $\frac{2x}{m} + \frac{1}{2} - \frac{1}{m}$ aber so lange, als x kleiner als $\left[\frac{m}{4} + \frac{1}{2}\right] + 1$ ist, so erhält man:

$$\sigma_1 = -\left[\frac{m}{4} + \frac{1}{2}\right].$$

Es ist ferner:

$$\left[\frac{m}{4}+\frac{1}{2}\right]=\left[\frac{m+1}{4}\right]=\left[\frac{m-1}{4}\right]+\varepsilon$$

$$\frac{m-1}{2}=2\left[\frac{m-1}{4}\right]+\varepsilon$$

wo $\varepsilon=0$ ist für $m\equiv 1 \pmod{4}$ und für $m\equiv -1 \pmod{4}$ den Werth 1 erhält.

Man hat daher die bekannte Relation:

$$\begin{aligned}\frac{m-1}{2}&=\left[\frac{m-1}{4}\right]+\left[\frac{m+1}{4}\right]\\&=\left[\frac{m-1}{4}\right]+\left[\frac{m}{4}+\frac{1}{2}\right]\end{aligned}$$

und demnach ist:

5) $$\left(\frac{m}{2rm+m+2}\right)=(-1)^{\frac{m-1}{2}r+\left[\frac{m+1}{4}\right]}$$

$$\left(\frac{m}{2rm+m-2}\right)=(-1)^{\frac{m-1}{2}r+\left[\frac{m-1}{4}\right]}$$

Diese zwei Formeln hat schon Herr V. Buniakowsky in der zuletzt erwähnten Arbeit angegeben.

Ist ferner $\varkappa=3$, so wird:

$$\sigma_1=-\sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}}\left[\frac{6x}{m}\right]+\sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}}\left[\frac{6x}{m}+\frac{1}{2}-\frac{3}{m}\right]-\frac{m-1}{2}.$$

Da $\left[\frac{6x}{m}\right]$ einen der Werthe 1 oder 2 erhält, je nachdem:

$$\frac{m}{3}>x\geqq\frac{m}{6}$$

oder:

$$x\geqq\frac{m}{3}$$

ist, da ferner

$\left[\frac{6x}{m}+\frac{1}{2}-\frac{3}{m}\right]$ gleich 1, 2, oder 3 wird, wenn x bez. der Bedingung:

$$\frac{m}{4}+\frac{1}{2}>x\geqq\frac{m}{12}+\frac{1}{2},$$
$$\frac{5m}{12}+\frac{1}{2}>x\geqq\frac{m}{4}+\frac{1}{2}$$
$$x\geqq\frac{5m}{12}+\frac{1}{2}$$

genügt, so hat man, falls die ganze Zahl m grösser als 11 ist:

$$\sigma_1=\left[\frac{m}{3}\right]+\left[\frac{m}{6}\right]-\left[\frac{m}{12}+\frac{1}{2}\right]-\left[\frac{m}{4}+\frac{1}{2}\right]-\left[\frac{5m}{12}+\frac{1}{2}\right]$$

und

$$\sigma_1=-2\qquad(m=\ \ 5)$$
$$\sigma_1=-3\qquad(m=\ \ 7)$$
$$\sigma_1=-5\qquad(m=11)$$

Da m und n zwei theilerfremde Zahlen sind, so kann m nur eine der Formen $12t+1$, $12t+5$, $12t+7$, $12t+11$ haben, und es ist demnach, wie man sofort sieht:

$$\left[\frac{m}{3}\right]-\left[\frac{m}{4}+\frac{1}{2}\right]=t$$
$$\left[\frac{5m}{12}+\frac{1}{2}\right]-\left[\frac{m}{6}\right]\equiv t\ (\mathrm{mod.}\ 2)$$

und daher:

$$\sigma_1\equiv\left[\frac{m}{12}+\frac{1}{2}\right]\ (\mathrm{mod.}\ 2)$$

welche Congruenz auch für $m=5, 7, 11$ bestehen bleibt.

Man hat daher die Gleichungen:

$$6)\qquad \left[\frac{m}{2rm+m+6}\right]=(-1)^{\frac{m-1}{2}r+\left[\frac{m}{12}+\frac{1}{2}\right]}$$
$$\left[\frac{m}{2rm+m-6}\right]=(-1)^{\frac{m-1}{2}(r-1)+\left[\frac{m}{12}+\frac{1}{2}\right]}.$$

Ist ferner $\varkappa=\frac{m-3}{2}$, so wird:

$$\sigma_1=-\sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}}\left[\frac{(m-3)x}{m}\right]+\sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}}\left[\frac{(m-3)x}{m}-1+\frac{3}{2m}\right]$$

$$=\sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}}\left[\frac{3x}{m}\right]-\sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}}\left[\frac{3x}{m}+1-\frac{3}{2m}\right]$$

oder, wenn man in der zweiten Summe für x: $\frac{m+1}{2}-x_1$ schreibt:

$$\sigma_1\equiv\sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}}\left[\frac{3x}{m}\right]+\sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}}\left[\frac{3x}{m}+\frac{1}{2}\right]\pmod{2}$$

Berücksichtigt man, dass $\frac{3x}{m}+\frac{1}{2}\geqq 1$ ist, wenn $x\geqq\frac{m}{6}$ wird, während $\frac{3x}{m}\geqq 1$ wird, für alle der Bedingung $x\geqq\frac{m}{3}$ genügenden Werthe von x so erhält man:

$$\sigma_1\equiv\left[\frac{m}{3}\right]-\left[\frac{m}{6}\right]\pmod{2}.$$

oder, weil:

$$\left[\frac{m}{3}\right]=2\left[\frac{m}{6}\right]+\varepsilon$$

$$\left[\frac{m}{6}+\frac{1}{2}\right]=\left[\frac{m}{6}\right]+\varepsilon$$

ist, wo ε den Werth 0 oder 1 hat, je nachdem m von der Form $6t+1$ oder $6t-1$ ist:

$$\sigma_1\equiv\left[\frac{m}{6}+\frac{1}{2}\right]\pmod{2}.$$

Man hat demnach die Gleichungen:

$$\left(\frac{m}{2rm-3}\right)=(-1)^{\frac{m-1}{2}(r-1)+\left[\frac{m}{6}+\frac{1}{2}\right]}$$

7) $$\left(\frac{m}{2rm+3}\right)=(-1)^{\frac{m-1}{2}(r-1)+\left[\frac{m}{6}+\frac{1}{2}\right]}$$

Ist endlich $\varkappa=\frac{m-5}{2}$, so wird:

$$\sigma_1 = -\sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}} \left[\frac{(m-5)x}{m}\right] + \sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}} \left[\frac{(m-5)x}{m} - 1 + \frac{5}{2m}\right]$$

$$= \sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}} \left[\frac{5x}{m}\right] - \sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}} \left[\frac{5x}{m} - \frac{5}{2m}\right] - \frac{m-1}{2}.$$

Nun ist $\left[\frac{5x}{m}\right]$ gleich 1 oder 2, je nachdem

$$\frac{2m}{5} > x \geqq \frac{m}{5}$$

oder

$$x \geqq \frac{2m}{5}$$

ist, während $\left[\frac{5x}{m} - \frac{5}{2m}\right]$ den Werth 1 oder 2 erhält, je nachdem

$$\frac{2m}{5} + \frac{1}{2} > x \geqq \frac{m}{5} + \frac{1}{2}$$

oder

$$x \geqq \frac{2m}{5} + \frac{1}{2}$$

ist.

Man hat daher:

$$\sigma_1 = \left[\frac{m}{5}\right] + \left[\frac{2m}{5}\right] - \left[\frac{m}{5} + \frac{1}{2}\right] - \left[\frac{2m}{5} + \frac{1}{2}\right] - \frac{m-1}{2} \quad (m > 9)$$

oder da:

$$\left[\frac{m}{5}\right] + \left[\frac{2m}{5}\right] \equiv \left[\frac{2m}{5} + \frac{1}{2}\right] \quad (\mathrm{mod.}\ 2)$$

wird, wenn m nicht durch 5 theilbar ist:

$$\sigma_1 \equiv \left[\frac{m}{5} + \frac{1}{2}\right] - \frac{m-1}{2} \ (\mathrm{mod.}\ 2) \quad (m > 9).$$

Diese Congruenz bleibt aber auch für $m = 3, 7$ bestehen, da:

$$\sigma_1 = 2 \qquad (m = 3)$$

$$\sigma_1 = -2 \qquad (m = 5)$$

ist.

Man hat daher die Formeln:

$$\left(\frac{m}{2rm-5}\right) = (-1)^{\frac{m-1}{2}(r-1)+\left[\frac{m}{5}+\frac{1}{2}\right]}$$

8) $$\left(\frac{m}{2rm+5}\right) = (-1)^{\frac{m-1}{2}(r-1)+\left[\frac{m}{5}+\frac{1}{2}\right]}.$$

Setzt man in den Gleichungen 5), 6), 7) und 8) $r = 1$ und wendet das quadratische Reciprocitätsgesetz an, so erhält man die interessanten von Herrn V. Buniakowsky in anderer Weise abgeleiteten Formeln: („Sur les congruences binômes exponentielles à base 3 et sur plusieurs nouveaux théorèmes relatifs aux résidus et aux racines primitives." Par V. Bouniakowsky. Bulletin de l'académie impériale des sciences de St. Pétersbourg. Tome quatorzième, p. 356—381.)

$$\left(\frac{2}{m}\right) = (-1)^{\left[\frac{m}{4}+\frac{1}{2}\right]}$$

$$\left(\frac{3}{m}\right) = (-1)^{\left[\frac{m}{6}+\frac{1}{2}\right]}$$

$$\left(\frac{6}{m}\right) = (-1)^{\left[\frac{m}{12}+\frac{1}{2}\right]}$$

$$\left(\frac{5}{m}\right) = (-1)^{\left[\frac{m}{5}+\frac{1}{2}\right]}$$

Zu obigen Formeln mag noch die folgende etwas weniger einfache hinzugefügt werden:

$$\left(\frac{7}{m}\right) = (-1)^{\left[\frac{m}{14}+\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{m}{7}+\frac{1}{2}\right]}$$

Ist:

9) $$m = 4\rho\varkappa+2\tau-1 \quad (2\tau-1<2\varkappa)$$

so hat man:

$$\sigma_1 = -\sum_{x=1}^{x=2\rho\varkappa+\tau-1}\left[\frac{2\varkappa x}{4\rho\varkappa+2\tau-1}\right] + \sum_{x=1}^{x=2\rho\varkappa+\tau-1}\left[\frac{2\varkappa x}{4\rho\varkappa+2\tau-1}-\frac{1}{2}-\frac{\varkappa}{4\rho\varkappa+2\tau-1}\right]$$

oder, wenn in der zweiten Summe für x $2\rho\varkappa+\tau-x_1$ gesetzt wird:

$$\sigma_1 = -\sum_{x=1}^{x=2\rho\varkappa+\tau-1}\left[\frac{2\varkappa x}{4\rho\varkappa+2\tau-1}\right] + \sum_{x=1}^{x=2\rho\varkappa+\tau-1}\left[\frac{2\varkappa x}{4\rho\varkappa+2\tau-1}+\frac{1}{2}\right] + \\ +(\varkappa-1)(2\rho\varkappa+\tau-1).$$

Nun wird:

$$\left[\frac{2\varkappa x}{4\rho\varkappa+2\tau-1}\right] = \lambda$$

wenn x der Bedingung:

$$2\rho(\lambda+1) + \frac{(\lambda+1)(2\tau-1)}{2\varkappa} > x \geqq 2\rho\lambda + \frac{\lambda(2\tau-1)}{2\varkappa}$$

genügt, also für:

$$x = 2\rho\lambda + \left[\frac{\lambda\tau}{\varkappa} - \frac{\lambda}{2\varkappa}\right] + 1,\ 2\rho\lambda + \left[\frac{\lambda\tau}{\varkappa} - \frac{\lambda}{2\varkappa}\right] + 2,\ \ldots,\ 2\rho(\lambda+1) + \\ + \left[\frac{(\lambda+1)\tau}{\varkappa} - \frac{\lambda+1}{2\varkappa}\right],$$

so dass die Anzahl derjenigen Glieder der ersten Summe auf der rechten Seite der letzten Gleichung, welche den Werth λ haben, gleich ist:

$$2\rho + \left[\frac{(\lambda+1)\tau}{\varkappa} - \frac{\lambda+1}{2\varkappa}\right] - \left[\frac{\lambda\tau}{\varkappa} - \frac{\lambda}{2\varkappa}\right]$$

für:

$$\lambda = 1, 2, 3, \quad ., \left[\frac{2\varkappa(2\rho\varkappa+\tau-1)}{4\rho\varkappa+2\tau-1}\right] = \varkappa-1.$$

Da die Grössen $\frac{(\lambda+1)\tau}{\varkappa} - \frac{\lambda+1}{2\varkappa}$ und $\frac{\lambda\tau}{\varkappa} - \frac{\lambda}{2\varkappa}$ sich um weniger als eine Einheit unterscheiden, so kann diese Anzahl nur die Werthe 2ρ oder $2\rho+1$ haben.

Es ist ferner:

$$\left[\frac{2\varkappa x}{4\rho\varkappa+2\tau-1} + \frac{1}{2}\right] = \lambda$$

wenn x der Bedingung:

$$(2\lambda+1)\rho + \frac{(2\lambda+1)(2\tau-1)}{4\varkappa} > x \geqq (2\lambda-1)\rho + \frac{(2\lambda-1)(2\tau-1)}{4\varkappa}$$

genügt, also für:

$$x = (2\lambda-1)\rho+1+\left[\frac{(2\lambda-1)(2\tau-1)}{4\varkappa}\right], \quad (2\lambda-1)\rho+$$
$$+\left[\frac{(2\lambda-1)(2\tau-1)}{4\varkappa}\right]+2, \quad \ldots, (2\lambda+1)\rho+\left[\frac{(2\lambda+1)(2\tau-1)}{4\varkappa}\right].$$

Es beträgt daher die Anzahl derjenigen Glieder der zweiten Summe in der für σ_1 aufgestellten Gleichung, welche den Werth λ haben:

$$2\rho+\left[\frac{(2\lambda+1)\tau}{2\varkappa}-\frac{2\lambda+1}{4\varkappa}\right]-\left[\frac{(2\lambda-1)\tau}{2\varkappa}-\frac{2\lambda-1}{4\varkappa}\right]$$

d. i. 2ρ oder $2\rho+1$ für $\lambda=1, 2, 3, \ldots, \varkappa-1$, während der grösste Werth von λ:

$$\left[\frac{2\varkappa(2\rho\varkappa+\tau-1)}{4\rho\varkappa+2\tau-1}+\frac{1}{2}\right]=\varkappa$$

für:

$$x=(2\varkappa-1)\rho+\left[\frac{(2\varkappa-1)(2\tau-1)}{4\varkappa}\right]+1, \; (2\varkappa-1)\rho+$$
$$+\left[\frac{(2\varkappa-1)(2\tau-1)}{4\varkappa}\right]+2, \; \ldots, \; 2\rho\varkappa+\tau-1$$

also für ρ Werthe von x angenommen wird.

Setzt man:

$$\frac{\lambda\tau}{\varkappa}-\frac{\lambda}{2\varkappa}=\left[\frac{\lambda\tau}{\varkappa}-\frac{\lambda}{2\varkappa}\right]+\frac{\omega}{2\varkappa} \quad (\omega<2\varkappa)$$

so ist:

$$\left[\frac{(\lambda+1)\tau}{\varkappa}-\frac{\lambda+1}{2\varkappa}\right]=\left[\frac{\lambda\tau}{\varkappa}-\frac{\lambda}{2\varkappa}\right]+\left[\frac{\omega-1}{2\varkappa}+\frac{\tau}{\varkappa}\right]$$

und es wird demnach:

$$\left[\frac{(\lambda+1)\tau}{\varkappa}-\frac{\lambda+1}{2\varkappa}\right]=\left[\frac{\lambda\tau}{\varkappa}-\frac{\lambda}{2\varkappa}\right]+1$$

wenn:

10) $$\omega \geqq 2\varkappa-2\tau+1$$

ist.

Es ist ferner:

$$\left[\frac{(2\lambda-1)\tau}{2\varkappa}-\frac{2\lambda-1}{4\varkappa}\right]=\left[\frac{\lambda\tau}{\varkappa}-\frac{\lambda}{2\varkappa}\right]+\left[\frac{2\omega-2\tau+1}{4\varkappa}\right]$$
$$\left[\frac{(2\lambda+1)\tau}{2\varkappa}-\frac{2\lambda+1}{4\varkappa}\right]=\left[\frac{\lambda\tau}{\varkappa}-\frac{\lambda}{2\varkappa}\right]+\left[\frac{2\omega+2\tau-1}{4\varkappa}\right]$$
$$\left[\frac{(2\lambda+3)\tau}{2\varkappa}-\frac{2\lambda+3}{4\varkappa}\right]=\left[\frac{\lambda\tau}{\varkappa}-\frac{\lambda}{2\varkappa}\right]+\left[\frac{2\omega+6\tau-3}{4\varkappa}\right]$$

Genügt nun ω der Bedingung 10), so ist:

$$1-\frac{2\tau-1}{4\varkappa}>\frac{2\omega-2\tau+1}{4\varkappa}\geqq 1-\frac{6\tau-3}{4\varkappa}$$
$$1+\frac{2\tau-1}{4\varkappa}>\frac{2\omega+2\tau-1}{4\varkappa}\geqq 1-\frac{2\tau-1}{4\varkappa}$$
$$1+\frac{6\tau-3}{4\varkappa}>\frac{2\omega+6\tau-3}{4\varkappa}\geqq 1+\frac{2\tau-1}{4\varkappa}$$

und daher ist:

$$\left[\frac{2\omega-2\tau+1}{4\varkappa}\right]=\left[\frac{2\omega+2\tau-1}{4\varkappa}\right]=\left[\frac{2\omega+6\tau-3}{4\varkappa}\right]-1$$

wenn:

$$\omega\leqq 2\varkappa-\tau$$

ist, während für:

$$\omega>2\varkappa-\tau$$

die Relation:

$$\left[\frac{2\omega-2\tau+1}{4\varkappa}\right]+1=\left[\frac{2\omega+2\tau-1}{4\varkappa}\right]$$

besteht.

Es wird also jedesmal, wenn:

$$2\varkappa-\tau\geqq\omega\geqq 2\varkappa-2\tau+1$$

ist, sowohl in der ersten als auch in der zweiten der obigen Summen der Werth λ für $2\rho+1$ Werthe von x angenommen, während für:

$$\omega>2\varkappa-\tau$$

der Werth λ in der ersten und der Werth $\lambda+1$ in der zweiten Summe, so lange $\lambda+1<\varkappa$ ist, $(2\rho+1)$-mal auftritt.

Nun kann aber in der ersten Summe der Werth $\varkappa-1$ nur dann $(2\rho+1)$-mal auftreten, wenn:

$$\left[\frac{(\varkappa-1)\tau}{\varkappa}-\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}\right]=\left[\frac{\varkappa\tau}{\varkappa}-\frac{\varkappa}{2\varkappa}\right]-1$$
$$=\tau-2$$

d. h. wenn:

$$\left[\frac{2\tau-1}{2\varkappa}+\frac{1}{2}\right]=1$$

also:

$$2\tau-1\geqq\varkappa$$

ist, und es wird der der Beziehung:

$$\frac{(\varkappa-1)\tau}{\varkappa}-\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}=\left[\frac{(\varkappa-1)\tau}{\varkappa}-\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}\right]+\frac{\omega}{2\varkappa}$$

genügende Werth von ω stets grösser als $2\varkappa-\tau$ sein, wenn:

$$\tau<\varkappa-1$$

ist.

Ist also entweder:

$$\tau=\varkappa$$

oder:

$$\tau<\frac{\varkappa+1}{2}$$

und bezeichnet ξ die Anzahl derjenigen Zahlen $\lambda<\varkappa-1$, für welche die durch die Gleichung:

$$\frac{\lambda\tau}{\varkappa}-\frac{\lambda}{2\varkappa}=\left[\frac{\lambda\tau}{\varkappa}-\frac{\lambda}{2\varkappa}\right]+\frac{\omega}{2\varkappa}$$

definirte Grösse ω, der Relation:

$$\omega>2\varkappa-\tau$$

genügt, so ist:

$$\sigma_1\equiv(\varkappa-1)(\tau-1)+\varkappa\rho+\xi \quad (\text{mod. } 2).$$

Es ist also unter den gemachten Voraussetzungen:

$$10)\ \left(\frac{m}{2rm+m+2\varkappa}\right)=(-1)^{\xi+(\tau-1)(\varkappa+r-1)+\frac{m-2\tau+1}{4}}$$

$$11)\ \left(\frac{m}{2rm+m-2\varkappa}\right)=(-1)^{\xi+(\tau-1)(\varkappa+r)+\frac{m-2\tau+1}{4}} \quad (m=4\varkappa\rho+2\tau-1)$$

Ist:

$$\tau = \varkappa$$

so ist:

$$\xi = 0$$

und daher:

$$12)\quad \left(\frac{m}{2rm+m+2\varkappa}\right) = (-1)^{(\varkappa-1)(r+1)+\frac{1}{2}\left\{\frac{m+1}{2}-\varkappa\right\}}$$

$$13)\quad \left(\frac{m}{2rm+m-2\varkappa}\right) = (-1)^{(\varkappa-1)r+\frac{1}{2}\left\{\frac{m+1}{2}-\varkappa\right\}}$$

für:

$$m = 2(2\rho+1)\varkappa - 1$$

Wenn man den Fall eines geraden und eines ungeraden $\varkappa$ unterscheidet, so erhält man die Formeln:

$$14)\quad \left(\frac{m}{2rm+m+4\varkappa}\right) = (-1)^{\xi+(\tau-1)(r-1)} \quad (m = 8\varkappa\rho+2\tau-1)$$

$$15)\quad \left(\frac{m}{2rm+m-4\varkappa}\right) = (-1)^{\xi+(\tau-1)r}$$

$$16)\quad \left(\frac{m}{2rm+m+4\varkappa}\right) = (-1)^{r-1} \qquad (m = 4(2\rho+1)\varkappa-1)$$

$$17)\quad \left(\frac{m}{2rm+m-4\varkappa}\right) = (-1)^{r}$$

$$18)\quad \left(\frac{m}{2rm+m+4\varkappa+2}\right) = \left(\frac{m}{2rm+m-4\varkappa-2}\right) = (-1)^{\xi+\frac{m-2\tau+1}{4}}$$

für:

$$m = 8\varkappa\rho+4\rho+2\tau-1$$

$$19)\quad \left(\frac{m}{2rm+m+4\varkappa+2}\right) = \left(\frac{m}{2rm+m-4\varkappa-2}\right) = (-1)^{\frac{1}{2}\left\{\frac{m+1}{2}-\varkappa\right\}}$$

für:

$$m = 8\varkappa\rho+4(\rho+\varkappa)+1.$$

Ist τ ungerade, so verwandeln sich die Gleichungen 14) und 15) in:

$$20)\quad \left(\frac{m}{2rm+m+4\varkappa}\right) = \left(\frac{m}{2rm+m-4\varkappa}\right) = (-1)^{\xi}$$

wo:

$$m = 8\varkappa\rho+4\tau+1$$

ist.

Die speciellen Formeln 16), 17) und 19) hat auf einem anderen Wege Herr V. Buniakowsky abgeleitet („Sur quelques propositions nouvelles, relatives au symbole de Legendre $\left(\frac{a}{p}\right)$." Par V. Bouniakowsky. Bulletin de l'académie impériale des sciences de St. Pétersbourg. Tome vingt-deuxième p. 358—377).

Setzt man:

$$\tau = 1$$

so ist:

$$\xi = 0$$

und man hat daher die Formel:

$$21)\ \left(\frac{m}{2rm+m+2\varkappa}\right) = \left(\frac{m}{2rm+m-2\varkappa}\right) = (-1)^{\frac{m-1}{4}}$$

für:

$$m = 4\varkappa\rho + 1.$$

Es soll nun eine allgemeine Regel zur Bestimmung des Legendre-Jacobi'schen Zeichens abgeleitet werden.

Sind n und n_1 zwei theilerfremde Zahlen, von denen mindestens die erste ungerade ist, und leitet man aus denselben die Zahlen n_λ und μ_λ in der durch das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} n &= \mu_1 n_1 - n_2 \\ n_1 &= \mu_2 n_2 - n_3 \\ n_2 &= \mu_3 n_3 - n_4 \\ & \\ n_{\nu-2} &= \mu_{\nu-1} n_{\nu-1} - n_\nu \\ n_{\nu-1} &= \mu_\nu n_\nu \end{aligned} \qquad (n_\nu = \pm 1)$$

angegebenen Weise ab, ist ferner:

$$\varepsilon_\varkappa = \pm 1,\ \ \varepsilon_\varkappa n_\varkappa > 0$$
$$n_\varkappa = 2^{\lambda_\varkappa} \bar{n}_\varkappa$$

wo $\bar{n}_\varkappa$ ungerade ist, so ist, wie ich angegeben habe („Zahlentheoretische Studien." Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften, mathematisch - naturwissenschaftliche Classe, 90. Band, II. Abtheilung):

$$\left(\frac{n_1}{n}\right)=(-1)^{\frac{2\sum\limits_{\varkappa=1}^{\varkappa=\nu}\{(\bar{n}_{\varkappa-1}-1)(\bar{n}_\varkappa+1)-(\varepsilon_{\varkappa-1}-1)(\varepsilon_\varkappa+1)\}-\sum\limits_{\varkappa=0}^{\varkappa=\nu-1}\{\lambda_{\varkappa-1}-\lambda_{\varkappa+1}\}(\bar{n}_\varkappa^2-1)}{8}}$$

Ist nun:

$$\bar{n}_\varkappa = 4\sigma_\varkappa + \eta_\varkappa \qquad (\eta = \pm 1)$$

so hat man:

$$(\bar{n}_{\varkappa-1}-1)(\bar{n}_\varkappa+1) \equiv (\eta_{\varkappa-1}-1)(\eta_\varkappa+1) \pmod{8}$$

und daher auch:

$$22) \quad \left(\frac{n_1}{n}\right) = (-1)^{\frac{\sum\limits_{\varkappa=1}^{\varkappa=\nu}\{\eta_\varkappa\eta_{\varkappa-1}-\varepsilon_\varkappa\varepsilon_{\varkappa-1}\}-2(\eta_0-\varepsilon_0)-\sum\limits_{\varkappa=0}^{\varkappa=\nu-1}\{\lambda_{\varkappa-1}-\lambda_{\varkappa+1}\}(\bar{n}_\varkappa^2-1)}{8}}$$

Ist nun λ_ρ von Null verschieden, dann sind $\lambda_{\rho-1}$ und $\lambda_{\rho+1}$ gleich Null und man hat daher:

$$\bar{n}_{\rho-1}+\bar{n}_{\rho+1} = 2^{\lambda_\rho}\mu_\rho\bar{n}_\rho$$

oder:

$$23) \qquad 4(\sigma_{\rho-1}+\sigma_{\rho+1})+\eta_{\rho-1}+\eta_{\rho+1} = 2^{\lambda_\rho}\mu_\rho(4\sigma_\rho+\eta_\rho).$$

Ist μ_ρ gerade, oder μ_ρ ungerade und gleichzeitig $\lambda_\rho > 1$, so folgt aus dieser Gleichung die Congruenz:

$$\eta_{\rho-1}+\eta_{\rho+1} \equiv 0 \pmod{4}$$

und daher ist in diesem Falle:

$$\eta_{\rho+1} = -\eta_{\rho+1}.$$

Ist μ_ρ ungerade und $\lambda_\rho = 1$, dann ist der auf der rechten Seite der Gleichung 23) stehende Ausdruck durch 2, aber nicht durch 4 theilbar und daher ist:

$$\eta_{\rho-1}+\eta_{\rho+1} = 2$$

also:

$$\eta_{\rho+1} = \eta_{\rho-1}.$$

Vereinigt man in der Gleichung 22) alle Glieder im Exponenten von -1, in denen η_ρ, λ_ρ und $\bar{n}_\rho$ vorkommen, so erhält man, falls $\lambda_\rho > 1$ ist:

$$2\eta_\rho(\eta_{\rho-1}+\eta_{\rho+1})-\lambda_\rho(\bar{n}^2_{\rho+1}-\bar{n}^2_{\rho-1}) = -2^{\lambda_\rho+1}\lambda_\rho\mu_\rho\bar{n}_\rho(\bar{n}_{\rho+1}-2^{\lambda_\rho-1}\mu_\rho\bar{n}_\rho)$$

und daher:

$$2\eta_\rho(\eta_{\rho-1}+\eta_{\rho+1})-\lambda_\rho(\bar{n}^2_{\rho+1}-\bar{n}^2_{\rho-1}) \equiv 0 \pmod{16}$$

Ist $\lambda_\rho = 1$ und μ_ρ gerade, so hat man:

$$2\eta_\rho(\eta_{\rho-1}+\eta_{\rho+1})-\lambda_\rho(\bar{n}^2_{\rho+1}-\bar{n}^2_{\rho-1}) = -4\mu_\rho\bar{n}_\rho(\bar{n}_{\rho+1}-\mu_\rho\bar{n}_\rho)$$

also:

$$2\eta_\rho(\eta_{\rho-1}+\eta_{\rho+1})-\lambda_\rho(\bar{n}^2_{\rho+1}-\bar{n}^2_{\rho-1}) \equiv 4\mu_\rho \pmod{16}$$

oder:

$$2\eta_\rho(\eta_{\rho-1}+\eta_{\rho+1})-\lambda_\rho(\bar{n}^2_{\rho+1}-\bar{n}^2_{\rho-1}) \equiv 8 \pmod{16}$$

wenn μ_ρ einfachgerade ist, und:

$$2\eta_\rho(\eta_{\rho-1}+\eta_{\rho+1})-\lambda_\rho(\bar{n}^2_{\rho+1}-\bar{n}^2_{\rho-1}) \equiv 0 \pmod{16}$$

wenn μ_ρ mindestens durch 4 theilbar ist.

Ist $\lambda_\rho = 1$ und μ_ρ ungerade, so wird:

$$2\eta_\rho(\eta_{\rho-1}+\eta_{\rho+1})-\lambda_\rho(\bar{n}^2_{\rho+1}-\bar{n}^2_{\rho-1}) = 4\eta_\rho\eta_{\rho+1}-4\mu_\rho\bar{n}_\rho(\bar{n}_{\rho+1}-\mu_\rho\bar{n}_\rho)$$

also:

$$2\eta_\rho(\eta_{\rho-1}+\eta_{\rho+1})-\lambda_\rho(\bar{n}^2_{\rho+1}-\bar{n}^2_{\rho-1}) \equiv 4(\mu_\rho-1)\eta_\rho\eta_{\rho+1}+4\mu^2_\rho\eta^2_\rho \pmod{16}$$

oder, weil in diesem Falle:

$$\mu^2_\rho \equiv 1 \pmod{8}$$

ist:

$$2\eta_\rho(\eta_{\rho-1}+\eta_{\rho+1})-\lambda_\rho(\bar{n}^2_{\rho+1}-\bar{n}^2_{\rho-1}) \equiv 4(\mu_\rho-1)\eta_\rho\eta_{\rho+1}+4 \pmod{16}.$$

Aus dieser Congruenz entstehen sofort folgende Relationen

$$2\eta_\rho(\eta_{\rho-1}+\eta_{\rho+1})-\lambda_\rho(\bar{n}^2_{\rho+1}-\bar{n}^2_{\rho-1}) \equiv 4 \pmod{16}$$

wenn:

$$\mu_\rho \equiv 1 \pmod{4}$$

ist, und:

$$2\eta_\rho(\eta_{\rho-1}+\eta_{\rho+1})-\lambda_\rho(\bar{n}^2_{\rho+1}-\bar{n}^2_{\rho-1})\equiv -4 \pmod{16}$$

für:

$$\mu_\rho \equiv -1 \pmod{4}$$

Ist:

A die Anzahl der geraden Divisoren n_ρ,

B die Anzahl derjenigen einfachgeraden Divisoren n_ρ, deren zugehöriger Quotient μ_ρ die Form $4s+1$ hat,

C die Anzahl derjenigen einfachgeraden Divisoren n_ρ, deren zugehöriger Quotient μ_ρ die Form $4s-1$ hat,

D die Anzahl der einfachgeraden Divisoren n_ρ mit zugehörigem einfachgeraden Quotienten μ_ρ,

E die Anzahl der übrigen geraden Divisoren n_ρ.

τ_σ diejenige (positive oder negative) Einheit, welcher der σ^{te} ungerade Divisor nach dem Modul 4 congruent ist, so ist nach den obigen Entwickelungen:

$$24)\qquad \left(\frac{n_1}{n}\right)=(-1)^{\frac{\sum\limits_{\varkappa}\tau_\varkappa\tau_{\varkappa-1}-\sum\limits_{\varkappa=1}^{\varkappa=\nu}\varepsilon_\varkappa\varepsilon_{\varkappa-1}-(\eta_0-\varepsilon_0)+A}{4}+C+D}$$

wo die Summation bezüglich $\varkappa$ in der ersten Summe im Exponenten von -1 über alle Grössen τ_σ auszudehnen ist.

Bezeichnet man mit α die Anzahl der Zeichenfolgen, mit α_1 die Anzahl der Zeichenwechsel, welche in der Reihe der Grössen τ_σ auftreten, und mit β und β_1 die analogen Anzahlen für die Reihe der Grössen $\varepsilon_\varkappa$, so kann man die Gleichung 24) auch in folgender Weise schreiben:

$$25)\qquad \left(\frac{n_1}{n}\right)=(-1)^{\frac{\alpha-\alpha_1-\beta+\beta_1-\eta_0+\varepsilon_0+A}{4}+C+D}$$

Ist:

$$4(C+D)+A\equiv 0 \pmod{8}$$

oder:

$$B+E\equiv 3(C+D) \pmod{8}$$

so wird:

26) $$\left(\frac{n_1}{n}\right) = (-1)^{\frac{\sum\limits_{\varkappa} \tau_\varkappa \tau_{\varkappa-1} - \sum\limits_{\varkappa=1}^{\varkappa=\nu} \varepsilon_\varkappa \varepsilon_{\varkappa-1} - \eta_0 + \varepsilon_0}{4}}$$
$$= (-1)^{\frac{\alpha - \alpha_1 + \beta_1 - \beta - \eta_0 + \varepsilon_0}{4}}$$

so dass also in diesem Falle die Kenntnis der Vorzeichen der Glieder zweier Zahlenreihen zur Bestimmung des Legendre-Jacobi'schen Symbols ausreicht.

Schreibt man die Gleichung 24) in einer der folgenden Formen:

$$\left(\frac{n_1}{n}\right) = (-1)^{\frac{\sum\limits_{\varkappa} \{1 + \tau_\varkappa \tau_{\varkappa-1}\} - \sum\limits_{\varkappa=1}^{\varkappa=\nu} \{1 + \varepsilon_\varkappa \varepsilon_{\varkappa-1}\} - \eta_0 + \varepsilon_0 + 2A}{4} + C + D}$$

$$\left(\frac{n_1}{n}\right) = (-1)^{\frac{\sum\limits_{\varkappa} \{-1 + \tau_\varkappa \tau_{\varkappa-1}\} - \sum\limits_{\varkappa=1}^{\varkappa=\nu} \{-1 + \varepsilon_\varkappa \varepsilon_{\varkappa-1}\} - \eta_0 + \varepsilon_0}{4} + C + D}$$

so erhält man sofort:

27) $$\left(\frac{n_1}{n}\right) = (-1)^{\frac{\alpha - \beta + A}{2} - \frac{\eta_0 - \varepsilon_0}{4} + C + D}$$

28) $$\left(\frac{n_1}{n}\right) = (-1)^{\frac{\beta_1 - \alpha_1}{2} - \frac{\eta_0 - \varepsilon_0}{4} + C + D}$$

Für:

$$A + 2(C + D) \equiv 0 \pmod{4}$$

oder:

$$C + D \equiv B + E \pmod{4}$$

verwandelt sich die erste von diesen Gleichungen in:

29) $$\left(\frac{n_1}{n}\right) = (-1)^{\frac{\alpha - \beta}{2} - \frac{\eta_0 - \varepsilon_0}{4}}$$

während für:

$$C + D \equiv 0 \pmod{2}$$

die zweite in:

$$30)\qquad \left(\frac{n_1}{n}\right) = (-1)^{\frac{\beta_1-\alpha_1}{2} - \frac{\eta_0-\varepsilon_0}{4}}$$

übergeht.

Es wird daher auch, wenn die eben angegebenen Bedingungen erfüllt sind, das verallgemeinerte Legendre'sche Zeichen mit Hilfe der Vorzeichen der Glieder zweier Zahlenreihen bestimmt werden können.

Die angeführten Bedingungen sind sicher erfüllt, wenn:

$$B = C = D = E = 0$$

ist, d. h., wenn alle Divisoren n_ρ ungerade sind.

Für diesen Fall hat schon Herr L. Kronecker die Gleichungen 29) und 30) angegeben. („Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste." Von L. Kronecker. Sitzungsberichte der königlich-preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Jahrgang 1884. Nr. XXIII, p. 519 ff.)

Wird in dem zur Bestimmung der Zahlen n_λ und μ_λ verwendeten Gleichungssysteme für n_1 $-2n_1$ gesetzt und bei der jedesmaligen Division ein gerader Quotient genommen, so ist:

$$B = C = 0$$

$$\sum \tau_\varkappa \tau_{\varkappa-1} = -A$$

und daher, falls man der Einfachheit halber $\varepsilon_0 = +1$ setzt, was bekanntlich geschehen kann, ohne der Allgemeinheit der Untersuchung Eintrag zu thun:

$$\left(\frac{-2n_1}{n}\right) = (-1)^{\frac{\sum\limits_{\varkappa=1}^{\varkappa=\nu} \varepsilon_\varkappa \varepsilon_{\varkappa-1} + \eta_0 - 1}{4} + D}$$

oder weil:

$$\left(\frac{-2}{n}\right) = (-1)^{\frac{n^2-1}{8} - \frac{\eta_0-1}{4}}$$

ist:

$$\left(\frac{n_1}{n}\right) = (-1)^{\frac{\sum\limits_{\varkappa=1}^{\varkappa=\nu} \varepsilon_\varkappa \varepsilon_{\varkappa-1} + 3(\eta_0-1)}{4} + D - \frac{n^2-1}{8}}$$

Es ist aber in diesem Falle auch, wie ich erwähnt habe, („Algorithmen zur Bestimmung des verallgemeinerten Legendre'schen Symbols". Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften, mathematisch-naturwissenschaftliche Classe, 82. Band, II. Abtheilung, p. 981 ff.):

$$\left(\frac{n_1}{n}\right) = (-1)^{\frac{\sum\limits_{\varkappa=1}^{\varkappa=\nu} \varepsilon_\varkappa \varepsilon_{\varkappa-1}}{4} + \frac{(\eta_0-1)^2}{8}}$$

und daher hat man in diesem Falle:

$$D \equiv \frac{n^2-1}{8} \pmod{2}$$

oder auch:

$$D \equiv \left[\frac{n}{4} + \frac{1}{2}\right] \pmod{2}.$$