Die Gleichung des Strahlencomplexes, welcher aus allen die Kanten des gemeinschaftlichen Poltetraëders zweier Flächen II. Ordnung schneidenden Geraden besteht.

Von **F. Mertens.**

Es seien

$$(1)\quad f_x = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{14}x_1x_4 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{24}x_2x_4 + 2a_{34}x_3x_4 = 0$$

$$(2)\quad f'_x = a'_{11}x_1^2 + a'_{22}x_2^2 + a'_{33}x_3^2 + a'_{44}x_4^2 + 2a'_{12}x_1x_2 + 2a'_{13}x_1x_3 + \qquad = 0$$

die Gleichungen zweier Flächen II. Ordnung, $\Delta(s, t)$, $\Phi_u(s, t)$ die Determinante und adjungirte Form der quadratischen Form $sf_x + tf'_x$, so dass also

$$\Delta(s,t) = \begin{vmatrix} sa_{11}+ta'_{11}, & sa_{12}+ta'_{12}, & sa_{13}+ta'_{13}, & sa_{14}+ta'_{14} \\ sa_{21}+ta'_{21}, & sa_{22}+ta'_{22}, & sa_{23}+ta'_{23}, & sa_{24}+ta'_{24} \\ sa_{31}+ta'_{31}, & sa_{32}+ta'_{32}, & sa_{33}+ta'_{33}, & sa_{34}+ta'_{34} \\ sa_{41}+ta'_{41}, & sa_{42}+ta'_{42}, & sa_{43}+ta'_{43}, & sa_{44}+ta'_{44} \end{vmatrix}$$

$$\Phi_u(s,t) = -\begin{vmatrix} sa_{11}+ta'_{11}, & sa_{12}+ta'_{12}, & sa_{13}+ta'_{13}, & sa_{14}+ta'_{14}, & u_1 \\ sa_{21}+ta'_{21}, & sa_{22}+ta'_{22}, & sa_{23}+ta'_{23}, & sa_{24}+ta'_{24}, & u_2 \\ sa_{31}+ta'_{31}, & sa_{32}+ta'_{32}, & sa_{33}+ta'_{33}, & sa_{34}+ta'_{34}, & u_3 \\ sa_{41}+ta'_{41}, & sa_{42}+ta'_{42}, & sa_{43}+ta'_{43}, & sa_{44}+ta'_{44}, & u_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & 0 \end{vmatrix}$$

und es sei nach den Elementen s, t entwickelt

$$\Delta(s,t) = As^4 + A_1s^3t + A_2s^2t^2 + A_3st^3 + A_4t^4$$
$$\Phi_u(s,t) = F_u \cdot s^3 + G_u \cdot s^2t + G'_u \cdot st^2 + F'_u \cdot t^3,$$

wo

$$A,\ A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4$$
$$F_u,\ G_u,\ G'_u,\ F'_u$$

die bekannten Grundinvarianten und zugehörigen Formen der quadratischen Formen f_x, f'_x bezeichnen. Sind dann

$$p_1, q_1; \; p_2, q_2; \; p_3, q_3; \; p_4, q_4$$

die vier Lösungen der Gleichung

$$\Delta(s, t) = 0,$$

so sind, weil die Determinante jeder der Formen

$$p_1 f_x + q_1 f'_x, \; p_2 f_x + q_2 f'_x, \; p_3 f_x + q_3 f'_x, \; p_4 f_x + q_4 f'_x$$

verschwindet, die quadratischen Formen von u_1, u_2, u_3, u_4:

$$\Phi_u(p_1, q_1), \; \Phi_u(p_2, q_2), \; \Phi_u(p_3, q_3), \; \Phi_u(p_4, q_4) \tag{3}$$

vollständige Quadrate und wenn demgemäss

$$\begin{aligned} \Phi_u(p_1, q_1) &= (\xi_1 u_1 + \xi_2 u_2 + \xi_3 u_3 + \xi_4 u_4)^2 \\ \Phi_u(p_2, q_2) &= (\eta_1 u_1 + \eta_2 u_2 + \eta_3 u_3 + \eta_4 u_4)^2 \\ \Phi_u(p_3, q_3) &= (\zeta_1 u_1 + \zeta_2 u_2 + \zeta_3 u_3 + \zeta_4 u_4)^2 \\ \Phi_u(p_4, q_4) &= (\vartheta_1 u_1 + \vartheta_2 u_2 + \vartheta_3 u_3 + \vartheta_4 u_4)^2 \end{aligned} \tag{4}$$

gesetzt wird, so sind

$$\begin{matrix} \xi_1, & \xi_2, & \xi_3, & \xi_4 \\ \eta_1, & \eta_2, & \eta_3, & \eta_4 \\ \zeta_1, & \zeta_2, & \zeta_3, & \zeta_4 \\ \vartheta_1, & \vartheta_2, & \vartheta_3, & \vartheta_4 \end{matrix}$$

die homogenen Coordinaten je eines der vier Eckpunkte des gemeinschaftlichen Poltetraëders der Flächen (1), (2).

Um die Verbindungslinien der Punkte ξ, η, ζ, ϑ durch Gleichungen darzustellen, sollen linear-homogene Ausdrücke von der Form

$$\begin{gathered} u_1 z_1 + u_2 z_2 + u_3 z_3 + u_4 z_4 \\ v_1 z_1 + v_2 z_2 + v_3 z_3 + v_4 z_4 \end{gathered}$$

in üblicher Weise durch u_z, v_z, . ., die (Plücker'schen) Coordinaten eines Strahles mit

$$s_{14}, s_{24}, s_{34}, s_{23}, s_{31}, s_{12}$$

und der Ausdruck

$$s_{14}(x_2 x'_3 - x_2 x'_3) + s_{24}(x_3 x'_1 - x_1 x'_3) + s_{34}(x_1 x'_2 - x_2 x'_1)$$
$$+ s_{23}(x_1 x'_4 - x_4 x'_1) + s_{31}(x_2 x'_4 - x_4 x'_2) + s_{12}(x_3 x'_4 - x_4 x'_3)$$

mit $(\overline{xx'}, s)$ bezeichnet werden; die Reihenfolge der Strahlencoordinaten ist so gewählt, dass, wenn der Strahl durch zwei Punkte y, z bestimmt gedacht wird, allgemein für jedes Zahlenpaar $\alpha\beta$

$$s_{\alpha\beta} = \varepsilon(y_\alpha z_\beta - y_\beta z_\alpha)$$

ist. Die Gleichungen der Verbindungslinien der Punkte ξ, η, ζ, ϑ oder der Kanten des gemeinschaftlichen Poltetraëders in Strahlencoordinaten lauten dann:

$$(5) \qquad \begin{matrix} (\overline{\eta\zeta}, s) = 0 & (\overline{\zeta\xi}, s) = 0 & (\overline{\xi\eta}, s) = 0 \\ (\overline{\xi\vartheta}, s) = 0 & (\overline{\eta\vartheta}, s) = 0 & (\overline{\zeta\vartheta}, s) = 0 \end{matrix}$$

und es handelt sich darum, das Product

$$P = (\overline{\eta\zeta}, s)(\overline{\zeta\xi}, s)(\overline{\xi\eta}, s)(\overline{\xi\vartheta}, s)(\overline{\eta\vartheta}, s)(\overline{\zeta\vartheta}, s)$$

in rationaler Gestalt darzustellen.

Da, über alle Zahlenpaare $\alpha\beta = 14, 24, 34, 23, 31, 12$ erstreckt,

$$u_\xi v_\eta - u_\eta v_\xi = \Sigma(u_\alpha v_\beta - u_\beta\, v_\alpha)(\xi_\alpha \eta_\beta - \xi_\beta\, \eta_\alpha)$$

ist, so lassen sich die Gleichungen (5) auch in der Form

$$\begin{matrix} u_\eta v_\zeta - u_\zeta v_\eta = 0 & u_\zeta v_\xi - u_\xi v_\zeta = 0 & u_\xi v_\eta - u_\eta v_\xi = 0 \\ u_\xi v_\vartheta - u_\vartheta v_\xi = 0 & u_\eta v_\vartheta - u_\vartheta v_\eta = 0 & u_\zeta v_\vartheta - u_\vartheta v_\zeta = 0 \end{matrix}$$

darstellen, wenn man sich den (laufenden) Strahl als Schnittlinie zweier Ebenen u, v denkt, d. h.

$$\begin{matrix} s_{14} = u_2 v_3 - u_3 v_2 & s_{24} = u_3 v_1 - u_1 v_3 & s_{34} = u_1 v_2 - u_2 v_1 \\ s_{23} = u_1 v_4 - u_4 v_1 & s_{31} = u_2 v_4 - u_4 v_2 & s_{12} = u_3 v_4 - u_4 v_3 \end{matrix}$$

setzt. Ein Product von der Form $(u_\xi v_\eta - u_\eta v_\xi)(u'_\xi v'_\eta - u'_\eta v'_\xi)$ lässt sich nun durch die Coëfficienten der Formen (3) ausdrücken. Es ist nämlich

$$(u_\xi v_\eta - u_\eta v_\xi)\,(u'_\xi v'_\eta - u'_\eta v'_\xi) = u_\xi u'_\xi v_\eta v'_\eta + u_\eta u'_\eta v_\xi v'_\xi - u_\xi v'_\xi u'_\eta v_\eta - u'_\xi v_\xi u_\eta v'_\eta$$

und wenn der in u_1, u_2, u_3, u_4 und v_1, v_2, v_3, v_4 symmetrische Ausdruck

$$\frac{1}{2}\left(v_1 \frac{\partial \Phi_u(s,t)}{\partial u_1} + v_2 \frac{\partial \Phi_u(s,t)}{\partial u_2} + v_3 \frac{\partial \Phi_u(s,t)}{\partial u_3} + v_4 \frac{\partial \Phi(s,t)}{\partial u_4}\right)$$

mit $\Phi_{uv}(s, t)$ bezeichnet wird, so ergibt sich durch Differentiation der Identitäten (4)

$$\begin{array}{ll}
u_\xi u'_\xi = \Phi_{uu'}(p_1, q_1) & \quad u_\eta u'_\eta = \Phi_{uu'}(p_2, q_2) \\
v_\xi v'_\xi = \Phi_{vv'}(p_1, q_1) & \quad v_\eta v'_\eta = \Phi_{vv'}(p_2, q_2) \\
u_\xi v'_\xi = \Phi_{uv'}(p_1, q_1) & \quad u_\eta v'_\eta = \Phi_{uv'}(p_2, q_2) \\
u'_\xi v_\xi = \Phi_{u'v}(p_1, q_1) & \quad u'_\eta v_\eta = \Phi_{u'v}(p_2, q_2),
\end{array}$$

woraus

$$\begin{aligned}
(u_\xi v_\eta - u_\eta v_\xi)(u'_\xi v'_\eta - u'_\eta v'_\xi) = {} & \Phi_{uu'}(p_1, q_1)\,\Phi_{vv'}(p_2, q_2) \\
& + \Phi_{vv'}(p_1, q_1)\,\Phi_{uu'}(p_2, q_2) - \Phi_{uv'}(p_1, q_1)\,\Phi_{u'v}(p_2, q_2) \\
& - \Phi_{u'v}(p_1, q_1)\,\Phi_{uv'}(p_2, q_2)
\end{aligned}$$

folgt. Entwickelt man diesen Ausdruck, so lautet derselbe

$$\begin{aligned}
(u_\xi v_\eta - u_\eta v_\xi)(u'_\xi v'_\eta - u'_\eta v'_\xi) = {} & 2p_1^3 p_2^3 (F_{uu'}F_{vv'} - F_{uv'}F_{u'v}) \\
& + p_1^2 p_2^2 (p_1 q_2 + p_2 q_1)(F_{uu'}G_{vv'} + F_{vv'}G_{uu'} - F_{uv'}G_{u'v} - F_{u'v}G_{uv'}) \\
& + p_1 p_2 (p_1^2 q_2^2 + p_2^2 q_1^2)(F_{uu'}G'_{vv'} + F_{vv'}G'_{uu'} - F_{uv'}G'_{u'v} - F_{u'v}G'_{uv'}) \\
& + (p_1^3 q_2^3 + p_2^3 q_1^3)(F_{uu'}F'_{vv'} + F_{vv'}F'_{uu'} - F_{uv'}F'_{u'v} - F_{u'v}F'_{uv'}) \\
& + 2p_1^2 p_2^2 q_1 q_2 (G_{uu'}G_{vv'} - G_{uv'}G_{u'v}) \\
& + p_1 p_2 q_1 q_2 (p_1 q_2 + p_2 q_1)(G_{uu'}G'_{vv'} + G_{vv'}G'_{uu'} - G_{uv'}G'_{u'v}\, G_{u'v}G'_{u'v}) \\
& + q_1 q_2 (p_1^2 q_2^2 + p_2^2 q_1^2)(G_{uu'}F'_{vv'} + G_{vv'}F'_{uu'} - G_{uv'}F'_{u'v} - G_{u'v}F'_{uv'}) \\
& + 2p_1 p_2 q_1^2 q_2^2 (G'_{uu'}G'_{vv'} - G'_{uv'}G'_{u'v}) \\
& + q_1^2 q_2^2 (p_1 q_2 + p_2 q_1)(G'_{uu'}F'_{vv'} + G'_{vv'}F'_{uu'} - G'_{uv'}F'_{u'v} - G'_{u'v}F'_{uv'}) \\
& + 2 q_1^3 q_2^3 (F'_{uu'}F'_{vv'} - F'_{uv'}F'_{u'v}).
\end{aligned}$$

Die hier auftretenden zehn Ausdrücke

$$F_{uu'}F_{vv'} - F_{uv'}F_{u'v}, \quad F_{uu'}G_{vv'} + F_{vv'}G_{uu'} - F_{uv'}G_{u'v} - F_{u'v}G_{uv'},$$

lassen sich alle in linear-homogener Weise auf sechs einfache invariante Gebilde II. Ordnung in Strahlencoordinaten zurückführen.

Es werde, über alle Zahlenpaare

$$\alpha\beta = 14,\ 24,\ 34,\ 23,\ 31,\ 12$$

und alle Zahlenpaare

$$\alpha'\beta' = 14,\ 24,\ 34,\ 23,\ 31,\ 12$$

erstreckt,

$$\Sigma(a_{\alpha\alpha'}a_{\beta\beta'} - a_{\alpha\beta'}a_{\beta\alpha'})s_{\alpha\beta}s_{\alpha'\beta'} = \varphi(s_{14}, s_{24}, s_{34}, s_{23}, s_{31}, s_{12}) = \varphi_s$$
$$\Sigma(a_{\alpha\alpha'}a'_{\beta\beta'} + a_{\beta\beta'}a'_{\alpha\alpha'} - a_{\alpha\beta'}a'_{\beta\alpha'} - a_{\beta\alpha'}a'_{\alpha\beta'})s_{\alpha\beta}s_{\alpha'\beta'} = \psi_s$$
$$\Sigma(a'_{\alpha\alpha'}a'_{\beta\beta'} - a'_{\alpha\beta'}a'_{\beta\alpha'})s_{\alpha\beta}s_{\alpha'\beta'} = \varphi'(s_{14}, s_{24}, s_{34}, s_{23}, s_{31}, s_{12}) = \varphi'_s$$

gesetzt und es sei

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi_s}{\partial s_{\alpha\beta}} = \varphi_{\alpha\beta} \quad \frac{1}{2}\frac{\partial\psi_s}{\partial s_{\alpha\beta}} = \psi_{\alpha\beta} \quad \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi'_s}{\partial s_{\alpha\beta}} = \varphi'_{\alpha\beta}.$$

Ferner sei

$$\Sigma(a_{\gamma\gamma'}a_{\delta\delta'} - a_{\gamma\delta'}a_{\delta\gamma'})\varphi'_{\alpha\beta}\varphi'_{\alpha'\beta'} = \varphi(\varphi'_{23}, \varphi'_{31}, \varphi'_{12}, \varphi'_{14}, \varphi'_{24}, \varphi'_{34}) = \omega_s$$
$$\Sigma(a'_{\gamma\gamma'}a'_{\delta\delta'} - a'_{\gamma\delta'}a'_{\delta\gamma'})\varphi_{\alpha\beta}\varphi_{\alpha'\beta'} = \varphi'(\varphi_{23}, \varphi_{31}, \varphi_{12}, \varphi_{14}, \varphi_{24}, \varphi_{34}) = \omega'_s$$
$$\Sigma(A_{\gamma\gamma'}A'_{\delta\delta'} - A_{\gamma\delta'}A'_{\delta\gamma'})s_{\alpha\beta}s_{\alpha'\beta'} = \chi_s$$
$$\frac{1}{2}\frac{\partial\omega_s}{\partial s_{\alpha\beta}} = \omega_{\alpha\beta} \quad \frac{1}{2}\frac{\partial\omega'_s}{\partial s_{\alpha\beta}} = \omega'_{\alpha\beta} \quad \frac{1}{2}\frac{\partial\chi_s}{\partial s_{\alpha\beta}} = \chi_{\alpha\beta};$$

die Summenzeichen beziehen sich auf alle Zahlenpaare $\alpha\beta$ und $\alpha'\beta'$, während $\gamma\delta$ und $\gamma'\delta'$ beziehungweise die Ergänzungspaare 23, 31, 12, 14, 24, 34 zu durchlaufen haben; $A_{\alpha\beta}$, $A'_{\alpha\beta}$ sind die den Elementen $a_{\alpha\beta}$, $a'_{\alpha\beta}$ zugehörigen Unterdeterminanten dritten Grades der Determinanten A, A_4, oder die Coëfficienten der Formen F_u, F'_u; die partiellen Ableitungen sind ohne Rücksicht auf die Gleichung

$$s_{14}s_{23} + s_{24}s_{31} + s_{34}s_{12} = 0$$

zu nehmen. Die erwähnten invarianten Gebilde sind dann

$$\varphi_s,\ \psi_s,\ \varphi'_s,\ \omega_s,\ \omega'_s,\ \chi_s.$$

Setzt man

$$\Sigma\varphi_{\alpha\beta}s'_{\alpha\beta} = \varphi_{ss'} \quad \Sigma\psi_{\alpha\beta}s'_{\alpha\beta} = \psi_{ss'} \quad \Sigma\varphi'_{\alpha\beta}s'_{\alpha\beta} = \varphi'_{ss'}$$
$$\Sigma\omega_{\alpha\beta}s'_{\alpha\beta} = \omega_{ss'} \quad \Sigma\omega'_{\alpha\beta}s'_{\alpha\beta} = \omega'_{ss'} \quad \Sigma\chi_{\alpha\beta}s'_{\alpha\beta} = \chi_{ss'},$$

so findet man, indem man der Rechnung die Formen

$$f_x = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2 \quad f'_x = [a'_1] x_1^2 + a'_2 x_2^2 + a'_3 x_3^2 + a'_4 x_4^2$$

zu Grunde legt und

$$(6) \qquad \begin{array}{ll} u_2 v_3 - u_3 v_2 = s_{14} & u_3 v_1 - u_1 v_3 = s_{24} \ldots \\ u'_2 v'_3 - u'_3 v'_2 = s'_{14} & u'_3 v'_1 - u'_1 v'_3 = s'_{24}. \end{array}$$

setzt:

$$F_{uu'} F_{vv'} - F_{uv'} F_{u'v} = A \varphi_{ss'}$$

$$G_{uu'} G_{vv'} - G_{uv'} G_{u'v} = A_1 \psi_{ss'} + \omega'_{ss'}$$

$$G'_{uu'} G'_{vv'} - G'_{uv'} G'_{u'v} = A_3 \psi_{ss'} + \omega_{ss'}$$

$$F'_{uu'} F'_{vv'} - F'_{uv'} F'_{u'v} = A_4 \varphi'_{ss'}$$

$$F_{uu'} G_{vv'} + F_{vv'} G_{uu'} - F_{uv'} G_{u'v} - F_{u'v} G_{uv'} = A_1 \varphi_{ss'} + A \psi_{ss'}$$

$$F_{uu'} G'_{vv'} + F_{vv'} G'_{uu'} - F_{uv'} G'_{u'v} - F_{u'v} G'_{uv'} = A_2 \varphi_{ss'} + A \varphi'_{ss'} - \omega'_{ss'}$$

$$F_{uu'} F'_{vv'} + F_{vv'} F'_{uu'} - F_{uv'} F'_{u'v} - F_{u'v} F'_{uv'} = \chi_{ss'}$$

$$G_{uu'} G'_{vv'} + G_{vv'} G'_{uu'} - G_{uv'} G'_{u'v} - G_{u'v} G'_{uv'} = A_3 \varphi_{ss'} + A_2 \psi_{ss'} + A_1 \varphi'_{ss'} - \chi_{ss'}$$

$$G_{uu'} F'_{vv'} + G_{vv'} F'_{uu'} - G_{uv'} F'_{u'v} - G_{u'v} F'_{uv'} = A_4 \varphi_{ss'} + A_2 \varphi'_{ss'} - \omega_{ss'}$$

$$G'_{uu'} F'_{vv'} + G'_{vv'} F'_{uu'} - G'_{uv'} F'_{u'v} - G'_{u'v} F'_{uv'} = A_4 \psi_{ss'} + A_3 \varphi'_{ss'}.$$

Hiernach wird also, da $(u_\xi v_\eta - u_\eta v_\xi)(u'_\xi v'_\eta - u'_\eta v'_\xi)$ durch die Substitution (6) in $(\overline{\xi\eta}, s)$ $(\overline{\xi\eta}, s')$ übergeht:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\overline{\eta\zeta}, s)(\overline{\eta\zeta}, s') = \mathfrak{a}_{23} \varphi_{ss'} + \mathfrak{b}_{23} \psi_{ss'} + \mathfrak{c}_{23} \varphi'_{ss'} + \mathfrak{d}_{23} \omega_{ss'} + \mathfrak{e}_{23} \omega'_{ss'} + \mathfrak{f}_{23} \chi_{ss'} \\ (\overline{\zeta\xi}, s)(\overline{\zeta\xi}, s') = \mathfrak{a}_{31} \varphi_{ss'} + \mathfrak{b}_{31} \psi_{ss'} + \mathfrak{c}_{31} \varphi'_{ss'} + \mathfrak{d}_{31} \omega_{ss'} + \mathfrak{e}_{31} \omega'_{ss'} + \mathfrak{f}_{31} \chi_{ss'} \\ (\overline{\xi\eta}, s)(\overline{\xi\eta}, s') = \mathfrak{a}_{12} \varphi_{ss'} + \mathfrak{b}_{12} \psi_{ss'} + \mathfrak{c}_{12} \varphi'_{ss'} + \mathfrak{d}_{12} \omega_{ss'} + \mathfrak{e}_{12} \omega'_{ss'} + \mathfrak{f}_{12} \chi_{ss'} \\ (\overline{\xi\vartheta}, s)(\overline{\xi\vartheta}, s') = \mathfrak{a}_{14} \varphi_{ss'} + \mathfrak{b}_{14} \psi_{ss'} + \mathfrak{c}_{14} \varphi'_{ss'} + \mathfrak{d}_{14} \omega_{ss'} + \mathfrak{e}_{14} \omega'_{ss'} + \mathfrak{f}_{14} \chi_{ss'} \\ (\overline{\eta\vartheta}, s)(\overline{\eta\vartheta}, s') = \mathfrak{a}_{24} \varphi_{ss'} + \mathfrak{b}_{24} \psi_{ss'} + \mathfrak{c}_{24} \varphi'_{ss'} + \mathfrak{d}_{24} \omega_{ss'} + \mathfrak{e}_{24} \omega'_{ss'} + \mathfrak{f}_{24} \chi_{ss'} \\ (\overline{\zeta\vartheta}, s)(\overline{\zeta\vartheta}, s') = \mathfrak{a}_{34} \varphi_{ss'} + \mathfrak{b}_{34} \psi_{ss'} + \mathfrak{c}_{34} \varphi'_{ss'} + \mathfrak{d}_{34} \omega_{ss'} + \mathfrak{e}_{34} \omega'_{ss'} + \mathfrak{f}_{34} \chi_{ss'}, \end{array} \right.$$

wo allgemein

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a}_{\alpha\beta} &= 2Ap_\alpha^3 p_\beta^3 + A_1 p_\alpha^2 p_\beta^2 (p_\alpha q_\beta + p_\beta q_\alpha) + A_2 p_\alpha p_\beta (p_\alpha^2 q_\beta^2 + p_\beta^2 q_\alpha^2) \\
&\quad + A_3 p_\alpha p_\beta q_\alpha q_\beta (p_\alpha q_\beta + p_\beta q_\alpha) + A_4 q_\alpha q_\beta (p_\alpha^2 q_\beta^2 + p_\beta^2 q_\alpha^2) \\
\mathfrak{b}_{\alpha\beta} &= Ap_\alpha^2 p_\beta^2 (p_\alpha q_\beta + p_\beta q_\alpha) + 2A_1 p_\alpha^2 p_\beta^2 q_\alpha q_\beta + A_2 p_\alpha p_\beta q_\alpha q_\beta (p_\alpha q_\beta + p_\beta q_\alpha) \\
&\quad + 2A_3 p_\alpha p_\beta q_\alpha^2 q_\beta^2 + A_4 q_\alpha^2 q_\beta^2 (p_\alpha q_\beta + p_\beta q_\alpha) \\
\mathfrak{c}_{\alpha\beta} &= Ap_\alpha p_\beta (p_\alpha^2 q_\beta^2 + p_\beta^2 q_\alpha^2) + A_1 p_\alpha p_\beta q_\alpha q_\beta (p_\alpha q_\beta + p_\beta q_\alpha) \\
&\quad + A_2 q_\alpha q_\beta (p_\alpha^2 q_\beta^2 + p_\beta^2 q_\alpha^2) + A_3 q_\alpha^2 q_\beta^2 (p_\alpha q_\beta + p_\beta q_\alpha) + 2A_4 q_\alpha^3 q_\beta^3 \\
\mathfrak{d}_{\alpha\beta} &= 2p_\alpha p_\beta q_\alpha^2 q_\beta^2 - q_\alpha q_\beta (p_\alpha^2 q_\beta^2 + p_\beta^2 q_\alpha^2) \\
\mathfrak{e}_{\alpha\beta} &= 2p_\alpha^2 p_\beta^2 q_\alpha q_\beta - p_\alpha p_\beta (p_\alpha^2 q_\beta^2 + p_\beta^2 q_\alpha^2) \\
\mathfrak{f}_{\alpha\beta} &= p_\alpha^3 q_\beta^3 + p_\beta^3 q_\alpha^3 - p_\alpha p_\beta q_\alpha q_\beta (p_\alpha q_\beta + p_\beta q_\alpha).
\end{aligned}$$

Fasst man daher die sechs Ausdrücke (7) als lineare Formen von

$$s'_{14},\ s'_{24},\ s'_{34},\ s'_{23},\ s'_{31},\ s'_{12}$$

auf und bildet ihre Determinante, so ist dieselbe einerseits $= LP$ und anderseits $= MS$, wenn mit L, M, S die drei Determinanten

$$L = \begin{vmatrix}
\eta_2\zeta_3 - \eta_3\zeta_2, & \eta_3\zeta_1 - \eta_1\zeta_3, & \eta_1\zeta_2 - \eta_2\zeta_1, & \eta_1\zeta_4 - \eta_4\zeta_1, & \eta_2\zeta_4 - \eta_4\zeta_2, & \eta_3\zeta_4 - \eta_4\zeta_3 \\
\zeta_2\xi_3 - \zeta_3\xi_2, \\
\xi_2\eta_3 - \xi_3\eta_2, \\
\xi_2\vartheta_3 - \xi_3\vartheta_2, \\
\eta_2\vartheta_3 - \eta_3\vartheta_2, \\
\zeta_2\vartheta_3 - \zeta_3\vartheta_2,
\end{vmatrix}$$

$$M = \begin{vmatrix}
\mathfrak{a}_{23}, & \mathfrak{b}_{23}, & \mathfrak{c}_{23}, & \mathfrak{d}_{23}, & \mathfrak{e}_{23}, & \mathfrak{f}_{23} \\
\mathfrak{a}_{31}, & \mathfrak{b}_{31}, & \mathfrak{c}_{31}, & \mathfrak{d}_{31}, & \mathfrak{e}_{31}, & \mathfrak{f}_{31} \\
\mathfrak{a}_{12}, & \mathfrak{b}_{12}, & \mathfrak{c}_{12}, & \mathfrak{d}_{12}, & \mathfrak{e}_{12}, & \mathfrak{f}_{12} \\
\mathfrak{a}_{14}, & \mathfrak{b}_{14}, & \mathfrak{c}_{14}, & \mathfrak{d}_{14}, & \mathfrak{e}_{14}, & \mathfrak{f}_{14} \\
\mathfrak{a}_{24}, & \mathfrak{b}_{24}, & \mathfrak{c}_{24}, & \mathfrak{d}_{24}, & \mathfrak{e}_{24}, & \mathfrak{f}_{24} \\
\mathfrak{a}_{34}, & \mathfrak{b}_{34}, & \mathfrak{c}_{34}, & \mathfrak{d}_{34}, & \mathfrak{e}_{34}, & \mathfrak{f}_{34}
\end{vmatrix}$$

$$S = \begin{vmatrix} \varphi_{14}, & \varphi_{24}, & \varphi_{34}, & \varphi_{23}, & \varphi_{31}, & \varphi_{12} \\ \psi_{14}, & \psi_{24}, & \psi_{34}, & \psi_{23}, & \psi_{31}, & \psi_{12} \\ \varphi'_{14}, & \varphi'_{24}, & \varphi'_{34}, & \varphi'_{23}, & \varphi'_{31}, & \varphi'_{12} \\ \omega_{14}, & \omega_{24}, & \omega_{34}, & \omega_{23}, & \omega_{31}, & \omega_{12} \\ \omega'_{14}, & \omega'_{24}, & \omega'_{34}, & \omega'_{23}, & \omega'_{31}, & \omega'_{12} \\ \chi_{14}, & \chi_{24}, & \chi_{34}, & \chi_{23}, & \chi_{31}, & \chi_{12} \end{vmatrix}$$

bezeichnet werden. Da überdies nach bekannten Determinantenformeln

$$L = \begin{vmatrix} \xi_1, & \xi_2, & \xi_3, & \xi_4 \\ \eta_1, & \eta_2, & \eta_3, & \eta_4 \\ \zeta_1, & \zeta_2, & \zeta_3, & \zeta_4 \\ \vartheta_1, & \vartheta_2, & \vartheta_3, & \vartheta_4 \end{vmatrix}^3$$

und sonach nicht $= 0$ ist, so schliesst man aus der Identität

$$LP = MS,$$

dass

$$S = 0$$

die Gleichung der sechs Kanten des gemeinschaftlichen Poltetraëders der Flächen (1), (2) in Strahlencoordinaten ist.