

Über zwei universelle Verallgemeinerungen der algebraischen Grundoperationen.

Von Dr. Oskar Simony,

Professor an der Wiener Hochschule für Bodencultur.

Einleitende Betrachtungen.

Bekanntlich schliesst Gauss die Anzeige seiner Abhandlung: „*Theoria residuorum biquadraticorum, commentatio secunda*“ nach einer kurzen Darlegung seiner Auffassungsweise der sogenannten imaginären Grössen mit der Bemerkung,¹ er behalte sich vor, in einer künftigen Abhandlung auch die Frage zu beantworten, „warum die Relationen zwischen Dingen, die eine Mannigfaltigkeit von mehr als zwei Dimensionen darbieten, nicht noch andere in der allgemeinen Arithmetik zulässige Arten von Grössen liefern können.“

Dieses Versprechen blieb leider unerfüllt, so dass jeder Interpretation jener Bemerkung eine gewisse Willkür anhaftet; wohl aber dürfte man der Wahrheit durch die Annahme am nächsten kommen, Gauss habe in der citirten Stelle seine Einsicht angedeutet, dass man solche complexe Zahlen, welche Punkten des Raumes beziehungsweise einer höheren Mannigfaltigkeit zugeordnet werden, mit einander nicht mehr operativ verknüpfen könne, ohne gewisse, von ihm für wesentlich erachtete Eigenschaften algebraischer Grundoperationen aufzugeben.

¹ S. h. die Gesamtausgabe seiner Werke, II. Band, pag. 178.

So lassen sich z. B., wie H. Hankel zuerst nachgewiesen hat,¹ ohne Schwierigkeit höhere complexe Zahlen bilden, deren Einheitsproducte lineare Functionen der ursprünglichen Einheiten sind, und für deren Multiplication das distributive Princip gültig bleibt. Aber andererseits erhält das Product je zweier solcher Zahlen nunmehr die Eigenschaft, bedingungsweise zu verschwinden, ohne dass einer der beiden Factoren gleich Null wird.

Sobald man also die Multiplication als eine für alle Grössenarten distributiv bleibende Rechnungsoperation definirt und die Eigenschaft des Productes zweier gewöhnlicher complexer Zahlen, lediglich durch das Verschwinden eines, respective beider Factoren der Null gleich zu werden, als eine wesentliche Eigenschaft jedes Productes betrachtet, kann in der That weder eine dreifach ausgedehnte noch eine höhere Mannigfaltigkeit weitere in der allgemeinen Arithmetik zulässige Arten von Grössen liefern.

Dass dieser Schluss an und für sich richtig ist, kann nicht bezweifelt werden, jedoch sind dessen Prämissen keineswegs logisch begründet.

Da nämlich jede mehrfach complexe Zahl die gewöhnliche complexe Zahl als Specialfall enthält, lässt sich a priori überhaupt nicht entscheiden, ob beispielsweise gewisse Eigenschaften des Productes zweier gewöhnlicher complexer Zahlen der Operation des Multiplicirens als solcher oder nur in Bezug auf die mit einander verknüpften, speciellen Zahlenformen zugehören. Es liegt demnach vom logischen Standpunkte kein Hinderniss vor, die Definition einer Rechnungsoperation für höhere complexe Zahlen entsprechend zu erweitern, wobei die subjective Willkür zunächst nur insoferne eingeschränkt wird, als alle jene Erweiterungen des betreffenden Operationsbegriffes ausgeschlossen bleiben, welche bei

¹ S. h. dessen 1867 zu Leipzig erschienenenes Werk: „Theorie der complexen Zahlensysteme, insbesondere der gemeinen imaginären Zahlen und der Hamilton'schen Quaternionen“, p. 106—108 unter Hinzuziehung der specielleren Betrachtungen L. Königsberger's in dessen 1874 zu Leipzig erschienenen „Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen“, p. 10—12.

einer Reduction jener höheren complexen Zahlen auf gewöhnliche complexe Zahlen den für die letzteren geltenden Rechnungsregeln zuwiderlaufen.

Auf diese Art erscheint der freien Production selbst bei Definitionen elementarer Verknüpfungsarten höherer complexer Zahlen ein weites Feld eröffnet, und sind daher auch seit der 1806 durch Argand¹ begründeten, geometrischen Interpretation der gewöhnlichen complexen Zahlen mannigfaltige Systeme von höheren complexen Zahlen erdnen worden, unter welchen bisher in theoretischer Hinsicht namentlich die höheren complexen Zahlensysteme H. Grassmann's,² in praktischer Hinsicht dagegen die „Quaternionen“ von R. Hamilton³ einen hervorragenden Einfluss auf die Entwicklung der Wissenschaft genommen haben.

Was nun speciell die in der vorliegenden Arbeit aufgestellten höheren complexen Zahlen anbelangt, so erheischt deren präzise Formulirung zunächst die Einführung einer $(n+1)$ -fach ausgedehnten — im Riemann'schen Sinne — ebenen Mannigfaltigkeit, deren analytisch-geometrische Characteristik durch folgende Sätze⁴ gegeben ist:

¹ S. h. dessen in dem angegebenen Jahre zu Paris erschienene Schrift „Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires, dans les constructions géométriques“. — Die Darstellung des Complexen in der Ebene durch Gauss erfolgte bekanntlich erst im Jahre 1831, so dass ihm in dieser Hinsicht eine Priorität in keiner Weise zukommt.

² S. h. sein 1862 veröffentlichtes Werk: „Die Ausdehnungslehre“, (Berlin, Verlag von Fr. Enslin), dessen erster Theil unter dem besonderen Titel: „Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik“ — bereits 1844 zu Leipzig (im Verlage von O. Wigand) erschienen war, aber in Folge seiner mehr philosophischen als mathematischen Form nur eine geringe Verbreitung gefunden hatte.

³ Zur Bequemlichkeit des Lesers beziehe ich mich bei allen im Folgenden vorkommenden Bemerkungen über Quaternionen auf die vortreffliche, von P. Glan gelieferte deutsche Übersetzung von Hamilton's: „Elements of Quaternions“ (Leipzig, 1881, 82 u. 84).

⁴ Dieselben bilden die consequente Verallgemeinerung jener vier Fundamentalsätze, durch welche ich in meiner Brochure: Gemeinfassliche, leicht controlirbare Lösung der Aufgabe: „In ein ringförmig geschlossenes Band einen Knoten zu machen“ und verwandter merkwürdiger Probleme (dritte Auflage, p. 35, 36) — speciell eine vierfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit von verschwindendem Krümmungsmasse characterisirt habe.

- (I). Jeder Punkt der erwähnten Mannigfaltigkeit lässt sich als Durchschnittspunkt von $(n+1)$ einander in demselben rechtwinklig durchschneidenden geraden Linien auffassen.
- (II). Wählt man $(n+1)$ derartige Gerade: $J_0 J'_0, J_1 J'_1, J_2 J'_2, \dots J_n J'_n$ zu Coordinatenaxen, so ist die Lage jedes Punktes durch je $(n+1)$ auf die ersteren eindeutig beziehbare Coordinaten vollständig bestimmt.
- (III). Sind speciell $a_0, a_1, a_2, \dots a_n; b_0, b_1, b_2, \dots b_n$ die Werthe, welche die Coordinaten zweier beliebig angenommenen Punkte: M_1, M_2 , deren gegenseitige Entfernung mit \bar{r} bezeichnet werden mag, besitzen, so besteht für alle zwischen $-\infty$ und $+\infty$ denkbaren Specialisirungen von \bar{r} die Gleichung:

$$(a) \dots \bar{r}^2 = (a_0 - b_0)^2 + (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2.$$

- (IV). Sind $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n; \beta, \beta_1, \beta_2, \dots \beta_n$ die Winkel, unter welchen zwei sich in irgend einem Punkte dieser Mannigfaltigkeit durchschneidende gerade Linien gegen die $(n+1)$ Coordinatenaxen: $J_0 J'_0, J_1 J'_1, J_2 J'_2, \dots J_n J'_n$ geneigt sind, so gilt für den Cosinus des gegenseitigen Neigungswinkels θ beider Geraden stets die Relation:

$$(b) \dots \cos \theta = \cos \alpha \cos \beta + \cos \alpha_1 \cos \beta_1 + \dots + \cos \alpha_n \cos \beta_n.$$

Wir denken uns nunmehr jedem Punkte dieser Mannigfaltigkeit eine n -fach complexe Zahl derart zugeordnet, dass beispielsweise den Punkten M_1, M_2 das Zahlenpaar:

$$\begin{aligned} Z_1 &= a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + \dots + a_n i_n, \\ Z_2 &= b_0 + b_1 i_1 + b_2 i_2 + \dots + b_n i_n \end{aligned}$$

correspondirt, wobei wir $i_1, i_2, \dots i_n$ vorläufig nur als Unterscheidungszeichen¹ für die $(n+1)$ zu einander ortho-

Ich bediene mich der Symbole: $i_1, i_2, \dots i_n$ in Hinblick auf die seit Gauss allgemein üblich gewordene Bezeichnungsweise der „imaginären Einheit“ mit i , welcher Buchstabe übrigens bereits von Euler in diesem Sinne verwendet worden ist. — Den ersten Anlass hiezu bot ihm die Lösung des Problems: „Proposita formula differentialis $\frac{\cos \varphi \, d\varphi}{\sqrt{\cos n\varphi}}$, eius integrale per

gonalen Richtungen betrachten, in welchen die Coordinaten: $a_0, b_0; a_1, b_1; a_2, b_2; \dots a_n, b_n$ auf eine und dieselbe Längeneinheit beziehbar sind.

Zwei derartige n -fach complexe Zahlen sind dann einander gleich, wenn sie einen und denselben Punkt in jener Mannigfaltigkeit bestimmen, d. h. also in Hinblick auf (II), wenn ihre Coëfficienten die $(n+1)$ Gleichungen:

$$a_0 = b_0, a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots a_n = b_n$$

erfüllen.¹ — Es mögen ferner die beiden positiv zu nehmenden Wurzelgrößen:

$$\sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}, \quad \sqrt{b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2},$$

welche kraft des dritten Satzes zugleich die Entfernungen der Punkte M_1, M_2 , vom Ursprunge: O des gewählten Coordinatensystems präcisiren, als die Moduli:² r_1, r_2 von Z_1, Z_2 bezeichnet

logarithmos et arcus circulares investigare“, welche er (s. den 1794 zu Petersburg erschienenen IV. Band seines grossartigen Werkes: Institutiones calculi integralis, p. 184) mit folgenden Worten einleitet: „Quoniam mihi quidem alia adhuc via non patet istud praestandi, nisi per imaginaria procedendo, formulam $\sqrt{-1}$ littera i in posterum designabo, ita ut sit $ii = -1$, ideoque $\frac{1}{i} = -i$ “.

¹ Die correspondirende Grassmann'sche Definition (Ausdehnungslehre, p. 16) lautet: „Zwei Grössen eines Gebietes n^{ter} Stufe sind dann und nur dann einander gleich, wenn ihre n zu denselben Einheiten: $e_1, e_2, \dots e_n$ gehörigen Ableitungszahlen einander gleich sind, das heisst die Gleichung:

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots + \beta_n e_n$$

wird ersetzt durch die n -Gleichungen: $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \dots \alpha_n = \beta_n$ “.

² Die Bezeichnung: „Modulus“ rührt von Argand her, der dieselbe zuerst 1814 am Schlusse einer kurzen Abhandlung: „Reflexions sur la nouvelle théorie des imaginaires, suivies d'une application à la démonstration d'un théorème d'analyse“ (Gergonne's Annalen V. Bd., p. 208) gebraucht und hiebei auch schon die beiden wichtigsten Modulsätze kurz erwähnt hat. — Die diesbezügliche interessante Stelle der citirten Abhandlung lautet:

„Il semble qu'il faudrait rapprocher l'expression des imaginaires de la notation des lignes dirigées, en écrivant

$$\sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sqrt{-1} \right) \text{ pour } a + b\sqrt{-1}.$$

und für die Summe der Producte der gleichnamigen Zahlen-coëfficienten:

$$a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = m$$

in Zukunft der Ausdruck: „Deviationsproduct des Zahlenpaares“ gebraucht werden. Die erstere Nominaldefinition bedarf wohl keines weiteren Commentares; die letztere findet darin ihre Begründung, dass m — unter $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; \beta, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ nunmehr die Winkel von r_1, r_2 , mit den Halbaxen $OJ_0, OJ_1, OJ_2, \dots, OJ_n$ verstanden — gemäss den, mittelbar durch (IV) bedingten Gleichungen:

$$(c) \dots \begin{cases} a_0 = r_1 \cos \alpha, & a_1 = r_1 \cos \alpha_1, & a_2 = r_1 \cos \alpha_2, & \dots & a_n = r_1 \cos \alpha_n \\ b_0 = r_2 \cos \beta, & b_1 = r_2 \cos \beta_1, & b_2 = r_2 \cos \beta_2, & \dots & b_n = r_2 \cos \beta_n \end{cases}$$

in das Product: $r_1 r_2 \cos \theta$ transformirt werden kann. Bezüglich dieses Productes selbst ist noch hervorzuheben, dass dessen erster und zweiter Factor je $(n+1)$, hingegen sein dritter Factor $2n$ von einander unabhängige Grössen enthält, indem die $2(n+1)$ Winkel: $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; \beta, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ zufolge den Relationen (c) und den Bedeutungen von r_1, r_2 stets die beiden Beziehungen:

$$(d) \dots \begin{cases} \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \dots + \cos^2 \alpha_n = 1 \\ \cos^2 \beta + \cos^2 \beta_1 + \cos^2 \beta_2 + \dots + \cos^2 \beta_n = 1 \end{cases}$$

erfüllen müssen.

Nachdem so der im Folgenden verwendete Begriff einer n -fach complexen Zahl an zwei willkürlichen Specialisirungen: Z_1, Z_2 erläutert worden ist, muss jetzt auch der Begriff: „Rechnungsoperation“ in seiner Anwendung auf derartige Zahlen entsprechend definirt werden.

Recurriren wir hiebei von den in Betracht gezogenen Zahlen wieder auf die ihnen correspondirenden Punkte jener $(n+1)$ -fach

$\sqrt{a^2+b^2}$ pourrait être appelé le module de $a+b\sqrt{-1}$, et représenterait la grandeur absolue de la ligne $a+b\sqrt{-1}$, tandis que l'autre facteur, dont le module est l'unité, en représenterait la direction. On prouverait seulement 1° que le module de la somme de plusieurs quantités n'est pas plus grand que la somme des modules de ces quantités; 2° que le module du produit de plusieurs quantités est égal au produit des modules de ces quantités.“

ausgedehnten Mannigfaltigkeit, so ergibt sich für den fraglichen Begriff die nachstehende einfache und allgemeine Fassung: Mit einer oder mehreren n -fach complexen Zahlen eine bestimmte Rechnungsoperation vornehmen, heisst, einem oder mehreren Punkten einen neuen Punkt beziehungsweise ein neues System von Punkten derselben Mannigfaltigkeit nach bestimmten Gesetzen zuordnen. Im ersteren Falle ist die betreffende Rechnungsoperation eindeutig, im letzteren mehrdeutig beziehungsweise unendlich vieldeutig, je nachdem das zugeordnete Punktsystem eine endliche oder eine unendlich grosse Anzahl von Punkten in sich begreift.

Da nun jedem solchen Punkte vice versa wieder eine n -fach complexe Zahl entspricht, führt auch jede, in dem eben präcisirten Sinne aufgefasste Rechnungsoperation mit n -fach complexen Zahlen nothwendig auf Zahlen von derselben allgemeinen Form, d. h. das betreffende Zahlensystem ist insoferne als ein begrenztes, complexes Zahlensystem zu bezeichnen.

An diese Auseinandersetzungen knüpft sich naturgemäss die weitere Frage, in welcher Form die Definition irgend einer Rechnungsoperation ursprünglich erscheinen wird.

Um hierüber einen allgemeinen Aufschluss zu erhalten, genügt die Überlegung, dass, sobald man zwei Punktsysteme in einer und derselben Mannigfaltigkeit einander nach bestimmten Gesetzen zuordnet, hiedurch zunächst die Coordinaten der betreffenden Punkte in ein bestimmtes, von Fall zu Fall mittelst Gleichungen ausdrückbares Abhängigkeitsverhältniss von einander treten. Da nun jene Coordinaten zugleich die Coefficienten der mit einander verknüpften n -fach complexen Zahlen vorstellen, folgt hieraus direct, dass jede Rechnungsoperation ursprünglich durch ein System von Gleichungen zu characterisiren ist, welche die Coefficienten der gegebenen Zahlen zu jenen des Resultates der Operation in Beziehung bringen.

Hiernach treten die Unterscheidungszeichen der einzelnen Coordinatenrichtungen: $i_1, i_2, \dots i_n$ überhaupt nie in die Rechnung ein, wohl aber kann es unter Umständen in rein formaler Hinsicht Nutzen bringen, wenn man ein, durch eine bestimmte Rechnungsoperation gewonnenes Resultat nachträglich

so interpretirt, als ob die operativ verknüpften, n -fach complexen Zahlen reelle algebraische Ausdrücke gewesen wären, mithin gewisse Functionen ihrer imaginären Bestandtheile bei Ausführung jener Rechnungsoperation die Rolle reeller Grössen gespielt hätten.

Ausserdem wird ersichtlich, dass die Definitionsgleichungen sämtlicher Rechnungsoperationen die Coëfficienten ihrer Resultate für alle denkbaren Werthe der gegebenen Zahlencoëfficienten als reelle Grössen bestimmen müssen, denn jede andere Bestimmungsweise würde, da die fraglichen Coëfficienten zugleich Coordinaten von Punkten vorstellen, ihrer geometrischen Bedeutung zuwiderlaufen.

Aber selbst die Vereinigung dieser Forderung mit der a priori gegebenen Bedingung, dass jede Definition einer Rechnungsoperation mit n -fach complexen Zahlen im Specialfalle: $n = 1$ die bekannten Eigenschaften derselben Rechnungsoperation in ihrer Anwendung auf einfach complexe Zahlen zu liefern hat, ermöglicht keine ausreichende Beschränkung jener Formen, in welchen speciell die vier algebraischen Grundoperationen für n -fach complexe Zahlen generalisirt werden können.

Es lassen sich vielmehr bezüglich dieser Operationen noch zwei weitere allgemeine Forderungen erfüllen, von welchen die erste: Die Summe und das Product zweier beliebiger n -fach complexer Zahlen müssen commutativ bleiben — sich gewissermassen von selbst aufdrängt, während die zweite Forderung erst durch die nachstehenden einfachen Überlegungen begründet wird:

Sind allgemein Z_1, Z_2 die beiden Zahlen, welche durch irgend eine der vier verallgemeinerten algebraischen Grundoperationen verknüpft werden sollen, so bleiben die Grössen: a_0, b_0, m, r_1, r_2 , sämtlichen complexen Specialisirungen von Z_1, Z_2 zugeordnet, während sich die Coëfficienten: a_1, b_1 resp. $a_2, b_2; \dots a_n, b_n$ speciell auf i_1 , resp. $i_2, \dots i_n$ beziehen. In Hinblick hierauf liegt also die Forderung nahe, die betreffende Rechnungsoperation derart zu definiren, dass auch im Resultate derselben die Grössen: a_1, b_1 lediglich in m, r_1, r_2 und dem Coëfficienten von i_1 , ferner a_2, b_2 ausschliesslich

in m, r_1, r_2 und dem Coëfficienten von i_2, \dots, a_n, b_n nur in m, r_1, r_2 und dem Coëfficienten von i_n auftreten, während a_0, b_0, m, r_1, r_2 an kein einziges specielles Unterscheidungszeichen gebunden sind, also möglicher Weise in allen Coëfficienten des Resultates vorkommen. Auf diese Art besitzt das letztere, sobald die erwähnte Forderung befriedigt wird, allgemein die Form:

$$f_0(a_0, b_0, m, r_1, r_2) + f_1(a_0, a_1, b_0, b_1, m, r_1, r_2)i_1 + \\ + f_2(a_0, a_2, b_0, b_2, m, r_1, r_2)i_2 + \dots + f_n(a_0, a_n, b_0, b_n, m, r_1, r_2)i_n,$$

wobei $f_0, f_1, f_2, \dots, f_n$ vorläufig unbestimmt gelassene Functionen der innerhalb der Parenthesen stehenden Argumente repräsentiren.

Denken wir uns jetzt zwei $(n+1)$ -fach complexe Zahlen:

$$a_0 + a_1 i_1 + \dots + a_{n+1} i_{n+1}, \quad b_0 + b_1 i_1 + \dots + b_{n+1} i_{n+1}$$

mit den Moduln:

$$r_1 = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + \dots + a_{n+1}^2}, \quad r_2 = \sqrt{b_0^2 + b_1^2 + \dots + b_{n+1}^2}$$

und dem Deviationsproducte:

$$m = a_0 b_0 + a_1 b_1 + \dots + a_{n+1} b_{n+1}$$

derselben Rechnungsoperation unterworfen, so werden die Functionen: $f_0, f_1, f_2, \dots, f_n$ hiebei wohl ihre Werthe aber weder ihre Formen¹ noch die Anzahl ihrer selbst-

Wird die formale Übereinstimmung gleich signirter imaginärer Bestandtheile in den für $n = 2, 3, 4, \dots$ bestehenden Specialisirungen eines und desselben Productes, resp. Quotienten zweier n -fach complexer Zahlen nicht als ein wesentliches Merkmal jeder universellen Verallgemeinerung des Multiplicirens, beziehungsweise des Dividirens aufgefasst, so lassen sich die genannten Grundoperationen auch derart generalisiren, dass — unter n eine beliebige endliche, reelle Zahl gedacht — jeder Coëfficient des jeweiligen n -fach complexen Werthes von:

$$Z^n = (x + x_1 i_1 + x_2 i_2 + \dots + x_n i_n)^n$$

ein particuläres Integral der partiellen Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 W}{\partial x_n^2} = 0$$

ständigen Argumente verändern, indem ja die beiden neu hinzugekommenen Coëfficienten: a_{n+1} , b_{n+1} im Resultate erst bei i_{n+1} als selbstständige Argumente auftreten können.

Es wird daher jede Verallgemeinerung einer Rechnungsoperation, welche der vierten Forderung genügt, insoferne universell zu nennen sein, als ihre Giltigkeit sich dann gemäss unseren letzten Betrachtungen auf alle complexen Zahlen erstreckt, welchen Punkte einer Mannigfaltigkeit von endlicher Dimensionszahl correspondiren. Dagegen erschiene es unzulässig, von universellen Rechnungsoperationen schlechtweg zu sprechen, weil solche complexe Zahlen, deren geometrische Interpretation Mannigfaltigkeiten von unendlich vielen Dimensionen erfordern würde, im Allgemeinen auch keine endlichen Moduli und Deviationsproducte besitzen und in Folge dessen nur bedingungsweise eine operative Verknüpfung gestatten.

Die zuletzt entwickelten Gesichtspunkte wurden bisher noch nie aufgestellt, geschweige denn in irgend einem Zahlensysteme realisirt, so dass die in dieser Arbeit mitgetheilten Resultate in sachlicher und zumeist auch in formaler Hinsicht vollständig neu sind. Bei ihrer Ableitung war für mich vor Allem die Forderung möglicher Einfachheit massgebend, und habe ich demgemäss meine Auseinandersetzungen gemeinlich auf die beiden einfachsten Specialisirungen von n , nämlich $n = 1, 2$ gegründet, zumal dieselben im Gegensatze zu sämtlichen übrigen Specialisirungen von n auch der geometrischen Anschauung zugänglich bleiben. Um ferner nicht gegen die übliche Bezeichnungsweise constanter Coordinaten in der Ebene und im Raume zu verstossen, sind speciell für einfach und zweifach¹ complexe Zahlen die Darstellungsformen:

$$a + bi_1 \text{ respective: } a + bi_1 + ci_2$$

bildet. Die so gearteten Verallgemeinerungen algebraischer Grundoperationen sind jedoch bei ihrer grossen Complication nur insoferne interessant, als sie neue, physikalisch wichtige Lösungen der bekannten Potentialgleichung $\nabla^2 V = 0$ vermitteln, wonach es angemessen erscheint, erst bei Publication jener Lösungen auch deren analytische Grundlagen kurz zu erörtern.

¹ Statt des Ausdruckes: „zweifach complex“ mag in der Folge die besser klingende Bezeichnung: „bicomplex“ gebraucht werden.

gewählt worden, wonach man z. B. den drei Zahlen:

$$Z_1 = a_1 + b_1 i_1 + c_1 i_2, \quad Z_2 = a_2 + b_2 i_1 + c_2 i_2, \quad Z_3 = a_3 + b_3 i_1 + c_3 i_2$$

die Ausdrücke:

$$r_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}, \quad r_2 = \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}, \quad r_3 = \sqrt{a_3^2 + b_3^2 + c_3^2}$$

$$m = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2, \quad m_1 = a_1 a_3 + b_1 b_3 + c_1 c_3, \quad m_2 = a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3$$

als Moduli und Deviationsproducte zuzuordnen hat.

Was schliesslich die mit der Aufstellung der einzelnen Formeln verbundenen algebraischen Rechnungen anbelangt, so erfordert deren rasche und bequeme Durchführung die Kenntniss gewisser identischer Gleichungen, welche einerseits die dem Ausdrücke:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = g$$

entspringenden Unterdeterminanten:

$$h = b_1 c_2 - b_2 c_1, \quad k = a_2 c_1 - a_1 c_2, \quad l = a_1 b_2 - a_2 b_1;$$

$$h_1 = b_1 c_3 - b_3 c_1, \quad k_1 = a_3 c_1 - a_1 c_3, \quad l_1 = a_1 b_3 - a_3 b_1;$$

$$h_2 = b_2 c_3 - b_3 c_2, \quad k_2 = a_3 c_2 - a_2 c_3, \quad l_2 = a_2 b_3 - a_3 b_2$$

andererseits die den letzteren nahe verwandten Grössen:

$$\bar{x} = a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2, \quad \bar{y} = a_1 b_2 + a_2 b_1, \quad \bar{z} = a_1 c_2 + a_2 c_1;$$

$$\bar{x}' = a_1 a_3 - b_1 b_3 - c_1 c_3, \quad \bar{y}' = a_1 b_3 + a_3 b_1, \quad \bar{z}' = a_1 c_3 + a_3 c_1;$$

$$\bar{x}'' = a_2 a_3 - b_2 b_3 - c_2 c_3, \quad \bar{y}'' = a_2 b_3 + a_3 b_2, \quad \bar{z}'' = a_2 c_3 + a_3 c_2$$

betreffen und ausser den bereits angegebenen Hilfsfunctionen $r_1, r_2, r_3; m, m_1, m_2$ und g noch die folgenden:

$$-a_3 m + a_2 m_1 + a_1 m_2 = g_1, \quad a_3 m - a_2 m_1 + a_1 m_2 = g_2$$

$$a_3 m + a_2 m_1 - a_1 m_2 = g_3$$

enthalten. Diese Gleichungen zerfallen in drei natürliche Gruppen, deren Charakteristik und weitere Gliederung dem nachstehenden Schema zu entnehmen ist

Erste Gruppe

enthaltend Identitäten für $h, k, l; h_1, k_1, l_1; h_2, k_2, l_2$.

(2). Binomische Identitäten für Producte von $h, k, l; h_1,$

$k_1, l_1; h_2, k_2, l_2$ in $a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2; a_3, b_3, c_3$:

$$b_1 h - a_1 k = -c_1 m + c_2 r_1^2, \quad c_1 h - a_1 l = b_1 m - b_2 r_1^2,$$

$$c_1 k - b_1 l = -a_1 m + a_2 r_1^2;$$

$$b_2 h - a_2 k = c_2 m - c_1 r_2^2, \quad c_2 h - a_2 l = -b_2 m + b_1 r_2^2,$$

$$c_2 k - b_2 l = a_2 m - a_1 r_2^2;$$

$$b_3 h - a_3 k = c_2 m_1 - c_1 m_2, \quad c_3 h - a_3 l = -b_2 m_1 + b_1 m_2,$$

$$c_3 k - b_3 l = a_2 m_1 - a_1 m_2.$$

$$b_1 h_1 - a_1 k_1 = -c_1 m_1 + c_3 r_1^2, \quad c_1 h_1 - a_1 l_1 = b_1 m_1 - b_3 r_1^2,$$

$$c_1 k_1 - b_1 l_1 = -a_1 m_1 + a_3 r_1^2;$$

$$b_2 h_1 - a_2 k_1 = c_3 m - c_1 m_2, \quad c_2 h_1 - a_2 l_1 = -b_3 m + b_1 m_2,$$

$$c_2 k_1 - b_2 l_1 = a_3 m - a_1 m_2;$$

$$b_3 h_1 - a_3 k_1 = c_3 m_1 - c_1 r_3^2, \quad c_3 h_1 - a_3 l_1 = -b_3 m_1 + b_1 r_3^2,$$

$$c_3 k_1 - b_3 l_1 = a_3 m_1 - a_1 r_3^2.$$

$$b_1 h_2 - a_1 k_2 = c_3 m - c_2 m_1, \quad c_1 h_2 - a_1 l_2 = -b_3 m + b_2 m_1,$$

$$c_1 k_2 - b_1 l_2 = a_3 m - a_2 m_1;$$

$$b_2 h_2 - a_2 k_2 = -c_2 m_2 + c_3 r_2^2, \quad c_2 h_2 - a_2 l_2 = b_2 m_2 - b_3 r_2^2,$$

$$c_2 k_2 - b_2 l_2 = -a_2 m_2 + a_3 r_2^2;$$

$$b_3 h_2 - a_3 k_2 = c_3 m_2 - c_2 r_3^2, \quad c_3 h_2 - a_3 l_2 = -b_3 m_2 + b_2 r_3^2,$$

$$c_3 k_2 - b_3 l_2 = a_3 m_2 - a_2 r_3^2.$$

(3).. Trinomische Identitäten für Producte von $h, k, l;$

$h_1, k_1, l_1; h_2, k_2, l_2$ in $a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2; a_3, b_3, c_3$:

$$a_1 h + b_1 k + c_1 l = 0, \quad a_2 h + b_2 k + c_2 l = 0,$$

$$a_3 h + b_3 k + c_3 l = g;$$

$$a_1 h_1 + b_1 k_1 + c_1 l_1 = 0, \quad a_3 h_1 + b_3 k_1 + c_3 l_1 = 0,$$

$$a_2 h_1 + b_2 k_1 + c_2 l_1 = -g;$$

$$a_2 h_2 + b_2 k_2 + c_2 l_2 = 0, \quad a_3 h_2 + b_3 k_2 + c_3 l_2 = 0,$$

$$a_1 h_2 + b_1 k_2 + c_1 l_2 = g.$$

(C)... Identitäten für die Quadrate: $h^2, k^2, l^2; h_1^2, k_1^2, l_1^2;$
 $h_2^2, k_2^2, l_2^2:$

$$h^2 + k^2 + l^2 = r_1^2 r_2^2 - m^2, \quad h_1^2 + k_1^2 + l_1^2 = r_1^2 r_3^2 - m_1^2,$$

$$h_2^2 + k_2^2 + l_2^2 = r_2^2 r_3^2 - m_2^2.$$

(D)... Identitäten für die Producte: $hh_1, kk_1, ll_1; hh_2, kk_2, ll_2;$

$$h_1 h_2, k_1 k_2, l_1 l_2:$$

$$hh_1 + kk_1 + ll_1 = -mm_1 + m_2 r_1^2, \quad hh_2 + kk_2 + ll_2 = mm_2 - m_1 r_2^2,$$

$$h_1 h_2 + k_1 k_2 + l_1 l_2 = -m_1 m_2 + m r_3^2.$$

Zweite Gruppe.

enthaltend Identitäten für $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}; \bar{x}', \bar{y}', \bar{z}'; \bar{x}'', \bar{y}'', \bar{z}''.$

(E). Binomische Identitäten für Producte von $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z};$
 $\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}'; \bar{x}'', \bar{y}'', \bar{z}''$ in $a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2; a_3, b_3, c_3:$

$$b_1 \bar{x} - a_1 \bar{y} = -c_1 h - b_2 r_1^2, \quad c_1 \bar{x} - a_1 \bar{z} = b_1 h - c_2 r_1^2,$$

$$c_1 \bar{y} - b_1 \bar{z} = -a_1 h;$$

$$b_2 \bar{x} - a_2 \bar{y} = c_2 h - b_1 r_2^2, \quad c_2 \bar{x} - a_2 \bar{z} = -b_2 h - c_1 r_2^2,$$

$$c_2 \bar{y} - b_2 \bar{z} = a_2 h;$$

$$b_3 \bar{x} - a_3 \bar{y} = a_2 l_1 + a_1 l_2 - b_3 m, \quad c_3 \bar{x} - a_3 \bar{z} = -a_2 k_1 - a_1 k_2 - c_3 m,$$

$$c_3 \bar{y} - b_3 \bar{z} = a_2 h_1 + a_1 h_2.$$

$$b_1 \bar{x}' - a_1 \bar{y}' = -c_1 h_1 - b_3 r_1^2, \quad c_1 \bar{x}' - a_1 \bar{z}' = b_1 h_1 - c_3 r_1^2,$$

$$c_1 \bar{y}' - b_1 \bar{z}' = -a_1 h_1;$$

$$b_2 \bar{x}' - a_2 \bar{y}' = a_3 l - a_1 l_2 - b_2 m_1, \quad c_2 \bar{x}' - a_2 \bar{z}' = -a_3 k + a_1 k_2 - c_2 m_1,$$

$$c_2 \bar{y}' - b_2 \bar{z}' = a_3 h - a_1 h_2;$$

$$b_3 \bar{x}' - a_3 \bar{y}' = c_3 h_1 - b_1 r_3^2, \quad c_3 \bar{x}' - a_3 \bar{z}' = -b_3 h_1 - c_1 r_3^2,$$

$$c_3 \bar{y}' - b_3 \bar{z}' = a_3 h_1;$$

$$b_1 \bar{x}'' - a_1 \bar{y}'' = -a_3 l - a_2 l_1 - b_1 m_2, \quad c_1 \bar{x}'' - a_1 \bar{z}'' = a_3 k + a_2 k_1 - c_1 m_2,$$

$$c_1 \bar{y}'' - b_1 \bar{z}'' = -a_3 h - a_2 h_1;$$

$$\begin{aligned}
 b_2 \bar{x}'' - a_2 \bar{y}'' &= -c_2 h_2 - b_3 r_2^2, & c_2 \bar{x}'' - a_2 \bar{z}'' &= b_2 h_2 - c_3 r_2^2, \\
 c_2 \bar{y}'' - b_2 \bar{z}'' &= -a_2 h_2; \\
 b_3 \bar{x}'' - a_3 \bar{y}'' &= c_3 h_2 - b_2 r_3^2, & c_3 \bar{x}'' - a_3 \bar{z}'' &= -b_3 h_2 - c_2 r_3^2, \\
 c_3 \bar{y}'' - b_3 \bar{z}'' &= a_3 h_2.
 \end{aligned}$$

(S)... Trinomische Identitäten für Producte von \bar{x} , \bar{y} , \bar{z} ;
 \bar{x}' , \bar{y}' , \bar{z}' ; \bar{x}'' , \bar{y}'' , \bar{z}'' in a_1, b_1, c_1 ; a_2, b_2, c_2 ; a_3, b_3, c_3 :

$$\begin{aligned}
 a_1 \bar{x} + b_1 \bar{y} + c_1 \bar{z} &= a_2 r_1^2, & a_2 \bar{x} + b_2 \bar{y} + c_2 \bar{z} &= a_1 r_2^2, \\
 a_3 \bar{x} + b_3 \bar{y} + c_3 \bar{z} &= g_1; \\
 a_1 \bar{x}' + b_1 \bar{y}' + c_1 \bar{z}' &= a_3 r_1^2, & a_3 \bar{x}' + b_3 \bar{y}' + c_3 \bar{z}' &= a_1 r_3^2, \\
 a_2 \bar{x}' + b_2 \bar{y}' + c_2 \bar{z}' &= g_2; \\
 a_2 \bar{x}'' + b_2 \bar{y}'' + c_2 \bar{z}'' &= a_3 r_2^2, & a_3 \bar{x}'' + b_3 \bar{y}'' + c_3 \bar{z}'' &= a_2 r_3^2, \\
 a_1 \bar{x}'' + b_1 \bar{y}'' + c_1 \bar{z}'' &= g_3.
 \end{aligned}$$

(G).. Identitäten für die Quadrate: \bar{x}^2 , \bar{y}^2 , \bar{z}^2 ; \bar{x}'^2 , \bar{y}'^2 , \bar{z}'^2 ;
 \bar{x}''^2 , \bar{y}''^2 , \bar{z}''^2 :

$$\begin{aligned}
 \bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 &= r_1^2 r_2^2 - h^2, & \bar{x}'^2 + \bar{y}'^2 + \bar{z}'^2 &= r_1^2 r_3^2 - h_1^2, \\
 \bar{x}''^2 + \bar{y}''^2 + \bar{z}''^2 &= r_2^2 r_3^2 - h_2^2.
 \end{aligned}$$

(H)... Identitäten für die Producte: $\bar{x}\bar{x}'$, $\bar{y}\bar{y}'$, $\bar{z}\bar{z}'$; $\bar{x}\bar{x}''$, $\bar{y}\bar{y}''$, $\bar{z}\bar{z}''$;
 $\bar{x}'\bar{x}''$, $\bar{y}'\bar{y}''$, $\bar{z}'\bar{z}''$:

$$\begin{aligned}
 \bar{x}\bar{x}' + \bar{y}\bar{y}' + \bar{z}\bar{z}' &= -h h_1 + m_2 r_1^2, & \bar{x}\bar{x}'' + \bar{y}\bar{y}'' + \bar{z}\bar{z}'' &= h h_2 + m_1 r_2^2, \\
 \bar{x}'\bar{x}'' + \bar{y}'\bar{y}'' + \bar{z}'\bar{z}'' &= -h_1 h_2 + m r_3^2.
 \end{aligned}$$

Dritte Gruppe

enthaltend identische Beziehungen zwischen h, k, l ; h_1, k_1, l_1 ;
 h_2, k_2, l_2 und $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$; $\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}'$; $\bar{x}'', \bar{y}'', \bar{z}''$.

(S). Binomische Identitäten für Producte von h, k, l ;
 h_1, k_1, l_1 ; h_2, k_2, l_2 in $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$; $\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}'$; $\bar{x}'', \bar{y}'', \bar{z}''$:

$$\begin{aligned}
 k\bar{x} - h\bar{y} &= -a_2 c_2 r_1^2 + a_1 c_1 r_2^2, & l\bar{x} - h\bar{z} &= a_2 b_2 r_1^2 - a_1 b_1 r_2^2, \\
 l\bar{y} - k\bar{z} &= -a_2^2 r_1^2 + a_1^2 r_2^2; \\
 k_1 \bar{x} - h_1 \bar{y} &= c_1 g_1 - a_2 c_3 r_1^2, & l_1 \bar{x} - h_1 \bar{z} &= -b_1 g_1 + a_2 b_3 r_1^2, \\
 l_1 \bar{y} - k_1 \bar{z} &= a_1 g_1 - a_2 a_3 r_1^2;
 \end{aligned}$$

$$k_2\bar{x} - h_2\bar{y} = c_2g_1 - a_1c_3r_2^2, \quad l_2\bar{x} - h_2\bar{z} = -b_2g_1 + a_1b_3r_2^2, \\ l_2\bar{y} - k_2\bar{z} = a_2g_1 - a_1a_3r_2^2;$$

$$k\bar{x}' - h\bar{y}' = c_1g_2 - a_3c_2r_1^2, \quad l\bar{x}' - h\bar{z}' = -b_1g_2 + a_3b_2r_1^2, \\ l\bar{y}' - k\bar{z}' = a_1g_2 - a_2a_3r_1^2;$$

$$k_1\bar{x}' - h_1\bar{y}' = -a_3c_3r_1^2 + a_1c_1r_3^2, \quad l_1\bar{x}' - h_1\bar{z}' = a_3b_3r_1^2 - a_1b_1r_3^2, \\ l_1\bar{y}' - k_1\bar{z}' = -a_3^2r_1^2 + a_1^2r_3^2;$$

$$k_2\bar{x}' - h_2\bar{y}' = -c_3g_2 + a_1c_2r_3^2, \quad l_2\bar{x}' - h_2\bar{z}' = b_3g_2 - a_1b_2r_3^2, \\ l_2\bar{y}' - k_2\bar{z}' = -a_3g_2 + a_1a_2r_3^2;$$

$$k\bar{x}'' - h\bar{y}'' = -c_2g_3 + a_3c_1r_2^2, \quad l\bar{x}'' - h\bar{z}'' = b_2g_3 - a_3b_1r_2^2, \\ l\bar{y}'' - k\bar{z}'' = -a_2g_3 + a_1a_3r_2^2;$$

$$k_1\bar{x}'' - h_1\bar{y}'' = -c_3g_3 + a_2c_1r_3^2, \quad l_1\bar{x}'' - h_1\bar{z}'' = b_3g_3 - a_2b_1r_3^2, \\ l_1\bar{y}'' - k_1\bar{z}'' = -a_3g_3 + a_1a_2r_3^2;$$

$$k_2\bar{x}'' - h_2\bar{y}'' = -a_3c_3r_2^2 + a_2c_2r_3^2, \quad l_2\bar{x}'' - h_2\bar{z}'' = a_3b_3r_2^2 - a_2b_2r_3^2, \\ l_2\bar{y}'' - k_2\bar{z}'' = -a_3^2r_2^2 + a_2^2r_3^2.$$

(R)... Trinomische Identitäten für Producte von h, k, l ; h_1, k_1, l_1 ; h_2, k_2, l_2 in $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$; $\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}'$; $\bar{x}'', \bar{y}'', \bar{z}''$:

$$h_1\bar{x} + k_1\bar{y} + l_1\bar{z} = -a_1g - h_1m, \quad h_2\bar{x} + k_2\bar{y} + l_2\bar{z} = a_2g - h_2m, \\ h\bar{x} + k\bar{y} + l\bar{z} = -hm;$$

$$h\bar{x}' + k\bar{y}' + l\bar{z}' = a_1g - hm_1, \quad h_2\bar{x}' + k_2\bar{y}' + l_2\bar{z}' = a_3g - h_2m_1, \\ h_1\bar{x}' + k_1\bar{y}' + l_1\bar{z}' = -h_1m_1;$$

$$h\bar{x}'' + k\bar{y}'' + l\bar{z}'' = a_2g - hm_2, \quad h_1\bar{x}'' + k_1\bar{y}'' + l_1\bar{z}'' = -a_3g - h_1m_2, \\ h_2\bar{x}'' + k_2\bar{y}'' + l_2\bar{z}'' = -h_2m_2.$$

(S)... Identitäten für h^2, hk, hl ; h_1^2, h_1k_1, h_1l_1 ; h_2^2, h_2k_2, h_2l_2 :

$$m\bar{x} - h^2 = a_2^2r_1^2 + a_1^2r_2^2 - r_1^2r_2^2, \quad m\bar{y} - hk = a_2b_2r_1^2 + a_1b_1r_2^2, \\ m\bar{z} - hl = a_2c_2r_1^2 + a_1c_1r_2^2;$$

$$m_1\bar{x}' - h_1^2 = a_3^2r_1^2 + a_2^2r_3^2 - r_1^2r_3^2, \quad m_1\bar{y}' - h_1k_1 = a_3b_3r_1^2 + a_1b_1r_3^2, \\ m_1\bar{z}' - h_1l_1 = a_3c_3r_1^2 + a_1c_1r_3^2;$$

$$m_2\bar{x}'' - h_2^2 = a_3^2r_2^2 + a_2^2r_3^2 - r_2^2r_3^2, \quad m_2\bar{y}'' - h_2k_2 = a_3b_3r_2^2 + a_2b_2r_3^2, \\ m_2\bar{z}'' - h_2l_2 = a_3c_3r_2^2 + a_2c_2r_3^2.$$

Die vorliegenden eilf Gleichungssysteme, von deren allgemeiner Giltigkeit man sich bei einiger Vertrautheit mit der Theorie der Determinanten und Formen theilweise ohne jede Rechnung¹ überzeugen kann, ermöglichen zumeist bedeutende Vereinfachungen der ursprünglich resultirenden complicirten Ausdrücke, und zwar sind es speciell die Gleichungssysteme (B), (C), (F), (G), welche in diesem Sinne besonders häufig zur Verwendung kommen.

Es erscheint jetzt noch geboten, die Gliederung meiner Abhandlung in Kürze anzugeben. Wie schon der Titel derselben besagt, existiren unter den hier geltend gemachten Gesichtspunkten im Ganzen zwei universelle Verallgemeinerungen algebraischer Grundoperationen, welche zwar theilweise formal identisch sind, aber dessenungeachtet getrennt discutirt werden müssen. Während nämlich für die erste Verallgemeinerung der Modulus eines Productes beliebig vieler Factoren mit dem Producte der Moduli der letzteren zusammenfällt, ist er in der zweiten Verallgemeinerung demselben nur proportional, und können in Folge dessen für diese Generalisation Producte von zwei oder mehreren Factoren verschwinden, ohne dass ein einziger Factor gleich Null wird.

Fügen wir daher zu den vier erwähnten Forderungen noch die fünfte hinzu, dass die Verknüpfungen irgend zweier n -fach complexer Zahlen durch Addition, Subtraction, Multiplication oder Division für die Moduli der betreffenden Resultate dieselben Gesetze zu liefern haben wie für einfach complexe Zahlen, so kommt überhaupt nur eine einzige universelle Verallgemeinerung in Betracht. Es ist jene, welche in den ersten fünf Paragraphen dieser Abhandlung auseinandergesetzt wird. Die §§. 6—9 enthalten die Darlegung der zweiten universellen Verallgemeinerung, §. 10 endlich betrifft die einfachste Formulirung des Functionsbegriffes für ein n -fach complexes variables Argument.

¹ So bilden z. B. die Identitäten (C) und (G) einfache Specialisirungen der bekannten, von Euler herrührenden Gleichung:

$$\begin{aligned} (w^2+x^2+y^2+z^2)(w'^2+x'^2+y'^2+z'^2) = \\ = (ww'-xx'-yy'-zz')^2 + (wx'+w'x+yz'-y'z)^2 + \\ + (wy'+w'y+x'z-xx')^2 + (wz'+w'z+xy'-x'y)^2. \end{aligned}$$

§. 1.

Erste Verallgemeinerung der Addition.

Addirt man zunächst zwei beliebige einfach complexe Zahlen: $Z_1 = a_1 + b_1 i_1$, $Z_2 = a_2 + b_2 i_1$, so erhalten die Coefficienten: x, y ihrer Summe: $x + y i_1$ bekanntlich die Werthe:

$$x = a_1 + a_2, \quad y = b_1 + b_2,$$

deren gegenseitige Beziehungen sich, wie folgt, präcisiren lassen:

1. Die Summe der Quadrate von x und y ist gleich der Summe der Quadrate der Moduli von Z_1 und Z_2 , vermehrt um das doppelte Deviationsproduct des Zahlenpaares.
2. Die Summe der Producte von x und y in die gleichnamigen Coefficienten von Z_1 resp. Z_2 ist gleich dem Quadrate des Modulus von Z_1 resp. Z_2 , vermehrt um das einfache Deviationsproduct des Zahlenpaares.

Diesen Sätzen entspricht die nachstehende analytische Characteristik der Addition zweier einfach complexer Zahlen: Zwei derartige Zahlen: Z_1, Z_2 addiren, heisst, eine neue Zahl: $x + y i_1$ suchen, deren Coefficienten die Gleichungen:

$$(1). \quad x^2 + y^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2m,$$

$$(2). \quad a_1 x + b_1 y = r_1^2 + m,$$

$$(3). \quad a_2 x + b_2 y = r_2^2 + m$$

befriedigen. — Um jetzt auch zu prüfen, ob die hier gegebene implicite Definition ohne jede Einschränkung gilt, bestimme man x, y einerseits aus (1) und (2) andererseits aus (1) und (3), wobei ausser den geforderten Werthen von x und y im ersteren Falle noch das Werthsystem:

$$x_1 = a_1 + a_2 + \frac{2 b_1 l}{r_1^2}, \quad y_1 = b_1 + b_2 - \frac{2 a_1 l}{r_1^2}$$

und im letzteren analog:

$$x_2 = a_1 + a_2 - \frac{2 b_2 l}{r_2^2}, \quad y_2 = b_1 + b_2 + \frac{2 a_2 l}{r_2^2}$$

als zweite Lösung resultirt. So lange also die Differenz: $l = a_1 b_2 - a_2 b_1$ von Null verschieden ist, characterisiren die

Gleichungen (1) und (2) im Vereine mit (3) ausschliesslich die vorgeschriebenen Werthe von x , y .

Wird ferner $l = 0$, ohne dass r_1 oder r_2 verschwindet, so coïncidiren zwar die Relationen (2) und (3) gemäss der Proportion:

$$\frac{a_1 x + b_1 y}{a_2 x + b_2 y} = \frac{a_1}{a_2} \left(\frac{a_1 a_2 x + a_2 b_1 y}{a_1 a_2 x + a_1 b_2 y} \right) = \frac{a_1}{a_2}$$

sachlich mit einander, zugleich aber entfallen jene Zusatzglieder:

$$\frac{2 b_1 l}{r_1^2}, \quad - \frac{2 a_1 l}{r_1^2}, \quad - \frac{2 b_2 l}{r_2^2}, \quad \frac{2 a_2 l}{r_2^2}$$

durch welche sich x_1 , y_1 resp. x_2 , y_2 für $l \geq 0$ von x und y unterscheiden, d. h. die Characteristik von x und y bleibt nach wie vor eine eindeutige. Dasselbe gilt, wenn einer der beiden Moduli, z. B. r_1 , sich auf Null reducirt, und (2) daher in $0 = 0$ übergeht, weil dann die beiden Lösungen der übrig bleibenden Gleichungen (1) und (3) wegen $r_2 > 0$ ebenfalls einander gleich werden.

Ist endlich $r_1 = r_2 = 0$, so liefert unsere Definition allerdings nur die einzige Bestimmungsgleichung: $x^2 + y^2 = 0$, aber da die Summe der Quadrate beliebig vieler reeller Grössen nur durch das Verschwinden jedes einzelnen Summanden gleich Null werden kann, resultirt wieder nur eine einzige Lösung, nämlich: $x = 0$, $y = 0$.

Im Anschlusse hieran ergibt sich für die additive Verknüpfung zweier n -fach complexer Zahlen gewissermassen von selbst folgende implicite Definition: Zwei n -fach complexe Zahlen: Z_1 , Z_2 addiren, heisst, eine neue Zahl:

$$x_0 + x_1 i_1 + x_2 i_2 + \dots + x_n i_n$$

suchen, deren Coëfficienten den Gleichungen:

$$(4) \dots x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2m,$$

$$(5) \dots a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = r_1^2 + m,$$

$$(6) \dots b_0 x_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_n x_n = r_2^2 + m$$

genügen.¹ — Ihre Auflösung unterliegt keinen weiteren Schwie-

¹ Die correspondirende Grassmann'sche Definition lautet: „Zwei extensive Grössen, die aus demselben System von Einheiten abgeleitet sind, addiren, heisst, ihre zu denselben Einheiten gehörigen Ableitungszahlen addiren, d. h. $\Sigma \alpha e + \Sigma \beta e = \Sigma (\alpha + \beta) e$.“

rigkeiten. Setzt man nämlich — unter $u_0, u_1, u_2, \dots, u_n$ vorläufig unbestimmte Grössen verstanden —

$$x_0 = a_0 + b_0 + u_0, \quad x_1 = a_1 + b_1 + u_1, \quad x_2 = a_2 + b_2 + u_2, \\ \dots x_n = a_n + b_n + u_n,$$

so verwandelt sich (4) nach Substitution der Werthe von r_1^2, r_2^2 und m in:

$$u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2 + \\ + 2(a_0u_0 + a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_nu_n) + \\ + 2(b_0u_0 + b_1u_1 + b_2u_2 + \dots + b_nu_n) = 0,$$

während anderseits aus (5) und (6) die Relationen:

$$a_0u_0 + a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_nu_n = 0, \\ b_0u_0 + b_1u_1 + b_2u_2 + \dots + b_nu_n = 0$$

hervorgehen. Auf diese Art entspringt der Vereinigung von (4) (5) und (6) die Bedingung:

$$u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2 = 0,$$

welche gemäss unserer früheren Bemerkung lediglich durch die Annahmen:

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \dots, u_n = 0$$

befriedigt werden kann. Die so erhaltene Verallgemeinerung der ersten Grundoperation:

$$(7) \dots Z_1 + Z_2 = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)i_1 + (a_2 + b_2)i_2 + \\ \dots + (a_n + b_n)i_n$$

ist überdies eine universelle, denn ihre Form bleibt unverändert, wenn man von zwei n -fach complexen Zahlen zu zwei $(n+1)$ -fach complexen Zahlen übergeht.

Aus diesem Grunde gelangt man auch durch Discussion von (7) zur Kenntniss der allgemeinen Eigenschaften der Operation des Addirens, welche am übersichtlichsten in nachstehender Fassung wiederzugeben sind:

(I). Die Addition zweier n -fach complexer Zahlen liefert für:

$$b_1 = -a_1, \quad b_2 = -a_2, \dots, b_n = -a_n$$

stets eine reelle Summe, dagegen in allen übrigen Fällen eine wenigstens einfach, höchstens n -fach complexe Zahl.

- (II). Die Addition ist allgemein commutativ¹ und associativ,² da einerseits die Coëfficienten von (7) als symmetrische Functionen ihrer Argumente: $a_0, b_0; a_1, b_1; \dots a_n, b_n$ bei einer Vertauschung der Summanden unverändert bleiben, anderseits die Anwendung der in (7) präcisirten Additionsregel auf drei beliebige n -fach complexe Zahlen: Z_1, Z_2 und

$$Z_3 = c_0 + c_1 i_1 + c_2 i_2 + \dots + c_n i_n$$

zu den Gleichungen:

$$\begin{aligned} (Z_1 + Z_2) + Z_3 &= (a_0 + b_0 + c_0) + (a_1 + b_1 + c_1) i_1 + \\ &+ (a_2 + b_2 + c_2) i_2 + \dots + (a_n + b_n + c_n) i_n = \\ &= Z_1 + (Z_2 + Z_3) \text{ führt.} \end{aligned}$$

- (III). Der Modulus: r der Summe: $Z_1 + Z_2$ besitzt kraft der Gleichung (4) und der bereits festgestellten geometrischen Bedeutung von m allgemein den Werth:

$$(8). \quad r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos \theta},$$

ist also niemals grösser als die Summe: $r_1 + r_2$ und niemals kleiner als der absolute Betrag der Differenz: $r_1 - r_2$.

Wie man sieht, entspricht der letzte Satz sachlich und formal dem bekannten Modulsatze für die Summe zweier einfach complexer Zahlen und kann daher auch in genau derselben Weise auf die Summe von beliebig vielen, n -fach complexen Summanden ausgedehnt werden.

¹ Dieses Wort rührt ebenso wie der bereits früher gebrauchte Ausdruck „distributiv“ von Servois her (siehe dessen im V. Bande von Gergonne's Annalen publicirte Abhandlung: „Essai sur un nouveau mode d'exposition des principes du calcul différentiel,“ p. 98), der beide Adjektiva ursprünglich behufs einer sprachlichen Characteristik der Functionalgleichungen:

$$f[\varphi(x)] = \varphi[f(x)], f(x+y+\dots) = f(x) + f(y) + \dots$$

eingeführt hat.

² Dieses Wort ist wahrscheinlich zuerst von R. Hamilton gebraucht worden.

§. 2.

Erste Verallgemeinerung der Subtraction.

Definiren wir diese zweite algebraische Grundoperation entsprechend ihrer ursprünglichen Bedeutung allgemein als Umkehrung der Addition, so sind hiemit auch die Coëfficienten: $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ der Differenz:

$$Z_1 - Z_2 = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 i_1 + \varepsilon_2 i_2 + \dots + \varepsilon_n i_n$$

zweier beliebiger n -fach complexer Zahlen: Z_1, Z_2 indirect präcisirt. Gemäss unserer Definition muss nämlich die Summe von Rest und Subtrahend den Minuend liefern, mithin eine Vertauschung der Grössen:

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n; x_0, x_1, x_2, \dots, x_n \text{ mit:}$$

$$\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n; a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$$

in den Relationen (4), (5) und (6) zu den fraglichen Bestimmungsgleichungen von $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ führen. Man erhält so vorläufig die Beziehungen:

$$\begin{aligned} r_1^2 &= \varepsilon_0^2 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_n^2 + r_2^2 + \\ &+ 2(b_0 \varepsilon_0 + b_1 \varepsilon_1 + b_2 \varepsilon_2 + \dots + b_n \varepsilon_n), \\ a_0 \varepsilon_0 + a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2 + \dots + a_n \varepsilon_n &= \\ = \varepsilon_0^2 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_n^2 + b_0 \varepsilon_0 + b_1 \varepsilon_1 + b_2 \varepsilon_2 + \dots + b_n \varepsilon_n, \\ m &= r_2^2 + b_0 \varepsilon_0 + b_1 \varepsilon_1 + b_2 \varepsilon_2 + \dots + b_n \varepsilon_n \end{aligned}$$

und hieraus für die Aggregate:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0^2 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_n^2, \quad a_0 \varepsilon_0 + a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2 + \dots + a_n \varepsilon_n, \\ b_0 \varepsilon_0 + b_1 \varepsilon_1 + b_2 \varepsilon_2 + \dots + b_n \varepsilon_n \end{aligned}$$

die drei weiteren Gleichungen:

$$(9). \quad \varepsilon_0^2 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_n^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2m,$$

$$(10). \quad a_0 \varepsilon_0 + a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2 + \dots + a_n \varepsilon_n = r_1^2 - m,$$

$$(11). \quad b_0 \varepsilon_0 + b_1 \varepsilon_1 + b_2 \varepsilon_2 + \dots + b_n \varepsilon_n = m - r_2^2,$$

welche sich ihrerseits aus (4), (5), (6) durch Vertauschung von

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_n; \quad b_0, \quad b_1, \quad b_2, \dots, \quad b_n \text{ mit:}$$

$$\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n; \quad -b_0, \quad -b_1, \quad -b_2, \dots, \quad -b_n$$

direct gewinnen lassen. Dieselbe Vertauschung verwandelt daher allgemein $Z_1 + Z_2$ in $Z_1 - Z_2$, d. h. es ist

$$(12) \dots Z_1 - Z_2 = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)i_1 + (a_2 - b_2)i_2 + \dots + (a_n - b_n)i_n.$$

Schliesslich folgt noch für den Modulus: \bar{r} dieser Differenz aus (9) die einfache Formel:

$$(13) \dots \bar{r} = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \theta},$$

kraft welcher die Verallgemeinerung des dritten in §. 1 aufgestellten Satzes auch für die algebraische Summe beliebig vieler n -fach complexer Zahlen giltig bleibt.

§. 3.

Erste Verallgemeinerung der Multiplication.

Der Versuch, auch die dritte algebraische Grundoperation universell zu verallgemeinern, wird zunächst durch die Thatsache nahegelegt, dass die Coëfficienten: x, y des Productes zweier einfach complexer Zahlen:¹

$$Z_1 Z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i_1 = x + y i_1$$

folgende Eigenschaften besitzen:

¹ Es erscheint hier am Platze, auf jene originellen Betrachtungen hinzuweisen, durch welche R. Lipschitz (s. den 1877 zu Bonn erschienenen ersten Band seines Lehrbuches der Analysis, p. 75, 76) den Begriff einer einfach complexen Zahl und die Ausführung algebraischer Grundoperationen mit solchen Zahlen erläutert:

„Da es sich als unmöglich herausstellt, die Summe von zwei Quadraten: $a^2 + b^2$ als ein Product von zwei Factoren darzustellen, die in Bezug auf a und auf b vom ersten Grade sind, so hat man ein Rechenzeichen und ein zugehöriges Rechenverfahren eronnen, wodurch eine solche Darstellung der Form nach erhalten wird.“...„Ein solches zu dem genannten Behufe eingeführtes Rechenzeichen ist die aus der negativen Einheit gezogene Quadratwurzel: $i = \sqrt{-1}$, und mit Hilfe dieses Rechenzeichens, dessen Quadrat immer durch die negative Einheit ersetzt werden muss, entsteht die formelle Zerlegung der Summe $a^2 + b^2$ in ein Product von zwei Factoren:

$$(1) \dots a^2 + b^2 = (a + bi)(a - bi).$$

- 1) Die Summe der Quadrate von x und y ist gleich dem Producte der Quadrate der Moduli von Z_1 und Z_2 .
- 2) Die Summe der Producte von x und y in die gleichnamigen Coëfficienten von Z_1 resp. Z_2 , ist gleich dem Quadrate des Modulus von Z_1 respective Z_2 , multiplicirt mit dem reellen Bestandtheile von Z_2 respective Z_1 .

Da sich nämlich die in 1) und 2) ausgesprochenen Gleichungen:

$$(14) \dots x^2 + y^2 = r_1^2 r_2^2,$$

$$(15) \dots a_1 x + b_1 y = a_2 r_1^2,$$

$$(16) \dots a_2 x + b_2 y = a_1 r_2^2$$

auf dieselben Functionen von x und y wie (1), (2) und (3) beziehen, liefern sie auch eine analoge Generalisation für die Characteristik des Productes zweier n -fach complexer Zahlen:

$$Z_1 Z_2 = x_0 + x_1 i_1 + x_2 i_2 + \dots + x_n i_n,$$

wobei man übrigens bald zu der Einsicht gelangt, dass die so gewonnenen allgemeinen Relationen:

$$(17) \dots x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = r_1^2 r_2^2,$$

$$(18) \dots a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b_0 r_1^2,$$

$$(19) \dots b_0 x_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_n x_n = a_0 r_2^2$$

an und für sich nur mehr für $n = 2$ zur Bestimmung der fraglichen Coëfficienten: $x_0, x_1, x_2 \dots x_n$ ausreichen.¹

Es kann daher der hier eingeschlagene Weg ausschliesslich unter den nachstehenden Bedingungen zum Ziele führen:

„Die Regeln für die Grundoperationen der Rechnung mit complexen Grössen müssen so beschaffen sein, dass sie die Gleichung (1) nach sich ziehen. Sie müssen daher der Form nach aus den Regeln für die Grundoperationen der Rechnung mit beliebigen reellen Grössen abgeleitet werden, während die Regel hinzukommt, dass überall das Zeichen i^2 durch die negative Einheit zu ersetzen ist.“

¹ Verbindet man die aus (17), (18), (19) für $n = 3$ resultirenden Bestimmungsgleichungen der Coëfficienten: x_0, x_1, x_2, x_3 des Productes zweier dreifach complexer Zahlen: Z_1, Z_2 noch mit der, durch die explicite Definition des Productes zweier einfach complexer Zahlen nahegelegten Forderung, dass x_0, x_1, x_2, x_3 zugleich rationale ganze Functionen

1*) Die Lösungen der aus (17), (18), (19) für das Product zweier beliebiger bicomplexer Zahlen:

$$(a_1 + b_1 i_1 + c_1 i_2)(a_2 + b_2 i_1 + c_2 i_2) = x + y i_1 + z i_2$$

resultirenden Bestimmungsgleichungen:

$$(20). \quad .x^2 + y^2 + z^2 = r_1^2 r_2^2,$$

$$(21). \quad .a_1 x + b_1 y + c_1 z = a_2 r_1^2,$$

$$(22). \quad .a_2 x + b_2 y + c_2 z = a_1 r_2^2$$

müssen die diesbezügliche Specialisirung unserer vierten allgemeinen Forderung:

$$x + y i_1 + z i_2 = f_0(a_1, a_2, m, r_1, r_2) + \\ + f_1(a_1, b_1, a_2, b_2, m, r_1, r_2) i_1 + f_2(a_1, c_1, a_2, c_2, m, r_1, r_2) i_2$$

in der Weise befriedigen, dass eine Vertauschung von b_1, b_2 mit c_1, c_2 genügt, um den Coëfficienten von i_1 in jenen von i_2 zu verwandeln. — Denn liessen sich f_1, f_2 nicht in diesem Sinne auf einander beziehen, so würde beim Übergange von bicomplexen zu n -fach complexen Zahlen für die Bildung der Functionen: f_3, f_4, \dots, f_n jede sichere Directive fehlen.

2*) Die im Falle des Zutreffens der ersten Bedingung ohne weitere Rechnung construierbaren Functionen: f_3, f_4, \dots, f_n müssen im Vereine mit f_0, f_1, f_2 gleichzeitig reelle Wurzeln von (17), (18), (19) vorstellen.

Neben diesen beiden, die Formen der jeweiligen Lösungen characterisirenden Bedingungen muss schliesslich noch eine eigenthümliche Beschränkung hinsichtlich der Anzahl der Lösungen geltend gemacht werden, welche bereits in der Discussion der Gleichungen (14), (15) und (16) zum Ausdrucke kommt. Hiebei zeigt sich nämlich, dass jene Lösungen:

von $a_0, a_1, a_2, a_3; b_0, b_1, b_2, b_3$ vorstellen müssen, so ergeben sich für das in Frage stehende Product dieselben zwei Werthe, welche der Quaternionen-Calcul für $Z_1 Z_2$ und $Z_2 Z_1$ liefern würde, sobald man i_1, i_2, i_3 mit dessen sogenannten Einheiten: i, j, k vertauscht. Auf diese Art begründen die Fundamentalgleichungen (17), (18) und (19) indirect auch eine neue Auffassungsweise der Quaternionen, wobei denselben jedoch nicht Punkte des Raumes, sondern solche einer vierfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit zugeordnet werden.

$$x_1 = a_1 a_2 + b_1 b_2, \quad y_1 = -l; \quad x_2 = a_1 a_2 + b_1 b_2, \quad y_2 = +l,$$

welche für $l \leq 0$ den Gleichungen (14) und (15) resp. (14) und (16) zugehören, für $l=0$ alle drei Relationen befriedigen, ohne gleichzeitig in die vorgeschriebenen Werthe von x und y überzugehen.

Sobald demnach eine Rechnungsoperation durch ein System von Gleichungen zwischen den Coëfficienten der operativ zu verknüpfenden Zahlen und des Resultates der Operation characterisirt wird, erheischt eine derartige implicite Definition gemeinlich noch einen beschränkenden Zusatz, der sich am einfachsten, wie folgt, formuliren lässt: In allen Fällen, wo zwischen den Coëfficienten der gegebenen Zahlen irgend welche, die Anzahl der betreffenden Definitionsgleichungen reducirende Beziehungen stattfinden, kommen für das Resultat der Operation nur solche Lösungen in Betracht, welche zugleich in den allgemeinen Lösungen jener Definitionsgleichungen als Specialfälle enthalten sind.¹

Der angeführte Zusatz tritt sofort bei den Definitionsgleichungen der Multiplication zweier einfach complexer Zahlen in Kraft, weil die Annahme: $l=0$ die Relation (16) zu einer nothwendigen Folge von (15) macht, d. h. die Anzahl der Definitionsgleichungen in der That herabsetzt. Auf diese Art wird die Lösung:

$$x = a_1 a_2 + b_1 b_2, \quad y = 0$$

definitiv ausgeschieden, und bilden die vorgeschriebenen Specialisirungen von x und y nunmehr auch für $l=0$ die allein in Betracht kommenden Lösungen für x und y .

Nachdem hiemit die leitenden Gesichtspunkte für eine Bearbeitung der allgemeinen Gleichungen (17), (18) und (19) gewonnen sind, besteht unsere nächste Aufgabe darin, die Relationen (20), (21), (22) als die drei wichtigsten Specialisirungen von (17), (18) und (19) vollständig zu erledigen.

Zu diesem Zwecke setzen wir, weil die aus (20), (21) und (22) ableitbaren Resolventen für x, y, z :

¹ Diese Beschränkung verliert ihren willkürlichen Character erst durch den Nachweis, dass die betreffenden allgemeinen Lösungen zugleich in dem früher definirten Sinne universell sind.

$$\begin{aligned}
 (r_1^2 r_2^2 - m^2) x^2 + 2 \{ a_2 (c_2 k - b_2 l) r_1^2 - a_1 (c_1 k - b_1 l) r_2^2 \} x &= \\
 = h^2 r_1^2 r_2^2 - (a_2 b_2 r_1^2 - a_1 b_1 r_2^2)^2 - (a_2 c_2 r_1^2 - a_1 c_1 r_2^2)^2, \\
 (r_1^2 r_2^2 - m^2) y^2 - 2 \{ a_2 (c_2 h - a_2 l) r_1^2 - a_1 (c_1 h - a_1 l) r_2^2 \} y &= \\
 = k^2 r_1^2 r_2^2 - (a_2^2 r_1^2 - a_1^2 r_2^2)^2 - (a_2 c_2 r_1^2 - a_1 c_1 r_2^2)^2, \\
 (r_1^2 r_2^2 - m^2) z^2 + 2 \{ a_2 (b_2 h - a_2 k) r_1^2 - a_1 (b_1 h - a_1 k) r_2^2 \} z &= \\
 = l^2 r_1^2 r_2^2 - (a_2^2 r_1^2 - a_1^2 r_2^2)^2 - (a_2 b_2 r_1^2 - a_1 b_1 r_2^2)^2
 \end{aligned}$$

infolge des complicirten Baues ihrer Coëfficienten vorläufig nicht weiter verwerthbar sind, allgemein:

$$x = ht + u, \quad y = kt + v, \quad z = lt + w$$

und gewinnen so unter Benützung der Identitätensysteme (B) und (C) die Beziehungen:

$$\begin{aligned}
 (r_1^2 r_2^2 - m^2) t^2 + 2(hu + kv + lw)t + u^2 + v^2 + w^2 &= r_1^2 r_2^2, \\
 a_1 u + b_1 v + c_1 w &= a_2 r_1^2, \quad a_2 u + b_2 v + c_2 w = a_1 r_2^2,
 \end{aligned}$$

welche im Ganzen vier unbestimmte Grössen: t, u, v, w enthalten und daher noch die Aufstellung einer vierten arbiträren Relation ermöglichen. Als solche diene die Bedingung:

$$hu + kv + lw = -hm,$$

deren Combination mit der zweiten und dritten Transformationsgleichung gemäss den Identitätensystemen (F) und (K) für u, v, w unmittelbar die Werthe:

$$u = \bar{x}, \quad v = \bar{y}, \quad w = \bar{z}$$

liefert, so dass jetzt nur mehr die erste Transformationsgleichung zu erledigen ist. Dieselbe verwandelt sich nach Einführung der Identität:

$$u^2 + v^2 + w^2 = \bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 = r_1^2 r_2^2 - h^2$$

und der im Folgenden beibehaltenen Abkürzungen:

$$r_1 r_2 - m = p, \quad r_1 r_2 + m = q$$

augenscheinlich in die einfache quadratische Gleichung:

$$pqt^2 - 2hmt - h^2 = 0$$

mit den beiden, für alle reellen Specialisirungen von $a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2$ reell bleibenden Wurzeln:

$$t_1 = \frac{h(m+r_1r_2)}{pq} = \frac{h}{p}, \quad t_2 = \frac{h(m-r_1r_2)}{pq} = -\frac{h}{q},$$

wonach die vollständige Lösung von (20), (21) und (22) durch das Gleichungssystem:

$$(e) \quad \begin{cases} x_1 = \bar{x} + \frac{h^2}{p}, & y_1 = \bar{y} + \frac{hk}{p}, & z_1 = \bar{z} + \frac{hl}{p}; \\ x_2 = \bar{x} - \frac{h^2}{q}, & y_2 = \bar{y} - \frac{hk}{q}, & z_2 = \bar{z} - \frac{hl}{q} \end{cases}$$

gegeben erscheint.

Ihre Discussion gestaltet sich am einfachsten, wenn man die erhaltenen Resultate geometrisch interpretirt, also der Beziehung (20) eine aus dem Ursprunge: O eines rechtwinkligen dreiaxigen Coordinatensystems mit dem Radius: $r_1 r_2$ beschriebene Kugelfläche und den Relationen (21), (22) zwei Ebenen zuordnet, deren Schnittlinie gemäss ihren charakteristischen Gleichungen:

$$lx = h(z - \bar{z}) + l\bar{x}, \quad ly = k(z - \bar{z}) + l\bar{y}$$

bezüglich der drei Halbaxen: OX, OY, OZ die Richtungscosinuse:

$$\cos \lambda = \frac{h}{\sqrt{pq}}, \quad \cos \mu = \frac{k}{\sqrt{pq}}, \quad \cos \nu = \frac{l}{\sqrt{pq}}$$

besitzt. Diese Gerade trifft die Kugelfläche für $h \geq 0$ jederzeit in zwei Punkten mit den Coordinaten: $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2$, während für $h = 0$ zwei Fälle in Betracht kommen, je nachdem die Nenner: p, q gleichzeitig von Null verschieden sind, oder aber entweder p oder q verschwindet.¹

Im ersten Falle reduciren sich die Werthsysteme (e) auf die einzige Lösung:

$$(e^*) \quad x = \bar{x}, \quad y = \bar{y}, \quad z = \bar{z},$$

wobei die Relationen der Schnittlinie kraft der für $h = 0$ eintretenden Specialisirung von

$$h\bar{x} + k\bar{y} + l\bar{z} = -hm, \quad \text{nämlich: } k\bar{y} = -l\bar{z}$$

die einfachen Formen: $x = \bar{x}, \quad y\bar{y} + z\bar{z} = \bar{y}^2 + \bar{z}^2$

¹ Für $p = q = 0$ ist nämlich auch $r_1 r_2 = 0$, also eindeutig: $x = 0, y = 0, z = 0$, so dass dieser Fall keine besondere Discussion erfordert.

annehmen, d. h.: die Gerade tangirt dann jenen Kreis, in welchem eine zur Ebene YOZ im Abstände \bar{x} parallel gelegte Ebene die Kugelfläche durchschneidet.

Im zweiten Falle verschwinden kraft der Identität:

$$h^2 + k^2 + l^2 = pq$$

neben h auch k und l , so dass allgemein:

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1z}{a_2x + b_2y + c_2z} = \frac{a_1}{a_2} \left(\frac{a_1a_2x + a_2b_1y + a_2c_1z}{a_1a_2x + a_1b_2y + a_1c_2z} \right) = \frac{a_1}{a_2}$$

wird, d. h. die vorgelegten Gleichungen besitzen in diesem Falle, rein analytisch aufgefasst, insoferne unendlich viele Lösungen, als für x, y, z die Coordinaten aller Punkte substituirt werden können, welche die Kugelfläche mit der einzigen, durch (21), (22) characterisirten Ebene gemein hat.

Um nunmehr zu entscheiden, welche von den unendlich vielen, für x, y, z analytisch zulässigen Werthsystemen sich auf das Resultat der durch (20), (21) und (22) implicit definirten Rechnungsoperation beziehen, drücken wir die Coëfficienten der drei quadratischen Resolventen für x, y, z durch $h, k, l, p, q, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ aus und gewinnen hiedurch nach Anwendung der Identitätensysteme (\mathfrak{A}), (\mathfrak{S}) und (\mathfrak{L}) die relativ einfachen Gleichungen:

$$pqx^2 - 2(pq\bar{x} + h^2m)x = (h^2 + p\bar{x})(h^2 - q\bar{x}),$$

$$pqy^2 - 2(pq\bar{y} + hkm)y = (hk + p\bar{y})(hk - q\bar{y}),$$

$$pqz^2 - 2(pq\bar{z} + hlm)z = (hl + p\bar{z})(hl - q\bar{z}),$$

welche speciell für $h = 0$ in:

$$pq(x - \bar{x})^2 = 0, \quad pq(y - \bar{y})^2 = 0, \quad pq(z - \bar{z})^2 = 0$$

übergehen, mithin das Werthsystem (e^*) als eine von den jeweiligen Specialisirungen der Grössen p, q völlig unabhängige Lösung characterisiren.

Aus diesem Grunde sind wir berechtigt, den bereits für $n = 1$ unentbehrlichen Zusatz bezüglich der Anzahl der Lösungen hier derart zu verwerthen, dass wir für die Coëfficienten: x, y, z des Productes $Z_1 Z_2$ auch bei verschwindendem p oder q lediglich das Werthsystem (e^*) zulassen, respective die Multiplication zweier bicomplexer Zahlen für $h = 0$ allgemein als eine

eindeutige Operation betrachten. Es ergibt sich daher schliesslich die nachstehende explicite Definition des Multiplicirens für den Specialfall: $n = 2$:

$a_1 + b_1 i_1 + c_1 i_2$ mit $a_2 + b_2 i_1 + c_2 i_2$ multipliciren, heisst, diesen Zahlen für $b_1 c_2 \leq b_2 c_1$ zwei neue, höchstens bicomplexe Zahlen: $x_1 + y_1 i_1 + z_1 i_2$, $x_2 + y_2 i_1 + z_2 i_2$, dagegen für $b_1 c_2 = b_2 c_1$ eine einzige, höchstens bicomplexe Zahl: $\bar{x} + \bar{y} i_1 + \bar{z} i_2$ zuordnen.

Die weitere Frage, ob die gegebene Definition auch eine universelle Verallgemeinerung gestatte, erfordert vor Allem eine Umformung von x_1, y_1, z_1 ; x_2, y_2, z_2 in solche Ausdrücke, welche die speciell auf bicomplexe Zahlen bezüglichen Hilfsfunctionen: h, k, l nicht mehr enthalten.

Diese Transformation wird durch die unmittelbar aus (e) hervorgehenden Formeln:

$$x_1 = \frac{1}{p} \{r_1 r_2 \bar{x} - (m\bar{x} - h^2)\}, \quad y_1 = \frac{1}{p} \{r_1 r_2 \bar{y} - (m\bar{y} - hk)\},$$

$$z_1 = \frac{1}{p} \{r_1 r_2 \bar{z} - (m\bar{z} - hl)\};$$

$$x_2 = \frac{1}{q} \{r_1 r_2 \bar{x} + (m\bar{x} - h^2)\}, \quad y_2 = \frac{1}{q} \{r_1 r_2 \bar{y} + (m\bar{y} - hk)\},$$

$$z_2 = \frac{1}{q} \{r_1 r_2 \bar{z} + (m\bar{z} - hl)\}$$

und durch das Identitätensystem (Q) vermittelt, indem die Vertauschung der Differenzen:

$$m\bar{x} - h^2, \quad m\bar{y} - hk, \quad m\bar{z} - hl$$

mit den, ihnen äquivalenten Ausdrücken:

$$a_2^2 r_1^2 + a_1^2 r_2^2 - r_1^2 r_2^2, \quad a_2 b_2 r_1^2 + a_1 b_1 r_2^2, \quad a_2 c_2 r_1^2 + a_1 c_1 r_2^2$$

auf folgende Endresultate führt:

$$x_1 = r_1 r_2 - \frac{1}{p} (a_2 r_1 - a_1 r_2)^2, \quad y_1 = -\frac{1}{p} (a_2 r_1 - a_1 r_2)(b_2 r_1 - b_1 r_2),$$

$$z_1 = -\frac{1}{p} (a_2 r_1 - a_1 r_2)(c_2 r_1 - c_1 r_2);$$

$$x_2 = \frac{1}{q} (a_2 r_1 + a_1 r_2)^2 - r_1 r_2, \quad y_2 = \frac{1}{q} (a_2 r_1 + a_1 r_2)(b_2 r_1 + b_1 r_2),$$

$$z_2 = \frac{1}{q} (a_2 r_1 + a_1 r_2)(c_2 r_1 + c_1 r_2).$$

Dieselben lassen sich, da sie der ersten, früher aufgestellten Forderung genügen, offenbar direct für n -fach complexe Zahlen generalisiren und liefern so die beiden Werthsysteme:

$$(f) \dots \left\{ \begin{array}{l} x'_0 = r_1 r_2 - \frac{1}{p} (b_0 r_1 - a_0 r_2)^2, \\ x'_1 = -\frac{1}{p} (b_0 r_1 - a_0 r_2)(b_1 r_1 - a_1 r_2), \\ x'_2 = -\frac{1}{p} (b_0 r_1 - a_0 r_2)(b_2 r_1 - a_2 r_2), \\ \dots \\ x'_n = -\frac{1}{p} (b_0 r_1 - a_0 r_2)(b_n r_1 - a_n r_2); \end{array} \right.$$

$$(f^*) \dots \left\{ \begin{array}{l} x''_0 = \frac{1}{q} (b_0 r_1 + a_0 r_2)^2 - r_1 r_2, \\ x''_1 = \frac{1}{q} (b_0 r_1 + a_0 r_2)(b_1 r_1 + a_1 r_2), \\ x''_2 = \frac{1}{q} (b_0 r_1 + a_0 r_2)(b_2 r_1 + a_2 r_2), \\ \dots \\ x''_n = \frac{1}{q} (b_0 r_1 + a_0 r_2)(b_n r_1 + a_n r_2), \end{array} \right.$$

deren Brauchbarkeit nur mehr an die Bedingung geknüpft ist, dass die allgemeinen Definitionsgleichungen: (17), (18) und (19) durch Substitution von:

$$x'_0, x'_1, x'_2, \dots, x'_n \text{ beziehungsweise: } x''_0, x''_1, x''_2, \dots, x''_n$$

für $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ identisch erfüllt werden müssen.

Der diesbezügliche Nachweis ist zunächst für das Werthsystem (f) leicht zu erbringen, indem die Aggregate:

$$x_0'^2 + x_1'^2 + x_2'^2 + \dots + x_n'^2, \quad a_0 x'_0 + a_1 x'_1 + a_2 x'_2 + \dots + a_n x'_n, \\ b_0 x'_0 + b_1 x'_1 + b_2 x'_2 + \dots + b_n x'_n$$

bei Anwendung der einfachen Identitäten:

$$(b_0 r_1 - a_0 r_2)^2 + (b_1 r_1 - a_1 r_2)^2 + (b_2 r_1 - a_2 r_2)^2 + \dots \\ + (b_n r_1 - a_n r_2)^2 = 2p r_1 r_2,$$

$$a_0(b_0r_1 - a_0r_2) + a_1(b_1r_1 - a_1r_2) + a_2(b_2r_1 - a_2r_2) + \dots \\ + a_n(b_nr_1 - a_nr_2) = -pr_1,$$

$$b_0(b_0r_1 - a_0r_2) + b_1(b_1r_1 - a_1r_2) + b_2(b_2r_1 - a_2r_2) + \dots \\ + b_n(b_nr_1 - a_nr_2) = pr_2$$

der Reihe nach in die Ausdrücke:

$$r_1^2 r_2^2 - \frac{2r_1 r_2}{p} (b_0 r_1 - a_0 r_2)^2 + \frac{1}{p^2} (b_0 r_1 - a_0 r_2)^2 (2pr_1 r_2), \\ a_0 r_1 r_2 - \frac{1}{p} (b_0 r_1 - a_0 r_2) (-pr_1) \\ b_0 r_1 r_2 - \frac{1}{p} (b_0 r_1 - a_0 r_2) (pr_2)$$

übergehen, also nach wenigen, unmittelbar ersichtlichen Reductionen die vorgeschriebenen Werthe: $r_1^2 r_2^2$, $b_0 r_1^2$, $a_0 r_2^2$ erhalten.

Mit der Brauchbarkeit des ersten Werthsystems erscheint aber auch jene des zweiten in dem hier geforderten Sinne bewiesen, denn eine Vertauschung von r_1 mit: $-r_1$ verwandelt x'_0 , x'_1 , x'_2 , x'_n sofort in: x''_0 , x''_1 , x''_2 , x''_n , ohne die Relationen (17), (18) und (19) irgendwie zu verändern.

Um unsere letzten Ergebnisse jetzt noch analytisch zu vervollständigen, bedürfen wir eines Systems von Formeln, welche eine directe Vergleichung der Werthsysteme (f), (f*) mit (e), (e*) ermöglichen, sich also in analoger Weise wie x_1 , x_2 ; y_1 , y_2 ; z_1 , z_2 aus je einer rationalen ganzen und einer irrationalen, bedingungsweise verschwindenden Function der jeweiligen Zahlencoefficienten zusammensetzen.

Zu diesem Zwecke müssen die in x'_0 , x''_0 ; x'_1 , x''_1 ; . . . x'_n , x''_n vorkommenden binomischen Factoren mit einander multiplicirt und die jeweiligen Coefficienten von $r_1 r_2$ in die betreffenden Ausdrücke als selbstständige Zusatzgrößen eingeführt werden, woraus unter Benützung der Hilfsfunctionen:

$$d = m - a_0 b_0, \quad d_1 = r_1^2 - a_0^2, \quad d_2 = r_2^2 - b_0^2$$

folgende zweite Darstellungsweise von (f), (f*) resultirt:¹

¹ Wollte man die Zähler der hier gegebenen Ausdrücke als Functionen von Größen darstellen, welche den Differenzen h , k , l auch in formaler Hinsicht zugeordnet sind, so würde hiedurch die Complication der

$$\begin{aligned}
 x'_0 &= a_0 b_0 - d + \frac{1}{p} (d_1 d_2 - d^2), \\
 x'_1 &= a_1 b_0 + a_0 b_1 + \frac{1}{p} \{b_0(a_1 d - b_1 d_1) + a_0(b_1 d - a_1 d_2)\}, \\
 x'_2 &= a_2 b_0 + a_0 b_2 + \frac{1}{p} \{b_0(a_2 d - b_2 d_1) + a_0(b_2 d - a_2 d_2)\}, \\
 x'_n &= a_n b_0 + a_0 b_n + \frac{1}{p} \{b_0(a_n d - b_n d_1) + a_0(b_n d - a_n d_2)\};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x''_0 &= a_0 b_0 - d - \frac{1}{q} (d_1 d_2 - d^2), \\
 x''_1 &= a_1 b_0 + a_0 b_1 - \frac{1}{q} \{b_0(a_1 d - b_1 d_1) + a_0(b_1 d - a_1 d_2)\}, \\
 x''_2 &= a_2 b_0 + a_0 b_2 - \frac{1}{q} \{b_0(a_2 d - b_2 d_1) + a_0(b_2 d - a_2 d_2)\}, \\
 x''_n &= a_n b_0 + a_0 b_n - \frac{1}{q} \{b_0(a_n d - b_n d_1) + a_0(b_n d - a_n d_2)\}.
 \end{aligned}$$

betreffenden Resultate für grössere Werthe von n nicht unbeträchtlich erhöht werden. Dagegen liefert die angedeutete Transformation speciell für das Product zweier dreifach complexer Zahlen:

$$a_1 + b_1 i_1 + c_1 i_2 + d_1 i_3, \quad a_2 + b_2 i_1 + c_2 i_2 + d_2 i_3$$

nach Einführung der Hilfsfunctionen: h, k, l und:

$$h' = b_1 d_2 - b_2 d_1, \quad h'' = c_1 d_2 - c_2 d_1, \quad k' = a_2 d_1 - a_1 d_2$$

in der That noch sehr übersichtliche Resultate, nämlich:

$$\begin{aligned}
 & a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2 + \frac{1}{p} (h^2 + h'^2 + h''^2) + \\
 & + \{a_2 b_1 + a_1 b_2 + \frac{1}{p} (hk + h'k')\} i_1 + \{a_2 c_1 + a_1 c_2 + \frac{1}{p} (hl + h''k')\} i_2 + \\
 & + \{a_2 d_1 + a_1 d_2 + \frac{1}{p} (h'l - h''k)\} i_3 \text{ und:} \\
 & a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2 - \frac{1}{q} (h^2 + h'^2 + h''^2) + \\
 & + \{a_2 b_1 + a_1 b_2 - \frac{1}{q} (hk + h'k')\} i_1 + \{a_2 c_1 + a_1 c_2 - \frac{1}{q} (hl + h''k')\} i_2 + \\
 & + \{a_2 d_1 + a_1 d_2 - \frac{1}{q} (h'l - h''k)\} i_3,
 \end{aligned}$$

wobei sich ausserdem für $r_1^2 r_2^2$ die in der Euler'schen Identität nicht enthaltene Zerlegung: $r_1^2 r_2^2 = h^2 + h'^2 + h''^2 + k^2 + k'^2 + l^2 + m^2$ ergibt.

Hienach können die Grössen: $x'_0, x''_0; x'_1, x''_1; \dots x'_n, x''_n$ nicht allein für $n = 2$, sondern auch für beliebige höhere Werthe von n bedingungsweise mit einander coïncidiren, vorausgesetzt, dass die Coëfficienten: $a_1, \dots a_s, \dots a_n; b_1, \dots b_s, \dots b_n$ — unter $a, b; x_1, \dots x_s, \dots x_n$ irgend welche reelle Zahlen verstanden — den Relationen:

$$(g) \dots \begin{cases} a_1 = ax_1, \dots a_s = ax_s, \dots a_n = ax_n; \\ b_1 = bx_1, \dots b_s = bx_s, \dots b_n = bx_n \end{cases}$$

entsprechen, und demgemäss d, d_1, d_2 als Producte eines und desselben Factors:

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = e^2$$

in ab, a^2, b^2 auftreten. Für diese Annahmen verschwinden nämlich die Coëfficienten von a_0 und b_0 kraft den Gleichungen:

$$d_1 d_2 - d^2 = (a^2 e_1^2)(b^2 e_1^2) - (ab e_1^2)^2 = 0,$$

$$a_s d - b_s d_1 = (ax_s)(ab e_1^2) - (bx_s)(a^2 e_1^2) = 0,$$

$$b_s d - a_s d_2 = (bx_s)(ab e_1^2) - (ax_s)(b^2 e_1^2) = 0$$

in sämtlichen Factoren von $\frac{1}{p}$ und $\frac{1}{q}$, d. h. man erhält vorläufig unter Hinzufügung der Beschränkung: $pq > 0$ in der That:

$$(h) \dots \begin{cases} x'_0 = x''_0 = a_0 b_0 - d = \bar{x}_0, \\ x'_1 = x''_1 = a_1 b_0 + a_0 b_1 = \bar{x}_1, \\ x'_2 = x''_2 = a_2 b_0 + a_0 b_2 = \bar{x}_2, \\ \dots \\ x'_n = x''_n = a_n b_0 + a_0 b_n = \bar{x}_n, \end{cases}$$

welches Werthsystem zugleich als directe Generalisation von (e^*) aufzufassen ist.

Sobald sich mithin darthun lässt, dass die Erfüllung der Gleichungen (g) seitens der Coëfficienten: $a_1, \dots a_n, b_1, \dots b_n$ eine nothwendige Vorbedingung für das Verschwinden von p respective q bildet, darf das Werthsystem (h) dem Producte zweier n -fach complexer Zahlen auch für $p > 0, q = 0$ beziehungsweise: $p = 0, q > 0$ in derselben Weise zugeordnet werden, wie dies mit dem Werthsysteme (e^*) speciell in Bezug auf das Product zweier bicomplexer Zahlen geschehen ist.

Um hierüber die nöthige Klarheit zu gewinnen, gehe man von der Erwägung aus, dass einer der beiden Nenner: p , q in Hinblick auf die Identitäten:

$$r_1 r_2 - m = \frac{1}{2}(r_1 + r_2 + r)(r_1 + r_2 - r),$$

$$r_1 r_2 + m = \frac{1}{2}(r_1 + r_2 + \bar{r})(r_1 + r_2 - \bar{r})$$

ausschliesslich für $\cos \theta = \pm 1$, also nur in jenen Fällen gleich Null werden kann, wo die den Zahlen: Z_1 , Z_2 correspondirenden Punkte: M_1 , M_2 mit dem Ursprunge O des gewählten Axensystems in einer und derselben Geraden liegen.

Nun besteht aber bekanntlich für die Coordinaten: ξ_0 , ξ_1 , ξ_2 , . . . ξ_n jedes Punktes einer solchen Geraden — unter A_0 , A_1 , A_2 , . . . A_n irgend welche reelle Constanten gedacht — die fortlaufende Proportion:

$$\xi_0 : \xi_1 : \xi_2 : \dots : \xi_n = A_0 : A_1 : A_2 : \dots : A_n,$$

aus welcher speciell für die Coordinaten von M_1 und M_2 direct die analoge Proportion:

$$a_0 : a_1 : a_2 : \dots : a_n = b_0 : b_1 : b_2 : \dots : b_n$$

hervorgeht. Auf diese Art werden für $p = 0$, respective $q = 0$ ausser dem Gleichungssysteme (g) noch zwei weitere Specialbedingungen von der Gestalt: $a_0 = ax_0$, $b_0 = bx_0$ befriedigt, mit welcher Folgerung auch der in Frage stehende Beweis seinen Abschluss gefunden hat.

Indem wir hinfort alle Zahlen, die bezüglich ihrer Coefficienten die Relationen (g) erfüllen und daher Punkten einer und derselben, die reelle Zahlenaxe: $J_0 J'_0$ enthaltenden Ebene zugehören — mögen nun deren gegenseitige gerade Verbindungslinien überdies noch den Ursprung des Coordinatensystems durchsetzen oder nicht — als *complanar* bezeichnen, ferner solche Zahlen, welche Punkten verschiedener, durch $J_0 J'_0$ gelegter Ebenen correspondiren, *diplanar*¹

¹ Die Bezeichnungen „complanar“ und „diplanar“ sind zuerst von R. Hamilton eingeführt worden, welcher dieselben in seinem Quaternionen-Calcul (Elem. d. Quat., I. Bd., 2. Th., p. 147, 148), wie folgt, erläutert: „Irgend zwei Quaternionen, welche eine gemeinsame Ebene haben, die durch

nennen, gewinnt die explicite Definition des Multiplicirens für zwei beliebige n -fach complexe Zahlen folgende Fassung; ¹

Zwei n -fach complexe Zahlen: Z_1, Z_2 mit einander multipliciren, heisst, denselben, wenn sie diplanar sind, zwei neue, höchstens n -fach complexe Zahlen:

$$x'_0 + x'_1 i_1 + x'_2 i_2 + \dots + x'_n i_n, \quad x''_0 + x''_1 i_1 + x''_2 i_2 + \dots + x''_n i_n,$$

hingegen, falls sie complanar sind, eine einzige, höchstens n -fach complexe Zahl: $\bar{x}_0 + \bar{x}_1 i_1 + \bar{x}_2 i_2 + \dots + \bar{x}_n i_n$ zuordnen.

Diese Definition involvirt die nachstehenden speciellern Sätze:

1**) Das Product einer reellen in eine n -fach complexe Zahl wird durch Multiplication jedes Coëfficienten der letzteren mit dem gegebenen reellen Factor erhalten, denn aus dem Werthsysteme (f) resultirt für $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$ direct die Gleichung:

$$(a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + \dots + a_n i_n) b_0 = a_0 b_0 + a_1 b_0 i_1 + a_2 b_0 i_2 + \dots + a_n b_0 i_n.$$

2**) Das Product zweier n -fach imaginärer Zahlen:

$$a_1 i_1 + a_2 i_2 + \dots + a_n i_n, \quad b_1 i_1 + b_2 i_2 + \dots + b_n i_n$$

den Anfangspunkt geht, können complanare Quaternionen genannt werden; aber irgend zwei Quaternionen, die verschiedene Ebenen haben, mögen, im Gegensatze dazu, diplanar heissen.“

¹ Die diesbezügliche Grassmann'sche Definition (s. Ausdehnungslehre p. 20) lautet: „Unter dem Producte $[ab]$ einer extensiven Grösse a in eine andere b ist diejenige extensive Grösse (oder auch Zahlgrösse) zu verstehen, die man erhält, indem man zuerst jede der Einheiten, aus denen die erste Grösse a numerisch abgeleitet ist, mit jeder der Einheiten, aus denen die zweite b numerisch abgeleitet ist, zu einem Producte verknüpft, dessen erster Factor die Einheit der ersten Grösse und dessen zweiter Factor die Einheit der zweiten Grösse ist, dann dies Product mit dem Producte derjenigen Ableitungszahlen multiplicirt, mit welchen jene Einheiten verknüpft waren, und die sämmtlichen so gewonnenen Producte addirt, d. h., es ist

$$\sum \alpha_r e_r \sum \beta_s e_s = \sum \alpha_r \beta_s [e_r e_s],$$

wo e_r, e_s die Einheiten, aus denen die Grössen numerisch abgeleitet sind, α_r, β_s die zugehörigen Ableitungszahlen bezeichnen, und die Summe sich auf die verschiedenen Werthe der Indices r und s bezieht.“

ist gemäss den aus (f), (f*) und (h) für $a_0 = b_0 = 0$ entsprechenden Relationen:

$$\begin{aligned} x'_0 &= r_1 r_2 = \sqrt{d_1 d_2}, & x'_1 &= x'_2 = \dots = x'_n = 0; \\ x''_0 &= -r_1 r_2 = -\sqrt{d_1 d_2}, & x''_1 &= x''_2 = \dots = x''_n = 0; \\ \bar{x}_0 &= -d, & \bar{x}_1 &= \bar{x}_2 = \dots = \bar{x}_n = 0 \end{aligned}$$

immer reell und zwar für diplanare Factoren gleich:

$$\pm \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)},$$

dagegen bei complanaren Factoren identisch mit dem Aggregate:

$$-(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n),$$

so dass speciell das Quadrat jeder n -fach imaginären Zahl der negativ genommenen Summe der Quadrate ihrer Coëfficienten äquivalent wird.¹

3**) Das Product zweier conjugirter n -fach complexer Zahlen:

$$a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + \dots + a_n i_n, \quad a_0 - a_1 i_1 - a_2 i_2 - \dots - a_n i_n$$

besitzt, da dieselben zugleich complanar sind, und der Ausdruck: $\bar{x}_s = a_s b_0 + a_0 b_s$ für $b_0 = a_0$, $b_s = -a_s$ identisch verschwindet, allgemein den Werth:

$$a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2,$$

wonach sich auch umgekehrt die Summe der Quadrate von $(n+1)$ beliebigen reellen Grössen als Product zweier conjugirter, n -fach complexer Factoren auffassen lässt.²

¹ An dieser Stelle mag auf den bekannten Satz der Quaternionenrechnung (Elem. d. Quat., I. Bd., 2. Th., p. 311) hingewiesen werden, dass das Quadrat jedes Vectors: $a_1 i + a_2 j + a_3 k$ durch: $-(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)$ auszudrücken ist, also unter der Bedingung: $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$ jederzeit die Relation; $(a_1 i + a_2 j + a_3 k)^2 = -1$ besteht.

Im Anschlusse hieran können u. A. die beiden theoretisch wichtigen Fragen erledigt werden, auf wie viele Arten bei Benützung eines n -fach complexen Zahlensystems eine Summe von s -verschiedenen, positiv genommenen Quadraten als Product zweier s -fach imaginärer beziehungsweise $(s-1)$ -fach complexer Factoren darstellbar ist.

Auf Grundlage des Satzes 1**) und der Beziehungen (c) ergeben sich nunmehr für Z_1, Z_2 die wichtigen Transformationsgleichungen:

$$(i). \quad \begin{cases} Z_1 = r_1 (\cos \alpha + i_1 \cos \alpha_1 + i_2 \cos \alpha_2 + \dots + i_n \cos \alpha_n), \\ Z_2 = r_2 (\cos \beta + i_1 \cos \beta_1 + i_2 \cos \beta_2 + \dots + i_n \cos \beta_n), \end{cases}$$

welchen eine dritte, durch ihre grosse Einfachheit ausgezeichnete Darstellungsweise des allgemeinen Productes: $Z_1 Z_2$ correspondirt.

Vertauschen wir nämlich in (f), (f*) die Coëfficienten: $a_0, \dots, a_n; b_0, \dots, b_n$ ebenfalls mit $r_1 \cos \alpha, \dots, r_1 \cos \alpha_n; r_2 \cos \beta, \dots, r_2 \cos \beta_n$ und setzen der Kürze wegen:

$$\frac{\sin \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} = \cos \sigma, \quad \frac{\cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}} = \cos \tau$$

ferner für $s = 1, 2, \dots, n$ durchgängig:

Indem man hiebei sämtliche Zeichenvariationen der quadrirten reellen Grössen berücksichtigt, resultiren für jene Summe unter Hinzuziehung elementarer combinatorischer Sätze im Ganzen

$n(n-1)(n-2)\dots(n-s+1)(2^{s-1})$ Zerlegungen erster

und $n(n-1)(n-2)\dots(n-s+2)(2^{s-1}s)$ Zerlegungen zweiter Art.

Es besitzt also z. B. in einem bicomplexen Zahlensysteme die Summe: $a^2 + b^2$ vier Zerlegungen:

$$\begin{aligned} (ai_1 + bi_2)(-ai_1 - bi_2), & \quad (ai_1 - bi_2)(-ai_1 + bi_2) \\ (bi_1 + ai_2)(-bi_1 - ai_2), & \quad (bi_1 - ai_2)(-bi_1 + ai_2) \end{aligned}$$

in zweifach imaginäre und acht Zerlegungen in einfach complexe Zahlen, während sich die Summe: $a^2 + b^2 + c^2$ bereits in 24 verschiedenen Formen:

$$\begin{aligned} (a + bi_1 + ci_2)(a - bi_1 - ci_2), & \quad (a + bi_1 - ci_2)(a - bi_1 + ci_2), \\ (-a + bi_1 + ci_2)(-a - bi_1 - ci_2), & \quad (-a + bi_1 - ci_2)(-a - bi_1 + ci_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (c + bi_1 + ai_2)(c - bi_1 - ai_2), & \quad (c + bi_1 - ai_2)(c - bi_1 + ai_2), \\ (-c + bi_1 + ai_2)(-c - bi_1 - ai_2), & \quad (-c + bi_1 - ai_2)(-c - bi_1 + ai_2) \end{aligned}$$

als Product je zweier conjugirter bicomplexer Factoren definiren lässt.

$$\frac{\sin \frac{\alpha_s + \beta_s}{2} \sin \frac{\alpha_s - \beta_s}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} = \cos \sigma_s, \quad \frac{\cos \frac{\alpha_s + \beta_s}{2} \cos \frac{\alpha_s - \beta_s}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}} = \cos \tau_s,$$

so resultiren bezüglich $x'_0, x'_1, x'_2, \dots, x'_n; x''_0, x''_1, x''_2, \dots, x''_n$ fast unmittelbar die merkwürdigen Formeln:

$$x'_0 = -r_1 r_2 \cos 2\sigma, \quad x'_1 = -2r_1 r_2 \cos \sigma \cos \sigma_1, \\ x'_2 = -2r_1 r_2 \cos \sigma \cos \sigma_2, \dots, x'_n = -2r_1 r_2 \cos \sigma \cos \sigma_n;$$

$$x''_0 = r_1 r_2 \cos 2\tau, \quad x''_1 = 2r_1 r_2 \cos \tau \cos \tau_1, \\ x''_2 = 2r_1 r_2 \cos \tau \cos \tau_2, \dots, x''_n = 2r_1 r_2 \cos \tau \cos \tau_n,$$

welche für das Product zweier beliebiger diplanarer n -fach complexer Zahlen die nachstehende Doppelgleichung begründen:

$$(23). \quad .Z_1 Z_2 = \\ -r_1 r_2 \{ \cos 2\sigma + 2 \cos \sigma (i_1 \cos \sigma_1 + i_2 \cos \sigma_2 + \dots + i_n \cos \sigma_n) \}$$

respective:

$$r_1 r_2 \{ \cos 2\tau + 2 \cos \tau (i_1 \cos \tau_1 + i_2 \cos \tau_2 + \dots + i_n \cos \tau_n) \}.$$

Hiebei erfüllen die $2(n+1)$ in den Factoren von $r_1 r_2$ auftretenden Grössen: $\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n; \tau, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ gemäss den beiden, aus (b) und (b) ableitbaren Relationen:

$$(\cos \beta - \cos \alpha)^2 + (\cos \beta_1 - \cos \alpha_1)^2 + (\cos \beta_2 - \cos \alpha_2)^2 + \dots \\ + (\cos \beta_n - \cos \alpha_n)^2 = 4 \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

$$(\cos \beta + \cos \alpha)^2 + (\cos \beta_1 + \cos \alpha_1)^2 + (\cos \beta_2 + \cos \alpha_2)^2 + \dots \\ + (\cos \beta_n + \cos \alpha_n)^2 = 4 \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

stets die Bedingungen:

$$\cos^2 \sigma + \cos^2 \sigma_1 + \dots + \cos^2 \sigma_n = 1, \quad \cos^2 \tau + \cos^2 \tau_1 + \dots + \cos^2 \tau_n = 1$$

und lassen sich daher geometrisch als Winkel zweier gerader Linien mit den Halbaxen: OJ_0, OJ_1, \dots, OJ_n interpretiren.

Die vorstehenden Ergebnisse legen selbstverständlicher Weise die Vermuthung nahe, dass auch das Product zweier complexplanarer n -fach complexer Zahlen:

$$(24) \dots Z_1 Z_2 = (a_0 b_0 - d) + (a_1 b_0 + a_0 b_1) i_1 + \\ + (a_2 b_0 + a_0 b_2) i_2 + \dots + (a_n b_0 + a_0 b_n) i_n$$

durch Einführung passender Hilfswinkel noch bedeutend vereinfacht werden könne. Als solche wählen wir im Ganzen $(n+1)$ Winkel: $\alpha, \beta; \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}$, welche — unter e_s allgemein den Ausdruck:

$$e_s = \sqrt{z_s^2 + z_{s+1}^2 + \dots + z_n^2}$$

verstanden — aus jedem der beiden, einander gegenseitig bedingenden Gleichungssysteme:

$$(f) \dots \begin{cases} \cos \alpha = \frac{a_0}{r_1}, \quad \cos \beta = \frac{b_0}{r_2}; \quad \cos \omega_1 = \frac{z_1}{e_1}, \\ \dots \cos \omega_s = \frac{z_s}{e_s} \quad \dots \cos \omega_{n-1} = \frac{z_{n-1}}{e_{n-1}} \end{cases}$$

$$(f^*) \dots \begin{cases} \sin \alpha = \frac{a e_1}{r_1}, \quad \sin \beta = \frac{b e_1}{r_2}; \quad \sin \omega_1 = \frac{e_2}{e_1}, \\ \dots \sin \omega_s = \frac{e_{s+1}}{e_s}, \dots \sin \omega_{n-1} = \frac{z_n}{e_{n-1}} \end{cases}$$

bestimmbar sind, und transformiren mit Beibehaltung der Relationen: $a_0 = r_1 \cos \alpha$, $b_0 = r_2 \cos \beta$ zunächst die Coëfficienten: $a_1, b_1; a_2, b_2; \dots a_{n-1}, b_{n-1}; a_n, b_n$ in Functionen der eben definirten Grössen und der Moduli: r_1, r_2 .

Indem wir hierauf die so erhaltenen Ausdrücke:

$$a_1 = r_1 \sin \alpha \cos \omega_1, \quad b_1 = r_2 \sin \beta \cos \omega_1; \\ a_2 = r_1 \sin \alpha \sin \omega_1 \cos \omega_2, \quad b_2 = r_2 \sin \beta \sin \omega_1 \cos \omega_2;$$

$$a_{n-1} = r_1 \sin \alpha \sin \omega_1 \sin \omega_2 \dots \sin \omega_{n-2} \cos \omega_{n-1},$$

$$b_{n-1} = r_2 \sin \beta \sin \omega_1 \sin \omega_2 \dots \sin \omega_{n-2} \cos \omega_{n-1};$$

$$a_n = r_1 \sin \alpha \sin \omega_1 \sin \omega_2 \dots \sin \omega_{n-2} \sin \omega_{n-1},$$

$$b_n = r_2 \sin \beta \sin \omega_1 \sin \omega_2 \dots \sin \omega_{n-2} \sin \omega_{n-1}$$

in (24) substituiren, verwandeln sich die beiden Factoren linker Hand nach Absonderung der n -fach imaginären Zahl:

$$(25) \dots I = i_1 \cos \omega_1 + i_2 \sin \omega_1 \cos \omega_2 + \dots \\ + i_{n-1} \sin \omega_1 \sin \omega_2 \dots \sin \omega_{n-2} \cos \omega_{n-1} + i_n \sin \omega_1 \sin \omega_2 \dots \sin \omega_{n-1}$$

in: $r_1 (\cos \alpha + I \sin \alpha)$, $r_2 (\cos \beta + I \sin \beta)$, während der reelle Bestandtheil rechter Hand kraft der Identität:

$$a_0 b_0 - (a_1 b_1 + \dots + a_n b_n) = r_1 r_2 \left\{ \left(\frac{a_0}{r_1} \right) \left(\frac{b_0}{r_2} \right) - \left(\frac{a e_1}{r_1} \right) \left(\frac{b e_1}{r_2} \right) \right\}$$

in: $r_1 r_2 \cos(\alpha + \beta)$, und das Binom: $a_s b_0 + a_0 b_s$ für $s = 1, 2, \dots, n-1$ in:

$$r_1 r_2 \sin(\alpha + \beta) \sin \omega_1 \sin \omega_2 \dots \sin \omega_{s-1} \cos \omega_s,$$

dagegen für $s = n$ in:

$$r_1 r_2 \sin(\alpha + \beta) \sin \omega_1 \sin \omega_2 \dots \sin \omega_{n-1}$$

übergeht. Auf diese Art wird das Product: $r_1 r_2 \sin(\alpha + \beta)$ rechts gemeinsamer Factor einer n -fach imaginären Summe von Gliedern, welche ihrerseits wieder mit I zusammenfällt, so dass die ursprünglich vorgelegte Gleichung (24) augenscheinlich folgende Umformung ermöglicht:

$$(26). \quad \{r_1 (\cos \alpha + I \sin \alpha)\} \{r_2 (\cos \beta + I \sin \beta)\} = \\ = r_1 r_2 \{\cos(\alpha + \beta) + I \sin(\alpha + \beta)\}.$$

Ihre weitere Deutung gestaltet sich sehr einfach, sobald man derselben jene, die reelle Zahlenaxe $J_0 J'_0$ enthaltende Ebene zu Grunde legt, welcher die, den beiden Factoren Z_1, Z_2 entsprechenden Punkte: M_1, M_2 angehören. Die Grössen: $r_1 \cos \alpha$, $r_1 \sin \alpha$; $r_2 \cos \beta$, $r_2 \sin \beta$ erscheinen dann als Coordinaten von M_1, M_2 bezüglich eines in derselben Ebene construirten rechtwinkligen Axensystems mit dem Ursprunge O und der Abscissenaxe $J_0 J'_0$, wonach man das Product: $Z_1 Z_2$ unter Hinzuziehung der aus 2**) hervorgehenden Gleichung:

$$(27). \quad I^2 = -(\cos^2 \omega_1 + \sin^2 \omega_1 \cos^2 \omega_2 + \dots \\ + \sin^2 \omega_1 \sin^2 \omega_2 \dots \sin^2 \omega_{n-1}) = -1$$

wie ein Product zweier einfach complexer Zahlen interpretiren kann. Es ergibt sich daher speciell für complanare n -fach complexe Zahlen ein mit dem geforderten Resultate (26) formal identischer Ausdruck, wenn man dieselben nach Einführung des Factors I — er mag in Zukunft als Inclinationsfactor beider Zahlen bezeichnet werden

— wie reelle Binome multiplicirt und das hiebei auftretende Quadrat von I mit der negativen Einheit vertauscht.

Erst jetzt ist es möglich, im Anschlusse an unsere allgemeine explicite Definition des Multiplicirens die wesentlichen Eigenschaften dieser Grundoperation in ihrer Anwendung auf zwei beliebige n -fach complexe Zahlen vollständig zu übersehen und in folgende Sätze zusammenzufassen:

- (I) Das Product: $Z_1 Z_2$ ist eine einwerthige, beziehungsweise zweiwerthige Grösse, je nachdem dessen Factoren complanar oder diplanar sind, und repräsentirt gemeiniglich eine n -fach complexe, bedingungsweise jedoch auch eine reelle Zahl.
- (II) Das Product: $Z_1 Z_2$ ist allgemein commutativ¹ und speciell für complanare Zahlen in Bezug auf deren charakteristische Ebene auch distributiv.

¹ Diese Eigenschaft fehlt dem Producte zweier beliebiger Quaternionen:

$$q_1 = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k, \quad q_2 = b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k,$$

indem das Resultat der Multiplication von q_1 mit q_2 bekanntlich (Elem. d. Quat., I. Bd., 2. Th., p. 312) durch die Gleichung:

$$q_1 q_2 = a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 + \{a_0 b_1 + a_1 b_0\} + \{a_2 b_3 - a_3 b_2\} i + \\ + \{a_0 b_2 + a_2 b_0\} - \{a_1 b_3 - a_3 b_1\} j + \{a_0 b_3 + a_3 b_0\} + \{a_1 b_2 - a_2 b_1\} k$$

definit wird, also bei einer Vertauschung der Factoren in:

$$q_2 q_1 = a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 + \{a_0 b_1 + a_1 b_0\} - \{a_2 b_3 - a_3 b_2\} i + \\ + \{a_0 b_2 + a_2 b_0\} + \{a_1 b_3 - a_3 b_1\} j + \{a_0 b_3 + a_3 b_0\} - \{a_1 b_2 - a_2 b_1\} k$$

übergeht. Anderseits erscheint nicht nur $q_1 q_2$, sondern auch $q_2 q_1$ gemäss den von Hamilton als Zeichengleichungen (l. c. p. 202) aufgestellten Formeln:

$$i^2 = -1, \quad j^2 = -1, \quad k^2 = -1; \quad ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j; \\ ji = -k, \quad kj = -i, \quad ik = -j$$

distributiv in Bezug auf sämmtliche Elemente, so dass die Übereinstimmung mancher specieller Resultate der vorliegenden Arbeit mit solchen des Quaternionen-Calculs als eine rein formale aufzufassen ist.

Dasselbe gilt von den „triplexen“ und „polydimensionalen“ Zahlen H. Scheffler's, deren Eigenschaften namentlich in zwei, 1851 beziehungsweise 1880 zu Braunschweig erschienenen Werken des genannten Autors:

(III) Der Modulus von $Z_1 Z_2$ besitzt jederzeit den Werth:

$$(28) \dots r = r_1 r_2,$$

wonach das Product zweier n -fach complexer Zahlen nur dann verschwindet, wenn einer der beiden Factoren gleich Null wird.

„Der Situationscalcul“ — „Die polydimensionalen Grössen und die vollkommenen Primzahlen“ — eingehend dargelegt worden sind.

Scheffler definiert nämlich zunächst (Situationscalcul, p. 170, 171) das Product zweier „triplexer“ Zahlen:

$Z_1 = a_1 + b_1 \sqrt{-1} + c_1 \sqrt{-1} \sqrt{\div 1}$, $Z_2 = a_2 + b_2 \sqrt{-1} + c_2 \sqrt{-1} \sqrt{\div 1}$,
welche zwei Raumpunkten mit den Coordinaten: $a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2$ zugeordnet werden, durch die Gleichung:

$$\begin{aligned} x+y\sqrt{-1} + z\sqrt{-1} \sqrt{\div 1} &= a_1 a_2 - \sqrt{b_1^2 + c_1^2} \sqrt{b_2^2 + c_2^2} + \\ &+ \frac{(a_1 \sqrt{b_2^2 + c_2^2} + a_2 \sqrt{b_1^2 + c_1^2})(b_1 b_2 - c_1 c_2)}{\sqrt{b_1^2 + c_1^2} \sqrt{b_2^2 + c_2^2}} \sqrt{-1} + \\ &+ \frac{(a_1 \sqrt{b_2^2 + c_2^2} + a_2 \sqrt{b_1^2 + c_1^2})(b_1 c_2 + b_2 c_1)}{\sqrt{b_1^2 + c_1^2} \sqrt{b_2^2 + c_2^2}} \sqrt{-1} \sqrt{\div 1}, \end{aligned}$$

so dass x, y, z wohl der Relation (20), nicht aber den Beziehungen (21) und (22) genügen. Infolgedessen ist auch die Scheffler'sche Generalisation des Multiplicirens (s. sein zweites, zuvor citirtes Werk, p. 52, 82) in ihrer Anwendung auf zwei beliebige „polydimensionale“ Zahlen:

$$\begin{aligned} Z_1 &= r_1 \{ \cos \alpha_1 + \sin \alpha_1 \cos \beta_1 \sqrt{-1} + \sin \alpha_1 \sin \beta_1 \cos \gamma_1 \sqrt{-1} \sqrt{\div 1} + \\ &+ \sin \alpha_1 \sin \beta_1 \sin \gamma_1 \cos \delta_1 \sqrt{-1} \sqrt{\div 1} \sqrt{\div \div 1} + \dots \}, \\ Z_2 &= r_2 \{ \cos \alpha_2 + \sin \alpha_2 \cos \beta_2 \sqrt{-1} + \sin \alpha_2 \sin \beta_2 \cos \gamma_2 \sqrt{-1} \sqrt{\div 1} + \\ &+ \sin \alpha_2 \sin \beta_2 \sin \gamma_2 \cos \delta_2 \sqrt{-1} \sqrt{\div 1} \sqrt{\div \div 1} + \dots \} \end{aligned}$$

mit der hier gegebenen Verallgemeinerung des Multiplicirens nur insoferne verwandt, als das Product:

$$\begin{aligned} Z_1 Z_2 &= r_1 r_2 \{ \cos(\alpha_1 + \alpha_2) + \sin(\alpha_1 + \alpha_2) \cos(\beta_1 + \beta_2) \sqrt{-1} + \\ &+ \sin(\alpha_1 + \alpha_2) \sin(\beta_1 + \beta_2) \cos(\gamma_1 + \gamma_2) \sqrt{-1} \sqrt{\div 1} + \\ &+ \sin(\alpha_1 + \alpha_2) \sin(\beta_1 + \beta_2) \sin(\gamma_1 + \gamma_2) \cos(\delta_1 + \delta_2) \sqrt{-1} \sqrt{\div 1} \sqrt{\div \div 1} + \dots \} \end{aligned}$$

ebenfalls commutativ bleibt, und sein Modulus mit $r_1 r_2$ zusammenfällt. Dagegen befriedigen dessen Coëfficienten weder die Gleichungen (18), (19) noch die vierte von uns aufgestellte Forderung, indem die Factoren gleicher „überimaginärer“ Einheitsproducte in den „triplexen“, „quadruplexen“ etc Specialisirungen eines und desselben polydimensionalen Productes formal nicht vollständig mit einander übereinstimmen.

Unsere letzten Ergebnisse liefern ausserdem eine sichere Directive für die Multiplication von Aggregaten n -fach complexer Zahlen mit einem gegebenen Factor, sowie für die Bildung von Producten beliebig vieler Factoren, vermitteln also auch die Kenntniss jener Eigenschaften, welche der hier gegebenen universellen Verallgemeinerung des Multiplicirens in Bezug auf mehr als zwei n -fach complexe Zahlen zukommen.

Da übrigens die diesbezüglichen Sätze bereits durch eine Discussion der beiden Ausdrücke:

$$\Delta = (Z_1 + Z_2)Z_3 - (Z_1Z_3 + Z_2Z_3), \quad P = Z_1Z_2Z_3$$

inductiv erschlossen werden können, begnügen wir uns im Folgenden mit der Entwicklung von Δ und P und legen derselben, um jede überflüssige Complication der Resultate zu vermeiden, ausschliesslich bicomplexe Zahlen zu Grunde. — Die Ausdehnung der, jenen speciellen Resultaten entspringenden Schlüsse auf n -fach complexe Zahlen erhält dann ihre Begründung durch die Thatsache, dass die Verknüpfungsgesetze für die Coefficienten der Factoren von Z_1Z_2 , Z_1Z_3 , Z_2Z_3 beim Übergange von bicomplexen zu n -fach complexen Zahlen infolge der Art unserer Verallgemeinerung der dritten algebraischen Grundoperation auch formal dieselben bleiben.

Indem wir nunmehr mit der Entwicklung der Grösse Δ beginnen, ist vor Allem zu beachten, dass sich die beiden Werthe des allgemeinen Productes: Z_1Z_2 gemäss früheren Betrachtungen in einander überführen lassen, wenn man r_1 mit: $-r_1$ vertauscht. Es können mithin, da andererseits der Modulus jeder complexen Zahl als eine wesentlich positive Grösse defnirt wurde, bei Bildung von zwei oder mehreren Producten nur Werthe erster Art, beziehungsweise solche zweiter Art einander zugeordnet werden, durch welche Beschränkung im vorliegenden Falle von den acht möglichen Werthcombinationen der drei Producte: Z_1Z_3 , Z_2Z_3 und:

$$(Z_1 + Z_2)Z_3 = \{(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i_1 + (c_1 + c_2)i_2\}Z_3$$

sechs entfallen. — Die übrigen Reductionen bedürfen bei ihrem elementaren Character keiner weiteren Erläuterung; sie führen, sobald man ausser den eingangs defnirten Hilfsfunctionen: h_1 ,

$k_1, l_1, m_1; h_2, k_2, l_2, m_2$ noch die folgenden:

$$r = \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2 + (c_1 + c_2)^2}$$

$$h_1 + h_2 = h', \quad k_1 + k_2 = k', \quad l_1 + l_2 = l', \quad m_1 + m_2 = m';$$

$$r_1 r_3 - m_1 = p_1, \quad r_1 r_3 + m_1 = q_1; \quad r_2 r_3 - m_2 = p_2, \quad r_2 r_3 + m_2 = q_2$$

verwendet, auf die einfache Doppelgleichung:

$$(29) \dots \Delta = - \left\{ \frac{h_1^2}{p_1} + \frac{h_2^2}{p_2} - \frac{h'^2}{r r_3 - m'} \right\} -$$

$$- \left\{ \frac{h_1 k_1}{p_1} + \frac{h_2 k_2}{p_2} - \frac{h' k'}{r r_3 - m'} \right\} i_1 - \left\{ \frac{h_1 l_1}{p_1} + \frac{h_2 l_2}{p_2} - \frac{h' l'}{r r_3 - m'} \right\} i_2$$

beziehungsweise:

$$\left\{ \frac{h_1^2}{q_1} + \frac{h_2^2}{q_2} - \frac{h'^2}{r r_3 + m'} \right\} + \left\{ \frac{h_1 k_1}{q_1} + \frac{h_2 k_2}{q_2} - \frac{h' k'}{r r_3 + m'} \right\} i_1 +$$

$$+ \left\{ \frac{h_1 l_1}{q_1} + \frac{h_2 l_2}{q_2} - \frac{h' l'}{r r_3 + m'} \right\} i_2.$$

Hienach besitzt Δ im Allgemeinen zwei von Null verschiedene Werthe, verschwindet jedoch identisch für $h_1 = h_2 = 0$, so dass bei Erfüllung der beiden Bedingungen: $b_1 c_3 = b_3 c_1$, $b_2 c_3 = b_3 c_2$ d. h. falls die in Betracht gezogenen Zahlen coplanar sind, die fundamentale Beziehung gilt:

$$(30) \dots (Z_1 + Z_2) Z_3 = Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3.$$

Es ist also das Product eines gegebenen bicomplexen Factors in ein Aggregat bicomplexer Zahlen für alle coplanaren bicomplexen Zahlen distributiv, während es im Gegenfalle dieser Eigenschaft ermangelt.

Ungleich weitläufiger als die Berechnung von Δ gestaltet sich jene des Productes dreier beliebiger bicomplexer Factoren, bei welcher man augenscheinlich von drei verschiedenen Grundproducten:

$$Z_1 Z_2 = \begin{cases} x_1 + y_1 i_1 + z_1 i_2 \\ x_2 + y_2 i_1 + z_2 i_2 \end{cases} \quad Z_1 Z_3 = \begin{cases} x'_1 + y'_1 i_1 + z'_1 i_2 \\ x'_2 + y'_2 i_1 + z'_2 i_2 \end{cases}$$

$$Z_2 Z_3 = \begin{cases} x''_1 + y''_1 i_1 + z''_1 i_2 \\ x''_2 + y''_2 i_1 + z''_2 i_2 \end{cases}$$

ausgehen kann. Da jedoch aus früher erörterten Gründen die Verknüpfung des jeweiligen Grundproductes mit dem dritten Factor wieder nach derselben Regel zu erfolgen hat, mittelst welcher die Coëfficienten des Grundproductes selbst bestimmt wurden, und die Commutativität jedes aus zwei Factoren gebildeten Productes ihrerseits die Relationen:

$$\begin{aligned}(Z_1 Z_2) Z_3 &= Z_3 (Z_1 Z_2), & (Z_1 Z_3) Z_2 &= Z_2 (Z_1 Z_3), \\ (Z_2 Z_3) Z_1 &= Z_1 (Z_2 Z_3)\end{aligned}$$

nach sich zieht, resultiren für P im Ganzen nur sechs ¹ verschiedene Darstellungen:

$$\begin{aligned}(x_1) + (y_1)i_1 + (z_1)i_2, & (x'_1) + (y'_1)i_1 + (z'_1)i_2, \\ (x''_1) + (y''_1)i_1 + (z''_1)i_2; & \\ (x_2) + (y_2)i_1 + (z_2)i_2, & (x'_2) + (y'_2)i_1 + (z'_2)i_2, \\ (x''_2) + (y''_2)i_1 + (z''_2)i_2, & \end{aligned}$$

welche durch Bildung der drei Producte: $(Z_1 Z_2) Z_3$, $(Z_1 Z_3) Z_2$, $(Z_2 Z_3) Z_1$ nach dem ersten resp. zweiten Verknüpfungsgesetze gewonnen werden.

Hiebei empfiehlt es sich, für $Z_1 Z_2$, $Z_1 Z_3$, $Z_2 Z_3$ jene Ausdrücke zu substituiren, welche die Grössen: h, k, l ; h_1, k_1, l_1 ; h_2, k_2, l_2 überhaupt nicht enthalten, und erst bei der zweiten Multiplication die im Gleichungssysteme (e) präcisirte Darstellungsweise der Coëfficienten eines Productes zweier Factoren zu benützen. Die weiteren Details der durchzuführenden Rechnungen sind für die Discussion ihrer Resultate gegenstandslos und mögen daher übergangen werden; wohl aber erscheint es geboten, die zu einer übersichtlichen Formulirung der letzteren unentbehrlichen Hilfsfunctionen kurz zu characterisiren.

¹ Die Vielwerthigkeit jedes Productes dreier oder mehrerer diplo-
narer, n -fach complexer Factoren, welche unter Beibehaltung der vier
eingangs aufgestellten Forderungen nicht vermieden werden kann, bedingt
wohl eine wesentliche Complication der jeweiligen Rechnungen, liefert
aber keineswegs ein logisch begründetes Argument gegen die hier
entwickelten universellen Verallgemeinerungen des Multiplicirens. Denn
sobald einmal, wie dies in der Lehre von den einfach complexen Zahlen
geschehen ist, vielwerthige Potenzen zugelassen werden, liegt auch
kein principiell Hinderniss mehr vor, vielwerthige Producte ein-
zuführen.

Als solche dienen neben drei, allen sechs Werthen des in Frage stehenden Productes: P gemeinsamen, rationalen ganzen Functionen der Zahlencoëfficienten:

$$(a) = a_1 a_2 a_3 - a_1 (b_2 b_3 + c_2 c_3) - a_2 (b_1 b_3 + c_1 c_3) - a_3 (b_1 b_2 + c_1 c_2),$$

$$(b) = a_1 a_2 b_3 + a_1 a_3 b_2 + a_2 a_3 b_1 - b_1 b_2 b_3,$$

$$(c) = a_1 a_2 c_3 + a_1 a_3 c_2 + a_2 a_3 c_1 - c_1 c_2 c_3$$

zunächst die Producte:

$$(h') = (a_2 r_1 - a_1 r_2)(h_2 r_1 - h_1 r_2), \quad (h'') = (a_2 r_1 + a_1 r_2)(h_2 r_1 + h_1 r_2)$$

$$(h'_1) = (a_3 r_1 - a_1 r_3)(h_2 r_1 + h r_3), \quad (h''_1) = (a_3 r_1 + a_1 r_3)(h_2 r_1 - h r_3),$$

$$(h'_2) = (a_3 r_2 - a_2 r_3)(h_1 r_2 - h r_3), \quad (h''_2) = (a_3 r_2 + a_2 r_3)(h_1 r_2 + h r_3)$$

welche offenbar identisch verschwinden, sobald sich die Coëfficienten: a_1, a_2, a_3 oder die Grössen: h, h_1, h_2 auf Null reduciren.

Drei weitere Gruppen von Producten:

$$(k') = (a_2 r_1 - a_1 r_2)(k_2 r_1 - k_1 r_2), \quad (k'') = (a_2 r_1 + a_1 r_2)(k_2 r_1 + k_1 r_2),$$

$$(k'_1) = (a_3 r_1 - a_1 r_3)(k_2 r_1 + k r_3), \quad (k''_1) = (a_3 r_1 + a_1 r_3)(k_2 r_1 - k r_3),$$

$$(k'_2) = (a_3 r_2 - a_2 r_3)(k_1 r_2 - k r_3), \quad (k''_2) = (a_3 r_2 + a_2 r_3)(k_1 r_2 + k r_3);$$

$$(l') = (a_2 r_1 - a_1 r_2)(l_2 r_1 - l_1 r_2), \quad (l'') = (a_2 r_1 + a_1 r_2)(l_2 r_1 + l_1 r_2),$$

$$(l'_1) = (a_3 r_1 - a_1 r_3)(l_2 r_1 + l r_3), \quad (l''_1) = (a_3 r_1 + a_1 r_3)(l_2 r_1 - l r_3),$$

$$(l'_2) = (a_3 r_2 - a_2 r_3)(l_1 r_2 - l r_3), \quad (l''_2) = (a_3 r_2 + a_2 r_3)(l_1 r_2 + l r_3);$$

$$(m') = (a_2 r_1 - a_1 r_2)(m_2 r_1 - m_1 r_2), \quad (m'') = (a_2 r_1 + a_1 r_2)(m_2 r_1 + m_1 r_2),$$

$$(m'_1) = (a_3 r_1 - a_1 r_3)(m_2 r_1 - m r_3), \quad (m''_1) = (a_3 r_1 + a_1 r_3)(m_2 r_1 + m r_3),$$

$$(m'_2) = (a_3 r_2 - a_2 r_3)(m_1 r_2 - m r_3), \quad (m''_2) = (a_3 r_2 + a_2 r_3)(m_1 r_2 + m r_3),$$

die zugleich mit a_1, a_2, a_3 entfallen, correspondiren den Grössen: $k, k_1, k_2; l, l_1, l_2; m, m_1, m_2$ während die letzte Gruppe von Hilfsfunctionen:

$$N' = p r_1 r_2 (r_3 - a_3) + (m'), \quad N'' = q r_1 r_2 (r_3 - a_3) + (m''),$$

$$N'_1 = p_1 r_1 r_3 (r_2 - a_2) + (m'_1), \quad N''_1 = q_1 r_1 r_3 (r_2 - a_2) + (m''_1),$$

$$N'_2 = p_2 r_2 r_3 (r_1 - a_1) + (m'_2), \quad N''_2 = q_2 r_2 r_3 (r_1 - a_1) + (m''_2)$$

in gewissem Sinne den Nennern: $p, q; p_1, q_1; p_2, q_2$ zugeordnet ist.

Die Substitution sämmtlicher sechs Gruppen von Hilfsgrössen in die für $(x_1), (y_1), (z_1); \dots (x''_2), (y''_2), (z''_2)$ resultirenden Ausdrücke verleiht denselben schliesslich die nachstehenden relativ einfachen und übersichtlichen Formen:

$$(x_1) = (a) + \frac{h}{p} (a_3 h - b_3 k - c_3 l) + \frac{(h')^2}{p N'}$$

$$(y_1) = (b) - b_3 c_1 c_2 + \frac{h}{p} (b_3 h + a_3 k) + \frac{(h')}{p N'} \{(k') + c_3 p r_1 r_2\},$$

$$(z_1) = (c) - b_1 b_2 c_3 + \frac{h}{p} (c_3 h + a_3 l) + \frac{(h')}{p N'} \{(l') - b_3 p r_1 r_2\};$$

$$(x'_1) = (a) + \frac{h_1}{p_1} (a_2 h_1 - b_2 k_1 - c_2 l_1) + \frac{(h'_1)^2}{p_1 N'_1}$$

$$(y'_1) = (b) - b_2 c_1 c_3 + \frac{h_1}{p_1} (b_2 h_1 + a_2 k_1) + \frac{(h'_1)}{p_1 N'_1} \{(k'_1) - c_2 p_1 r_1 r_3\},$$

$$(z'_1) = (c) - b_1 b_3 c_2 + \frac{h_1}{p_1} (c_2 h_1 + a_2 l_1) + \frac{(h'_1)}{p_1 N'_1} \{(l'_1) + b_2 p_1 r_1 r_3\};$$

$$(x''_1) = (a) + \frac{h_2}{p_2} (a_1 h_2 - b_1 k_2 - c_1 l_2) + \frac{(h'_2)^2}{p_2 N'_2}$$

$$(y''_1) = (b) - b_1 c_2 c_3 + \frac{h_2}{p_2} (b_1 h_2 + a_1 k_2) + \frac{(h'_2)}{p_2 N'_2} \{(k'_2) - c_1 p_2 r_2 r_3\},$$

$$(z''_1) = (c) - b_2 b_3 c_1 + \frac{h_2}{p_2} (c_1 h_2 + a_1 l_2) + \frac{(h'_2)}{p_2 N'_2} \{(l'_2) + b_1 p_2 r_2 r_3\};$$

$$(x_2) = (a) - \frac{h}{q} (a_3 h - b_3 k - c_3 l) - \frac{(h'')^2}{q N''}$$

$$(y_2) = (b) - b_3 c_1 c_2 - \frac{h}{q} (b_3 h + a_3 k) - \frac{(h'')}{q N''} \{(k'') + c_3 q r_1 r_2\},$$

$$(z_2) = (c) - b_1 b_2 c_3 - \frac{h}{q} (c_3 h + a_3 l) - \frac{(h'')}{q N''} \{(l'') - b_3 q r_1 r_2\};$$

$$(x'_2) = (a) - \frac{h_1}{q_1} (a_2 h_1 - b_2 k_1 - c_2 l_1) - \frac{(h''_1)^2}{q_1 N''_1}$$

$$(y'_2) = (b) - b_2 c_1 c_3 - \frac{h_1}{q_1} (b_2 h_1 + a_2 k_1) - \frac{(h''_1)}{q_1 N''_1} \{(k''_1) - c_2 q_1 r_1 r_3\},$$

$$(z'_2) = (c) - b_1 b_3 c_2 - \frac{h_1}{q_1} (c_2 h_1 + a_2 l_1) - \frac{(h''_1)}{q_1 N''_1} \{(l''_1) + b_2 q_1 r_1 r_3\};$$

$$(x_2'') = (a) - \frac{h_2}{q_2} (a_1 h_2 - b_1 k_2 - c_1 l_2) - \frac{(h_2'')^2}{q_2 N_2''},$$

$$(y_2'') = (b) - b_1 c_2 c_3 - \frac{h_2}{q_2} (b_1 h_2 + a_1 k_2) - \frac{(h_2'')}{q_2 N_2''} \{(h_2'') - c_1 q_2 r_2 r_3\},$$

$$(z_2'') = (c) - b_2 b_3 c_1 - \frac{h_2}{q_2} (c_1 h_2 + a_1 l_2) - \frac{(h_2'')}{q_2 N_2''} \{(h_2'') + b_1 q_2 r_2 r_3\},$$

Combinirt man hierauf diese sechs Werthsysteme mit den Annahmen: $h = h_1 = h_2 = 0$, so bestimmen die entsprechenden Reductionsgleichungen:

$$(f) \dots \begin{cases} (x_1) = (x_1') = \dots = (x_2'') = (a) = (\bar{x}) \\ (y_1) = (y_1') = \dots = (y_2'') = (b) - b_3 c_1 c_2 = \\ = (b) - b_2 c_1 c_3 = (b) - b_1 c_2 c_3 = (\bar{y}), \\ (z_1) = (z_1') = \dots = (z_2'') = (c) - b_1 b_2 c_3 \\ = (c) - b_1 b_3 c_2 = (c) - b_2 b_3 c_1 = (\bar{z}) \end{cases}$$

direct die Coëfficienten von P für drei complanare bicomplexe Factoren, womit die vollständige explicite Definition des fraglichen Productes gegeben ist.

Eine vergleichende Betrachtung der sechs zuerst berechneten Coëfficientengruppen lehrt, dass $Z_1 Z_2 Z_3$ für drei diplanare bicomplexe Factoren je zwei, untereinander und von den übrigen Werthen verschiedene Werthe annimmt, je nachdem man der zweiten Multiplication das Product: $Z_1 Z_2$ oder $Z_1 Z_3$ oder $Z_2 Z_3$ als ersten oder zweiten Factor zu Grunde legt. Es ist also $Z_1 Z_2 Z_3$ unter den gemachten Voraussetzungen eine sechswerthige Grösse und weder commutativ noch associativ.

Wird ferner einer der drei Factoren reell, so erhält man im Ganzen nur zwei von einander verschiedene Coëfficientengruppen, indem z. B. für $Z_3 = a_3$ nach einigen leichten Transformationen die Gleichungen:

$$\begin{aligned} (x_1) = (x_1') = (x_1'') = a_3 x_1, & \quad (y_1) = (y_1') = (y_1'') = a_3 y_1, \\ (z_1) = (z_1') = (z_1'') = a_3 z_1; & \\ (x_2) = (x_2') = (x_2'') = a_3 x_2, & \quad (y_2) = (y_2') = (y_2'') = a_3 y_2, \\ (z_2) = (z_2') = (z_2'') = a_3 z_2 & \end{aligned}$$

resultiren, d. h. das Product P ist für einen reellen und zwei diplanare bicomplexe Factoren jederzeit zweiwerthig, commutativ und — entsprechend den Beziehungen:

$$(Z_1 Z_2) a_3 = Z_1 (Z_2 a_3), (Z_1 a_3) Z_2 = Z_1 (a_3 Z_2), (Z_2 a_3) Z_1 = Z_2 (a_3 Z_1)$$

— auch associativ.

Sind endlich sämmtliche Factoren des in Betracht gezogenen Productes bicomplex und complanar, so besitzt dasselbe gemäss dem Gleichungssysteme (I) stets nur einen einzigen Werth:

$$(31) \dots P = (\bar{x}) + (\bar{y})i_1 + (\bar{z})i_2$$

und wird nicht allein commutativ und associativ, sondern auch bezüglich der charakteristischen Ebene seiner Factoren distributiv.

Die erste und zweite Eigenschaft kommen in (31) unmittelbar zur Geltung; zur Feststellung der beiden letztgenannten Eigenschaften von P genügt es, die in (31) auftretenden Coefficienten — unter M_1, M_2, M_3 die den Zahlen Z_1, Z_2, Z_3 zugehörigen Raumpunkte, unter $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ die Winkel ihrer Radienvectoren: $OM_1 = r_1, OM_2 = r_2, OM_3 = r_3$ mit der Halbaxe OX verstanden — durch $r_1, r_2, r_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ und durch den Neigungswinkel: ω der, die Punkte M_1, M_2, M_3 und die Axe XX' enthaltenden Ebene gegen die Ebene XOY auszudrücken. Die Einführung der diesbezüglichen, allgemein geläufigen Formeln liefert nämlich für $(\bar{x}), (\bar{y}), (\bar{z})$ die Producte:

$$r_1 r_2 r_3 \cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3), r_1 r_2 r_3 \sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \cos \omega, \\ r_1 r_2 r_3 \sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \sin \omega,$$

so dass die Gleichung (31) nach Absonderung des in Z_1, Z_2, Z_3 und P vorkommenden Inclinationsfactors: $I = i_1 \cos \omega + i_2 \sin \omega$ folgende Schreibweise gestattet:

$$\{r_1(\cos \alpha_1 + I \sin \alpha_1)\} \{r_2(\cos \alpha_2 + I \sin \alpha_2)\} \{r_3(\cos \alpha_3 + I \sin \alpha_3)\} = \\ = r_1 r_2 r_3 \{\cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + I \sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)\}.$$

Hienach bleibt der Werth von P in der That derselbe, mag man einen der drei Factoren mit dem Producte der beiden übrigen oder das Product zweier Factoren mit dem dritten multipliciren, und kann die Multiplication unter Hinzuziehung der Gleichung:

$P^2 = -1$ auch nach jenen Regeln ausgeführt werden, welche für die Bildung des Productes dreier reeller algebraischer Binome gelten.

Es erübrigt jetzt noch die Berechnung des Modulus: R von P , welche für jeden der sechs möglichen Werthe dieses Productes dasselbe Endresultat liefert. Da nämlich die Moduli von $Z_1 Z_2$, $Z_1 Z_3$, $Z_2 Z_3$ nach Satz (III) mit $r_1 r_2$, $r_1 r_3$, $r_2 r_3$ identisch sind, ergeben sich bei nochmaliger Anwendung jenes Satzes auf die Producte: $(Z_1 Z_2) Z_3$, $(Z_1 Z_3) Z_2$, $(Z_2 Z_3) Z_1$ als Moduli der drei, denselben entspringenden Werthpaare die Ausdrücke: $(r_1 r_2) r_3$, $(r_1 r_3) r_2$, $(r_2 r_3) r_1$, d. h. man hat allgemein:¹

$$(32) \dots R = r_1 r_2 r_3.$$

Auf Grundlage der für Δ und P erhaltenen Resultate gelangt man nunmehr mittelst vollständiger Induction zu sämtlichen Sätzen, welche unsere erste universelle Verallgemeinerung der dritten algebraischen Grundoperation in ihrer Anwendung auf beliebig viele bicomplexe Zahlen characterisiren und sich gemäss unseren früheren Überlegungen direct auf n -fach complexe Zahlen übertragen lassen. Daher genügt es auch, hier lediglich die definitiven Generalisationen dieser Sätze anzuführen, indem deren ursprüngliche Formen durch Vertauschung von n mit 2 sofort wieder hergestellt werden können:

(I*) Das allgemeine Product: $P_s = Z_1 Z_2 \dots Z_s$ besitzt, falls seine Factoren weder theilweise reell noch complanar sind, im Ganzen $s!$ — höchstens n -fach complexe Werthe, erhält dagegen $(s-s_1)!$ Werthe, sobald etwa s_1 — Factoren sich auf reelle Zahlen reduciren, und wird einwerthig, wenn $Z_1, Z_2, \dots Z_s$ lauter complanare Zahlen vorstellen.

¹ Wollte man diese fundamentale Formel direct aus einem der sechs allgemeinen Werthe von P , z. B. dem ersten, ableiten, so müsste man hiebei die leicht erweislichen Hilfsgleichungen:

$$a_3(h') + b_3(k') + c_3(l') = 0, \quad x_1(h') + y_1(k') + z_1(l') = p r_1 r_2 (b_3 z_1 - c_3 y_1), \\ (h')^2 + (k')^2 + (l')^2 = 2 p r_1 r_2 \{ a_3(m') + b_3(l') - c_3(k') \} - (m')^2$$

verwerthen und vor Allem beachten, dass der Zähler von:

$$\frac{(h')^2}{p^2 N'^2} [(h')^2 + \{ (k') + c_3 p r_1 r_2 \}^2 + \{ (l') - b_3 p r_1 r_2 \}^2]$$

zufolge der letzten Identität durch N' ohne Rest theilbar ist.

(II*) Im letzteren Falle ist P_s zugleich distributiv hinsichtlich aller complanarer Summanden, in welche sich jeder Factor willkürlich zerlegen lässt, ferner commutativ, associativ und distributiv in Bezug auf die charakteristische Ebene seiner Factoren, indem — unter $M_1 M_2, \dots M_s$ die den Zahlen: $Z_1, Z_2, \dots Z_s$ entsprechenden Punkte einer $(n+1)$ -fach ausgedehnten „ebenen“ Mannigfaltigkeit, unter $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_s$ die Winkel ihrer Radienvectoren: $OM_1 = r_1, OM_2 = r_2, \dots OM_s = r_s$ mit der Halbaxe OJ_0 verstanden — nach Einführung des gemeinsamen, durch Gleichung (25) definirten Inclinationsfactors: I sämtlicher Zahlen folgende einfache Relation stattfindet:

$$(33) \dots P_s = r_1 r_2 \dots r_s \{ \cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_s) + I \sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_s) \}.$$

Die erstgenannte Eigenschaft geht bei diplanaren Factoren stets verloren, wohl aber bleibt P_s , wenn deren Anzahl nicht grösser als 2 ist, und die $(s-2)$ übrigen Factoren reell werden, noch commutativ und associativ.

(III*) Der Modulus von P_s ist für jeden Werth von P_s gleich dem Producte der Moduli sämtlicher Factoren, wonach auch das Product beliebig vieler n -fach complexer Zahlen nur dann verschwindet, falls einer seiner Factoren gleich Null wird.

Berücksichtigt man schliesslich, dass die Coëfficienten jedes für P_s zulässigen Werthes zugleich Coordinaten von Punkten der hier eingeführten $(n+1)$ -fach ausgedehnten „ebenen“ Mannigfaltigkeit repräsentiren, so gestattet der dritte Satz mit Bezugnahme auf den ersten noch die nachstehende analytisch-geometrische Interpretation:

Durch die Multiplication von $s-n$ -fach complexen Zahlen werden s -Punkten der ihnen zugehörigen Mannigfaltigkeit höchstens $s!$ — neue Punkte zugeordnet, welche ihrerseits insgesamt in einer n -fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit von der Gleichung:

$$(34) \dots \xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2 = r_1^2 r_2^2 \dots r_s^2$$

gelegen sind, also speciell für $n=2$ einer aus dem Ursprunge des betreffenden dreiaxigen Coordinatensystems mit dem Radius: $r_1 r_2 \dots r_s$ beschriebenen Kugeloberfläche angehören.

§. 4.

Erste Verallgemeinerung der Division.

Gleichwie die impliciten Definitionsgleichungen des Productes zweier beliebiger bicomplexer Zahlen den Ausgangspunkt für eine universelle Verallgemeinerung des Multiplicirens gebildet haben, wird eine analoge Generalisation des Dividirens nur auf Grundlage jener Relationen möglich, welche die Ermittlung des speciellen Quotienten:

$$\frac{a_1 + b_1 i_1 + c_1 i_2}{a_2 + b_2 i_1 + c_2 i_2} = \xi + \eta i_1 + \zeta i_2$$

betreffen. — Kraft der ursprünglichen Bedeutung der vierten algebraischen Grundoperation muss auch dieser Quotient, mit dem Divisor multiplicirt, den Dividend liefern,¹ wonach die charak-

¹ In demselben Sinne charakterisirt Hamilton (Elem. d. Quat., I. Bd., 2. Th., p. 220) den Quotienten zweier beliebiger Quaternionen: q_1, q_2 :

$$\frac{q_1}{q_2} = \xi + \eta i + \zeta j + \omega k$$

durch die Gleichung: $(q_1 : q_2) \cdot q_2 = q_1$, wonach ξ, η, ζ, ω folgende relativ einfache Werthe besitzen:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{m}{r_2^2}, \quad \eta = -\frac{1}{r_2^2} \{(a_0 b_1 - a_1 b_0) + (a_2 b_3 - a_3 b_2)\}, \\ \zeta &= -\frac{1}{r_2^2} \{(a_0 b_2 - a_2 b_0) - (a_1 b_3 - a_3 b_1)\}, \quad \omega = -\frac{1}{r_2^2} \{(a_0 b_3 - a_3 b_0) + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\}. \end{aligned}$$

Ungleich complicirter gestaltet sich die Division je zweier Scheffler'scher Zahlen, indem beispielsweise der Quotient der beiden früher in Betracht gezogenen triplexen Grössen: Z_1, Z_2 durch folgenden Ausdruck (s.: „Polydimensionale Grössen“, p. 73) bestimmt erscheint:

$$\begin{aligned} \frac{Z_1}{Z_2} &= \frac{1}{r_2^2} (a_1 a_2 + \sqrt{b_1^2 + c_1^2} \sqrt{b_2^2 + c_2^2}) + \\ &+ \frac{(a_2 \sqrt{b_1^2 + c_1^2} - a_1 \sqrt{b_2^2 + c_2^2}) (b_1 b_2 + c_1 c_2)}{r_2^2 \sqrt{b_1^2 + c_1^2} \sqrt{b_2^2 + c_2^2}} \sqrt{-1} + \\ &+ \frac{(a_2 \sqrt{b_1^2 + c_1^2} - a_1 \sqrt{b_2^2 + c_2^2}) (b_2 c_1 - b_1 c_2)}{r_2^2 \sqrt{b_1^2 + c_1^2} \sqrt{b_2^2 + c_2^2}} \sqrt{-1} \sqrt{-1}. \end{aligned}$$

Es ist übrigens, wie bei gewöhnlichen complexen Zahlen, auch der Modulus jedes derartigen Quotienten gleich dem Quotienten der Moduli seines Dividends und Divisors.

teristischen Bestimmungsgleichungen für ξ , η , ζ direct aus (20), (21), (22) hervorgehen, indem man die Grössen:

$$a_1, b_1, c_1; x, y, z \text{ mit: } \xi, \eta, \zeta; a_1, b_1, c_1$$

vertauscht. Die drei hiedurch erhaltenen Relationen:

$$r_1^2 = r_2^2(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2), \quad a_1\xi + b_1\eta + c_1\zeta = a_2(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2), \\ m = r_2^2\xi,$$

welche augenscheinlich den folgenden:

$$(35) \dots \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{r_1^2}{r_2^2},$$

$$(36) \dots a_1\xi + b_1\eta + c_1\zeta = \frac{a_2 r_1^2}{r_2^2}, \quad (37) \dots \xi = \frac{m}{r_2^2}$$

äquivalent sind, besitzen — unter \bar{p} , \bar{q} die den Nennern: p , q correspondirenden Grössen:

$$\bar{p} = r_1 - a_1, \quad \bar{q} = r_1 + a_1$$

verstanden — für $h \geq 0$, d. h. $b_1 c_2 \geq b_2 c_1$ stets zwei Lösungen:

$$(m) \cdot \begin{cases} \xi_1 = \frac{m}{r_2^2}, & \eta_1 = -\frac{1}{r_2^2} \left(l + \frac{c_1 h}{\bar{p}} \right), & \zeta_1 = \frac{1}{r_2^2} \left(k + \frac{b_1 h}{\bar{p}} \right); \\ \xi_2 = \frac{m}{r_2^2}, & \eta_2 = -\frac{1}{r_2^2} \left(l - \frac{c_1 h}{\bar{q}} \right), & \zeta_2 = \frac{1}{r_2^2} \left(k - \frac{b_1 h}{\bar{q}} \right). \end{cases}$$

für $h = 0$ jedoch nur eine einzige Lösung, nämlich:

$$(m^*) \cdot \xi = \frac{m}{r_2^2}, \quad \eta = -\frac{l}{r_2^2}, \quad \zeta = \frac{k}{r_2^2}$$

und begründen daher folgende explicite Definition des Dividirens für den Specialfall: $n = 2$:

$a_1 + b_1 i_1 + c_1 i_2$ durch $a_2 + b_2 i_1 + c_2 i_2$ dividiren, heisst, diesen Zahlen, wenn sie diplanar sind, zwei neue, höchstens bicomplexe Zahlen: $\xi_1 + \eta_1 i_1 + \zeta_1 i_2$, $\xi_2 + \eta_2 i_1 + \zeta_2 i_2$ dagegen, falls sie complanar sind, eine einzige, höchstens bicomplexe Zahl: $\bar{\xi} + \bar{\eta} i_1 + \bar{\zeta} i_2$ zuordnen.

Im Anschlusse hieran charakterisiren wir die Division auch für zwei n -fach complexe Zahlen: Z_1, Z_2 als Umkehrung

der Multiplication und unterwerfen demgemäss die Coëfficienten von :

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 i_1 + \varepsilon_2 i_2 + \dots + \varepsilon_n i_n$$

den drei Bedingungsgleichungen:

$$(38) \dots \varepsilon_0^2 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_n^2 = \frac{r_1^2}{r_2^2},$$

$$(39) \dots a_0 \varepsilon_0 + a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2 + \dots + a_n \varepsilon_n = \frac{b_0 r_1^2}{r_2^2},$$

$$(40) \dots \varepsilon_0 = \frac{m}{r_2^2},$$

welche mit den Relationen: (17), (18), (19) in derselben Weise wie (35), (36), (37) mit (20), (21), (22) zusammenhängen.

Ihre Auflösung würde natürlich völlig unbestimmt ausfallen, wäre deren Form nicht bereits durch unsere vierte allgemeine Forderung und die eigenthümliche Beschaffenheit der beiden Werthsysteme (m) im vorhinein präcisirt.

Da nämlich $\eta_1, \eta_2; \delta_1, \delta_2$ nach einigen leichten Transformationen die Darstellungsweise:

$$\eta_1 = \frac{1}{r_2^2} \{b_2 r_1 + \frac{b_1}{p} (a_2 r_1 - m)\}, \quad \eta_2 = -\frac{1}{r_2^2} \{b_2 r_1 - \frac{b_1}{q} (a_2 r_1 + m)\};$$

$$\delta_1 = \frac{1}{r_2^2} \{c_2 r_1 + \frac{c_1}{p} (a_2 r_1 - m)\}, \quad \delta_2 = -\frac{1}{r_2^2} \{c_2 r_1 - \frac{c_1}{q} (a_2 r_1 + m)\}$$

gestatten, also eine Vertauschung von b_1, b_2 mit c_1, c_2 die Grössen: η_1, η_2 in: δ_1, δ_2 verwandelt, bedingt beim Übergange von zweifach zu n -fach complexen Zahlen die Form des Coëfficienten ε'_1 resp. ε''_1 auf analoge Art jene aller folgenden Coëfficienten, so dass sich für (38), (39), (40) ohne jede weitere Rechnung die zwei nachstehenden, völlig bestimmten Werthsysteme ergeben:

$$(n) \cdot \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon'_0 = \frac{m}{r_2^2}, \quad \varepsilon'_1 = \frac{1}{r_2^2} \{b_1 r_1 + \frac{a_1}{p} (b_0 r_1 - m)\}, \\ \varepsilon'_2 = \frac{1}{r_2^2} \{b_2 r_1 + \frac{a_2}{p} (b_0 r_1 - m)\}, \\ \varepsilon'_n = \frac{1}{r_2^2} \{b_n r_1 + \frac{a_n}{p} (b_0 r_1 - m)\}; \end{array} \right.$$

$$(n^*) \cdot \left\{ \begin{aligned} \xi'' &= \frac{m}{r_2^2}, \quad \xi_1'' = -\frac{1}{r_2^2} \left\{ b_1 r_1 - \frac{a_1}{\bar{q}} (b_0 r_1 + m) \right\}, \\ \xi_2'' &= -\frac{1}{r_2^2} \left\{ b_2 r_1 - \frac{a_2}{\bar{q}} (b_0 r_1 + m) \right\}, \\ \xi_n'' &= -\frac{1}{r_2^2} \left\{ b_n r_1 - \frac{a_n}{\bar{q}} (b_0 r_1 + m) \right\}. \end{aligned} \right.$$

In beiden Lösungen repräsentiren \bar{p} , \bar{q} wieder die Differenz respective die Summe des Modulus des Dividends und des reellen Bestandtheiles des letzteren, d. h. die Grössen:

$$\bar{p} = r_1 - a_0, \quad \bar{q} = r_1 + a_0,$$

und lassen sich daher die Werthsysteme: (n), (n*) ebenso wie die Gleichungen: (f), (f*) durch Änderung des Zeichens von r_1 in einander überführen, während die drei allgemeinen Relationen (38), (39), (40) bei einer Vertauschung von r_1 mit: $-r_1$ ihre Formen beibehalten.

Um also darzuthun, dass die Beziehungen (38), (39), (40) tatsächlich durch die Werthsysteme: (n), (n*) befriedigt werden, genügt es, die Richtigkeit eines einzigen, z. B. von (n) nachzuweisen. Hiebei benützt man am zweckmässigsten die Identitäten:

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 &= \bar{p}\bar{q}, \\ 2r_1(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n) &= \bar{p}(b_0 r_1 + m) - \bar{q}(b_0 r_1 - m), \\ 2(b_0 r_1^2 - a_0 m) &= \bar{p}(b_0 r_1 + m) + \bar{q}(b_0 r_1 - m), \end{aligned}$$

denn ihre Einführung in die Summen:

$$\xi_0'^2 + \xi_1'^2 + \xi_2'^2 + \dots + \xi_n'^2, \quad a_0 \xi_0' + a_1 \xi_1' + a_2 \xi_2' + \dots + a_n \xi_n'$$

liefert fast unmittelbar die Ausdrücke:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_2^4} \{ m^2 + r_1^2 (r_2^2 - b_0^2) + (b_0 r_1 - m)(b_0 r_1 + m) \}, \\ \frac{1}{r_2^2} \{ a_0 m + \frac{1}{2} \bar{p} (b_0 r_1 + m) + \frac{1}{2} \bar{q} (b_0 r_1 - m) \}, \end{aligned}$$

deren Übereinstimmung mit den vorgeschriebenen Quotienten:

$\frac{r_2^2}{r_2^2}, \frac{b_0 r_1^2}{r_2^2}$ wohl nicht mehr einer weiteren Erläuterung bedarf.

Um nunmehr auch in den Werthsystemen: (n) , (n^*) eine formale Trennung der beiden Hauptfälle complanarer und diplanarer n -fach complexer Zahlen zu ermöglichen, verwandeln wir $\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_n$; $\xi''_1, \xi''_2, \dots, \xi''_n$ vorerst in Brüche mit dem gemeinschaftlichen Nenner: $\bar{p}r_2^2$ beziehungsweise $\bar{q}r_2^2$ und führen die dieser Umformung entspringenden Coëfficienten von r_1 in die gewonnenen Ausdrücke als selbstständige Factoren von $\frac{1}{r_2^2}$ ein. Es resultiren dann nach Absonderung der früher definirten Hilfsfunctionen: d, d_1 für (n) , (n^*) ohne Schwierigkeit die neuen Darstellungen: ¹

$$\xi'_0 = \frac{1}{r_2^2}(a_0 b_0 + d), \quad \xi'_1 = \frac{1}{r_2^2}\{a_1 b_0 - a_0 b_1 - \frac{1}{\bar{p}}(a_1 d - b_1 d_1)\},$$

$$\xi'_2 = \frac{1}{r_2^2}\{a_2 b_0 - a_0 b_2 - \frac{1}{\bar{p}}(a_2 d - b_2 d_1)\},$$

$$\xi'_n = \frac{1}{r_2^2}\{a_n b_0 - a_0 b_n - \frac{1}{\bar{p}}(a_n d - b_n d_1)\};$$

$$\xi''_0 = \frac{1}{r_2^2}(a_0 b_0 + d), \quad \xi''_1 = \frac{1}{r_2^2}\{a_1 b_0 - a_0 b_1 + \frac{1}{\bar{q}}(a_1 d - b_1 d_1)\},$$

$$\xi''_2 = \frac{1}{r_2^2}\{a_2 b_0 - a_0 b_2 + \frac{1}{\bar{q}}(a_2 d - b_2 d_1)\},$$

$$\xi''_n = \frac{1}{r_2^2}\{a_n b_0 - a_0 b_n + \frac{1}{\bar{q}}(a_n d - b_n d_1)\},$$

¹ Auf Grundlage dieser Formeln ergeben sich speciell für den Quotienten zweier dreifach complexer Zahlen:

$$a_1 + b_1 i_1 + c_1 i_2 + d_1 i_3, \quad a_2 + b_2 i_1 + c_2 i_2 + d_2 i_3$$

unter Benützung der früher verwendeten Hilfsfunctionen: h, h', h'' die beiden Werthe:

$$\frac{1}{r_2^2}\{m + [a_2 b_1 - a_1 b_2 - \frac{1}{\bar{p}}(c_1 h + d_1 h')]\}i_1 +$$

$$+ [a_2 c_1 - a_1 c_2 + \frac{1}{\bar{p}}(b_1 h - d_1 h'')]\}i_2 + [a_2 d_1 - a_1 d_2 + \frac{1}{\bar{p}}(b_1 h' + c_1 h'')]\}i_3\},$$

$$\frac{1}{r_2^2}\{m + [a_2 b_1 - a_1 b_2 + \frac{1}{\bar{q}}(c_1 h + d_1 h')]\}i_1 +$$

$$+ [a_2 c_1 - a_1 c_2 - \frac{1}{\bar{q}}(b_1 h - d_1 h'')]\}i_2 + [a_2 d_1 - a_1 d_2 - \frac{1}{\bar{q}}(b_1 h' + c_1 h'')]\}i_3\},$$

in welchen \bar{p}, \bar{q} natürlich wieder die Ausdrücke: $r_1 - a_1, r_1 + a_1$ vorstellen.

welche, falls Z_1, Z_2 complanar sind, also die Differenz: $a_s d - b_s d_1$ für $s = 1, 2, \dots, n$ verschwindet, für die fraglichen Coefficienten von $\frac{Z_1}{Z_2}$ augenscheinlich nur ein einziges, die letzteren als rationale Functionen von $a_0, a_1, \dots, a_n; b_0, b_1, \dots, b_n$ definirendes Werthsystem:

$$(0) \dots \left\{ \begin{array}{l} \varkappa'_0 = \varkappa''_0 = \frac{1}{r_2^2}(a_0 b_0 + d) = \bar{\varepsilon}_0, \\ \varkappa'_1 = \varkappa''_1 = \frac{1}{r_2^2}(a_1 b_0 - a_0 b_1) = \bar{\varepsilon}_1, \\ \varkappa'_2 = \varkappa''_2 = \frac{1}{r_2^2}(a_2 b_0 - a_0 b_2) = \bar{\varepsilon}_2, \\ \varkappa'_n = \varkappa''_n = \frac{1}{r_2^2}(a_n b_0 - a_0 b_n) = \bar{\varepsilon}_n \end{array} \right.$$

liefern. Hienach wird der Quotient zweier complanarer, n -fach complexer Zahlen in demselben Sinne unabhängig von den Nennern: \bar{p}, \bar{q} , in welchem sich seinerzeit das Product zweier derartiger Zahlen als unabhängig von den Nennern: p, q erwiesen hat. Da ferner \bar{p} resp. \bar{q} nur für einen reellen Dividend verschwinden kann, und sämtliche reelle Zahlen zugleich in Bezug auf jede beliebige n -fach complexe Zahl complanar bleiben, sind wir gemäss früheren Überlegungen berechtigt, auch die Fälle:

$$\bar{p} > 0, \bar{q} = 0; \bar{p} = 0, \bar{q} > 0; \bar{p} = \bar{q} = 0$$

ausschliesslich auf Grundlage des Werthsystems (0) zu erledigen, so dass unsere erste universelle Verallgemeinerung des Dividirens die nachstehende explicite Definition zu erhalten hat:

Zwei n -fach complexe Zahlen: Z_1, Z_2 durch einander dividiren, heisst, denselben, falls sie diplanar sind, zwei neue, höchstens n -fach complexe Zahlen:

$$\varkappa'_0 + \varkappa'_1 i_1 + \varkappa'_2 i_2 + \dots + \varkappa'_n i_n, \quad \varkappa''_0 + \varkappa''_1 i_1 + \varkappa''_2 i_2 + \dots + \varkappa''_n i_n$$

dagegen, wenn sie complanar sind, eine einzige, höchstens n -fach complexe Zahl: $\bar{\varepsilon}_0 + \bar{\varepsilon}_1 i_1 + \bar{\varepsilon}_2 i_2 + \dots + \bar{\varepsilon}_n i_n$ zuordnen.

Zur vollständigen Einsicht in die eigenthümliche Beschaffenheit der jeweiligen Werthe von $\frac{Z_1}{Z_2}$ gelangt man übrigens erst mittelst jener Substitutionen, welche die Coëfficienten: $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n; b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$ für diplanare Zahlen durch:

$$r_1, r_2; \alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; \beta, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$$

hingegen für complanare Zahlen in Function von:

$$r_1, r_2; \alpha, \beta; \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}$$

ausdrücken. Hiebei ergeben sich im ersten Falle, wenn man der Kürze wegen:

$$\frac{\sin \frac{\beta+\theta}{2} \sin \frac{\beta-\theta}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg} \psi, \quad \frac{\cos \frac{\beta+\theta}{2} \cos \frac{\beta-\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg} \chi;$$

$$\frac{\cos \alpha_1}{\cos \beta_1} = \operatorname{tg} \varphi_1, \quad \frac{\cos \alpha_2}{\cos \beta_2} = \operatorname{tg} \varphi_2, \quad \frac{\cos \alpha_n}{\cos \beta_n} = \operatorname{tg} \varphi_n$$

setzt, für $\xi'_0, \xi''_0; \xi'_1, \xi''_1; \dots, \xi'_n, \xi''_n$ die Ausdrücke:

$$\xi'_0 = \xi''_0 = \frac{r_1}{r_2} \cos \theta$$

$$\xi'_1 = \frac{r_1 \cos \alpha_1 \cos (\varphi_1 + \psi)}{r_2 \sin \varphi_1 \cos \psi}, \quad \xi''_1 = -\frac{r_1 \cos \alpha_1 \cos (\varphi_1 + \chi)}{r_2 \sin \varphi_1 \cos \chi};$$

$$\xi'_2 = \frac{r_1 \cos \alpha_2 \cos (\varphi_2 + \psi)}{r_2 \sin \varphi_2 \cos \psi}, \quad \xi''_2 = -\frac{r_1 \cos \alpha_2 \cos (\varphi_2 + \chi)}{r_2 \sin \varphi_2 \cos \chi};$$

$$\xi'_n = \frac{r_1 \cos \alpha_n \cos (\varphi_n + \psi)}{r_2 \sin \varphi_n \cos \psi}, \quad \xi''_n = -\frac{r_1 \cos \alpha_n \cos (\varphi_n + \chi)}{r_2 \sin \varphi_n \cos \chi},$$

während im zweiten Falle der reelle Bestandtheil des umzuformenden Quotienten:

$$(41) \dots \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{1}{r_2^2} \{ (a_0 b_0 + d) + (a_1 b_0 - a_0 b_1) i_1 + \\ + (a_2 b_0 - a_0 b_2) i_2 + \dots + (a_n b_0 - a_0 b_n) i_n \}$$

kraft der Identität:

$$a_0 b_0 + (a_1 b_1 + \dots + a_n b_n) = r_1 r_2 \left\{ \left(\frac{a_0}{r_1} \right) \left(\frac{b_0}{r_2} \right) + \left(\frac{a e_1}{r_1} \right) \left(\frac{b e_1}{r_2} \right) \right\}$$

in $\frac{r_1}{r_2} \cos(\alpha - \beta)$, und der Factor von i_s , nämlich: $\frac{a_s b_0 - a_0 b_s}{r_2^2}$, für $s = 1, 2, \dots, n-1$ in:

$$\frac{r_1}{r_2} \sin(\alpha - \beta) \sin \omega_1 \sin \omega_2 \dots \sin \omega_{s-1} \cos \omega_s,$$

für $s = n$ jedoch in:

$$\frac{r_1}{r_2} \sin(\alpha - \beta) \sin \omega_1 \sin \omega_2 \dots \sin \omega_{n-1}$$

übergeht. Es gilt daher für den Quotienten zweier beliebiger, diplanarer Zahlen die wichtige Doppelgleichung:

$$(42) \quad \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2} \left[\cos \theta + \sec \psi \left\{ \frac{\cos \alpha_1 \cos(\varphi_1 + \psi)}{\sin \varphi_1} i_1 + \frac{\cos \alpha_2 \cos(\varphi_2 + \psi)}{\sin \varphi_2} i_2 + \dots + \frac{\cos \alpha_n \cos(\varphi_n + \psi)}{\sin \varphi_n} i_n \right\} \right]$$

respective:

$$\frac{r_1}{r_2} \left[\cos \theta - \sec \chi \left\{ \frac{\cos \alpha_1 \cos(\varphi_1 + \chi)}{\sin \varphi_1} i_1 + \frac{\cos \alpha_2 \cos(\varphi_2 + \chi)}{\sin \varphi_2} i_2 + \dots + \frac{\cos \alpha_n \cos(\varphi_n + \chi)}{\sin \varphi_n} i_n \right\} \right],$$

wogegen der Quotient zweier complanarer Zahlen nach Absonderung des in Z_1, Z_2 und $\frac{Z_1}{Z_2}$ auftretenden Inclinationsfactors: I die einfache Darstellungsweise:

$$(43) \quad \dots \frac{r_1(\cos \alpha + I \sin \alpha)}{r_2(\cos \beta + I \sin \beta)} = \frac{r_1}{r_2} \{ \cos(\alpha - \beta) + I \sin(\alpha - \beta) \}$$

erlaubt. Während also das Resultat der Division im ersten Falle überhaupt keiner elementaren Deutung zugänglich ist, gestattet dasselbe im zweiten Falle entsprechend der eben abgeleiteten Formel und der Gleichung: $I^2 = -1$ wenigstens in formaler Hinsicht dieselbe Interpretation wie der Quotient zweier einfach complexer Zahlen.

An dieses Ergebniss knüpft sich jetzt die wichtige Frage, unter welchen Bedingungen es überhaupt zulässig

sei, die bekannten, für alle derartigen Quotienten geltenden Gleichungen:

$$(44) \dots \frac{Z_1 + Z_2}{Z_3} = \frac{Z_1}{Z_3} + \frac{Z_2}{Z_3}, \quad (45) \dots \frac{Z_1 Z_3}{Z_2 Z_3} = \frac{Z_1}{Z_2},$$

$$(46) \dots \frac{Z_1 : Z_3}{Z_2 : Z_3} = \frac{Z_1}{Z_2}$$

auf Quotienten n -fach complexer Zahlen zu übertragen?

Da die Divisionsregeln beim Übergange von zweifach zu n -fach complexen Zahlen formal dieselben bleiben, können wir uns bei der Beantwortung der vorgelegten Frage, ohne die Allgemeinheit unserer definitiven Folgerungen zu beeinträchtigen, auf bicomplexe Zahlen beschränken und demgemäss vorerst die Differenz:

$$\underline{\Delta} = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_3} - \left(\frac{Z_1}{Z_3} + \frac{Z_2}{Z_3} \right),$$

deren Verschwinden zugleich die Relation (44) verificirt, auf Grundlage der beiden einfachen Werthsysteme (m) untersuchen.

Infolge des eigenthümlichen, bereits erörterten Zusammenhanges zwischen den zwei Werthen des Quotienten beliebiger diplanarer Zahlen bedingt die Verwerthung eines bestimmten Verknüpfungsgesetzes bei der Ermittlung von $(Z_1 + Z_2) : Z_3$ die Benützung desselben Verknüpfungsgesetzes zur Bestimmung von $Z_1 : Z_3$, $Z_2 : Z_3$, so dass $\underline{\Delta}$ im Ganzen nur zwei Werthe annehmen kann. Ihre Berechnung führt bei Anwendung der Substitutionen:

$$a_1 + a_2 = a', \quad b_1 + b_2 = b', \quad c_1 + c_2 = c'$$

$$r_2 - a_2 = \bar{p}_1, \quad r_2 + a_2 = \bar{q}_1$$

auf die Doppelgleichung:

$$(47) \dots \underline{\Delta} = \frac{1}{r_3^2} \left\{ \left(\frac{c_1 h_1}{\bar{p}} + \frac{c_2 h_2}{\bar{p}_1} - \frac{c' h'}{r - a'} \right) i_1 - \left(\frac{b_1 h_1}{\bar{p}} + \frac{b_2 h_2}{\bar{p}_1} - \frac{b' h'}{r - a'} \right) i_2 \right\},$$

beziehungsweise:

$$-\frac{1}{r_3^2} \left\{ \left(\frac{c_1 h_1}{\bar{q}} + \frac{c_2 h_2}{\bar{q}_1} - \frac{c' h'}{r + a'} \right) i_1 - \left(\frac{b_1 h_1}{\bar{q}} + \frac{b_2 h_2}{\bar{q}_1} - \frac{b' h'}{r + a'} \right) i_2 \right\},$$

d. h. die fragliche Differenz ist für diplanare Zahlen eine zweiwerthige, zweifach imaginäre Grösse, während sie sich für complanare Zahlen wegen $h_1 = h_2 = 0$ stets auf Null reducirt.

Im letzteren Falle ist also auch die Relation (44) allgemein gültig.

Etwas schwieriger fällt der Nachweis, dass die Gleichungen (45), (46) ebenfalls nur unter denselben Bedingungen richtig bleiben.

Da nämlich $Z_1 Z_2$ und $Z_1 : Z_2$ im Allgemeinen zweiwerthig sind, kann ohne Klarlegung des Verhältnisses, in welches die beiden Verknüpfungsgesetze der Coëfficienten von $Z_1 Z_2$ zu jenen der Coëfficienten von $Z_1 : Z_2$ treten, nicht einmal über die Anzahl der, einer gegebenen Combination von Producten und Quotienten zukommenden Werthe sicher entschieden werden. Wir haben demgemäss vor Allem festzustellen, für welche der vier mit einander combinirbaren Verknüpfungsgesetze die Relationen:

$$(48). \quad (Z_1 Z_2) : Z_2 = Z_1, \quad (49). \quad \left(\frac{Z_1}{Z_2}\right) \times Z_2 = Z_1$$

identisch erfüllt werden. ¹

Die diesbezüglichen Rechnungen gestalten sich am einfachsten bei Benützung der zweiten Darstellungsweise von $Z_1 Z_2$ respective $Z_1 : Z_2$ und liefern für jede der vier Zahlenfunktionen:

$$\begin{aligned} (x_1 + y_1 i_1 + z_1 i_2) Z_2, & \quad (x_2 + y_2 i_1 + z_2 i_2) : Z_2; \\ (\xi_1 + \eta_1 i_1 + \delta_1 i_2) \times Z_2, & \quad (\xi_2 + \eta_2 i_1 + \delta_2 i_2) \times Z_2 \end{aligned}$$

je zwei Ausdrücke:

$$\begin{aligned} \xi^{(1)} + \eta^{(1)} i_1 + \delta^{(1)} i_2, & \quad \xi^{(2)} + \eta^{(2)} i_1 + \delta^{(2)} i_2; \\ \xi^{(3)} + \eta^{(3)} i_1 + \delta^{(3)} i_2, & \quad \xi^{(4)} + \eta^{(4)} i_1 + \delta^{(4)} i_2; \\ x^{(1)} + y^{(1)} i_1 + z^{(1)} i_2, & \quad x^{(2)} + y^{(2)} i_1 + z^{(2)} i_2; \\ x^{(3)} + y^{(3)} i_1 + z^{(3)} i_2, & \quad x^{(4)} + y^{(4)} i_1 + z^{(4)} i_2, \end{aligned}$$

indem man der vorzunehmenden Rechnungsoperation sowohl die erste als die zweite Divisions- respective Multiplicationsregel zu Grunde legen kann. Auf dem hier angedeuteten Wege gelangt

¹ Zufolge der Commutativität jedes, aus zwei bicomplexen Factoren gebildeten Productes ist dann auch $(Z_2 Z_1) : Z_2 = Z_1$ und $Z_2 \times (Z_1 : Z_2) = Z_1$, während, wie bereits Hankel (l. c. p. 33) hervorgehoben hat, in sämtlichen Zahlensystemen, für welche das Product zweier Zahlen: Z_1, Z_2 nicht commutativ bleibt, im Allgemeinen weder $(Z_2 Z_1) : Z_2$ noch $Z_2 \times (Z_1 : Z_2)$ mit Z_1 zusammenfallen. Es finden daher beispielsweise für diplanare Quaternionen die Reductionsgleichungen: $(q_2 q_1) : q_2 = q_1$; $q_2 \times (q_1 : q_2) = q_1$ überhaupt keine Anwendung.

man nach Einführung der Abkürzungen: $\bar{N}'_1, \bar{N}'_2; \bar{N}''_1, \bar{N}''_2$ für die Denner:

$$\begin{aligned} 2pr_1r_2 - (a_2r_1 - a_1r_2)^2, & \quad 2qr_1r_2 - (a_2r_1 + a_1r_2)^2; \\ 2\bar{p}r_1r_2^2 - (a_2r_1 - m)^2, & \quad 2\bar{q}r_1r_2^2 - (a_2r_1 + m)^2 \end{aligned}$$

äquivalenten Quadratsummen:

$$\begin{aligned} (b_2r_1 - b_1r_2)^2 + (c_2r_1 - c_1r_2)^2, & \quad (b_2r_1 + b_1r_2)^2 + (c_2r_1 + c_1r_2)^2; \\ h^2 + (c_2r_1 + k)^2 + (b_2r_1 - l)^2, & \quad h^2 + (c_2r_1 - k)^2 + (b_2r_1 + l)^2 \end{aligned}$$

schliesslich zu folgenden Resultaten:

$$\begin{aligned} \xi^{(1)} = \xi^{(2)} = \xi^{(3)} = \xi^{(4)} = a_1; \quad \eta^{(1)} = \eta^{(4)} = b_1; \quad \delta^{(1)} = \delta^{(4)} = c_1; \\ \eta^{(2)} = b_1 - \frac{2hr_1}{\bar{N}'_1}(c_2r_1 - c_1r_2), \quad \eta^{(3)} = b_1 - \frac{2hr_1}{\bar{N}'_2}(c_2r_1 + c_1r_2); \\ \delta^{(2)} = c_1 + \frac{2hr_1}{\bar{N}'_1}(b_2r_1 - b_1r_2), \quad \delta^{(3)} = c_1 + \frac{2hr_1}{\bar{N}'_2}(b_2r_1 + b_1r_2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^{(1)} = x^{(4)} = a_1; \quad y^{(1)} = y^{(4)} = b_1; \quad z^{(1)} = z^{(4)} = c_1; \\ x^{(2)} = a_1 - \frac{2h^2r_1}{\bar{N}''_1}, \quad x^{(3)} = a_1 + \frac{2h^2r_1}{\bar{N}''_2}; \\ y^{(2)} = b_1 - \frac{2hr_1}{\bar{N}''_1}(c_2r_1 + k), \quad y^{(3)} = b_1 - \frac{2hr_1}{\bar{N}''_2}(c_2r_1 - k), \\ z^{(2)} = c_1 + \frac{2hr_1}{\bar{N}''_1}(b_2r_1 - l), \quad z^{(3)} = c_1 + \frac{2hr_1}{\bar{N}''_2}(b_2r_1 + l). \end{aligned}$$

Dieselben lehren, dass die in den Gleichungen: ¹

$$Z_1Z_2 = x_1 + y_1i_1 + z_1i_2, \quad \frac{Z_1}{Z_2} = \xi_1 + \eta_1i_1 + \delta_1i_2$$

beziehungsweise:

$$Z_1Z_2 = x_2 + y_2i_1 + z_2i_2, \quad \frac{Z_1}{Z_2} = \xi_2 + \eta_2i_1 + \delta_2i_2$$

¹ Die elementarste Erläuterung des Verhältnisses zwischen den beiden Verknüpfungsgesetzen der Multiplication und Division bilden wohl die Identitäten:

$$(u^2 - v) : (u - \sqrt{v}) = u + \sqrt{v}, \quad (u + \sqrt{v}) \times (u - \sqrt{v}) = u^2 - v,$$

welche augenscheinlich sofort unrichtig werden, wenn man die, dem Modulus r_1 correspondirende Grösse: \sqrt{v} in einer und derselben Gleichung mit verschiedenen Zeichen versteht.

ausgedrückten Multiplications- und Divisionsregeln einander direct correspondiren, denn die Relationen (48), (49) werden bei Combination dieser Regeln thatsächlich zu Identitäten. Dagegen entspringt jeder anderen Combination ein von der geforderten Zahl: Z_1 verschiedenes Resultat, welches mit der letzteren nur insoferne zusammenhängt, als es kraft den, fast ohne jede Rechnung sich ergebenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \{\xi^{(2)}\}^2 + \{\eta^{(2)}\}^2 + \{\delta^{(2)}\}^2 &= \{\xi^{(3)}\}^2 + \{\eta^{(3)}\}^2 + \{\delta^{(3)}\}^2 = \\ &= \{x^{(2)}\}^2 + \{y^{(2)}\}^2 + \{z^{(2)}\}^2 = \{x^{(3)}\}^2 + \{y^{(3)}\}^2 + \{z^{(3)}\}^2 = r_1^2 \end{aligned}$$

denselben Modulus wie Z_1 besitzt.

Nachdem hiemit der Zusammenhang zwischen den einzelnen Verknüpfungsgesetzen der Multiplication und Division vollständig klargelegt ist, können wir die Prüfung der Gleichungen (45), (46) unmittelbar in Angriff nehmen, zu welchem Zwecke vorerst die beiden zusammengesetzten Quotienten:

$$Q_1 = \frac{Z_1 Z_3}{Z_2 Z_3}, \quad Q_2 = \frac{Z_1 : Z_3}{Z_2 : Z_3}$$

als bicomplexe Zahlen darzustellen sind. Gemäss unseren letzten Betrachtungen kommen jedem derselben im Allgemeinen je zwei Werthe zu:

$$\begin{aligned} (\xi_1) + (\eta_1) i_1 + (\delta_1) i_2, & \quad (\bar{\xi}_2) + (\bar{\eta}_2) i_1 + (\bar{\delta}_2) i_2; \\ (\bar{\xi}_1) + (\bar{\eta}_1) i_1 + (\bar{\delta}_1) i_2, & \quad (\xi_2) + (\eta_2) i_1 + (\delta_2) i_2, \end{aligned}$$

welche der Reihe nach berechnet werden können, indem man die aus den bicomplexen Zahlen:

$$\begin{aligned} (Z_1) &= \left(\bar{x}' + \frac{h_1^2}{p_1}\right) + \left(\bar{y}' + \frac{h_1 k_1}{p_1}\right) i_1 + \left(\bar{z}' + \frac{h_1 l_1}{p_1}\right) i_2, \\ (Z_2) &= \left(\bar{x}'' + \frac{h_2^2}{p_2}\right) + \left(\bar{y}'' + \frac{h_2 k_2}{p_2}\right) i_1 + \left(\bar{z}'' + \frac{h_2 l_2}{p_2}\right) i_2, \\ (Z'_1) &= \left(x' - \frac{h_1^2}{q_1}\right) + \left(y' - \frac{h_1 k_1}{q_1}\right) i_1 + \left(z' - \frac{h_1 l_1}{q_1}\right) i_2, \\ (Z'_2) &= \left(x'' - \frac{h_2^2}{q_2}\right) + \left(y'' - \frac{h_2 k_2}{q_2}\right) i_1 + \left(z'' - \frac{h_2 l_2}{q_2}\right) i_2; \end{aligned}$$

$$(\bar{Z}_1) = \frac{m_1}{r_3^2} - \frac{1}{r_3^2} \left(l_1 + \frac{c_1 h_1}{\bar{p}} \right) i_1 + \frac{1}{r_3^2} \left(k_1 + \frac{b_1 h_1}{\bar{p}} \right) i_2,$$

$$(\bar{Z}_2) = \frac{m_2}{r_3^2} - \frac{1}{r_3^2} \left(l_2 + \frac{c_2 h_2}{\bar{p}_1} \right) i_1 + \frac{1}{r_3^2} \left(k_2 + \frac{b_2 h_2}{\bar{p}_1} \right) i_2,$$

$$(\bar{Z}'_1) = \frac{m_1}{r_3^2} - \frac{1}{r_3^2} \left(l_1 - \frac{c_1 h_1}{\bar{q}} \right) i_1 + \frac{1}{r_3^2} \left(k_1 - \frac{b_1 h_1}{\bar{q}} \right) i_2,$$

$$(\bar{Z}'_2) = \frac{m_2}{r_3^2} - \frac{1}{r_3^2} \left(l_2 - \frac{c_2 h_2}{\bar{q}_1} \right) i_1 + \frac{1}{r_3^2} \left(k_2 - \frac{b_2 h_2}{\bar{q}_1} \right) i_2$$

gebildeten einfachen Quotienten:

$$\begin{array}{cccc} (Z_1):(Z_2), & (Z'_1):(Z'_2); & (\bar{Z}_1):(\bar{Z}_2), & (\bar{Z}'_1):(\bar{Z}'_2) \\ & \text{nach der} & & \\ \text{ersten} & \text{zweiten} & \text{ersten} & \text{zweiten} \end{array}$$

Divisionsregel ermittelt. Da übrigens schon die Verschiedenheit eines einzigen Systems gleichnamiger Coëfficienten in Q_1 resp. Q_2 von den correspondirenden Coëfficienten in $Z_1 : Z_2$ die Unzulässigkeit von (45), (46) für die mit einander verknüpften Zahlen zur Folge hat, mögen vorläufig nur die Werthe von (x_1) , (x_2) , (\bar{x}_1) , (\bar{x}_2) bestimmt werden, um bei der Ausscheidung jener Fälle, für welche die zu prüfenden Relationen überhaupt nicht in Betracht kommen, jede überflüssige Rechnung zu vermeiden.

Verwendet man zur Reduction der fraglichen Coëfficienten die Identitätengruppen: (\mathfrak{B}) , (\mathfrak{D}) , (\mathfrak{S}) und (\mathfrak{R}) , so erhalten alle für die ersteren gesuchten Ausdrücke leicht discutirbare Formen, indem hiebei die nachstehenden vier Gleichungen resultiren:

$$(50) \dots (x_1) = \frac{m}{r_2^2} \left(1 + \frac{h_1 h_2}{p_1 p_2} \right) - \frac{1}{r_2^2 r_3^2} \left\{ a_3 g \left(\frac{h_1}{p_1} - \frac{h_2}{p_2} \right) + \left(h_1 + \frac{h_2 m_1}{p_2} \right) \left(h_2 + \frac{h_1 m_2}{p_1} \right) \right\},$$

$$(51) \dots (x_2) = \frac{m}{r_2^2} \left(1 + \frac{h_1 h_2}{q_1 q_2} \right) + \frac{1}{r_2^2 r_3^2} \left\{ a_3 g \left(\frac{h_1}{q_1} - \frac{h_2}{q_2} \right) - \left(h_1 - \frac{h_2 m_1}{q_2} \right) \left(h_2 - \frac{h_1 m_2}{q_1} \right) \right\},$$

$$(52) \dots (\bar{x}_1) = \frac{m}{r_2^2} + \frac{1}{r_2^2 r_3^2} \left\{ g \left(\frac{h_1}{\bar{p}} - \frac{h_2}{\bar{p}_1} \right) - \frac{h_1 h_2 p}{\bar{p} \bar{p}_1} \right\},$$

$$(53). \quad (\bar{\varepsilon}_2) = \frac{m}{r_2^2} - \frac{1}{r_2^2 r_3^2} \left\{ g \left(\frac{h_1}{\bar{q}} - \frac{h_2}{\bar{q}_1} \right) + \frac{h_1 h_2 p}{\bar{q} \bar{q}_1} \right\}.$$

Es sind demnach für $h_1, h_2 \geq 0$ sämtliche vier Coëfficienten von dem reellen Bestandtheile in $Z_1:Z_2$, nämlich $\frac{m}{r_2^2}$ verschieden, während sie für $h_1 = h_2 = 0$ ohne Ausnahme dem letzteren gleich werden. Lässt sich also zeigen, dass unter diesen Annahmen, welche die Grössen: Z_1, Z_2, Z_3 zugleich als complanare bicomplexe Zahlen kennzeichnen, ausserdem noch die Relationen:

$$(\eta_1) = (\eta_2) = (\bar{\eta}_1) = (\bar{\eta}_2) = -\frac{l}{r_2^2}, \quad (\delta_1) = (\delta_2) = (\bar{\delta}_1) = (\bar{\delta}_2) = \frac{k}{r_2^2}$$

gelten, so erscheint dann auch unsere auf die Gleichungen (45), (46) bezügliche Behauptung vollständig begründet.

Die Herstellung des fraglichen Beweises wird durch die Thatsache ermöglicht, dass gemäss früheren Untersuchungen die Multiplication und Division complanarer Zahlen ebenfalls gleichartige Zahlen liefert, mithin die beiden Ausdrücke:

$$\begin{aligned} & (\bar{x}' + \bar{y}' i_1 + \bar{z}' i_2) : (\bar{x}'' + \bar{y}'' i_1 + \bar{z}'' i_2), \\ & \left(\frac{m_1}{r_3^2} - \frac{l_1}{r_3^2} i_1 + \frac{k_1}{r_3^2} i_2 \right) : \left(\frac{m_2}{r_3^2} - \frac{l_2}{r_3^2} i_1 + \frac{k_2}{r_3^2} i_2 \right), \end{aligned}$$

auf welche sich die Quotienten: $(Z_1):(Z_2)$, $(Z'_1):(Z'_2)$ respective $(\bar{Z}_1):(\bar{Z}_2)$, $(\bar{Z}'_1):(\bar{Z}'_2)$ infolge des Verschwindens von h_1, h_2 reduciren, nach den für complanare bicomplexe Zahlen bestehenden Divisionsregeln zu berechnen sind.

Ihre Anwendung führt unter Benützung der aus (\mathfrak{C}) und (\mathfrak{G}) für den vorliegenden Fall entspringenden Beziehungen:

$$\begin{aligned} k_1^2 + l_1^2 + m_1^2 &= \bar{x}'^2 + \bar{y}'^2 + \bar{z}'^2 = r_1^2 r_3^2, \\ k_2^2 + l_2^2 + m_2^2 &= \bar{x}''^2 + \bar{y}''^2 + \bar{z}''^2 = r_2^2 r_3^2 \end{aligned}$$

direct zu den Formeln:

$$\begin{aligned} (\eta_1) = (\eta_2) &= \frac{\bar{x}'' \bar{y}' - \bar{x}' \bar{y}''}{r_2^2 r_3^2}, \quad (\bar{\eta}_1) = (\bar{\eta}_2) = \frac{l_2 m_1 - l_1 m_2}{r_2^2 r_3^2}; \\ (\delta_1) = (\delta_2) &= \frac{\bar{x}'' \bar{z}' - \bar{x}' \bar{z}''}{r_2^2 r_3^2}, \quad (\bar{\delta}_1) = (\bar{\delta}_2) = \frac{k_1 m_2 - k_2 m_1}{r_2^2 r_3^2}, \end{aligned}$$

und so ergeben sich, da die allgemeinen Werthe der Zähler von $r_2^2 r_3^2$:

$$\begin{aligned}\bar{x}''\bar{y}' - \bar{x}'\bar{y}'' &= -lr_3^2 - c_3(a_3h + a_2h_1 - a_1h_2), \\ \bar{x}''\bar{z}' - \bar{x}'\bar{z}'' &= kr_3^2 + b_3(a_3h + a_2h_1 - a_1h_2), \\ l_2m_1 - l_1m_2 &= -lr_3^2 + c_3(a_3h - a_2h_1 + a_1h_2), \\ k_1m_2 - k_2m_1 &= kr_3^2 - b_3(a_3h - a_2h_1 + a_1h_2)\end{aligned}$$

für complanare Zahlen augenscheinlich den Producten: $-lr_3^2$, kr_3^2 äquivalent werden, ¹ in letzter Linie thatsächlich jene Relationen, von deren Zutreffen die Giltigkeit der Gleichungen (45) und (46) abhängig gemacht wurde.

Die hier zunächst für bicomplexe Zahlen gezogenen Schlüsse lassen sich durch vollständige Induction leicht auf n -fach complexe Zahlen ausdehnen und begründen im Vereine mit den übrigen in diesem Paragraphen abgeleiteten Resultaten die nachstehende umfassende Charakteristik unserer ersten universellen Verallgemeinerung der vierten algebraischen Grundoperation:

(I) Der Quotient zweier beliebiger n -fach complexer Zahlen: Z_1, Z_2 ist höchstens n -fach complex, unter Umständen aber auch reell; er repräsentirt eine einwerthige oder zweiwerthige Grösse, je nachdem die beiden, durch einander zu dividirenden Zahlen complanar oder diplanar sind, und wird nur dann unbe-

¹ Die vier zuletzt benützten Identitäten bilden natürlich nur integrirende Bestandtheile zweier grösserer selbstständiger Identitätsgruppen:

$$\begin{aligned}\bar{x}'\bar{y} - \bar{x}\bar{y}' &= -l_2r_1^2 - c_1(-a_3h + a_2h_1 + a_1h_2), \\ \bar{x}'\bar{z} - \bar{x}\bar{z}' &= k_2r_1^2 + b_1(-a_3h + a_2h_1 + a_1h_2), \quad \bar{y}'\bar{z} - \bar{y}\bar{z}' = -a_1(-a_3h + a_2h_1 + a_1h_2), \\ l_1m - lm_1 &= l_2r_1^2 - c_1(a_3h - a_2h_1 + a_1h_2), \\ km_1 - k_1m &= -k_2r_1^2 + b_1(a_3h - a_2h_1 + a_1h_2), \quad k_1l - kl_1 = -a_1(a_3h - a_2h_1 + a_1h_2),\end{aligned}$$

welche ich nur deshalb nicht im Anschluss an die Gleichungssysteme (D) und (E) mitgetheilt habe, weil sie im Übrigen in der vorliegenden Arbeit absolut keine Verwendung finden. Schliesslich sei noch bemerkt, dass die, allen Relationen der zweiten Gruppe gemeinsame Function von h, h_1, h_2 : $a_3h - a_2h_1 + a_1h_2$, wie eine einfache Umformung dieses Ausdruckes lehrt, mit der Determinante: g zusammenfällt, aus welcher übrigens auch sämtliche, im ersten Identitätensysteme auftretenden Functionen von h, h_1, h_2 durch partielle Änderung der Zeichen von a_1, a_2, a_3 abgeleitet werden können.

stimmt, beziehungsweise unendlich,¹ wenn sämtliche Coefficienten des Dividends und Divisors, beziehungsweise nur jene des letzteren verschwinden.

(II) Der genannte Quotient ist für jeden reellen Divisor distributiv hinsichtlich aller Coefficienten des Dividends, ferner für zwei beliebige complanare n -fach complexe Zahlen distributiv in Bezug auf sämtliche complanare Summanden, in welche sich der Dividend willkürlich zerlegen lässt, und bleibt im letzteren Falle auch unverändert, wenn man Zähler und Nenner mit irgend einer dritten endlichen und complanaren Zahl multiplicirt oder durch dieselbe dividirt.

(III) Der Modulus von $Z_1 : Z_2$ besitzt stets den Werth:

$$(54). \quad \rho = \frac{r_1}{r_2},$$

ist also — unter Z_3 nunmehr irgend eine endliche, n -fach complexe Zahl gedacht — zugleich Modulus der beiden Quotienten: Q_1, Q_2 , indem die Moduli von $Z_1 Z_3, Z_2 Z_3; Z_1 : Z_3, Z_2 : Z_3$ der Reihe nach mit: $r_1 r_3, r_2 r_3; r_1 : r_3, r_2 : r_3$ zusammenfallen.

Der letzte Satz bleibt natürlich auch gültig, falls man dem Zahlenpaare: Z_1, Z_2 statt einer einzigen neuen Zahl: Z_3 allgemein s — endliche n -fach complexe Zahlen: $Z^{(1)}, Z^{(2)}, \dots Z^{(s)}$ in analoger Weise zuordnet, d. h. die Quotienten:

$$\frac{Z_1 Z^{(1)}}{Z_2 Z^{(1)}}, \quad \frac{Z_1 Z^{(s)}}{Z_2 Z^{(s)}}, \quad \frac{Z_1 : Z^{(1)}}{Z_2 : Z^{(1)}}, \quad \dots \frac{Z_1 : Z^{(s)}}{Z_2 : Z^{(s)}}$$

bildet, und liefert schliesslich noch die Folgerung:

Sind $Z_1, Z_2; Z^{(1)}, Z^{(2)}, \dots Z^{(s)}$ irgend welche endliche n -fach complexe Zahlen, so liegen alle, jenen Quotienten zugehörigen Punkte in einer n -fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit von der Gleichung:

$$(55). \quad \dots \xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2 = \frac{r_1^2}{r_2^2},$$

mithin speciell für $n = 2$ auf der Oberfläche einer aus dem Ursprunge des betreffenden dreiaxigen Coordinatensystems mit dem Radius: ρ beschriebenen Kugel.

¹ Eine n -fach complexe Zahl ist ebenso wie eine einfach complexe als endlich, unendlich gross oder unendlich klein zu betrachten, je nachdem ihr Modulus endlich, unendlich gross oder unendlich klein ist.

§. 5.

Entwicklung des Potenzbegriffes für n -fach complexe Zahlen.

Definiren wir — unter s irgend eine positive ganze Zahl verstanden — die s -te Potenz einer beliebigen n -fach complexen Zahl: Z_1 als Product von s einander gleichen Factoren: Z_1 und bezeichnen dessen Werth symbolisch mit Z_1^s , so gilt vor Allem die aus (33) für:

$$r_2 = r_3 = \dots = r_s = r_1, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_s = \alpha$$

hervorgehende Fundamentalgleichung: ¹

$$(56). \quad Z_1^s = r_1^s \{ \cos (s \alpha) + I \sin (s \alpha) \}.$$

Analog ist die s -te Potenz einer zweiten, mit Z_1 complanaren Zahl: Z_2 :

$$Z_2^s = r_2^s \{ \cos (s \beta) + I \sin (s \beta) \},$$

mithin kraft der Formeln (26) und (43):

$$Z_1^s Z_2^s = r_1^s r_2^s \{ \cos (s \alpha + s \beta) + I \sin (s \alpha + s \beta) \},$$

$$\frac{Z_1^s}{Z_2^s} = \frac{r_1^s}{r_2^s} \{ \cos (s \alpha - s \beta) + I \sin (s \alpha - s \beta) \},$$

in welchen Resultaten die rechter Hand stehenden Ausdrücke unter nochmaliger Benützung von (56), (26) und (43) als s -te Potenz von Z_1 Z_2 respective $\frac{Z_1}{Z_2}$ interpretirt werden können, d. h. man hat unter den gemachten Voraussetzungen allgemein:

$$(57) \dots Z_1^s Z_2^s = (Z_1 Z_2)^s, \quad (58) \dots \frac{Z_1^s}{Z_2^s} = \left(\frac{Z_1}{Z_2} \right)^s,$$

¹ Diese Gleichung fällt für $n=1$ mit der bekannten Moivre'schen Binomialformel zusammen und liefert ausserdem für die Coëfficienten der s -ten Potenz einer beliebigen dreifach complexen Zahl:

$$a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$$

dieselben Verknüpfungsgesetze, welche im Quaternionen-Calcul (Vergl. Elem. d. Quat., I. Bd., 2. Th., p. 335, 341) für die Coëfficienten der s -ten Potenz des Quaternions:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k &= r_1 \left\{ \frac{a_0}{r_1} + \frac{a_1 i + a_2 j + a_3 k}{r_1} \right\} = \\ &= r_1 \left\{ \cos \alpha + \frac{a_1 i + a_2 j + a_3 k}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \sin \alpha \right\} = r_1 (\cos \alpha + i \sin \alpha) \text{ gelten.} \end{aligned}$$

während für gleich hohe Potenzen diplanarer Zahlen in Folge der Verschiedenheit ihrer Inclinationsfactoren überhaupt keine derartigen Relationen bestehen.

Um nunmehr auch die Beziehungen zwischen den verschiedenen Potenzen einer und derselben n -fach complexen Zahl kennen zu lernen, substituirt man in (56) für s der Reihe nach: $m+n$, $m-n$, mn , wobei sich unter Hinzuziehung der für r_1 als eine reelle Grösse geltenden Potenzregeln:

$$r_1^{m+n} = r_1^m r_1^n, \quad r_1^{m-n} = \frac{r_1^m}{r_1^n}, \quad r_1^{mn} = (r_1^m)^n$$

die Gleichungen:

$$\begin{aligned} Z_1^{m+n} &= r_1^m r_1^n \{ \cos (m\alpha + n\alpha) + I \sin (m\alpha + n\alpha) \}, \\ Z_1^{m-n} &= \frac{r_1^m}{r_1^n} \{ \cos (m\alpha - n\alpha) + I \sin (m\alpha - n\alpha) \}, \\ Z_1^{mn} &= (r_1^m)^n \{ \cos (mn\alpha) + I \sin (mn\alpha) \} \end{aligned}$$

ergeben, deren weitere Deutung in der That die fraglichen Beziehungen liefert. Man kann nämlich wieder auf Grundlage von (56), (26) und (43) die für Z_1^{m+n} , Z_1^{m-n} gegebenen Werthe als Product und Quotienten der beiden complanaren Zahlen: Z_1^m , Z_1^n auffassen, ferner den, in der dritten Relation auftretenden n -fach complexen Factor:

$$\cos (mn\alpha) + I \sin (mn\alpha) \text{ durch: } \{ \cos (m\alpha) + I \sin (m\alpha) \}^n$$

ersetzen und gelangt so ohne jede Rechnung zu den Formeln:

$$(59) \dots Z_1^m \times Z_1^n = Z_1^{m+n}, \quad (60) \dots Z_1^m : Z_1^n = Z_1^{m-n},$$

$$(61) \dots (Z_1^m)^n = Z_1^{mn}.$$

Indem man ferner in (60) einerseits $m=n$, andererseits $m=0$ wählt und im ersten Falle die Thatsache verwerthet, dass der Quotient zweier gleicher n -fach complexer Zahlen kraft (43) mit der positiven Einheit zusammenfällt, erhält man noch die Gleichungen:

$$(62) \dots Z_1^0 = +1, \quad (63) \dots Z_1^{-n} = \frac{Z_1^0}{Z_1^n} = \frac{1}{Z_1^n},$$

welche gemäss der Art ihrer Ableitung für beliebige endliche n -fach complexe Zahlen richtig bleiben.

Die wichtigsten aus (56) zu gewinnenden Folgerungen resultiren jedoch erst nach Einführung der beiden Specialisirungen: $r_1 = 1$, $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ und der bekannten¹ Entwicklungen von $\cos(s\alpha)$ und $\sin(s\alpha)$:

$$\cos(s\alpha) = \cos^s \alpha - (s)_2 \cos^{s-2} \alpha \sin^2 \alpha + \dots$$

$$\sin(s\alpha) = (s)_1 \cos^{s-1} \alpha \sin \alpha - (s)_3 \cos^{s-3} \alpha \sin^3 \alpha + \dots$$

welche im vorliegenden Falle gemäss den Beziehungen:

$$\cos \alpha = \frac{a_0}{r_1}, \quad \sin \alpha = \frac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}}{r_1} = \frac{\sqrt{d_1}}{r_1}$$

die rein algebraischen Formen:

$$\cos(s\alpha) = \frac{1}{r_1^s} \{ a_0^s - (s)_2 a_0^{s-2} (\sqrt{d_1})^2 + \dots \},$$

$$\sin(s\alpha) = \frac{1}{r_1^s} \{ (s)_1 a_0^{s-1} \sqrt{d_1} - (s)_3 a_0^{s-3} (\sqrt{d_1})^3 + \dots \}$$

annehmen.—Vertauscht man nämlich in (56) r_1 mit 1, α mit $\frac{1}{2}\pi$, so entsteht für I^s die Gleichung:

$$(64) \dots I^s = \cos\left(\frac{1}{2}\pi s\right) + I \sin\left(\frac{1}{2}\pi s\right),$$

d. h. es wird—unter \dagger irgend ein Glied der Zahlenreihe: 0, 1, 2, 3, .. gedacht—allgemein:

$$I^{4\dagger} = +1, \quad I^{4\dagger+1} = I, \quad I^{4\dagger+2} = -1, \quad I^{4\dagger+3} = -I,$$

wonach der jeweilige Werth von I^s für alle geradzahliges Specialisirungen von s mit jenem von i^s übereinstimmt und, wenn s eine ungerade Zahl ist, zu I in derselben Relation steht, welche im letzteren Falle i^s mit i verbindet.

Im Anschlusse hieran lässt sich jetzt der Ausdruck:

$$r_1^s \{ \cos(s\alpha) + I \sin(s\alpha) \}$$

$$a_0^s + (s)_1 a_0^{s-1} (I\sqrt{d_1}) + (s)_2 a_0^{s-2} (I\sqrt{d_1})^2 + (s)_3 a_0^{s-3} (I\sqrt{d_1})^3 + \dots$$

¹ Ich schreibe für die aufeinanderfolgenden Binomialcoefficienten statt der gegenwärtig üblichen Symbole: s_1, s_2, s_3 . deshalb die älteren: $(s)_1, (s)_2, (s)_3, \dots$, weil ein einfacher Index diese Coefficienten von anderen, gleich signirten Grössen zu wenig scharf trennen würde.

darstellen, während die linke Seite von (56) in:

$$\left\{ r_1 \left(\frac{a_0}{r_1} + I \frac{\sqrt{d_1}}{r_1} \right) \right\}^s = (a_0 + I \sqrt{d_1})^s$$

transformirt werden kann. Die Äquivalenz beider Ausdrücke lehrt mithin, dass der jeweilige Werth von Z_1^s , als Function von a_0 und $I \sqrt{d_1}$ betrachtet, nach denselben Gesetzen gebildet ist, welche kraft des binomischen Lehrsatzes für die s -te Potenz eines reellen algebraischen Binomes gelten. Auf diese Art bestehen für die aufeinanderfolgenden Potenzen von Z_1 mit positivem, ganzzahligen Exponenten die Formeln:

$$\begin{aligned} Z_1^2 &= a_0^2 - d_1 + 2a_0 I \sqrt{d_1}, \\ Z_1^3 &= a_0(a_0^2 - 3d_1) + (3a_0^2 - d_1) I \sqrt{d_1}, \\ Z_1^4 &= a_0^4 - 6a_0^2 d_1 + d_1^2 + 4a_0(a_0^2 - d_1) I \sqrt{d_1}, \end{aligned}$$

und allgemein für Z_1^n die relativ einfache Gleichung:

$$(65) \dots Z_1^n = \sum_{s=0}^{s=n'} (-1)^s (n)_{2s} a_0^{n-2s} d_1^s + I \sqrt{d_1} \sum_{s=0}^{s=n''} (-1)^s (n)_{2s+1} a_0^{n-2s-1} d_1^s,$$

in welcher die oberen Grenzen beider Summen, je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl vorstellt, die Werthe:

$$n' = \frac{1}{2} n, \quad n'' = \frac{1}{2} n - 1 \quad \text{beziehungsweise:} \quad n' = n'' = \frac{1}{2}(n-1)$$

zu erhalten haben. Reducirt man also schliesslich das Product: $I \sqrt{d_1}$ auf seine ursprüngliche Form: $a_1 i_1 + a_2 i_2 + \dots + a_n i_n$ und setzt der Kürze wegen:

$$\sum_{s=0}^{s=n'} (-1)^s (n)_{2s} a_0^{n-2s} d_1^s = K_n, \quad \sum_{s=0}^{s=n''} (-1)^s (n)_{2s+1} a_0^{n-2s-1} d_1^s = L_n,$$

so ergibt sich für Z_1^n die nachstehende explicite Definition:

Eine gegebene n -fach complexe Zahl: Z_1 auf irgend eine positive ganzzahlige Potenz: n erheben, heisst, derselben eine einzige, jederzeit n -fach complexe Zahl:

$$K_n + L_n(a_1 i_1 + a_2 i_2 + \dots + a_n i_n) = K_n + L_n(Z_1 - a_0)$$

zuordnen. Infolgedessen gilt speciell für $a_0 = 0$ die einfache Doppelgleichung:

$$(a_1 i_1 + a_2 i_2 + \dots + a_n i_n)^n = \begin{cases} (-d_1)^{\frac{1}{2}n} & | \text{ n gerade} \\ (-d_1)^{\frac{1}{2}(n-1)} I\sqrt{d_1} & | \text{ n ungerade} \end{cases}$$

d. h. die n -te Potenz jeder n -fach imaginären Zahl ist reell oder n -fach imaginär, je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl vorstellt.

Unsere letzten Resultate ermöglichen nunmehr auch eine vollständige Beantwortung der Frage nach den jeweiligen Werthen der n -ten Wurzel aus Z_1 , — sie mag, entsprechend der üblichen Symbolik, mit: $\sqrt[n]{Z_1}$ bezeichnet werden — falls wir unter $\sqrt[n]{Z_1}$ in rein formaler Erweiterung der bekannten Definition der n -ten Wurzel für gewöhnliche complexe Zahlen allgemein jede Zahl:

$$\mathfrak{Z} = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + \dots + a_n i_n$$

verstehen, deren n -te Potenz mit Z_1 zusammen fällt.

Da nämlich \mathfrak{Z}^n kraft der Formel (65) und den an sie geknüpften Schlüssen nach Einführung der Hilfsgrößen:

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = d_1,$$

$$\sum_{s=0}^{s=n'} (-1)^s (n)_{2s} a_0^{n-2s} d_1^s = \mathfrak{R}_n, \quad \sum_{s=0}^{s=n''} (-1)^s (n)_{2s+1} a_0^{n-2s-1} d_1^s = \mathfrak{L}_n$$

die Darstellungsweise:

$$\mathfrak{Z}^n = \mathfrak{R}_n + \mathfrak{L}_n (a_1 i_1 + a_2 i_2 + \dots + a_n i_n)$$

gestattet, involvire die Erfüllung der Bedingung: $\mathfrak{Z}^n = Z_1$ gemäss unserer Definition der Gleichheit zweier n -fach complexer Zahlen unmittelbar die $(n+1)$ Beziehungen:

$$\mathfrak{R}_n = a_0, \quad a_1 \mathfrak{L}_n = a_1, \quad a_2 \mathfrak{L}_n = a_2, \quad \dots, \quad a_n \mathfrak{L}_n = a_n,$$

welche ihrerseits die fortlaufende Proportion:

$$a_1 : a_2 \quad \dots : a_n = a_1 : a_2 : \dots : a_n$$

zur nothwendigen Folge haben, d. h. \mathfrak{Z} als eine mit Z_1 complanare Zahl charakterisiren. Sind aber die Zahlen: \mathfrak{Z} und Z_1 complanar, so besitzen sie unter allen Umständen einen und

denselben Inclinationsfactor: I , dessen Absonderung in \mathfrak{B} der gesuchten Zahl jedenfalls die Form:

$$\mathfrak{B} = \rho (\cos \zeta + I \sin \zeta)$$

verleiht. Die Anwendung der Gleichung (56) auf \mathfrak{B}^n führt daher im vorliegenden Falle unmittelbar zu den beiden Relationen:

$$\rho^n \cos (n\zeta) = r_1 \cos \alpha, \quad \rho^n \sin (n\zeta) = r_1 \sin \alpha,$$

deren Anflösung im Einklange mit bekannten Resultaten der Theorie einfach complexer Zahlen eine einzige Substitution für ρ , nämlich: $\rho = r_1^{\frac{1}{n}}$ und n von einander verschiedene Werthe für $\cos \zeta + I \sin \zeta$ mit den Argumenten:

$$\zeta_1 = \frac{\alpha}{n}, \quad \zeta_2 = \frac{\alpha + 2\pi}{n}, \quad \dots \zeta_n = \frac{\alpha + 2(n-1)\pi}{n}$$

liefert. Hiemit erscheint zugleich die gesuchte explicite Definition von $\sqrt[n]{Z_1}$ vollständig präcisirt; sie lautet: Aus einer gegebenen n -fach complexen Zahl: Z_1 die n -te Wurzel ausziehen, heisst, derselben im Ganzen n — jederzeit n -fach complexe Zahlen:¹

$$\begin{aligned} & r_1^{\frac{1}{n}} \left\{ \cos \frac{\alpha}{n} + I \sin \frac{\alpha}{n} \right\}, \quad r_1^{\frac{1}{n}} \left\{ \cos \frac{\alpha + 2\pi}{n} + I \sin \frac{\alpha + 2\pi}{n} \right\}, \\ & \dots r_1^{\frac{1}{n}} \left\{ \cos \frac{\alpha + 2(n-1)\pi}{n} + I \sin \frac{\alpha + 2(n-1)\pi}{n} \right\} \end{aligned}$$

zuordnen, so dass speciell der n -ten Wurzel aus $a_1 i_1 + a_2 i_2 + \dots + a_n i_n$ folgendes Werthsystem entspricht:

$$\begin{aligned} & (\sqrt[n]{d_1})^{\frac{1}{n}} \left\{ \cos \frac{\pi}{2n} + I \sin \frac{\pi}{2n} \right\}, \quad (\sqrt[n]{d_1})^{\frac{1}{n}} \left\{ \cos \frac{5\pi}{2n} + I \sin \frac{5\pi}{2n} \right\}, \\ & (\sqrt[n]{d_1})^{\frac{1}{n}} \left\{ \cos \frac{(4n-3)\pi}{2n} + I \sin \frac{(4n-3)\pi}{2n} \right\}. \end{aligned}$$

¹ Dieselben verhalten sich kraft der in den Formeln (26) und (56) begründeten Gleichung:

$$\cos \frac{\alpha + 2f\pi}{n} + I \sin \frac{\alpha + 2f\pi}{n} = \left(\cos \frac{\alpha}{n} + I \sin \frac{\alpha}{n} \right) \left(\cos \frac{2\pi}{n} + I \sin \frac{2\pi}{n} \right)^f$$

zu einander wie die successiven Potenzen einer und derselben, von α unabhängigen, n -fach complexen Zahl: $\cos \frac{2\pi}{n} + I \sin \frac{2\pi}{n}$.

Gemäss dieser Definition kommen der n -ten Wurzel aus Z_1^m :

$$\sqrt[n]{Z_1^m} = \sqrt[n]{r_1^m \{ \cos(m\alpha) + I \sin(m\alpha) \}},$$

sobald m und n relative Primzahlen vorstellen, ebenfalls n — von einander verschiedene Werthe zu, welche aus dem Producte:

$$r_1^{\frac{m}{n}} \left\{ \cos \frac{m\alpha + 2f_1\pi}{n} + I \sin \frac{m\alpha + 2f_1\pi}{n} \right\}$$

durch die Substitutionen: $f_1 = 0, 1, 2, \dots, n-1$ hervorgehen, sich aber auch direct auf die m -te Potenz von \mathfrak{Z} beziehen lassen.

Zur Einsicht in die Art dieses Zusammenhanges führt die Überlegung, dass die n Werthe von \mathfrak{Z}^m als der m -ten Potenz eines Ausdruckes von der Gestalt:

$$r_1^{\frac{1}{n}} \left\{ \cos \frac{\alpha + 2f_1\pi}{n} + I \sin \frac{\alpha + 2f_1\pi}{n} \right\}$$

mittelst derselben Substitutionen für f_1 aus dem Producte:

$$r_1^{\frac{m}{n}} \left\{ \cos \frac{m\alpha + 2f_1m\pi}{n} + I \sin \frac{m\alpha + 2f_1m\pi}{n} \right\}$$

resultiren. Da nun die Division von $0, m, 2m, \dots, (n-1)m$ durch n unter den bezüglich m und n gemachten Annahmen lauter von einander verschiedene Reste liefert, können die, den beiden Quotienten:

$$\frac{m\alpha + 2f_1\pi}{n}, \quad \frac{m\alpha + 2f_1m\pi}{n}$$

für die erwähnten Specialisirungen von f_1 entspringenden Werthe — abgesehen von ihrer verschiedenen Reihenfolge — nur um ganze Vielfache von 2π von einander differiren, welche Unterschiede für sämtliche goniometrische Functionen derselben entfallen. Infolgedessen bestimmen die beiden, für $\sqrt[n]{Z_1^m}$ und \mathfrak{Z}^m aufgestellten Producte ein und dasselbe Werthsystem, d. h. es ist allgemein:

$$(66) \dots \sqrt[n]{Z_1^m} = (\sqrt[n]{Z_1})^m$$

Die vorliegende Gleichung lässt ausserdem klar erkennen, wie die noch ausständige Definition der Potenz: $Z_1^{\frac{m}{n}}$ formulirt werden muss, um die ursprünglich für positive ganzzahlige Exponenten abgeleiteten Relationen: (57), (58), (59), (60), (61) und (63) mit Hilfe derselben Schlüsse, deren man sich zu diesem Zwecke

in der Theorie der gewöhnlichen complexen Zahlen bedient, auf beliebige gebrochene Potenzexponenten ausdehnen zu können.

Verstehen wir nämlich in vollständigem Anschlusse an die bekannte Auffassung der Potenzgrösse: $r_1^{\frac{m}{n}}$ unter $Z_1^{\frac{m}{n}}$ die n -te Wurzel aus Z_1^m , so involvirt eine derartige Definition kraft (66) zugleich die folgende:

$$(67). \quad Z_1^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{Z_1})^m,$$

wonach die Rechnungsoperationen mit solchen Potenzgrössen, da sämtliche Werthe von $\sqrt[n]{Z_1}$ mit Z_1 complanar bleiben, auf gleichartige Operationen mit ganzzahligen Potenzen complanarer Zahlen zurückzuführen, und die gewonnenen Resultate wirklich in dem oben präcisirten Sinne zu interpretiren sind.

Auf Grundlage unserer letzten Definition ergibt sich schliesslich auch die Bedeutung der Potenzgrösse mit beliebigem irrationalen Exponenten: $p: Z_1^p$, wenn wir hiebei von der, die betreffende Irrationalzahl definirenden Reihe von rationalen Zahlen: $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \dots$ ausgehen, und Z_1^p consequent als Grenzwert der Grössenreihe: $Z_1^{\frac{m_1}{n_1}}, Z_1^{\frac{m_2}{n_2}}, \dots$ betrachten. Die Moduli und Argumente ihrer einzelnen Glieder sind dann:

$$r_1^{\frac{m_1}{n_1}}, \frac{m_1(\alpha + 2f\pi)}{n_1}; r_1^{\frac{m_2}{n_2}}, \frac{m_2(\alpha + 2f\pi)}{n_2};$$

$$(f = 0, 1, 2, \dots, n_1 - 1, n_1, n_1 + 1, \dots, n_2 - 1, n_2, \dots),$$

so dass beim Übergange zur Grenze: p die Gleichung:

$$(68). \quad Z_1^p = r_1^p \{ \cos(p[\alpha + 2f\pi]) + I \sin(p[\alpha + 2f\pi]) \}$$

resultirt,¹ in welcher jedem positiven ganzzahligen Werthe von f ein charakteristischer Werth des Factors von r_1^p zugehört. Auf diese Art liefert jede Potenzirung von Z_1 mit irrationalem Exponenten unendlich viele n -fach complexe Zahlen.

¹ Die Gleichung (68) wird hienach durch dieselben Überlegungen begründet, welche in der Lehre von den einfach complexen Zahlen (vergl. z. B. das 1881 zu Leipzig erschienene Werk v. A. Harnack: „Die Elemente der Differential- und Integralrechnung“, p. 123, 124) die Feststellung der Bedeutung von $\{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)\}^p$ ermöglichen.

Hiemit erscheint die Discussion des Potenzbegriffes, insoweit derselbe noch direct aus elementaren algebraischen Operationen abzuleiten ist,¹ vollendet, und begründen die Resultate unserer diesbezüglichen Betrachtungen nunmehr folgende Sätze:

(I) Die q -te Potenz einer beliebigen endlichen, n -fach complexen Zahl: Z_1 wird, so lange ihr Exponent: q der beschränkenden Bedingung: $-\infty < q < +\infty$ unterworfen bleibt, ausschliesslich für $q = 0$ reell, während sie für alle übrigen Specialisirungen von q , je nachdem dieselben der Reihe der ganzen oder gebrochenen oder irrationalen Zahlen angehören, eine einwerthige oder mehrwerthige, beziehungsweise unendlich vielwerthige n -fach complexe Grösse vorstellt.

(II) Die Regeln, nach welchen gleiche oder verschiedene Potenzen von Z_1 multiplicirt oder dividirt, beziehungsweise potenziert werden, bleiben für sämtliche Werthe von n dieselben und führen stets auf Zahlen, welche mit der gegebenen Zahl Z_1 complanar sind.

(III) Der Modulus von Z_1^q besitzt für jede hier in Betracht kommende Specialisirung von q nur einen einzigen Werth: r_1^q , so dass sämtliche Punkte, welche der Zahl: Z_1 durch eine Potenzirung mit dem Exponenten: q zugeordnet werden, in einer n -fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit von der Gleichung:

$$(69) \dots \xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2 = r_1^{2q}$$

liegen, z. B. also für $n = 2$ Oberflächenpunkte einer, aus dem Ursprunge des betreffenden dreiaxigen Coordinatensystems mit dem Radius: r_1^q beschriebenen Kugel bilden.

Das Gesamtergebn unserer bisherigen Untersuchungen ist mithin ein relativ einfaches; wir sind zu der Einsicht gelangt, dass alle algebraischen Grundoperationen sich auf dem hier eingeschlagenen Wege universell verallgemeinern lassen, wobei die Regeln, welche bezüglich der Ausführung dieser Rechnungsoperationen mit einfach complexen Zahlen gelten, nach Absonderung des Inclinationsfactors I unmittelbar auf n -fach

¹ Die Discussion des allgemeinen Potenzbegriffes: $Z_1^{Z_2}$ gehört bereits in die Theorie der wichtigsten einfachen Functionen eines n -fach complexen Argumentes.

complexe complanare Zahlen übertragen werden können. Ausserdem haben die zur Feststellung der letzteren Thatsache dienenden Entwicklungen gelehrt, dass die Grösse I bei allen in Betracht gezogenen Verknüpfungen derartiger Zahlen dieselbe Rolle spielt, welche dem Factor i in der Lehre von den gewöhnlichen complexen Zahlen zufällt.

Wir überzeugten uns nämlich allgemein von der Giltigkeit der Gleichung: $I^2 = -1$, bei deren Herleitung wir jedoch keineswegs genöthigt wurden, die Unterscheidungszeichen i_1, i_2, \dots, i_n willkürlich als irgend welche neue imaginäre Einheiten zu definiren. Es war vielmehr die erwähnte Relation nur eine logische Consequenz jener Verknüpfungsgesetze für die Coëfficienten von I , welche aus unserer Definition des Productes zweier complanarer n -fach complexer Zahlen für den Specialfall gleicher, n -fach imaginärer Factoren resultirten. In demselben Sinne bilden also auch die specielleren Beziehungen:

$$i_1^2 = -1, i_2^2 = -1, \dots, i_n^2 = -1$$

lediglich den analytischen Ausdruck jener Regeln, nach welchen die Coëfficienten: $(+1), (+1)$ je zweier gleicher, einfach imaginärer Zahlen bei Ausführung der Multiplicationen:

$$\{(+1)i_1\}\{(+1)i_1\}, \{(+1)i_2\}\{(+1)i_2\}, \dots, \{(+1)i_n\}\{(+1)i_n\}$$

mit einander zu verknüpfen sind. Dagegen wäre es widersinnig, die angeführten Relationen etwa noch als Bestimmungsgleichungen für die Symbole: i_1, i_2, \dots, i_n zu betrachten; denn da die letzteren, sachlich genommen, Unterscheidungszeichen für verschiedene Coordinatenrichtungen vorstellen, darf man sie selbstverständlicher Weise nicht gleichzeitig mit Zahlengrössen identificiren.

Von diesem Standpunkte aus muss schliesslich auch die bekannte, von Argand¹ herrührende Auffassungsweise der imaginären Einheit: $i = \sqrt{-1}$ als der mittleren geometrischen

¹ Argand geht hiebei (Gergonne's Annalen, IV. Bd. p. 135) von dem Analogieschlusse aus, dass die unmittelbar evidente Proportion: $(+1):(-1) = (-1):(+1)$ auch zur Aufstellung der Proportion:

$$(+1) \sqrt{-1} = \sqrt{-1} : (-1) \text{ berechige.}$$

Proportionalen zwischen der positiven und negativen Einheit¹ definitiv verworfen werden, welche Ansicht übrigens schon Servois² mit folgenden Worten nahegelegt hat: „Cette proposition: „la quantité $\pm a\sqrt{-1}$ est une moyenne proportionnelle de grandeur et de position entre $+a$ et $-a'$ équivaut à ces deux-ci, dont une ($\pm a\sqrt{-1}$ moyenne de grandeur entre $+a$ et $-a$) est évidente, et dont l'autre ($\pm a\sqrt{-1}$ moyenne de position entre $+a$ et $-a$) n'est pas prouvée, et renferme précisément le théorème dont il s'agit. Cela est d'autant plus fâcheux que tout le reste du mémoire porte sur ce premier théorème. Quant à M. Argand, il s'est contenté d'appuyer cette proposition sur une sorte d'analogie et de convenance. Or, il me paraît que, lorsqu'il s'agit de fonder une doctrine extraordinaire, opposée en quelque sorte aux principes reçus, dans une science telle que l'analyse mathématique, la simple analogie n'est point un moyen suffisant.“

§. 6.

Zweite Verallgemeinerung der Addition.

Alle in den §§. 1—4 entwickelten universellen Verallgemeinerungen algebraischer Grundoperationen entsprangen einer rein algebraischen, in je drei Relationen gegebenen Charakteristik derselben für den Specialfall: $n = 1$, so dass die fraglichen Coëfficienten des Resultates der betreffenden Grundoperation für den allgemeinen Fall n -fach complexer Zahlen immer erst nach Hinzufügung weiterer beschränkender Bedingungen vollständig bestimmt werden konnten.

Es liegt daher nahe, jene algebraische Charakteristik noch mit einer geometrischen zu combiniren, welche von Fall zu Fall die Aufstellung ebenso vieler Gleichungen ermöglicht, als unbekante Coëfficienten vorhanden sind.

Zu diesem Zwecke gehe man von der Überlegung aus, dass alle, mit zwei einfach complexen Zahlen: Z_1, Z_2 vorgenom-

Die schärfste Kritik dieser Behauptung findet sich in dem 1884 zu Leipzig erschienenen Werke von Dr. E. Dühring und Ulrich Dühring: „Neue Grundmittel und Erfindungen zur Analysis, Algebra, Functionsrechnung und zugehörigen Geometrie“, p. 30, 31.

² S. h. Gergonne's Annalen, IV. Bd., p. 228, 229.

menen Rechnungsoperationen denselben ausschliesslich solche Zahlen zuordnen, welche mit Z_1, Z_2 und dem Nullpunkte des Zahlensystems einer und derselben Ebene angehören. Betrachtet man nun das eben präcisirte Merkmal als ein universelles, d. h. als eine auch für n -fach complexe Zahlen geltende Eigenschaft des Resultates jeder Rechnungsoperation, so ergeben sich für sämtliche algebraische Grundoperationen gewisse analytisch-geometrische Bedingungsgleichungen, deren typische Formen durch folgende einfache Erwägungen erhalten werden:

Denkt man sich in der hier angenommenen $(n+1)$ -fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit irgend eine, den Ursprung O durchsetzende Ebene gegeben, so wird dieselbe allgemein durch $(n-1)$ lineare Gleichungen zwischen $(n+1)$ veränderlichen Coordinaten: $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \xi_n$ analytisch beschrieben, welche im vorliegenden Falle für die Coordinaten des Punktes O in Identitäten übergehen müssen und infolgedessen stets die Darstellungsweise:

$$A_0 \xi_0 + B_0 \xi_{n-1} + C_0 \xi_n = 0, \quad A_1 \xi_1 + B_1 \xi_{n-1} + C_1 \xi_n = 0, \\ \dots A_{n-2} \xi_{n-2} + B_{n-2} \xi_{n-1} + C_{n-2} \xi_n = 0$$

gestatten. Die weitere Forderung, dass jene Ebene überdies die, den beiden n -fach complexen Zahlen: Z_1, Z_2 zugeordneten Punkte: M_1, M_2 in sich aufzunehmen hat, liefert mithin nach Einführung der Abkürzungen:

$$a_s b_n - a_n b_s = h_s, \quad a_{n-1} b_s - a_s b_{n-1} = k_s$$

die nachstehenden, von allen unbestimmten Coëfficienten befreiten Relationen:

$$h_{n-1} \xi_0 - h_0 \xi_{n-1} = k_0 \xi_n, \quad h_{n-1} \xi_1 - h_1 \xi_{n-1} = k_1 \xi_n, \\ \dots h_{n-1} \xi_{n-2} - h_{n-2} \xi_{n-1} = k_{n-2} \xi_n,$$

deren constante Parameter, da die Determinanten;

$$\begin{vmatrix} a_s & a_s & b_s \\ a_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ a_n & a_n & b_n \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} b_s & a_s & b_s \\ b_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ b_n & a_n & b_n \end{vmatrix}$$

infolge der Gleichheit je zweier Columnen identisch verschwinden, für jeden in Betracht kommenden Werth von s den Beziehungen:

$$(p) \cdot \begin{cases} a_s h_{n-1} - a_{n-1} h_s = a_n k_s, \\ b_s h_{n-1} - b_{n-1} h_s = b_n k_s \end{cases}$$

Genüge leisten. Hiemit erscheinen zugleich Anzahl und Typus der fraglichen Bedingungsgleichungen bestimmt; denn sobald das Resultat irgend einer operativen Verknüpfung zweier n -fach complexer Zahlen die früher ausgesprochene Eigenschaft besitzt, müssen seine Coëfficienten: x_0, x_1, \dots, x_n , an Stelle von $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ substituiert, natürlich auch die zwischen diesen Grössen vorhandenen Relationen befriedigen, d. h. für $s = 0, 1, 2, \dots, n-2$ die Bedingung:

$$(70) \cdot h_{n-1} x_s - h_s x_{n-1} = k_s x_n$$

erfüllen. Es sind demzufolge für jede algebraische Grundoperation nur mehr zwei Ergänzungsgleichungen zulässig, bei deren Auswahl wir speciell in Bezug auf das Addiren und Multipliciren gemäss unserer dritten, eingangs aufgestellten Forderung lediglich auf jene Relationen beschränkt bleiben, welche die Commutativität beider Summanden respective Factoren analytisch ausdrücken. Auf diese Art erhalten die früher als Fundamentalbedingungen verwendeten Modulformeln gegenwärtig den Charakter accessorischer Gleichungen und können daher bedingungsweise ihre Giltigkeit verlieren, ohne deshalb die Brauchbarkeit der betreffenden universellen Verallgemeinerung aufzuheben.

Ausserdem ist leicht darzuthun, dass das allgemeine Problem der Coëfficientenbestimmung in der Folge nur die Auflösung von je zwei Gleichungen mit zwei unbekanntenen Grössen erheischen wird.

Bedient man sich nämlich — unter u, v zwei beliebige variable Hilfsgrössen gedacht — durchgängig der Substitutionen:

$$(q) \cdot \begin{cases} x_0 = a_0 u + b_0 v, & x_1 = a_1 u + b_1 v, \\ x_2 = a_2 u + b_2 v, \dots, x_n = a_n u + b_n v, \end{cases}$$

so verwandelt sich (70) in:

$$(a_s h_{n-1} - a_{n-1} h_s - a_n k_s) u + (b_s h_{n-1} - b_{n-1} h_s - b_n k_s) v = 0,$$

woraus mit Rücksicht auf die Beziehungen (p) hervorgeht, dass die jeweiligen Bestimmungsgleichungen der betreffenden Coëfficienten insgesamt befriedigt werden, falls man die beiden,

der $(n-1)$ -fachen Fundamentalbedingung (70) zugesellten Ergänzungsgleichungen durch passende Wahl von u und v erfüllen kann.

Dieselben besitzen speciell für die erste algebraische Grundoperation eine ungemein einfache Gestalt, indem die Einführung der Substitutionsreihe (q) in (5) und (6) augenscheinlich die Relationen:

$$(71) \dots r_1^2 u + m v = r_1^2 + m, \quad (72) \dots m u + r_2^2 v = r_2^2 + m$$

nach sich zieht, welche nur eine einzige Lösung: $u = v = 1$ darbieten.

Hieraus wird ersichtlich, dass die expliciten Definitionsgleichungen beider Verallgemeinerungen der Addition vollständig mit einander coïncidiren, und bleiben daher die in §. 1 aufgestellten Hauptsätze (I), (II) und (III) auch für die zweite Generalisation allgemein gültig.

§. 7.

Zweite Verallgemeinerung der Subtraction.

Führt man die in §. 2 angegebene Buchstabenvertauschung zunächst in der $(n-1)$ -fachen Fundamentalbedingung (70) aus, so kann die hiebei erhaltene Relation:

$$a_s (b_n \xi_{n-1} - b_{n-1} \xi_n) - a_{n-1} (b_n \xi_s - b_s \xi_n) = a_n (b_s \xi_{n-1} - b_{n-1} \xi_s)$$

kraft den Bedeutungen von h_s , k_s und h_{n-1} unmittelbar in:

$$(73) \dots h_{n-1} \xi_s - h_s \xi_{n-1} = k_s \xi_n$$

transformirt werden, wonach den fraglichen Coëfficienten: $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ des Resultates der Subtraction ebenfalls die Formen: $a_0 u + b_0 v, a_1 u + b_1 v, \dots, a_n u + b_n v$ zukommen, und die charakteristischen Bestimmungsgleichungen für u, v hier aus (5) und (6) durch Vertauschung von:

$$a_0, \quad a_1, \quad a_n; \quad x_0, x_1, \dots, x_n \text{ mit:} \\ a_0 u + b_0 v, a_1 u + b_1 v, \dots, a_n u + b_n v; a_0, a_1, \dots, a_n$$

hervorgehen. Einige leichte Umformungen der beiden diesbezüglichen Resultate liefern dann die Relationen:

$$(74). \quad .mu + r_2^2 v = m - r_2^2,$$

$$(75). \quad .r_1^2 u^2 + 2mu v + r_2^2 v^2 - r_1^2 u - m v = r_2^2 - m,$$

aus welchen sich für u und v schliesslich die quadratischen Beziehungen:

$$pqu(u-1) = 0, \quad pq\{r_2^2 v^2 - (m - 2r_2^2)v - (m - r_2^2)\} = 0$$

ergeben. Den Wurzeln der letzteren:

$$u_1 = +1, \quad v_1 = -1; \quad u_2 = 0, \quad v_2 = \frac{1}{r_2^2}(m - r_2^2)$$

entsprechen die beiden Werthsysteme:

$$\begin{aligned} \xi'_0 &= a_0 - b_0, \quad \xi'_1 = a_1 - b_1, \dots, \xi'_n = a_n - b_n; \\ \xi''_0 &= \frac{b_0}{r_2^2}(m - r_2^2), \quad \xi''_1 = \frac{b_1}{r_2^2}(m - r_2^2), \dots, \xi''_n = \frac{b_n}{r_2^2}(m - r_2^2), \end{aligned}$$

von welchen jedoch nur das erste die im Begriffe des Subtrahirens gelegene Forderung: $(Z_1 - Z_2) + Z_2 = Z_1$ erfüllt. Infolgedessen resultirt für die Differenz: $Z_1 - Z_2$ auch hier lediglich die Formel (12), d. h. dieselbe explicite Definitionsgleichung der Subtraction, zu welcher wir durch Auflösung der in §. 2 abgeleiteten Relationen gelangt sind.

§. 8.

Zweite Verallgemeinerung der Multiplication.

Als implicite Definitionsgleichungen dieser Grundoperation dienen hier die $(n-1)$ -fache Fundamentalbedingung (70) im Vereine¹ mit den Beziehungen (18) und (19), aus welchen bei

¹ Combinirt man (70) und eine der beiden Relationen (18) und (19), z. B. (18) mit (17), so ergeben sich für die fraglichen Coëfficienten des Productes: $Z_1 Z_2$ die beiden reellen Werthsysteme:

$$\begin{aligned} x'_0 &= a_0 b_0 - (b_0 r_1^2 - a_0 m) \sqrt{\frac{\bar{d}_2}{pq}}, & x'_1 &= a_1 b_0 - (b_1 r_1^2 - a_1 m) \sqrt{\frac{\bar{d}_2}{pq}}, \\ & & x'_n &= a_n b_0 - (b_n r_1^2 - a_n m) \sqrt{\frac{\bar{d}_2}{pq}}, \\ x''_0 &= a_0 b_0 + (b_0 r_1^2 - a_0 m) \sqrt{\frac{\bar{d}_2}{pq}}, & x''_1 &= a_1 b_0 + (b_1 r_1^2 - a_1 m) \sqrt{\frac{\bar{d}_2}{pq}}, \\ & & x''_n &= a_n b_0 + (b_n r_1^2 - a_n m) \sqrt{\frac{\bar{d}_2}{pq}}, \end{aligned}$$

Benützung der Substitutionsreihe (q) für u und v die beiden linearen Relationen:

$$(76). \quad .r_1^2 u + m v = b_0 r_1^2, \quad (77). \quad .m u + r_2^2 v = a_0 r_2^2$$

hervorgehen. Die den letzteren zugehörigen Werthe von u und v :

$$u = \frac{r_2^2}{pq} (b_0 r_1^2 - a_0 m), \quad v = \frac{r_1^2}{pq} (a_0 r_2^2 - b_0 m)$$

enthalten ausschliesslich die Grössen: a_0, b_0, m, r_1, r_2 , so dass die Aggregate: $a_0 u + b_0 v, a_1 u + b_1 v, \dots, a_n u + b_n v$ bereits in ihren ursprünglichen Formen der vierten, eingangs aufgestellten Forderung genügen und daher eine zweite, wesentlich neue universelle Verallgemeinerung des Multiplicirens begründen. Dieselbe definiert das Product $Z_1 Z_2$ auch für diplanare Factoren als eine einwerthige, höchstens n -fach complexe Zahl:

$$x_0 + x_1 i_1 + x_2 i_2 + \dots + x_n i_n,$$

deren Coëfficienten sich jederzeit rational durch $a_0, a_1, \dots, a_n; b_0, b_1, \dots, b_n$ ausdrücken lassen und, wie bei der ersten Generalisation, in drei verschiedenen Formen dargestellt werden können.

Ihre erste, einfachste Darstellungsweise besteht in den Gleichungen:

$$x_0 = \frac{b_0 d'' r_1^2 + a_0 d' r_2^2}{pq}, \quad x_1 = \frac{b_1 d'' r_1^2 + a_1 d' r_2^2}{pq},$$

$$x_2 = \frac{b_2 d'' r_1^2 + a_2 d' r_2^2}{pq}, \quad \dots, x_n = \frac{b_n d'' r_1^2 + a_n d' r_2^2}{pq},$$

welche insgesamt die beiden Hilfsfunctionen;

$$d' = b_0 r_1^2 - a_0 m, \quad d'' = a_0 r_2^2 - b_0 m$$

welche die Forderung der Commutativität beider Factoren: Z_1, Z_2 augenscheinlich nicht erfüllen und selbst für complanare Zahlen von den Nennern: p, q abhängig bleiben. Infolge des letzteren Umstandes ist es natürlich auch unmöglich, die in den Fällen: $p > 0, q = 0$ respective $p = 0, q > 0$ eintretende Unbestimmtheit bei sämtlichen Coëfficienten zu beseitigen, so dass eine nähere Untersuchung dieser Verallgemeinerung des Multiplicirens nur in theoretischer Hinsicht einiges Interesse bieten würde.

enthalten, aber noch keine tiefere Einsicht in die Beschaffenheit von x_0, x_1, \dots, x_n gewähren.

Eine solche wird vielmehr erst durch jene Relationen vermittelt, welche sich nach Einführung der Differenzen: d, d_1, d_2 in x_0, x_1, \dots, x_n ergeben:

$$x_0 = a_0 b_0 - d + \frac{m}{pq} (d_1 d_2 - d^2),$$

$$x_1 = a_1 b_0 + a_0 b_1 + \frac{m}{pq} \{b_0(a_1 d - b_1 d_1) + a_0(b_1 d - a_1 d_2)\},$$

$$x_2 = a_2 b_0 + a_0 b_2 + \frac{m}{pq} \{b_0(a_2 d - b_2 d_1) + a_0(b_2 d - a_2 d_2)\},$$

$$x_n = a_n b_0 + a_0 b_n + \frac{m}{pq} \{b_0(a_n d - b_n d_1) + a_0(b_n d - a_n d_2)\}.$$

Dieselben lehren nämlich unter Hinzuziehung der Identität:

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{2m}{pq},$$

dass x_0, x_1, \dots, x_n mit $x'_0, x''_0; x'_1, x''_1; \dots, x'_n, x''_n$ durch die einfachen Formeln:

$$(r). \quad \begin{cases} x_0 = \frac{1}{2} (x'_0 + x''_0), & x_1 = \frac{1}{2} (x'_1 + x''_1), \\ x_2 = \frac{1}{2} (x'_2 + x''_2), \dots, & x_n = \frac{1}{2} (x'_n + x''_n) \end{cases}$$

zusammenhängen, d. h.: die Coëfficienten des Productes zweiter Art sind die arithmetischen Mittel aus den gleichnamigen Coëfficienten des Productes erster Art und stimmen infolgedessen bei complanaren Factoren vollständig mit den letzteren überein.

Mit Hilfe dieses Satzes kann nunmehr auch die dritte, goniometrische Darstellungsweise von x_0, x_1, \dots, x_n direct auf Grundlage der correspondirenden Gleichungen für $x'_0, x''_0; x'_1, x''_1; \dots, x'_n, x''_n$ gefunden werden, wobei man fast ohne Rechnung folgende Resultate erhält:

$$x_0 = r_1 r_2 (\cos^2 \tau - \cos^2 \sigma), \quad x_1 = r_1 r_2 (\cos \tau \cos \tau_1 - \cos \sigma \cos \sigma_1),$$

$$x_n = r_1 r_2 (\cos \tau \cos \tau_n - \cos \sigma \cos \sigma_n).$$

Transformirt man dieselben in:

$$x_0 = (r_1 \cos \tau) (r_2 \cos \tau) - (r_2 \cos \sigma) (r_1 \cos \sigma),$$

$$x_1 = (r_1 \cos \tau) (r_2 \cos \tau_1) - (r_2 \cos \sigma) (r_1 \cos \sigma_1),$$

$$x_n = (r_1 \cos \tau) (r_2 \cos \tau_n) - (r_2 \cos \sigma) (r_1 \cos \sigma_n),$$

so wird eine weitere Eigenthümlichkeit des Productes zweiter Art ersichtlich; denn da $\sigma, \sigma_1, \dots, \sigma_n; \tau, \tau_1, \dots, \tau_n$ gemäss früheren Betrachtungen als Winkel zweier gerader Linien mit den Halbaxen OJ_0, OJ_1, \dots, OJ_n aufzufassen sind, repräsentiren x_0, x_1, \dots, x_n zufolge unserer letzten Ergebnisse stets binomische algebraische Summen von Projectionen der beiden Radienvectoren: r_1, r_2 auf zwei orthogonale Axensysteme mit gleichem Ursprunge: O , welche nur für $n=1$ mit dem gegebenen Axensysteme zusammenfallen, hingegen für alle übrigen Werthe von n erst durch Drehung um O mit demselben zur Coïncidenz gebracht werden können.

Es erübrigt jetzt noch die Berechnung des Modulus: \dot{r} von $Z_1 Z_2$, welche nach Verwerthung der Identität:

$$d''^2 r_1^2 + d'^2 r_2^2 + 2d'd''m = pq(b_0^2 r_1^2 + a_0^2 r_2^2 - 2a_0 b_0 m) = pq(b_0 d' + a_0 d'')$$

für \dot{r} den interessanten Ausdruck:

$$(78). \quad \dot{r} = r_1 r_2 \sqrt{\frac{b_0 d' + a_0 d''}{pq}}$$

liefert. Hienach bleibt der Modulus des Productes zweiter Art kraft der weiteren Identität:¹

$$\begin{aligned} pq - (b_0 d' + a_0 d'') &= d_1 d_2 - d^2 = \\ &= (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 + (a_1 b_3 - a_3 b_1)^2 + \dots + (a_{n-2} b_n - a_n b_{n-2})^2 + \\ &\quad + (a_{n-1} b_n - a_n b_{n-1})^2 \end{aligned}$$

nur für: $a_1 b_2 = a_2 b_1, a_1 b_3 = a_3 b_1, \dots, a_{n-1} b_n = a_n b_{n-1}$ d. h. bei complanaren Factoren gleich $r_1 r_2$, während er für diplanare n -fach complexe Factoren stets zwischen 0 und $r_1 r_2$ gelegen

Dieselbe lehrt zugleich, dass jedes Product von der Gestalt:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$$

als Summe von $\frac{1}{2}(n^2 - n + 2)$ Quadraten dargestellt werden kann.

ist¹ und für $a_0 = b_0 = 0$, $pq > 0$ d. h. für diplanare, n -fach imaginäre Factoren sich auf Null reducirt.

Die letztgenannte Eigenschaft lässt zugleich die hervorragendste Eigenthümlichkeit des Productes zweiter Art klar erkennen; denn sie involvrt mit Nothwendigkeit die Folgerung, dass ein Product zweier diplanarer Factoren verschwinden kann, ohne dass einer der beiden Factoren gleich Null wird.

Um im Anschlusse hieran auch jene Eigenschaften kennen zu lernen, welche die zweite universelle Verallgemeinerung des Multiplicirens in ihrer Anwendung auf mehr als zwei n -fach complexe Zahlen besitzt, empfiehlt sich des leichteren Vergleiches wegen derselbe Entwicklungsgang, durch welchen wir im §. 3 zu den Hauptsätzen (I*), (II*) und (III*) gelangt sind.

Wir beschränken uns demgemäss im Folgenden gleichfalls auf die Ermittlung von Δ und P für drei beliebige bicomplexe Zahlen: Z_1, Z_2, Z_3 , wobei hervorzuheben ist, dass die in Δ und P auftretenden Producte: Z_1Z_2, Z_1Z_3, Z_2Z_3 , nunmehr als Producte zweiter Art lauter einwerthige bicomplexe Ausdrücke.

$$x + yi_1 + zi_2, \quad x' + y'i_1 + z'i_2, \quad x'' + y''i_1 + z''i_2$$

mit den Modulis:

$$r_1 r_2 \sqrt{\frac{k^2 + l^2}{pq}}, \quad r_1 r_3 \sqrt{\frac{k_1^2 + l_1^2}{p_1 q_1}}, \quad r_2 r_3 \sqrt{\frac{k_2^2 + l_2^2}{p_2 q_2}}$$

repräsentiren und bei den hier durchzuführenden Rechnungen am zweckmässigsten in den Formen:

$$\begin{aligned} & \left(\bar{x} + \frac{h^2 m}{pq} \right) + \left(\bar{y} + \frac{h k m}{pq} \right) i_1 + \left(\bar{z} + \frac{h l m}{pq} \right) i_2, \\ & \left(\bar{x}' + \frac{h_1^2 m_1}{p_1 q_1} \right) + \left(\bar{y}' + \frac{h_1 k_1 m_1}{p_1 q_1} \right) i_1 + \left(\bar{z}' + \frac{h_1 l_1 m_1}{p_1 q_1} \right) i_2, \\ & \left(\bar{x}'' + \frac{h_2^2 m_2}{p_2 q_2} \right) + \left(\bar{y}'' + \frac{h_2 k_2 m_2}{p_2 q_2} \right) i_1 + \left(\bar{z}'' + \frac{h_2 l_2 m_2}{p_2 q_2} \right) i_2 \end{aligned}$$

verwendet werden.

¹ Für $n=2$ ist dieser Satz auch einer anschaulichen geometrischen Interpretation fähig, indem die bicomplexe Zahl:

$$\frac{1}{2}(x_1 + x_2) + \frac{1}{2}(y_1 + y_2)i_1 + \frac{1}{2}(z_1 + z_2)i_2$$

Auf Grundlage dieser Darstellungen ergibt sich zunächst für Δ folgende Gleichung:

$$(79). \quad \Delta = - \left\{ \frac{h_1^2 m_1}{p_1 q_1} + \frac{h_2^2 m_2}{p_2 q_2} - \frac{h'^2 m'}{r^2 r_3^2 - m'^2} \right\} - \\ - \left\{ \frac{h_1 k_1 m_1}{p_1 q_1} + \frac{h_2 k_2 m_2}{p_2 q_2} - \frac{h' k' m'}{r^2 r_3^2 - m'^2} \right\} i_1 - \\ - \left\{ \frac{h_1 l_1 m_1}{p_1 q_1} + \frac{h_2 l_2 m_2}{p_2 q_2} - \frac{h' l' m'}{r^2 r_3^2 - m'^2} \right\} i_2,$$

d. h. Δ ist für die zweite Verallgemeinerung stets eine einwertige, höchstens bicomplexe Grösse, welche nur für $h_1 = h_2 = 0$, also unter denselben Bedingungen verschwindet, unter welchen sich die Beziehung (29) auf: $\Delta = 0$ reducirt hat.

Während hienach zu einer übersichtlichen Formulirung von Δ keinerlei neue Hilfsfunctionen erforderlich waren, können die drei, im vorliegenden Falle resultirenden Darstellungen von P , nämlich:

$$(Z_1 Z_2) Z_3 = (x) + (y) i_1 + (z) i_2, \quad (Z_1 Z_3) Z_2 = (x') + (y') i_1 + (z') i_2, \\ (Z_2 Z_3) Z_1 = (x'') + (y'') i_1 + (z'') i_2$$

nur dann in leicht discutirbaren Formen wiedergegeben werden, wenn man ausser den bereits definirten Aggregaten: (a) , (b) , (c) noch folgende fünfzehn Hilfsfunctionen¹ einführt:

$$(h) = (a_1 h_2 + a_2 h_1) p q + (c_3 k - b_3 l) h m, \\ (h_1) = (a_3 h - a_1 h_2) p_1 q_1 + (c_2 k_1 - b_2 l_1) h_1 m_1, \\ (h_2) = -(a_2 h_1 + a_3 h) p_2 q_2 + (c_1 k_2 - b_1 l_2) h_2 m_2;$$

$$(k) = (a_1 k_2 + a_2 k_1 + c_3 m) p q + (a_3 l - c_3 h) h m, \\ (k_1) = (a_3 k - a_1 k_2 + c_2 m_1) p_1 q_1 + (a_2 l_1 - c_2 h_1) h_1 m_1, \\ (k_2) = -(a_2 k_1 + a_3 k - c_1 m_2) p_2 q_2 + (a_1 l_2 - c_1 h_2) h_2 m_2;$$

offenbar dem Halbierungspunkte jener Sehne zugehört, welche die, den Zahlen: $x_1 + y_1 i_1 + z_1 i_2$, $x_2 + y_2 i_1 + z_2 i_2$ correspondirenden Punkte einer Kugelfläche von dem Radius $r_1 r_2$ verbindet.

¹ Dieselben sind im Gegensatze zu den, für das Product erster Art erforderlichen Hilfsfunctionen: (h') , (h'_1) , (h'_2) ; ... N'' , N''_1 , N''_2 , insgesamt rationale Ausdrücke der Coëfficienten von Z_1 , Z_2 , Z_3 .

$$\begin{aligned}(l) &= (a_1 l_2 + a_2 l_1 - b_3 m) p q + (b_3 h - a_3 k) h m, \\(l_1) &= (a_3 l - a_1 l_2 - b_2 m_1) p_1 q_1 + (b_2 h_1 - a_2 k_1) h_1 m_1, \\(l_2) &= -(a_2 l_1 + a_3 l + b_1 m_2) p_2 q_2 + (b_1 h_2 - a_1 k_2) h_2 m_2;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(m) &= (a_1 m_2 + a_2 m_1 - a_3 m) p q + (a_3 h + b_3 k + c_3 l) h m, \\(m_1) &= (a_3 m + a_1 m_2 - a_2 m_1) p_1 q_1 + (a_2 h_1 + b_2 k_1 + c_2 l_1) h_1 m_1, \\(m_2) &= (a_2 m_1 + a_3 m - a_1 m_2) p_2 q_2 + (a_1 h_2 + b_1 k_2 + c_1 l_2) h_2 m_2;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}N &= (k^2 + l^2) p q r_1^2 r_2^2 r_3^2 - (m)^2, & N_1 &= (k_1^2 + l_1^2) p_1 q_1 r_1^2 r_2^2 r_3^2 - (m_1)^2, \\N_2 &= (k_2^2 + l_2^2) p_2 q_2 r_1^2 r_2^2 r_3^2 - (m_2)^2.\end{aligned}$$

Diese Ausdrücke sind den Grössen: $h, h_1, h_2; pq, p_1 q_1, p_2 q_2$ insoferne verwandt, als sie mit einander durch analoge Identitäten und zwar:

$$\begin{aligned}a_3(h) + b_3(k) + c_3(l) &= 0, & x(h) + y(k) + z(l) &= 0, \\(h)^2 + (k)^2 + (l)^2 &= N;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_2(h_1) + b_2(k_1) + c_2(l_1) &= 0, & x'(h_1) + y'(k_1) + z'(l_1) &= 0, \\(h_1)^2 + (k_1)^2 + (l_1)^2 &= N_1;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_1(h_2) + b_1(k_2) + c_1(l_2) &= 0, & x''(h_2) + y''(k_2) + z''(l_2) &= 0, \\(h_2)^2 + (k_2)^2 + (l_2)^2 &= N_2\end{aligned}$$

zusammenhängen; überdies besitzen speciell die Aggregate: $(h), (h_1), (h_2)$ ebenso wie h, h_1, h_2 die Eigenschaft, für alle complexplanaren bicomplexen Zahlen der Null gleich zu werden.

Es erscheint deshalb geboten, in den ursprünglich für $(x), (y), (z)$ etc. erhaltenen Resultaten alle mit $(h), (h_1), (h_2)$ multiplicirten Glieder von den übrigen zu sondern, womit die nöthige Directive für die definitive Gestaltung der fraglichen Coëfficienten gegeben ist. Dieselben gewinnen hiedurch die übersichtlichen Formen:

$$\begin{aligned}(x) &= (a) + \frac{hm}{pq} (a_3 h - b_3 k - c_3 l) + \frac{(h)^2 (m)}{pqN}, \\(y) &= (b) - b_3 c_1 c_2 + \frac{hm}{pq} (b_3 h + a_3 k) + \frac{(h)(k)(m)}{pqN}, \\(z) &= (c) - b_1 b_2 c_3 + \frac{hm}{pq} (c_3 h + a_3 l) + \frac{(h)(l)(m)}{pqN};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (x') &= (a) + \frac{h_1 m_1}{p_1 q_1} (a_2 h_1 - b_2 k_1 - c_2 l_1) + \frac{(h_1)^2 (m_1)}{p_1 q_1 N_1}, \\
 (y') &= (b) - b_2 c_1 c_3 + \frac{h_1 m_1}{p_1 q_1} (b_2 h_1 + a_2 k_1) + \frac{(h_1)(k_1)(m_1)}{p_1 q_1 N_1}, \\
 (z') &= (c) - b_1 b_3 c_2 + \frac{h_1 m_1}{p_1 q_1} (c_2 h_1 + a_2 l_1) + \frac{(h_1)(l_1)(m_1)}{p_1 q_1 N_1}; \\
 \hline
 (x'') &= (a) + \frac{h_2 m_2}{p_2 q_2} (a_1 h_2 - b_1 k_2 - c_1 l_2) + \frac{(h_2)^2 (m_2)}{p_2 q_2 N_2}, \\
 (y'') &= (b) - b_1 c_2 c_3 + \frac{h_2 m_2}{p_2 q_2} (b_1 h_2 + a_1 k_2) + \frac{(h_2)(k_2)(m_2)}{p_2 q_2 N_2}, \\
 (z'') &= (c) - b_2 b_3 c_1 + \frac{h_2 m_2}{p_2 q_2} (c_1 h_2 + a_1 l_2) + \frac{(h_2)(l_2)(m_2)}{p_2 q_2 N_2},
 \end{aligned}$$

aus welchen unmittelbar hervorgeht, dass P sich für $h = h_1 = h_2 = 0$ wieder in jene einwerthige bicomplexe Grösse: $(\bar{x}) + (\bar{y})i_1 + (\bar{z})i_2$ verwandelt, deren Coëfficienten in §. 3 durch das Werthsystem (f) bestimmt worden sind. In diesem Falle ist P also auch commutativ, associativ und distributiv in Bezug auf die charakteristische Ebene seiner Factoren.

Wird ferner ein Factor reell, während die beiden übrigen irgend welche diplanare bicomplexe Zahlen vorstellen, so bleibt P zwar noch einwerthig, commutativ und associativ, aber nicht mehr distributiv, und im allgemeinsten Falle dreier diplanarer bicomplexer Factoren repräsentirt dieses Product eine dreiwerthige, weder commutative noch associative Grösse.

Es unterscheidet sich übrigens von dem, nach der ersten Verallgemeinerung gerechneten Producte: P nicht allein durch die geringere Anzahl seiner Werthe, sondern auch darin, dass jedem derselben ein charakteristischer Modulus zukommt. Bildet man nämlich unter Zuhilfenahme der für (h) , (k) , (l) etc. bestehenden Identitäten die Wurzelgrössen:

$$\sqrt{(x)^2 + (y)^2 + (z)^2}, \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}, \sqrt{(x'')^2 + (y'')^2 + (z'')^2},$$

so ergeben sich der Reihe nach die Ausdrücke:

$$r_1 r_2 r_3 \sqrt{\frac{\{k^2 + l^2\} \{(k)^2 + (l)^2\}}{\{h^2 + k^2 + l^2\} \{(h)^2 + (k)^2 + (l)^2\}}},$$

$$r_1 r_2 r_3 \sqrt{\frac{\{k_1^2 + l_1^2\} \{(k_1)^2 + (l_1)^2\}}{\{h_1^2 + k_1^2 + l_1^2\} \{(h_1)^2 + (k_1)^2 + (l_1)^2\}}},$$

$$r_1 r_2 r_3 \sqrt{\frac{\{k_2^2 + l_2^2\} \{(k_2)^2 + (l_2)^2\}}{\{h_2^2 + k_2^2 + l_2^2\} \{(h_2)^2 + (k_2)^2 + (l_2)^2\}}},$$

welche für $h, h_1, h_2 \geq 0$ offenbar insgesamt von einander verschieden sind und ihrerseits noch folgende wichtige Thatsache analytisch präcisiren:

Der Modulus jedes, aus drei diplanaren bicomplexen Zahlen gebildeten Productes ist stets kleiner als das Product der Moduli seiner Factoren.

Die inductive Verallgemeinerung der hier gewonnenen Resultate führt schliesslich zu nachstehender Charakteristik der zweiten Generalisation des Multiplicirens in ihrer Anwendung auf beliebig viele n -fach complexe, beziehungsweise n -fach imaginäre Factoren:

(I). Sind die mit einander zu multiplicirenden Factoren lauter diplanare, n -fach complexe Zahlen: Z_1, Z_2, \dots, Z_s , so besitzt deren Product: P_s im Allgemeinen $\frac{1}{2}(s!)$ n -fach complexe Werthe. Dasselbe verschwindet dagegen identisch, sobald sich die reellen Bestandtheile von Z_1, Z_2, \dots, Z_s auf Null reduciren.

(II). Für complanare Factoren, mögen sie nun n -fach complex oder n -fach imaginär sein, bleiben die Verknüpfungsgesetze ihrer Coëfficienten in beiden Verallgemeinerungen¹ dieselben.

¹ Diese Verknüpfungsgesetze gestatten übrigens auch eine, für die zweite universelle Verallgemeinerung des Multiplicirens charakteristische Interpretation. Bildet man nämlich das Product der beiden n -fach complexen Zahlen: Z_1, Z_2 nach den, für reelle algebraische Polynome geltenden Multiplicationsregeln, so liefert das erhaltene Resultat:

$$a_0 b_0 + a_1 b_1 i_1^2 + a_2 b_2 i_2^2 + \dots + a_n b_n i_n^2 +$$

$$+ (a_1 b_0 + a_0 b_1) i_1 + (a_2 b_0 + a_0 b_2) i_2 + \dots + (a_n b_0 + a_0 b_n) i_n +$$

$$+ (a_2 b_1 + a_1 b_2) i_1 i_2 + (a_3 b_1 + a_1 b_3) i_1 i_3 + \dots + (a_n b_{n-1} + a_{n-1} b_n) i_{n-1} i_n,$$

da $i_1 i_2, i_1 i_3, \dots, i_{n-1} i_n$ in der zweiten Generalisation als Producte diplanarer, einfach imaginärer Zahlen identisch verschwinden, und $i_1^2, i_2^2, \dots, i_n^2$ wieder mit der negativen Einheit zusammenfallen, direct den, für com-

(III). Die Moduli sämtlicher Werthe des Productes P_s haben zur unteren gemeinsamen Grenze die Null, zur oberen hingegen das Product der Moduli seiner Factoren, und liegen daher alle, jenen Werthen zugeordneten Punkte in einer endlichen, $(n+1)$ -fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit, deren n -fach ausgedehnte Begrenzung durch die Gleichung (34) analytisch beschrieben wird.

§. 9.

Zweite Verallgemeinerung der Division.

Indem wir die in Frage stehende Generalisation wieder auf Grundlage der Forderung aufzufinden suchen, dass das Product aus Quotient und Divisor mit dem Dividend übereinstimmen müsse, ergeben sich die allgemeinen impliciten Definitionsgleichungen des Dividirens durch Vereinigung der $(n-1)$ -fachen Bedingung (73) mit jenen beiden Relationen:

$$a_0x_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b_0(x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2), \\ m = r_2^2 x_0$$

welche aus (18) und (19) durch die in §. 2 präcisirte Buchstabenvertauschung hervorgehen. Es sind daher x_0, x_1, \dots, x_n auch hier gewissen binomischen Ausdrücken: $a_0u + b_0v, a_1u + b_1v, \dots, a_nu + b_nv$ äquivalent, deren gemeinsame Argumente zwei Gleichungen:

$$(80). \quad r_2^2(a_0u + b_0v) = m,$$

$$(81). \quad b_0(r_1^2u^2 + 2muv + r_2^2v^2) = r_1^2u + mv$$

zu genügen haben. Ihre Auflösung liefert nach Einführung der Hilfsfunctionen: d', d'' für u und v die Werthe:

$$u_1 = 0, v_1 = \frac{m}{b_0r_2^2}; u_2 = \frac{b_0pq + d''m}{r_2^2(b_0d' + a_0d'')}, v_2 = -\frac{d''r_1^2}{r_2^2(b_0d' + a_0d'')},$$

planare, n -fach complexe Factoren festgestellten Werth von Z_1Z_2 . Es wird demnach das erwähnte Product im letzteren Falle selbst in Bezug auf $a_1i_1, b_1i_1; a_2i_2, b_2i_2; \dots, a_ni_n, b_ni_n$ distributiv und besitzt speciell für $n=3$ nicht nur kraft der fortlaufenden Proportion:

$$a_1 : a_2 : a_3 = b_1 : b_2 : b_3$$

dieselben Coefficienten wie die correspondirende Specialform des Quaternionenproductes: q_1q_2 , sondern kann auch in analoger Weise aus den Bestandtheilen seiner Factoren abgeleitet werden.

so dass den fraglichen Coëfficienten des Resultates der Division durch deren implicite Bestimmungsgleichungen vorläufig zwei Werthsysteme:

$$\begin{aligned} \xi'_0 &= \frac{m}{r_2^2}, \quad \xi'_1 = \frac{b_1 m}{b_0 r_2^2}, \quad \xi'_2 = \frac{b_2 m}{b_0 r_2^2}, \quad \dots \quad \xi'_n = \frac{b_n m}{b_0 r_2^2}; \\ \xi''_0 &= \frac{a_0 b_0 p q - d''(b_0 r_1^2 - a_0 m)}{r_2^2 (b_0 d'' + a_0 d'')} = \frac{m}{r_2^2}, \\ \xi''_1 &= \frac{a_1 b_0 p q - d''(b_1 r_1^2 - a_1 m)}{r_2^2 (b_0 d'' + a_0 d'')}, \quad \xi''_2 = \frac{a_2 b_0 p q - d''(b_2 r_1^2 - a_2 m)}{r_2^2 (b_0 d'' + a_0 d'')}, \\ \xi''_n &= \frac{a_n b_0 p q - d''(b_n r_1^2 - a_n m)}{r_2^2 (b_0 d'' + a_0 d'')} \end{aligned}$$

zugeordnet werden, welche bereits in ihrer ursprünglichen Gestalt als — im Sinne unserer vierten, eingangs erhobenen Forderung — universell zu bezeichnen sind.

Dessenungeachtet ist das erste der beiden Werthsysteme, weil seine Anwendung auf zwei einfach complexe Zahlen: $a_1 + b_1 i_1$, $a_2 + b_2 i_1$ die, unserer zweiten Forderung zuwiderlaufende Gleichung:

$$\frac{a_1 + b_1 i_1}{a_2 + b_2 i_1} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_2 (a_1 a_2 + b_1 b_2)}{a_2 (a_2^2 + b_2^2)} i_1$$

nach sich zieht, definitiv auszuschneiden, und repräsentirt mithin der Quotient zweier n -fach complexer Zahlen kraft der zweiten Generalisation des Dividirens eine im Allgemeinen einwerthige, höchstens n -fach complexe Grösse:

$$\xi''_0 + \xi''_1 i_1 + \xi''_2 i_2 + \dots + \xi''_n i_n,$$

deren Coëfficienten wie jene des Productes zweiter Art insgesamt rationale Functionen von a_0, a_1, \dots, a_n ; b_0, b_1, \dots, b_n vorstellen.

Analog wie in der ersten Verallgemeinerung wird auch bei der zweiten eine formale Trennung der Quotienten complanarer und diplanarer Zahlen möglich, sobald man in die für $\xi''_0, \xi''_1, \dots, \xi''_n$ gegebenen Ausdrücke die Hilfsfunctionen: d, d_1, d_2 einführt und hiedurch zur zweiten Darstellungsweise des zu discutirenden

allgemeinen Quotienten übergeht. Es verwandeln sich nämlich die diesbezüglichen Resultate :

$$\begin{aligned} \xi_0'' &= \frac{1}{r_2^2} (a_0 b_0 + d), \\ \xi_1'' &= \frac{1}{r_2^2} \left\{ (a_1 b_0 - a_0 b_1) \left(1 + \frac{d_1 d_2 - d^2}{b_0^2 d_1 + a_0^2 d_2 - 2a_0 b_0 d} \right) - \right. \\ &\quad \left. \frac{m [b_0 (a_1 d - b_1 d_1) + a_0 (b_1 d - a_1 d_2)]}{b_0^2 d_1 + a_0^2 d_2 - 2a_0 b_0 d} \right\}, \\ \xi_n'' &= \frac{1}{r_2^2} \left\{ (a_n b_0 - a_0 b_n) \left(1 + \frac{d_1 d_2 - d^2}{b_0^2 d_1 + a_0^2 d_2 - 2a_0 b_0 d} \right) - \right. \\ &\quad \left. \frac{m [b_0 (a_n d - b_n d_1) + a_0 (b_n d - a_n d_2)]}{b_0^2 d_1 + a_0^2 d_2 - 2a_0 b_0 d} \right\} \end{aligned}$$

für complanare Zahlen in Folge des Verschwindens der Differenz: $d_1 d_2 - d^2$ und sämtlicher Factoren von $a_0 m$, $b_0 m$ unmittelbar in das Werthsystem (0), wonach die Division zweier complanarer Zahlen in beiden Verallgemeinerungen¹ denselben Regeln unterworfen bleibt.

Infolgedessen genügt es, bei der dritten, goniometrischen Darstellungsweise von $Z_1 : Z_2$ lediglich diplanare n -fach complexe Zahlen in Betracht zu ziehen, für welche die ursprünglich sich darbietenden complicirten Formeln erst dann übersichtlich werden, wenn man ausser den bekannten Hilfwinkeln θ und τ noch $(n+1)$ weitere, den Gleichungssystemen:

$$\begin{aligned} \frac{\cos \alpha - \cos \beta \cos \theta}{\sin \theta} &= \cos \bar{\sigma}, & \frac{\cos \alpha_1 - \cos \beta_1 \cos \theta}{\sin \theta} &= \cos \bar{\sigma}_1, \\ & \cdot \frac{\cos \alpha_n - \cos \beta_n \cos \theta}{\sin \theta} &= \cos \bar{\sigma}_n; \\ \frac{\cos \beta - \cos \alpha \cos \theta}{\sin \theta} &= \cos \bar{\tau}, & \frac{\cos \beta_1 - \cos \alpha_1 \cos \theta}{\sin \theta} &= \cos \bar{\tau}_1, \\ & \cdot \frac{\cos \beta_n - \cos \alpha_n \cos \theta}{\sin \theta} &= \cos \bar{\tau}_n \end{aligned}$$

¹ Hiezu sei noch bemerkt, dass beide Generalisationen, falls die betreffenden complanaren Zahlen speciell dreifach complex sind, für die Coëfficienten von $Z_1 : Z_2$ dieselben Verknüpfungsgesetze liefern, welche im Quaternionencalcul für die Coëfficienten von $q_1 : q_2$ nach Einführung der Bedingung: $a_1 : a_2 : a_3 = b_1 : b_2 : b_3$ resultiren.

entnommene Hilfwinkel: $\bar{\sigma}$; $\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2, \dots$ benützt. Auf diese Art gelangt man zu den Ergebnissen:

$$\begin{aligned} \xi_0'' &= \frac{r_1}{r_2} \cos \theta, \quad \xi_1'' = \frac{r_1}{r_2} \left(\frac{\cos \alpha_1 \cos \beta - \cos \bar{\sigma} \cos \bar{\tau}_1}{\cos^2 \tau - \cos \alpha \cos \beta} \right) \sin^2 \frac{\theta}{2}, \\ \xi_n'' &= \frac{r_1}{r_2} \left(\frac{\cos \alpha_n \cos \beta - \cos \bar{\sigma} \cos \bar{\tau}_n}{\cos^2 \tau - \cos \alpha \cos \beta} \right) \sin^2 \frac{\theta}{2}, \end{aligned}$$

und sei im Anschlusse hieran noch bemerkt, dass $\bar{\sigma}, \bar{\sigma}_1, \dots, \bar{\sigma}_n$; $\bar{\tau}, \bar{\tau}_1, \dots, \bar{\tau}_n$ analog wie $\sigma, \sigma_1, \dots, \sigma_n$; $\tau, \tau_1, \dots, \tau_n$ stets die Relationen: $\cos^2 \bar{\sigma} + \cos^2 \bar{\sigma}_1 + \dots + \cos^2 \bar{\sigma}_n = 1$, $\cos^2 \bar{\tau} + \cos^2 \bar{\tau}_1 + \dots + \cos^2 \bar{\tau}_n = 1$ befriedigen.

Um endlich auch den Modulus: \ddot{r} des allgemeinen Quotienten kennen zu lernen, gehe man auf die erste Darstellungsweise seiner Coëfficienten zurück und verwende zur Umformung der Summe ihrer Quadrate die einfache Identität:

$$b_0^2 pq + d''^2 = r_2^2 (b_0^2 r_1^2 + a_0^2 r_2^2 - 2a_0 b_0 m) = r_2^2 (b_0 d' + a_0 d''),$$

wodurch \ddot{r} zuletzt auf den nachstehenden Ausdruck reducirt wird:

$$(82). \quad \ddot{r} = \frac{r_1}{r_2} \sqrt{\frac{pq}{b_0 d' + a_0 d''}}.$$

Da nun die Differenz: $pq - (b_0 d' + a_0 d'')$ gemäss früheren Rechnungen für alle diplanaren Zahlen positiv bleibt, ist der Modulus des Quotienten je zweier derartiger Zahlen hier immer grösser als der Quotient der Moduli des Dividends und Divisors und wird speciell für $a_0 = b_0 = 0$, $pq > 0$, d. h. für diplanare n -fach imaginäre Specialisirungen von Z_1, Z_2 unendlich gross, selbst wenn deren Moduli endliche, von Null verschiedene Werthe besitzen.

Dasselbe gilt natürlich auch von den Quotienten solcher Zahlen, welche für die erste Verallgemeinerung durchwegs endlich bleiben, so dass die Verschiedenheit zwischen beiden Generalisationen des Dividends ebenso scharf ausgeprägt ist wie jene zwischen Producten erster und zweiter Art.

Es müssen demnach auch die Bedingungen für die Zulässigkeit der fundamentalen Relatione (44), (45), (46) in Bezug auf die zweite Verallgemeinerung der Division von Neuem festgestellt

werden, wobei wir uns aus bekannten Gründen wieder auf bicomplexe Zahlen beschränken und behufs einer einheitlichen Gestaltung der durchzuführenden Rechnungen alle zur Verwendung kommenden bicomplexen Quotienten zunächst gewissen Transformationen unterwerfen, deren typischer Charakter aus der, keines Commentares bedürftigen Gleichung:

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + b_1 i_1 + c_1 i_2}{a_2 + b_2 i_1 + c_2 i_2} &= \frac{m}{r_2^2} + \frac{a_2 b_1 p q - (a_1 r_2^2 - a_2 m)(b_2 r_1^2 - b_1 m)}{r_2^2 (a_2^2 r_1^2 + a_1^2 r_2^2 - 2a_1 a_2 m)} i_1 + \\ &+ \frac{a_2 c_1 p q - (a_1 r_2^2 - a_2 m)(c_2 r_1^2 - c_1 m)}{r_2^2 (a_2^2 r_1^2 + a_1^2 r_2^2 - 2a_1 a_2 m)} i_2 = \\ &= \frac{m}{r_2^2} - \frac{1}{r_2^2} \left\{ l + \frac{h(hl + km)}{k^2 + l^2} \right\} i_1 + \frac{1}{r_2^2} \left\{ k + \frac{h(hk - lm)}{k^2 + l^2} \right\} i_2 \end{aligned}$$

zu entnehmen ist.

Die zur Prüfung von (44) dienende Function $\underline{\Delta}$ gewinnt dann die Gestalt:

$$\begin{aligned} (83). \quad \underline{\Delta} &= \\ &= \frac{1}{r_3^2} \left\{ \frac{h_1(h_1 l_1 + k_1 m_1)}{k_1^2 + l_1^2} + \frac{h_2(h_2 l_2 + k_2 m_2)}{k_2^2 + l_2^2} - \frac{h'(h'l' + k'm')}{k'^2 + l'^2} \right\} i_1 \\ &- \frac{1}{r_3^2} \left\{ \frac{h_1(h_1 k_1 - l_1 m_1)}{k_1^2 + l_1^2} + \frac{h_2(h_2 k_2 - l_2 m_2)}{k_2^2 + l_2^2} - \frac{h'(h'k' - l'm')}{k'^2 + l'^2} \right\} i_2, \end{aligned}$$

verschwindet also wie die durch (47) charakterisirte zweiwerthige Differenz $\underline{\Delta}$ ausschliesslich für $h_1 = h_2 = 0$, während sie im Übrigen eine einwerthige, zweifach-imaginaire Grösse vorstellt.

Was ferner die beiden, hier gleichfalls einwerthigen Quotienten:

$$\frac{Z_1 Z_3}{Z_2 Z_3} = (\varepsilon) + (\eta) i_1 + (\delta) i_2, \quad \frac{Z_1 : Z_3}{Z_2 : Z_3} = (\bar{\varepsilon}) + (\bar{\eta}) i_1 + (\bar{\delta}) i_2$$

anbelangt, deren Coincidenz mit $Z_1 : Z_2$ die Gleichungen (45) und (46) ausdrücken, so gestatten deren reelle Bestandtheile unter Benützung der Substitutionen:

$$\begin{aligned} \frac{h_1 m_1}{p_1 q_1} - \frac{h_2 m_2}{p_2 q_2} &= h_1^*, \quad \left(h_1 + \frac{h_2 m_1 m_2}{p_2 q_2} \right) \left(h_2 + \frac{h_1 m_1 m_2}{p_1 q_1} \right) = h_2^*, \\ \frac{h_1^2}{k_1^2 + l_1^2} + \frac{h_2^2}{k_2^2 + l_2^2} &+ \frac{h_1 h_2 (h_1 h_2 + m_1 m_2)}{(k_1^2 + l_1^2)(k_2^2 + l_2^2)} = (h_1^*), \end{aligned}$$

$$\frac{h_1 m_1}{k_1^2 + l_1^2} - \frac{h_2 m_2}{k_2^2 + l_2^2} + \frac{h_1 h_2 (h_2 m_1 - h_1 m_2)}{(k_1^2 + l_1^2)(k_2^2 + l_2^2)} = (h_2^*)$$

im vorliegenden Falle die Darstellungsweise:

$$(84) \dots (\xi) = \frac{p_2 q_2}{k_2^2 + l_2^2} \left\{ \frac{m}{r_2^2} \left(1 + \frac{h_1 h_2 m_1 m_2}{p_1 p_2 q_1 q_2} \right) - \frac{1}{r_2^2 r_3^2} (a_3 g h_1^* + h_2^*) \right\},$$

$$(85) \dots (\bar{\xi}) = \frac{k_2^2 + l_2^2}{p_2 q_2} \left\{ \frac{m}{r_2^2} + \frac{1}{r_2^2 r_3^2} [(k_1 h_2 + l_1 l_2) (h_1^*) + (k_1 l_2 - k_2 l_1) (h_2^*) - h_1 h_2] \right\}$$

und sind daher für $h_1, h_2 \geq 0$ von dem reellen Bestandtheile des Quotienten: $Z_1 : Z_2$ stets verschieden, während sie für $h_1 = h_2 = 0$ zufolge des gleichzeitigen Verschwindens von: $p_2 q_2 - (k_2^2 + l_2^2)$; h_1^*, h_2^* ; $(h_1^*), (h_2^*)$ ebenso wie $(\xi_1), (\xi_2), (\bar{\xi}_1), (\bar{\xi}_2)$ mit $\frac{m}{r_2^2}$ identisch werden.

Hieraus geht hervor, dass die Giltigkeit der Gleichungen (44), (45), (46) auch in der zweiten Generalisation des Dividirens lediglich für complanare Zahlen in Betracht kommt, für die letzteren jedoch in derselben Weise wie in der ersten Verallgemeinerung dieser Grundoperation fortbesteht, indem beide Verallgemeinerungen den Quotienten je zweier complanarer Zahlen erwiesenermassen übereinstimmend definiren.

Da überdies gemäss früher abgeleiteten Sätzen die Producte erster und zweiter Art für derartige Zahlen einander gleich sind, ergibt sich jetzt noch die wichtige Folgerung:

Erhebt man auf Grundlage der zweiten universellen Verallgemeinerung des Multiplicirens und Dividirens eine beliebige n -fach complexe oder n -fach imaginäre Zahl zu irgend einer Potenz mit reellem Exponenten, so ist das Resultat der Potenzierung identisch mit jenem, welches die erste universelle Generalisation der genannten Grundoperationen liefert.

Hienach genügt jedes System complanarer Zahlen, mag nun dessen charakteristische Ebene einer dreifach ausgedehnten oder einer höheren Mannigfaltigkeit angehören, sämtlichen Fundamentalbedingungen, welche K. Weierstrass seinen, unter dem Titel: „Zur

Theorie der aus n -Haupteinheiten gebildeten Grössen“ veröffentlichten Betrachtungen¹ zu Grunde gelegt hat, so dass sich deren Inhalt auch mit den Resultaten der vorliegenden Arbeit, insoweit die letzteren complanare Zahlen betreffen, in Verbindung bringen lässt.

Was jedoch die mit diplanaren, n -fach complexen Zahlen ausführbaren Rechnungsoperationen anbelangt, so besitzen bereits die Producte und Quotienten derartiger Zahlen nicht mehr sämtliche, in der citirten Abhandlung als wesentliche Merkmale jedes complexen Productes und Quotienten angenommenen Eigenschaften, und muss daher auch unter den hier entwickelten Gesichtspunkten die weitgehendste, von Weierstrass aus seinen Untersuchungen gezogene Folgerung: „dass die Arithmetik der allgemeinen complexen Grössen zu keinem Resultate führen kann, das nicht aus Ergebnissen der Theorie der complexen Grössen mit einer oder mit zwei Haupteinheiten ohne Weiteres ableitbar wäre“ — bedeutend eingeschränkt werden.

§. 10.

Die einfachste Formulirung des Functionsbegriffes für ein n -fach complexes, variables Argument.

Gleichwie die hier in Betracht gezogenen universellen Verallgemeinerungen der algebraischen Grundoperationen eine neue Fassung des Begriffes: „Rechnungsoperation“ in seiner Anwendung auf n fach complexe Zahlen erforderten, müssen auch die Begriffe: „Veränderliche Grösse“ und: „Function eines variablen Argumentes“ — für n -fach complexe Zahlen neu definirt werden, ehe sich das in dem vorliegenden Paragraphen behandelte Problem näher präcisiren lässt.

Mit Bezugnahme auf die bekannte Definition einer veränderlichen, einfach complexen Grösse mag jede n -fach complexe Grösse ebenfalls das Attribut „veränderlich“ erhalten, sobald sie verschiedene Zahlenwerthe annehmen kann, welche insgesamt

¹ S. h. die „Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen“ vom 12. November 1884, pag. 395—419.

Punkten der eingangs präcisirten, $(n + 1)$ -fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit zugehören. Hiebei bleiben ihre Veränderungen entweder auf ein bestimmtes Gebiet: G dieser Mannigfaltigkeit beschränkt, dessen Grenzen jederzeit durch ein System von Gleichungen zwischen $(n + 1)$ veränderlichen Coordinaten: $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ zu charakterisiren sind, oder aber es bestehen für die zulässigen Specialisirungen der betreffenden variablen Grösse keine beschränkenden Bedingungen, wonach eine Unterscheidung zwischen beschränkt und unbeschränkt veränderlichen, n -fach complexen Grössen nothwendig wird.

Dieselbe Unterscheidung gilt ferner für jede beschränkt veränderliche n -fach complexe Grösse hinsichtlich des, ihren möglichen Specialisirungen zugewiesenen Gebietes: G , indem sie entweder alle, dem Gebiete zugehörigen Zahlenwerthe oder nur einen Theil derselben zu durchlaufen vermag. Im ersteren Falle wird die Grösse überdies im Anschlusse an bekannte Nominaldefinitionen der Lehre von den einfach complexen Zahlen als im Bereiche G stetig veränderlich zu bezeichnen sein, so oft das Gebiet G ein zusammenhängendes ist, d. h. so oft sich die Coordinatenwerthe zweier beliebiger Punkte des Gebietes derart in einander überführen lassen, dass jedem ihrer Zwischenwerthe ein Punkt desselben Gebietes entspricht.

Diese Feststellung bestimmt, da die, unseren Untersuchungen zu Grunde gelegte Mannigfaltigkeit kraft ihrer Definitionsweise ein solches Gebiet bildet, zugleich den Begriff einer unbeschränkt veränderlichen, stetigen, n -fach complexen Grösse; dieselbe repräsentirt unter den hier bestehenden analytisch-geometrischen Voraussetzungen immer einen Ausdruck von der allgemeinen Form:

$$(86). \quad Z = x + x_1 i_1 + x_2 i_2 + \dots + x_n i_n,$$

dessen reelle Coëfficienten sämtlicher Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ fähig sind.

Verknüpft man schliesslich irgend eine veränderliche ¹ n -fach complexe Grösse: (Z) mit einer zweiten Grösse: $[Z]$ nach bestimm-

¹ Jede Veränderliche, deren Werthe sich möglicherweise nur auf ein bestimmtes, endliches Gebiet erstrecken, mag im Folgenden vor unbeschränkt variablen Grössen auch äusserlich gekennzeichnet werden, indem man dieselbe in Parenthesen einschliesst.

ten Gesetzen durch eine endliche oder unendlich grosse Anzahl von Rechnungsoperationen derart, dass jeder in Betracht kommenden Specialisirung von (Z) innerhalb eines analytisch-charakterisirbaren Gebietes ein einziger, höchstens n -fach complexer Werth von $[Z]$ oder mehrere beziehungsweise unendlich viele ebenso beschaffene Werthe von $[Z]$ entsprechen, so erscheint $[Z]$ hiedurch für jenes Gebiet als eine einwerthige oder mehrwerthige, beziehungsweise unendlich vielwerthige Function¹ von (Z) defnirt, zu deren analytischer Bezeichnung in Zukunft Symbole wie:

$$f\{Z\}, \varphi\{Z\}, \dots F\{Z\}, \Phi\{Z\}, \dots$$

dienen mögen. Es kann somit die jeweilige Definition von $[Z]$ entweder in impliciter oder expliciter Form auftreten und wird im letzteren, einfacheren Falle nach Ausführung der mit (Z) vorzunehmenden Rechnungsoperationen stets eine Gleichung von der Gestalt:

$$(87) \dots [Z] = X + X_1 i_1 + X_2 i_2 + \dots + X_n i_n$$

liefern, in welcher X, X_1, \dots, X_n lauter reelle Functionen der variablen Coëfficienten von (Z) vorstellen. Im Übrigen bleiben die letztgenannten Functionen völlig willkürlich; wohl aber bestimmt

¹ Grassmann geht in seiner Functionenlehre (l. c. p. 223) von nachstehender „Erklärung“ aus: „Wenn eine Grösse u von einer oder mehreren Grössen x, y, \dots in der Art abhängt, dass, so oft x, y, \dots bestimmte Werthe annehmen, auch u einen bestimmten (eindeutigen) Werth annimmt, so nennen wir u eine Function von x, y, \dots “ — und fügt erläuternd hinzu: „Diese Definition soll auch gelten, wenn u, x, y, \dots beliebige extensive Grössen sind. Ferner ist zu bemerken, dass die mehrdeutigen Functionen, d. h. solche, wo für bestimmte Werthe der unabhängigen Variablen x, y, \dots die Grösse u mehrere verschiedene Werthe annehmen kann, ohne dass diese Verschiedenheit durch eine neue Variable bedingt ist, — hier gänzlich ausgeschlossen sind.“ „Sobald die Beziehung zwischen den unabhängigen und der abhängigen Variablen u mittelst einer Gleichung gegeben ist, durch welche für bestimmte Werthe der ersteren die letztere: u mehrere verschiedene Werthe annehmen kann, so kann man u ansehen als Function jener Variablen und einer neuen: v , welche eine bestimmte Werthreihe, etwa die der ganzen Zahlen, durchläuft, so dass dann, wenn auch ausser den ursprünglichen Variablen noch der Werth von v bestimmt ist, auch u eindeutig bestimmt sei. Oder sollte eine solche neue Variable: v nicht ausreichen, so kann man mehrere solche zu Hilfe nehmen.“

ihr jeweiliger Charakter zugleich jenen von $[Z]$, so dass beispielsweise, falls X, X_1, \dots, X_n für alle reellen Werthe von x, x_1, \dots, x_n stetig bleiben, auch $[Z]$ als eine, in demselben Sinne stetige Function ihres n -fach complexen variabeln Argumentes: (Z) zu bezeichnen sein wird.

Diese vorläufigen Bemerkungen¹ vermitteln bereits einige nähere Bestimmungen der hier zu lösenden Aufgabe, den Functionsbegriff für ein n -fach complexes, variables Argument möglichst einfach zu formuliren: Man wird das letztere hiebei jedenfalls als ein unbeschränkt stetiges: Z vorauszusetzen und $[Z]$ explicit durch eine endliche Anzahl eindeutiger algebraischer Grundoperationen aus Z abzuleiten haben.

Die erforderliche Directive für die Wahl der in Frage kommenden Verknüpfungen entspringt dann der in den §§. 6, 7 und 9 zum Ausdrucke gelangten Thatsache, dass beide universelle Verallgemeinerungen des Addirens, Subtrahirens und Potenzirens formal identisch sind, während die auf Producte und Quotienten bezüglichen Generalisationen lediglich für complanare Zahlen eine einheitliche Zusammenfassung ermöglichten. Es besitzen daher die drei erstgenannten Rechnungsoperationen einen einfacheren Character als die übrigen, so dass man sich bei der Construction von $[Z]$ ursprünglich auf additive und subtractive Verknüpfungen einwerthiger Potenzen von Z beschränken wird, welche übrigens, da das Product jeder beliebigen n -fach complexen Zahl in eine reelle Zahl gleichfalls einwerthig bleibt, vor ihrer Verknüpfung noch mit irgend welchen reellen Factoren multiplicirt werden können.

Auf diese Art gewinnt der Functionsbegriff in seiner einfachsten Fassung die Gestalt:

$$(88). \quad [Z] = \mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_1 Z + \mathfrak{A}_2 Z^2 + \dots + \mathfrak{A}_n Z^n,$$

wobei n eine beliebige endliche, positive ganze Zahl und $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_n$ lauter reelle Grössen repräsentiren.

Man kann nunmehr die Coëfficienten des Argumentes Z mittelst der Gleichungen:

¹ Jede eingehendere Discussion der hier zur Sprache gebrachten Begriffe, namentlich des Stetigkeitsbegriffes, würde uns sachlich allzuweit über das Thema der vorliegenden Abhandlung hinausführen.

$$x = \rho \cos \Phi, \quad x_1 = \rho \sin \Phi \cos \Omega_1, \quad x_2 = \rho \sin \Phi \sin \Omega_1 \cos \Omega_2, \\ \dots x_n = \rho \sin \Phi \sin \Omega_1 \sin \Omega_2 \dots \sin \Omega_{n-1}$$

durch dessen jeweiligen Modulus: ρ und n — reelle veränderliche Hilfswinkel: $\Phi, \Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_{n-1}$ ausdrücken, also Z durch Einführung seines variablen Inclinationsfactors:

$$(89) \dots I^* = i_1 \cos \Omega_1 + i_2 \sin \Omega_1 \cos \Omega_2 + \dots \\ + i_{n-1} \sin \Omega_1 \dots \sin \Omega_{n-2} \cos \Omega_{n-1} + i_n \sin \Omega_1 \dots \sin \Omega_{n-1}$$

in den binomischen Ausdruck:

$$(90) \dots Z = \rho (\cos \Phi + I^* \sin \Phi)$$

umformen. Auf Grundlage dieses Resultates und der Thatsache, dass jede denkbare Specialisirung von I^* zugleich eine solche von I bildet, ergeben sich dann für die in (88) auftretenden Potenzen von Z kraft (56) der Reihe nach die Werthe:

$$\rho^2 \{ \cos (2\Phi) + I^* \sin (2\Phi) \}, \dots \rho^n \{ \cos (n\Phi) + I^* \sin (n\Phi) \},$$

deren Substitution in (88) folgende zweite Darstellungsweise des Aggregates $[Z]$ liefert:

$$(91) \dots [Z] = \mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_1 \rho \cos \Phi + \mathfrak{A}_2 \rho^2 \cos (2\Phi) + \dots + \mathfrak{A}_n \rho^n \cos (n\Phi) + \\ + I^* \{ \mathfrak{A}_1 \rho \sin \Phi + \mathfrak{A}_2 \rho^2 \sin (2\Phi) + \dots + \mathfrak{A}_n \rho^n \sin (n\Phi) \}.$$

Dieselbe lässt unmittelbar erkennen, dass $[Z]$ für alle endlichen Specialisirungen von Z einwerthig und stetig bleibt.

Da ferner die Variablen ρ und Φ in (91) nach denselben Gesetzen mit einander verknüpft sind, welche — unter z irgend ein einfach complexes, variables Argument:

$$z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

gedacht — für die Variablen r und φ in der bekannten Darstellung des algebraischen Polynomes:

$$\mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_1 z + \mathfrak{A}_2 z^2 + \dots + \mathfrak{A}_n z^n$$

als Function von r und φ bestehen, begründet die Transformationsgleichung (91) im Vereine mit der aus (27) resultirenden Beziehung: $(I^*)^2 = -1$ und dem ersten Hauptsatze der Lehre von den algebraischen Gleichungen noch den weiteren Schluss: Das Aggregat $[Z]$ verschwindet in jeder, die reelle Zahlen-

axe enthaltenden Ebene höchstens für n —von einander verschiedene Specialisirungen von Z .

Diesem Merkmale erscheint eine vierte allgemeine Eigenschaft von $[Z]$ direct zugeordnet, deren Ableitung sich am einfachsten gestaltet, wenn man — unter y die positiv zu nehmende Wurzelgrösse:

$$(92) \dots y = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

verstanden — sämtliche in (88) vorkommende Potenzen von Z mit Hilfe der, keines Commentares bedürftigen Formel:

$$(93) \dots Z^n = \sum_{s=0}^{s=n'} (-1)^s (n)_{2s} x^{n-2s} y^{2s} + \\ + \sum_{s=0}^{s=n''} (-1)^s (n)_{2s+1} x^{n-2s-1} y^{2s} (x_1 i_1 + x_2 i_2 + \dots + x_n i_n) = \\ = u_n + u_n^{(1)} i_1 + u_n^{(2)} i_2 + \dots + u_n^{(n)} i_n$$

als n -fach complexe Zahlen darstellt und hierauf das Aggregat $[Z]$ in den Ausdruck:

$$(94) \dots [Z] = \mathfrak{U}_0 + \mathfrak{U}_1 u_1 + \mathfrak{U}_2 u_2 + \dots + \mathfrak{U}_n u_n + \\ + \{\mathfrak{U}_1 u_1^{(1)} + \mathfrak{U}_2 u_2^{(1)} + \dots + \mathfrak{U}_n u_n^{(1)}\} i_1 + \\ + \{\mathfrak{U}_1 u_1^{(2)} + \mathfrak{U}_2 u_2^{(2)} + \dots + \mathfrak{U}_n u_n^{(2)}\} i_2 = \\ = U + U^{(1)} i_1 + U^{(2)} i_2 + \dots + U^{(n)} i_n$$

transformirt. Da nämlich die $(n+1)$ -Functionen:

$$u_n, \frac{u_n^{(1)}}{x_1}, \frac{u_n^{(2)}}{x_2}, \dots, \frac{u_n^{(n)}}{x_n}$$

augenscheinlich für jedes positive ganze n nur die beiden Variablen x und y enthalten, gilt dasselbe auch von den Functionen:

$$U, \frac{U^{(1)}}{x_1}, \frac{U^{(2)}}{x_2}, \dots, \frac{U^{(n)}}{x_n},$$

wonach die jeweiligen numerischen Werthe von $U, U^{(1)}, U^{(2)}, \dots, U^{(n)}$ durch beliebige Zeichenänderungen von x_1, x_2, \dots, x_n nicht alterirt werden. Sobald daher das Aggregat $[Z]$ für eine bestimmte, n -fach complexe Specialisirung von Z , etwa $Z = Z_1$, erfahrungsgemäss gleich Null wird, verschwindet dasselbe ausserdem noch für die $(2^n - 1)$ weiteren Specialisirungen von Z :

$$\begin{aligned}
 a_0 + a_1 \dot{i}_1 + a_2 \dot{i}_2 + \dots + a_{n-1} \dot{i}_{n-1} - a_n \dot{i}_n, \\
 a_0 - a_1 \dot{i}_1 - a_2 \dot{i}_2 - \dots - a_{n-1} \dot{i}_{n-1} + a_n \dot{i}_n, \\
 a_0 - a_1 \dot{i}_1 - a_2 \dot{i}_2 - \dots - a_{n-1} \dot{i}_{n-1} - a_n \dot{i}_n.
 \end{aligned}$$

Diese Folgerung involvirt natürlich auch den bekannten Satz, dass alle einfach complexen Specialisirungen von z , für die irgend eine rationale ganze Function von z mit reellen Coëfficienten gleich Null wird, einander paarweise conjugirt sind.

Um jetzt noch eine fünfte allgemeine Eigenschaft des Aggregates $[Z]$ kennen zu lernen, gehe man vorläufig wieder auf die Gleichung (93) zurück und knüpfe an dieselbe die nachstehenden einfachen Überlegungen:

Da der reelle Bestandtheil: u_n der Potenzgrösse Z^n und der gemeinsame Werth der Producte:

$$\begin{aligned}
 \frac{y}{x_1} u_n^{(1)}, \quad \frac{y}{x_2} u_n^{(2)}, \quad \dots \quad \frac{y}{x_n} u_n^{(n)}, \quad \text{nämlich:} \\
 \sum_{s=0}^{s=n''} (-1)^s (n)_{2s+1} x^{n-2s-1} y^{2s+1} = v_n
 \end{aligned}$$

rationale ganze Functionen zweier reeller, von einander unabhängiger und stetiger Variabeln: x, y vorstellen, gestatten sowohl u_n als v_n für alle in Betracht kommenden Specialisirungen von x, x_1, \dots, x_n eine partielle Differentiation nach x und y , deren Ausführung, wenn man der Kürze wegen:

$$\begin{aligned}
 (n-2s)(n)_{2s} &= (2s+1)(n)_{2s+1} = [n]_s, \\
 (n-2s+1)(n)_{2s-1} &= (2s)(n)_{2s} = \{n\}_s
 \end{aligned}$$

setzt und in v_n vor der partiellen Differentiation nach x den Index s mit $(s-1)$ vertauscht, folgende Resultate liefert:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u_n}{\partial x} &= \sum_{s=0}^{s=n'} (-1)^s [n]_s x^{n-2s-1} y^{2s}, & \frac{\partial v_n}{\partial x} &= \sum_{s=1}^{s=n''+1} (-1)^{s-1} \{n\}_s x^{n-2s} y^{2s-1}, \\
 \frac{\partial u_n}{\partial y} &= \sum_{s=0}^{s=n'} (-1)^s \{n\}_s x^{n-2s} y^{2s-1}, & \frac{\partial v_n}{\partial y} &= \sum_{s=0}^{s=n''} (-1)^s [n]_s x^{n-2s-1} y^{2s}.
 \end{aligned}$$

Nun ist für gerade n offenbar $[n]_{n'} = 0$, so dass sich $\frac{\partial u_n}{\partial x}$ in diesem Falle auf die Glieder von $s=0$ bis $s=n' - 1 = n''$

reducirt, während für ungerade n ohnehin n' mit n'' zusammenfällt, d. h. es gilt allgemein die Gleichung:

$$(95) \dots \frac{\partial u_n}{\partial x} = \frac{\partial v_n}{\partial y}.$$

Eine analoge Beziehung besteht aber auch zwischen der zweiten und dritten Summe, weil $\frac{\partial u_n}{\partial y}$ infolge des Verschwindens von $\{n\}_0$ allgemein eine von $s = 1$ bis $s = n'$ genommene Summe von Gliedern vorstellt, und für gerade n direct $n' = n'' + 1$ wird, dagegen für ungerade n das letzte Glied von $\frac{\partial v_n}{\partial x}$ wegen $\{n\}_{n''+1} = 0$ entfällt. Multiplicirt man demnach eine der beiden Summen mit (-1) , so wird die fragliche Relation sofort ersichtlich; sie lautet:

$$(96) \dots \frac{\partial u_n}{\partial y} = - \frac{\partial v_n}{\partial x}.$$

Die vorstehenden Ergebnisse mögen nunmehr mit der Bemerkung combinirt werden, dass das Aggregat $[Z]$ gemäss früheren Sätzen für jede Specialisirung von Z mit Z complanar bleibt, folglich den Producten:

$$\frac{y}{x_1} U^{(1)}, \quad \frac{y}{x_2} U^{(2)}, \quad \dots \quad \frac{y}{x_n} U^{(n)}$$

ebenfalls ein gemeinsamer Werth und zwar:

$$\mathfrak{A}_1 v_1 + \mathfrak{A}_2 v_2 + \dots + \mathfrak{A}_n v_n = V$$

zukommt. Es lassen sich dann die partiellen Differentialquotienten von V nach x respective y :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \mathfrak{A}_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + \dots + \mathfrak{A}_n \frac{\partial v_n}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \mathfrak{A}_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} + \dots + \mathfrak{A}_n \frac{\partial v_n}{\partial y}$$

mit Hilfe von (95) und (96) in die Ausdrücke:

$$- \left(\mathfrak{A}_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} + \dots + \mathfrak{A}_n \frac{\partial u_n}{\partial y} \right), \quad \mathfrak{A}_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + \dots + \mathfrak{A}_n \frac{\partial u_n}{\partial x}$$

umformen, deren Vergleichung mit den partiellen Differentialquotienten von U nach x beziehungsweise y direct die Relationen:

$$(97) \dots \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad (98) \dots \frac{\partial U}{\partial y} = - \frac{\partial V}{\partial x}$$

liefert. Eine nochmalige partielle Differentiation der letzteren führt schliesslich auf den fundamentalen Satz: Sind $U, U^{(1)}, U^{(2)}, \dots, U^{(n)}$ die Coëfficienten jener n -fach complexen veränderlichen Grösse, welche das Aggregat $[Z]$ von Fall zu Fall darstellt, so bilden die Functionen:

$$U, \frac{y}{x_1} U^{(1)}, \frac{y}{x_2} U^{(2)}, \dots, \frac{y}{x_n} U^{(n)}$$

stets particuläre Integrale der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$(99). \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0.$$

Ausserdem wird ersichtlich, dass die Relationen (97), (98), (99), sobald die Coëfficienten der imaginären Bestandtheile von Z bis auf einen einzigen verschwinden, welcher dann kraft (92) mit y zusammenfällt, in jene Beziehungen übergehen, welche die betreffende einfach complexe Specialform des Aggregates $[Z]$ im Riemann'schen¹ Sinne zu einer Function von Z stempeln.

Im Hinblick auf die hier entwickelten Eigenschaften des Aggregates $[Z]$ sind wir mithin berechtigt, die Lösung der im vorliegenden Paragraphen gestellten Aufgabe, wie folgt, zu formuliren:

Die einfachste Fassung des Functionsbegriffes für ein n -fach complexes, veränderliches Argument führt auf die rationale ganze Function n -ten Grades einer unbeschränkt stetigen n -fach complexen Variabeln.

Die einfachste Erweiterung dieses Functionsbegriffes wird dann darin bestehen, dass man die Bedingung der Endlichkeit von n aufhebt,² also auf Grundlage des Aggregates $[Z]$ unendliche, nach steigenden Potenzen von Z fortschreitende Reihen construirt, unter welchen gemäss der Forderung möglicher Einfachheit in erster Linie solche Potenzreihen in Betracht kommen, deren Coëfficienten: $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_n$

¹ S. h. §. 4 seiner Inauguraldissertation: „Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse.“ (Ges. math. Werke, p. 6, 7.)

² Vergl. hiemit den analogen Entwicklungsgang in dem 1884 zu Leipzig erschienenen Werke O. Rausenberger's: „Lehrbuch der Theorie der periodischen Functionen Einer Variablen mit einer endlichen Anzahl wesentlicher Discontinuitätsunkte,“ p. 74, 75.

ein gemeinsames, explicit durch eine Gleichung von der Gestalt: $\mathfrak{A}_n = f(n)$ präcisirbares Bildungsgesetz besitzen. Jede derartige unendliche Reihe:

$$f(0) + f(1)Z + f(2)Z^2 + \dots + f(n)Z^n + \dots$$

kann mit Bezugnahme auf (91) in:

$$f(0) + \rho f(1) \cos \Phi + \rho^2 f(2) \cos(2\Phi) + \dots + \rho^n f(n) \cos(n\Phi) + \dots \\ + I^n \{ \rho f(1) \sin \Phi + \rho^2 f(2) \sin(2\Phi) + \dots + \rho^n f(n) \sin(n\Phi) + \dots \}$$

transformirt werden und convergirt demzufolge innerhalb jenes Bereiches, in welchem die Reihe der Moduli ihrer Glieder:

$$|f(0)| + \rho |f(1)| + \rho^2 |f(2)| + \dots + \rho^n |f(n)| + \dots$$

convergent bleibt, d. h. es lassen sich im Anschlusse an die rationale ganze Function n -ten Grades von Z unendlich viele, theils algebraische, theils transcendente Functionen desselben n -fach complexen Argumentes herstellen, welche innerhalb eines $(n+1)$ -fach ausgedehnten Gebietes, dessen Begrenzung durch die Relation:

$$(100). \quad \xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2 = \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|f(n)|}{|f(n+1)|} \right\}^2$$

analytisch charakterisirt wird, lauter endliche, völlig oder wenigstens beliebig genau bestimmbare Werthe annehmen.

Alle, auf dem hier vorgezeichneten Wege zu gewinnenden Functionen von Z sind insoferne noch relativ einfach beschaffen, als ihre jeweiligen Werthe mit der sie erzeugenden Specialisirung von Z ausnahmslos complanar bleiben, und haben daher im Vereine mit der rationalen ganzen Function n -ten Grades von Z die ersten Untersuchungsobjecte jeder, n -fach complexe, variable Argumente verwendenden analytischen Functionentheorie zu bilden.

Die Auseinandersetzung ihrer weiteren Gliederung liegt der Natur der Sache nach jenseits der Grenzen dieser Abhandlung, und haben auch die zuvor entwickelten Sätze nur mehr dem Zwecke gedient, vorläufig wenigstens die Möglichkeit einer solchen Theorie auf Grundlage der hier discutirten universellen Verallgemeinerungen der algebraischen Grundoperationen darzuthun.