Über die Isogyrenfläche der doppeltbrechenden Krystalle.

(Mit 1 Tafel.)

Von **Hans Pitsch,**

Assistent an der k. k. technischen Hochschule in Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 12. Februar 1885.)

Trotzdem die Erscheinungen, welche Krystallplättchen im convergenten, polarisirten Lichte zeigen, je nach der Orientirung des Plättchens in Bezug auf die Elasticitätsachsen des Krystalls eine ausserordentliche Mannigfaltigkeit darbieten, lassen sie sich doch unter sehr allgemeine Gesichtspunkte zusammenfassen.

So construirte Bertin[1] eine Fläche, deren Durchschnitt mit einer zur Oberfläche des Krystalls parallelen Ebene die sogenannten isochromatischen Curven liefert, also jene Linien, welche Punkte gleichen Gangunterschiedes der beiden austretenden Strahlen verbinden. Diese Fläche bildet somit das Bindeglied für alle jene Fälle, die vorher einzeln behandelt werden mussten.

Einen ebenso wichtigen Schritt für die Theorie dieser Erscheinungen wie Bertin that Lommel[2] durch die Aufstellung der sogenannten Isogyrenfläche, deren Schnitt mit einer zur Krystalloberfläche parallelen Ebene, welche in ihrer Lage allerdings noch einer beschränkenden Bedingung unterliegt, die Linien gleicher Schwingungsrichtung der austretenden Strahlen liefert, also jene Linien, welche sich als sogenannte achromatische Curven dem Auge darbieten. Lommel unterzog die von ihm aufgestellte, allgemeine Gleichung der Fläche keiner weiteren Discussion, sondern verwendete sie unmittelbar zur

[1] Compt. rend. 52, 1861.

[2] Wied. Ann. 18, 1883.

Ermittlung der Isogyren für die praktisch besonders wichtigen Fälle von Krystallplättchen, welche entweder senkrecht zu einer der Elasticitätsachsen oder senkrecht zu einer der optischen Achsen geschnitten sind.

Der Zweck der vorliegenden Arbeit ist es, die Isogyrenfläche selbst einer Discussion zn unterwerfen, eine Construction für sie und ihre ebenen Schnitte anzugeben und auf einige sonstige physikalische und mathematische Eigenthümlichkeiten, die sie im reichen Masse bietet, hinzuweisen.

Lommel gelangt zur Gleichung der Isogyrenfläche, indem er zwei Ebenen, deren jede parallel zu einer der optischen Achsen liegt, annimmt, die Schnittlinie derselben als Normale einer im Krystall sich fortpflanzenden Wellenebene ansieht und die zugehörigen Schwingungsebenen bestimmt, von deren Schnitten mit einer zur Krystalloberfläche parallelen Ebene einer parallel mit der in dieser Ebene angenommenen Schwingungsrichtung von den Richtungscosinussen ξ, η, ζ sein soll.

Diese Richtungscosinusse müssen also, wenn man sie an die Stelle der Coordinaten in die Gleichung einer der Schwingungsebenen einführt, dieselbe erfüllen. Eliminirt man aus der so gewonnenen Gleichung und den Gleichungen der beiden ursprünglich angenommenen Ebenen alle auf die specielle Lage dieser letzteren bezüglichen Grössen, so gelangt man nach einigen Reductionen zu der Gleichung der Isogyrenfläche:

$$\frac{(b^2-c^2)x}{\zeta y-\eta z}+\frac{(c^2-a^2)y}{\xi z-\zeta x}+\frac{(a^2-b^2)z}{\eta x-\xi y}=0 \qquad K)$$

in welcher allerdings die Grössen ξ, η, ζ nicht völlig von einander unabhängig sind, sondern der Gleichung:

$$\alpha\xi+\beta\eta+\gamma\zeta=0$$

genügen müssen, da die angenommene Schwingungsrichtung der Krystalloberfläche mit den Richtungscosinussen α, β, γ parallel sein muss. a, b, c sind die üblichen Bezeichnungen für die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten in der Richtung der Normale von Wellenebenen, deren Schwingungsrichtung im Krystall beziehungsweise mit einer der Elasticitätsachsen desselben parallel ist.

In etwas einfacherer Weise gelangt man zur Gleichung dieser Fläche durch folgende Überlegung, die zugleich eine neue, nicht sofort in die Augen springende, physikalische Eigenschaft derselben aufdeckt, von welcher im Folgenden noch manche Anwendung gemacht werden soll.

Die Schwingungsebenen, deren Schnitte mit einer gegebenen Ebene eine vorgeschriebene Richtung haben sollen, müssen parallel zu dieser Richtung liegen; die Perpendikel aller Ebenen, welche diese Bedingung erfüllen, stehen daher senkrecht zu der gegebenen Richtung. Da nun Perpendikel auf Schwingungsebenen Schwingungsrichtungen repräsentiren, so kann man die Isogyrenfläche auch als den geometrischen Ort aller Wellennormalen definiren, für welche wenigstens eine der zugehörigen Schwingungsrichtungen senkrecht zu der gegebenen Richtung steht.

Bezeichnet man mit u, v, w die Richtungscosinusse einer Wellennormale, mit h_1, k_1, l_1; h_2, k_2, l_2 die Richtungscosinusse der zugehörigen Schwingungsrichtungen, so bestehen bekanntlich die Gleichungen:[1]

$$h_1 h_2 : k_1 k_2 : l_1 l_2 = b^2 - c^2 : c^2 - a^2 : a^2 - b^2 \tag{1}$$

$$h_1 u + k_1 v + l_1 w = 0 \tag{2}$$

$$h_2 u + k_2 v + l_2 w = 0. \tag{3}$$

Sind nun ξ, η, ζ die Richtungscosinusse der gegebenen Richtung, so besteht noch nach der Definition der Isogyrenfläche die Gleichung:

$$h_2 \xi + k_2 \eta + l_2 \zeta = 0 \tag{4}$$

Mit Rücksicht auf die Gleichung 1) geht 2) über in:

$$(b^2 - c^2)\frac{u}{h_2} + (c^2 - a^2)\frac{v}{k_2} + (a^2 - b^2)\frac{w}{l_2} = 0 \tag{5}$$

Aus 3) und 4) folgt, dass die Grössen h_2, k_2, l_2 beziehungsweise proportional den Grössen:

$$\zeta v - \eta w, \quad \xi w - \zeta u, \quad \eta u - \xi v,$$

---

[1] V. v. Lang, Einl. i. d. theor. Phys., p. 340.

sind, so dass man die Gleichung 5) in der Form:

$$\frac{(b^2-c^2)u}{\zeta v-\eta w}+\frac{(c^2-a^2)v}{\xi w-\zeta u}+\frac{(a^2-b^2)w}{\eta u-\xi v}=0 \tag{6}$$

schreiben kann, aus welcher die Gleichung der Isogyrenfläche folgt, wenn man die Richtungscosinusse u, v, w durch die ihnen proportionalen Coordinaten ersetzt.

Die Isogyrenfläche ist also, wie die Gleichung lehrt, im Allgemeinen eine Kegelfläche dritter Ordnung.

Interessant ist die Thatsache, dass die Schwingungsebenen, deren zugehörige Schwingungsrichtungen senkrecht zu einer gegebenen Richtung stehen, deren Wellennormalen also die Isogyrenfläche bilden, einen Kegel zweiter Ordnung berühren, dessen Gleichung in Ebenencoordinaten man leicht in folgender Weise erhält.

Die zu der Schwingungsrichtung h_2, k_2, l_2 gehörige Schwingungsebene besitzt die Richtungscosinusse h_1, k_1, l_1, die aber mit U, V, W bezeichnet werden sollen, um sie als Richtungscosinusse einer Ebene zu kennzeichnen. Der Abkürzung wegen setzen wir:

$$b^2-c^2=A, \quad c^2-a^2=B, \quad a^2-b^2=C,$$

wo dann zwischen den so bezeichneten Grössen die identische Relation:

$$A+B+C=0 \tag{7}$$

besteht. Gemäss der Gleichung 1) sind die Grössen h_2, k_2, l_2, welche nach der gemachten Voraussetzung der Gleichung 4) genügen, beziehungsweise proportional zu:

$$\frac{A}{U}, \quad \frac{B}{V}, \quad \frac{C}{W},$$

so dass mit Rücksicht darauf Gleichung 4) sofort die verlangte Kegelgleichung:

$$\frac{A}{U}\xi+\frac{B}{V}\eta+\frac{C}{W}\zeta=0 \tag{8}$$

liefert. Wir wollen nun die Gestalt dieses Kegels, der sich für die Construction der Isogyrenfläche von der grössten Wichtigkeit erweist, etwas eingehender discutiren.

Schreibt man die Gleichung in der Form:

$$A\xi . VW + B\eta . UW + C\zeta . UV = 0 \qquad 9)$$

so ist ersichtlich, dass die drei Coordinatenebenen, also jene Ebenen, welche durch je zwei der Elasticitätsachsen gehen, Tangentenebenen des betreffenden Kegels sind, und dass ihn auch die Ebene $U = \xi$, $V = \eta$, $W = \zeta$ berührt. Geht man in der bekannten Weise[1] zur Gleichung in Punktcoordinaten über, so findet man sie in der Form:

$$A^2\xi^2x^2 + B^2\eta^2y^2 + C^2\zeta^2z^2 - 2\,AB\,\xi\eta\,xy - 2\,AC\,\xi\zeta\,xz - 2\,BC\eta\zeta\,yz = 0$$

oder kürzer:

$$\sqrt{A\xi x} + \sqrt{B\eta y} + \sqrt{C\zeta z} = 0. \qquad 10)$$

Eine Kegelfläche ist genügend charakterisirt, wenn man ausser der Lage der Spitze einen ebenen Schnitt völlig kennt. Als schneidende Ebene eignet sich im vorliegenden Fall besonders jene, welche man in irgend einem beliebigen Abstand p von der Spitze senkrecht zur Linie $\frac{x}{\xi} = \frac{y}{\eta} = \frac{z}{\zeta}$ legen kann, deren Gleichung also:

$$\xi x + \eta y + \zeta z = p \text{ ist.} \qquad 11)$$

Diese Ebene liegt parallel zu einer Tangentenebene des Kegels, ihr Schnitt mit demselben ist daher eine Parabel.

Zur Untersuchung desselben bedient man sich mit grossem Vortheil trimetrischer Coordinaten. Als Fundamentallinien des Systems wählt man die Schnitte der Ebene mit den drei Coordinatenebenen, welche Linien wir respective mit 1, 2, 3 bezeichnen, je nachdem sie die x-, y- oder z-Achse nicht treffen.

Fasst man irgend einen Punkt der Ebene $A_1\,A_2\,A_3$ (siehe Fig. 1) ins Auge, so erkennt man leicht, dass sich die neuen Coordinaten x_1, x_2, x_3, nämlich die senkrechten Abstände des Punktes von den respectiven Seiten des Fundamentaldreieckes in folgender Weise mit den ursprünglichen in Verbindung bringen lassen:

$$x = \sqrt{\eta^2 + \zeta^2} . x_1, \;\; y = \sqrt{\xi^2 + \zeta^2} . x_2, \;\; z = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} . x_3. \qquad 12)$$

---

[1] Vergl. Hesse, Anal. G. d. R. p. 135.

In diesen Gleichungen drücken die Wurzelgrössen die Sinusse der Neigungswinkel der Ebene mit den betreffenden Coordinatenebenen aus. Die Grössen x_1, x_2, x_3 sind aber nicht unabhängig von einander, sondern durch die Relation:

$$s_1 x_1 + s_2 x_2 + s_3 x_3 = 2\Delta \tag{13}$$

verbunden, in welcher s_1, s_2, s_3 die Seitenlängen des Fundamentaldreieckes, Δ den Flächeninhalt desselben bezeichnen.

Aus den Strecken:

$$OA_1 = \frac{p}{\xi}, \quad OA_2 = \frac{p}{\eta}, \quad OA_3 = \frac{p}{\zeta}$$

berechnen sich nach dem pythagoräischen Lehrsatz die Seiten des Fundamentaldreieckes:

$$s_1 = \frac{p}{\eta\zeta}\sqrt{\eta^2+\zeta^2}, \quad s_2 = \frac{p}{\xi\zeta}\sqrt{\xi^2+\zeta^2}, \quad s_3 = \frac{p}{\xi\eta}\sqrt{\xi^2+\eta^2} \tag{14}$$

und die Dreiecksfläche:

$$2\Delta = \frac{p^2}{\xi\eta\zeta}. \tag{15}$$

Für die Winkel des Dreieckes ergeben sich durch Anwendung bekannter Sätze die Gleichungssysteme:

$$\left.\begin{array}{lll}
\cos A_1 = \dfrac{p^2}{\xi^2 s_2 s_3} & \sin A_1 = \dfrac{p^2}{\xi\eta\zeta\, s_2 s_3} & \operatorname{tg} A_1 = \dfrac{\xi}{\eta\zeta} \\
\cos A_2 = \dfrac{p^2}{\eta^2 s_1 s_3} & \sin A_2 = \dfrac{p^2}{\xi\eta\zeta\, s_1 s_3} & \operatorname{tg} A_2 = \dfrac{\eta}{\xi\zeta} \\
\cos A_3 = \dfrac{p^2}{\zeta^2 s_1 s_2} & \sin A_3 = \dfrac{p^2}{\xi\eta\zeta\, s_1 s_2} & \operatorname{tg} A_3 = \dfrac{\zeta}{\xi\eta}
\end{array}\right\} \tag{16}$$

Die Parabelgleichung 10) lautet also, bezogen auf das neue Coordinatensystem:

$$\sqrt{A s_1 x_1} + \sqrt{B s_2 x_2} + \sqrt{C s_3 x_3} = 0. \tag{17}$$

Ist aber die Gleichung der Parabel in dieser Form gegeben, dann entspricht nach Salmon [1] ihrer Leitlinie die Gleichung:

[1] Salmon, Anal. Geom. d. Kegelschn. 1873, p. 506.

$$\frac{A s_1}{\operatorname{tg} A_1} x_1 + \frac{B s_2}{\operatorname{tg} A_2} x_2 + \frac{C s_3}{\operatorname{tg} A_3} x_3 = 0$$

oder mit Rücksicht auf das letzte System der Gleichungen 16):

$$A s_1 \frac{\eta\zeta}{\xi} x_1 + B s_2 \,.\, \frac{\xi\zeta}{\eta} x_2 + C s_3 \,.\, \frac{\xi\eta}{\zeta} x_3 = 0. \tag{18}$$

Die Coordinaten des Punktes D, in welchem das vom Ursprung des zuerst benützten Coordinatensystems auf die Ebene gefällte Perpendikel diese trifft, sind:

$$x = p \,.\, \xi, \quad y = p \,.\, \eta, \quad z = p \,.\, \zeta$$

die trimetrischen Coordinaten desselben also beziehungsweise proportional zu:

$$\frac{\xi}{s_1 \eta \zeta}, \quad \frac{\eta}{s_2 \xi\zeta}, \quad \frac{\zeta}{s_3 \xi\eta},$$

welche der Gleichung 18) genügen. Der Punkt D, der Höhenpunkt des Fundamentaldreieckes, liegt also in der Leitlinie, übrigens eine nothwendige Folge des Satzes, dass der Höhendurchschnitt eines Tangentendreieckes einer Parabel immer ein Punkt der Leitlinie ist.

Die ursprünglichen Coordinaten jener Punkte R und S, in welchen die von O ausgehenden optischen Achsen, welche mit der z-Achse die Winkel $\pm\delta$ einschliessen und beide der Isogyrenfläche angehören, die in ihrer Ebene liegende Fundamentallinie treffen, sind:

$$x = \frac{p \sin\delta}{\xi \sin\delta \pm \zeta \cos\delta}, \quad y = 0, \quad z = \frac{p \cos\delta}{\zeta \cos\delta \pm \xi \sin\delta},$$

wobei bekanntlich:

$$\sin^2\delta = -\frac{C}{B}, \quad \cos^2\delta = -\frac{A}{B}.$$

Der auf derselben Fundamentallinie liegende Halbirungspunkt T von R und S hat demnach die Coordinaten:

$$x' = -\frac{p\,\xi \sin^2\delta}{\zeta^2 \cos^2\delta - \xi^2 \sin^2\delta} = -k \,.\, C\xi$$

$$y' = 0$$

$$z' = \frac{p\,\zeta \cos^2\delta}{\zeta^2 \cos^2\delta - \xi^2 \sin^2\delta} = k \,.\, A \,.\, \zeta.$$

Die trimetrischen Coordinaten dieses Punktes T' sind daher den Grössen:

$$-\frac{C\xi}{\zeta\eta s_1},\quad 0,\quad \frac{A\zeta}{\xi\eta s_3}$$

proportional, woraus man ersieht, dass auch der Punkt T' in der Leitlinie der Parabel liegt. Die Leitlinie kann also in der einfachsten Weise construirt werden, und es fehlt nur noch die Kenntniss der Lage des Brennpunktes, um beliebige Punkte der Parabel angeben zu können.

Zu dieser Kenntniss verhilft der Satz, dass die beiden Brennpunkte eines Kegelschnittes, der einem Dreieck eingeschrieben ist, in Bezug auf dieses Dreieck sogenannte inverse Punkte sind,[1] bei welchen die Coordinaten des einen durch die reciproken des anderen ausgedrückt werden. Auch constructiv lässt sich, sobald der eine Punkt gegeben ist, mit Leichtigkeit der andere finden, denn es schliessen die von beiden Punkten P und P' nach den Ecken des Fundamentaldreieckes gehenden Geraden, z. B. PA_1, $P'A_1$, mit den anstossenden Seiten, also A_1A_2 und A_1A_3, gleiche Winkel ein.

Im vorliegenden Falle liegt der eine der Brennpunkte in unendlicher Entfernung in der Richtung der Parabelachse. Die Verbindungslinien desselben mit den Ecken des Fundamentaldreieckes werden daher unter einander und mit der Parabelachse parallel, also senkrecht zur bekannten Leitlinie sein. Construirt man die ihnen entsprechenden Linien, so schneiden sie sich in einem Punkte, dem gesuchten Brennpunkt. Derselbe muss auch, einem sehr bekannten Satze zufolge, im Umkreis des Tangentendreieckes liegen; man braucht also nur eine einzige der inversen Linien zu ziehen, wenn dieser Kreis bereits construirt wurde. Die Construction zeigt Fig. 2.

Der Brennpunkt im Unendlichen ist der Pol der unendlich entfernten Geraden und seine Coordinaten lassen sich von diesem Gesichtspunkte aus leicht angeben.

Nach Salmon[2] sind die Coordinaten des Poles einer Geraden:

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0$$

---

[1] Salmon, Anal. Geom. d. höh. eb. Curv. 1873, pag. 316.
[2] Salmon, A. G. d. K. p. 397.

in Bezug auf einen Kegelschnitt:

$$\sqrt{b_1 x_1} + \sqrt{b_2 x_2} + \sqrt{b_3 x_3} = 0$$

proportional den Grössen:

$$a_2 b_3 + a_3 b_2, \ a_3 b_1 + a_1 b_3, \ a_1 b_2 + a_2 b_1$$

Die Coordinaten des Poles der unendlich entfernten Geraden:

$$s_1 x_1 + s_2 x_2 + s_3 x_3 = 0$$

in Bezug auf den Kegelschnitt 17) ergeben sich mithin proportional zu:

$$s_2 s_3 (B+C), \ s_1 s_3 (A+C), \ s_1 s_2 (A+B)$$

oder mit Rücksicht auf die Identität 7) proportional zu:

$$\frac{A}{s_1}, \ \frac{B}{s_2}, \ \frac{C}{s_3}.$$

Die Coordinaten des endlichen Brennpunktes sind also den Grössen:

$$\frac{s_1}{A}, \ \frac{s_2}{B}, \ \frac{s_3}{C} \qquad 19)$$

proportional.

Mit Hilfe des so construirten Kegels ergibt sich eine einfache Construction für die Isogyrenfläche.

Legt man eine beliebige Tangentenebene an den Kegel und schneidet sie durch eine Ebene, welche man senkrecht zu ihr durch die Linie *OD* legt, so ist der Schnitt eine Erzeugende der Isogyrenfläche.

Aus 8) folgt nämlich, dass die eine der beiden zu derselben Wellennormale gehörigen Schwingungsebenen die Linie *OD* mit der Gleichung:

$$\frac{x}{\xi} = \frac{y}{\eta} = \frac{z}{\zeta}$$

enthält, wenn die andere den betreffenden Kegel berührt. Nach Gleichung 1) sind die Richtungscosinusse der einen Schwingungsebene proportional zu:

$$\frac{A}{U}, \ \frac{B}{V}, \ \frac{C}{W}.$$

und Gleichung 8) drückt mithin aus, dass die Summe der Producte dieser Richtungscosinusse und der entsprechenden ξ, η, ζ Null ist. Beide Schwingungsebenen stehen aber bekanntlich auf einander senkrecht, und ihr Schnitt ist die betreffende Wellennormale, die unter den gemachten Voraussetzungen auf der Isogyrenfläche liegt.

Eine zur Linie $\frac{x}{\xi} = \frac{y}{\eta} = \frac{z}{\zeta}$ senkrechter ebener Schnitt der Isogyrenfläche kann nach diesem Ergebnisse wie folgt construirt werden. Man construirt in der früher angegebenen Weise den Parabelschnitt dieser Ebene mit dem Kegel zweiter Ordnung, zieht eine beliebige Tangente an diese Curve und fällt vom Höhenpunkte des Fundamentaldreieckes ein Perpendickel darauf. Der Durchschnitt beider ist ein Punkt des ebenen Schnittes der Isogyrenfläche.

Eine durch den Doppelpunkt gehende Gerade schneidet diese Curve dritter Ordnung nur noch in einem Punkt, für welchen sich im Anschluss an die letzten Erörterungen eine bequeme Construction ergibt. Der Fusspunkt des Perpendikels, welches man vom Brennpunkt einer Parabel auf eine ihrer Tangenten fällen kann, liegt immer in der Scheiteltangente derselben. Da der gesuchte, in der gegebenen Geraden liegende Curvenpunkt der Fusspunkt des Perpendikels ist, welches man vom Doppelpunkt der Curve auf die entsprechende Parabeltangente fällt, so muss das Brennpunktsperpendikel der letzteren mit dieser Geraden parallel laufen. Um also den, in einer durch den Doppelpunkt gehenden Geraden liegenden Curvenpunkt zu construiren, ziehe man eine Parallele zu ihr durch den Brennpunkt und errichte im Schnittpunkt derselben mit der Scheiteltangente eine Senkrechte. Der Schnitt derselben mit der gegebenen Geraden ist der verlangte Curvenpunkt.

Der Berührungspunkt einer Parabeltangente wird bekanntlich erhalten, indem man das zwischen Hauptachse und Scheiteltangente liegende Stück derselben vom Schnitt der letzteren aus in der Tangente aufträgt. Der Halbkreis, welcher durch den Doppelpunkt der Curve dritter Ordnung, durch den Berührungspunkt einer Parabeltangente und den in dieser liegenden Curvenpunkt hindurchgeht, berührt die Curve dritter Ordnung im letztgenannten Punkte. Die Richtigkeit der hieraus folgenden, bemerkenswerth einfachen Tangentenconstruction folgt unmittelbar aus Fig. 3.

Ist A der Punkt der Curve dritter Ordnung, welche in der Parabeltangente AB mit dem Berührungspunkt in B liegt, A' ein benachbarter Curvenpunkt in der Parabeltangente $A'B'$ mit dem Berührungspunkte in B', so geht die Sehne AA' in die Curventangente in A über, wenn die Punkte A und A' und in Folge dessen auch B und B' zusammenfallen. Unter dieser Voraussetzung geht aber auch die Linie AA' in die Kreistangente über.

Aus der analytischen Untersuchung des behandelten ebenen Schnittes der Isogyrenfläche, der ihre Gestalt hinlänglich characterisirt, ergibt sich eine für manche Fälle noch bequemere Construction desselben.

Zur Untersuchung der genannten Curve dritter Ordnung eignen sich wieder besonders trimetrische Coordinaten, für welche sich aber diesmal andere Fundamentallinien empfehlen. Zieht man in dem Dreiecke, welches die Durchschnitte der Elasticitätsachsen auf der Ebene bilden, die Höhen und verbindet die Schnittpunkte derselben mit den Seiten unter einander, so sollen die Seiten des so entstehenden Dreieckes I II III (siehe Fig. 1) die neuen Fundamentallinien sein, und die neuen Coordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3 proportional zu den senkrechten Abständen des betreffenden Punktes von diesen Linien genommen werden.

Die Gleichungen der Verbindungslinien der Eckpunkte des neuen Fundamentaldreieckes mit dem ursprünglichen Coordinatenanfang 0, welche Linien auf den entsprechenden Trassen der Ebene $A_1\,A_2\,A_3$ senkrecht stehen, sind:

$$0\,\mathrm{III} \qquad z = 0, \quad \frac{x}{\xi} - \frac{y}{\eta} = 0$$

$$0\,\mathrm{II} \qquad y = 0, \quad \frac{z}{\zeta} - \frac{x}{\xi} = 0$$

$$0\,\mathrm{I} \qquad x = 0, \quad \frac{y}{\eta} - \frac{z}{\xi} = 0$$

und in Folge dessen die Gleichungen der Ebenen:

$$0\ \mathrm{II}\ \mathrm{III} \qquad -\frac{x}{\xi}+\frac{y}{\eta}+\frac{z}{\zeta}=0$$

$$0\ \mathrm{I}\ \mathrm{III} \qquad \frac{x}{\xi}-\frac{y}{\eta}+\frac{z}{\zeta}=0$$

$$0\ \mathrm{I}\ \mathrm{II} \qquad \frac{x}{\xi}+\frac{y}{\eta}-\frac{z}{\zeta}=0.$$

Um dieselben auf die Normalform zu bringen, hat man sie mit dem Factor:

$$\varkappa=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\xi^2}+\frac{1}{\eta^2}+\frac{1}{\xi^2}}}$$

zu multipliciren.

Alle drei Ebenen sind gegen die Ebene 11) gleich geneigt, und zwar ist $\varkappa$ der Cosinus des Neigungswinkels. Die senkrechten Abstände δ_1, δ_2, δ_3 irgend eines Punktes von diesen Ebenen findet man durch Substitution seiner Coordinaten in die Normalform der betreffenden Gleichung, also z. B.:

$$\delta_1=\varkappa\left(-\frac{x}{\xi}+\frac{y}{\eta}+\frac{z}{\zeta}\right).$$

Für alle Punkte der Ebene I II III bestehen die Relationen:

$$\delta_1=\xi_1\cos\varepsilon=\varkappa.\xi_1 \quad \delta_2=\varkappa.\xi_2,\ \delta_3=\varkappa.\xi_3.$$

Die Transformationsgleichungen der Coordinaten sind daher:

$$\left.\begin{aligned}\xi_1&=-\frac{x}{\xi}+\frac{y}{\eta}+\frac{z}{\zeta}\\ \xi_2&=\frac{x}{\xi}-\frac{y}{\eta}+\frac{z}{\zeta}\\ \xi_3&=\frac{x}{\xi}+\frac{y}{\eta}-\frac{z}{\zeta}\end{aligned}\right\} \qquad 20\,a)$$

und deren Auflösungen:

$$\frac{x}{\xi}=\frac{1}{2}(\xi_2+\xi_3),\ \frac{y}{\eta}=\frac{1}{2}(\xi_1+\xi_3),\ \frac{z}{\zeta}=\frac{1}{2}(\xi_1+\xi_2). \quad 20\,b)$$

Zwischen den neuen Coordinaten muss in Folge der Gleichung 11) die identische Relation:

$$(\eta^2+\zeta^2)\xi_1+(\xi^2+\zeta^2)\xi_2+(\xi^2+\eta^2)\xi_3=2p \qquad 21)$$

bestehen, die sich nur durch einen Factor von der Gleichung:

$$\sigma_1\xi_1+\sigma_2\xi_2+\sigma_3\xi_3 = 2\delta \tag{22}$$

unterscheidet, wobei σ_1, σ_2, σ_3 die Seitenlängen des neuen Fundamentaldreieckes, δ dessen Flächeninhalt bezeichnen.

Nachdem man den Nenner jedes Gliedes der Gleichung K) durch ξ, η, ζ dividirt, gewinnt sie die Form:

$$\frac{A\xi x}{\frac{y}{\eta}-\frac{z}{\zeta}}+\frac{B\eta y}{\frac{z}{\zeta}-\frac{x}{\xi}}+\frac{C\zeta v}{\frac{x}{\xi}-\frac{y}{\eta}}=0$$

aus welcher man durch Anwendung der Transformationsformeln die Gleichung des Schnittes mit der Ebene 11) in den neuen Coordinaten erhält:

$$A\xi^2\frac{\xi_2+\xi_3}{\xi_3-\xi_2}+B\eta^2\frac{\xi_1+\xi_3}{\xi_1-\xi_3}+C\zeta^2\frac{\xi_1+\xi_2}{\xi_2-\xi_1}=0. \tag{23}$$

Bringt man die Brüche auf gleiche Nenner und ordnet nach den Unbekannten, so geht sie in die Form:

$$M(\xi_1\xi_2^2+\xi_1\xi_3^2)+N(\xi_2\xi_1^2+\xi_2\xi_3^2)+P(\xi_3\xi_1^2+\xi_3\xi_2^2)$$
$$-2\xi_1\xi_2\xi_3(A\xi^2+B\eta^2+C\xi^2)=0$$

über, wenn man zur Abkürzung:

$$-A\xi^2+B\eta^2+C\zeta^2=M,\ A\xi^2-B\eta^2+C\zeta^2=N,\ A\xi^2+B\eta^2-C\zeta^2=P$$

setzt. Mit Rücksicht auf die Identität $A\xi^2+B\eta^2+C\zeta^2=M+N+P$ erlangt sie die noch einfachere Gestalt:

$$M\xi_1(\xi_2-\xi_3)^2+N\xi_2(\xi_3-\xi_1)^2+P\xi_3(\xi_1-\xi_2)^2=0 \tag{24}$$

aus der sofort erhellt, dass die Eckpunkte des Fundamentaldreieckes der Curve angehören und dass diese im Punkte D mit den Coordinaten $\xi_1=\xi_2=\xi_3$ einen Doppelpunkt besitzt.

Die Seiten des Fundamentaldreieckes werden ausser in den Ecken in noch je einem Punkte von der Curve getroffen. Die Coordinaten dieser Punkte sind, wie unmittelbar ersichtlich:

$$\xi_1=0,\ \frac{\xi_2}{N}+\frac{\xi_3}{P}=0;\ \xi_2=0,\ \frac{\xi_1}{M}+\frac{\xi_3}{P}=0;$$

$$\xi_3=0,\quad \frac{\xi_1}{M}+\frac{\xi_2}{N}=0.$$

Diese drei Schnittpunkte liegen auf der Geraden

$$\frac{\xi_1}{M}+\frac{\xi_2}{N}+\frac{\xi_3}{P}=0. \qquad 25)$$

Die Tangenten der Curve in den Eckpunkten des Fundamentaldreieckes sind, diese Schnittpunkte als bekannt vorausgesetzt, leicht zu finden. Aus der Curvengleichung $F=0$ folgt die Gleichung der Tangente im Punkte ξ_i': [1]

$$\frac{dF'}{d\xi_1}\xi_1+\frac{dF'}{d\xi_2}\xi_2+\frac{dF'}{d\xi_3}\xi_3=0,$$

in welcher die Accente andeuten, dass in den betreffenden Differentialquotienten die Coordinaten des gegebenen Punktes einzusetzen sind. Für die Tangenten in den Eckpunkten des Dreieckes ergeben sich demnach die Gleichungen:

$$M\xi_1+N\xi_2=0,\ \ M\xi_1+P\xi_3=0,\ \ N\xi_2+P\xi_3=0.$$

Diese Geraden sind invers zu jenen, welche die Ecken des Dreieckes mit den Curvenpunkten in den gegenüberliegenden Seiten verbinden.

Ist M_1 der Schnittpunkt in der Seite II III, so tangirt jene Gerade die Curve im Punkte I, welche mit I III denselben Winkel einschliesst wie IM_1 mit I II. Die Schnittpunkte dieser drei Tangenten mit den gegenüber liegenden Seiten liegen auf der Geraden:

$$M\xi_1+N\xi_2+P\xi_3=0.$$

Berücksichtigt man die aus 21) und 22) folgenden Relationen:

$$\sigma_1=\varkappa(\eta^2+\zeta^2),\ \sigma_2=\varkappa(\xi^2+\zeta^2),\ \sigma_3=\varkappa(\xi^2+\eta^2)$$

$$\xi^2=\frac{\varkappa}{2}(\sigma_2+\sigma_3-\sigma_1),\ \ \eta^2=\frac{\varkappa}{2}(\sigma_1+\sigma_3-\sigma_2),\ \ \zeta_2=\frac{\varkappa}{2}(\sigma_1+\sigma_2-\sigma_3)$$

und die mit ihrer Hilfe aus den Definitionsgleichungen für M, N und P folgenden:

$$M=\varkappa(\sigma_2C+\sigma_3B),\ \ N=\varkappa(\sigma_3A+\sigma_1C),\ \ P=\varkappa(\sigma_1B+\sigma_2A),$$

so kann man sich leicht durch Auflösen der Klammern und entsprechendes Zusammenfassen der Glieder überzeugen, dass die Curvengleichung auch identisch mit:

---

[1] Salmon, h. eb. C. p. 61.

$$(A\xi_1+B\xi_2+C\xi_3)(\sigma_1\xi_2\xi_3+\sigma_2\xi_1\xi_3+\sigma_3\xi_1\xi_2)+$$
$$+(A\xi_2\xi_3+B\xi_1\xi_3+C\xi_1\xi_2)(\sigma_1\xi_1+\sigma_2\xi_2+\sigma_3\xi_3)=0 \qquad 26)$$

ist. Durch die Abkürzungen:

$$A\xi_1+B\xi_2+C\xi_3=g=0$$
$$A\xi_2\xi_3+B\xi_1\xi_3+C\xi_1\xi_2=s=0$$
$$\sigma_1\xi_1+\sigma_2\xi_2+\sigma_3\xi_3=g_1=0$$
$$\sigma_1\xi_2\xi_3+\sigma_2\xi_1\xi_3+\sigma_3\xi_1\xi_2=s_1=0$$

gewinnt die Gleichung die durchsichtige Form:

$$gs_1+g_1s=0 \qquad 27)$$

welche die unmittelbare Untersuchung der unendlich entfernten Curvenpunkte gestattet.

$g=0$ ist die Gleichung einer Geraden durch den Punkt $\xi_1=\xi_2=\xi_3$;

$s=0$ die Gleichung eines Kegelschnittes durch denselben Punkt;

$g_1=0$ gemäss der Gleichung 22) die Gleichung der unendlich entfernten Geraden;

$s_1=0$ die Gleichung des dem Fundamentaldreieck umgeschriebenen Kreises.[1]

Setzt man $g_1=0$, so gelangt man zur Einsicht, dass die unendlich entfernte Gerade die Curve im unendlich entfernten Punkt der Linie $g=0$ schneidet, und dass die Schnitte des Kreises $s_1=0$ mit der unendlich entfernten Geraden, also die imaginären Kreispunkte, gleichfalls der Curve angehören.

Die Curve ist also eine circulare Curve dritter Ordnung mit einer reellen, zur Geraden $g=0$ parallelen Asymptote.

Circulare Curven dritter Ordnung sind im Allgemeinen einfach zu construiren, wenn gewisse ausgezeichnete Punkte derselben bekannt sind. Am bequemsten gestaltet sich die Construction, wenn der reelle Durchschnitt (C) der beiden imaginären Asymptoten, die reelle Asymptote sammt ihrem Schnitt (α) mit der Curve, ferner zwei Curvenpunkte a und b bekannt sind, deren Verbindungslinie parallel zur reellen Asymptote liegt. Die zuletzt angegebenen Punkte können auch durch einen Doppelpunkt der

---

[1] Salmon, a. G. d. K. p. 191.

Curve vertreten sein. Liegt der Punkt C auf der Curve, dann braucht ausser ihm nur noch die Lage der reellen Asymptote bekannt zu sein, da ihr Schnitt mit der Curve bereits construirt werden kann. Die Construction einzelner Punkte ist nach Durège[1] die folgende: Man legt irgend einen Kreis durch die Punkte a und b, verbindet den Mittelpunkt desselben mit C und fällt vom Punkte α eine Senkrechte auf diese Verbindungslinie. Dieses Perpendikel schneidet den Kreis in zwei Curvenpunkten.

Ist an der Stelle von a und b der Doppelpunkt der Curve gegeben, so berühren alle Kreise die durch den Doppelpunkte parallel zur Asymptote gezogene Gerade, und die Kreismittelpunkte liegen auf der Senkrechten, die man durch denselben Punkt auf die Asymptote legen kann. Die Verbindungslinie des Punktes α mit C (s. Fig. 4) muss im letztgenannten Punkte zwei Punkte mit der Curve gemein haben, dieselbe also in C berühren. Sie ist nämlich die Begleiterin der unendlich fernen Geraden,[2] d. h. die Verbindungslinie der drei endlichen Schnittpunkte der Asymptoten mit der Curve, von welchen Schnittpunkten zwei in C zusammenfallen. Die Construction soll also für jenen Kreis, welcher durch C hindurchgeht, zwei zusammenfallende Punkte geben, d. h. die gesuchte Tangente in C muss auch diesen Kreis berühren; sie kann mithin construirt werden und gibt in ihrem Durchschnitt mit der reellen Asymptote den Punkt α.

Unsere Aufgabe ist demnach zunächst die Ermittlung des Punktes C und der reellen Asymptote. Die zur Asymptote parallele Gerade $y = 0$ ist identisch mit der Leitlinie der früher untersuchten Parabel, wie sofort ersichtlich wird, wenn man die Gleichung dieser Leitlinie aus dem früheren Coordinatensystem in das neue transformirt, was mit Hilfe der aus der Verbindung von 12) und 20) hervorgehenden Transformationsformeln:

$$x_1 = \frac{\xi}{2\sqrt{\eta^2+\zeta^2}}(\xi_2+\xi_3),\ x_2 = \frac{\eta}{2\sqrt{\xi^2+\zeta^2}}(\xi_1+\xi_3),$$

$$x_3 = \frac{\zeta}{2\sqrt{\xi^2+\eta^2}}(\xi_1+\xi_2) \qquad 28)$$

[1] Durège, eb. Curv. 3. Ord.

Salmon, h. eb. C. p. 156.

geschieht, wobei man nur die Gleichungen 14) und 7) zu berücksichtigen braucht.

Nach der Gleichung 27) kann man die vorliegende Curve dritter Ordnung auch als Erzeugniss des Strahlenbüschels:

$$g+\lambda g_1 = 0 \tag{29 a}$$

dessen Mittelpunkt der unendlich entfernte Punkt der Geraden $g = 0$ ist, und des projectivischen Kegelschnittsbüschels:

$$s-\lambda s_1 = 0 \tag{29 b}$$

auffassen. Betrachtet man die, einem bestimmten Werthe von λ entsprechende Gerade:

$$g-\lambda g_1 = 0, \tag{29 c}$$

die sogenannte harmonisch conjugirte zu 29 a), so findet man, dass ihre Gleichung aus 29 b) hervorgeht, wenn man in ihr statt der Coordinaten die reciproken Werthe derselben einsetzt, d. h. 29 c) ist die Inverse des demselben Werthe von λ entsprechenden Kegelschnittes 29 b).

Die Geraden $g+\lambda g_1 = 0$ und $g-\lambda g_1 = 0$ liegen zu verschiedenen Seiten, aber in gleicher Distanz von der Geraden $g = 0$; kennt man also die zu einem Kegelschnitt des Büschels 29 b) Inverse, so ist der dem Kegelschnitt entsprechende Strahl in gleicher Distanz wie diese auf der entgegengesetzten Seite von g zu ziehen. Da alle den Kegelschnitten des Büschels inversen Geraden zu $g = 0$ parallel laufen, bedarf es zur Construction einer derselben nur der Kenntniss eines einzigen Punktes, d. h. man braucht nur zu irgend einem Punkte des betreffenden Kegelschnittes den inversen aufzusuchen.

Diese Überlegungen führen zu einer Construction der reellen Asymptote, wenn man noch folgenden Satz aus der Theorie der Curven dritter Ordnung [1] zu Hilfe nimmt. Wenn eine Curve dritter Ordnung durch einen Strahlenbüschel mit dem Mittelpunkt m und einen Kegelschnittsbüschel erzeugt wird, so entspricht der Kegelschnitt, welcher durch m geht, jenem Strahl, welcher die Curve dritter Ordnung in m berührt. Da im vorliegenden Falle der Punkt m im Unendlichen liegt, so wird dem Kegelschnitt, welcher durch diesen Punkt geht, die reelle Asymptote entsprechen. Die Inverse zu diesem Kegelschnitt muss nach den

[1] Durège, C. 3. Ord. p. 139.

früher gemachten Bemerkungen durch den zu m inversen Punkt hindurchgehen. Man zieht also parallel zu $g=0$ durch die Ecken des Fundamentaldreieckes Gerade und sucht hiezu in der früher angegebenen Weise die entsprechenden, welche sich im verlangten Punkte C_1 schneiden. Auch hier braucht man nur eine dieser Geraden zu ziehen, da ja der gesuchte Punkt im Umkreis des Fundamentaldreieckes liegen muss, der alle inversen Punkte der unendlich fernen Geraden enthält. Zieht man also durch den so construirten Punkt die zu $g=0$ Parallele und auf der anderen Seite von g die dazu conjugirte, so ist die letztere der dem betreffenden Kegelschnitt entsprechende Strahl, d. h. die reelle Asymptote.

Die Coordinaten des Punktes C_1 sind die reciproken Werthe der Coordinaten des unendlich fernen Punktes der Geraden $g=0$. Letztere sind, da sie den Gleichungen:

$$\sigma_1\xi_1+\sigma_2\xi_2+\sigma_3\xi_3=0$$
$$A\xi_1+B\xi_2+C\xi_3=0$$

genügen müssen, proportional den Grössen:

$$C\sigma_2-B\sigma_3\,,\ A\sigma_3-C\sigma_1\,,\ B\sigma_1-A\sigma_2,$$

die Coordinaten des Punktes C_1 also proportional zu:

$$\frac{1}{C\sigma_2-B\sigma_3},\ \frac{1}{A\sigma_3-C\sigma_1},\ \frac{1}{B\sigma_1-A\sigma_2}. \qquad 30)$$

Dieser Punkt C_1 ist zugleich der Durchschnittspunkt (C) der imaginären Asymptoten.

Die imaginären Asymptoten sind nämlich die Tangenten in den Curvenpunkten, für welche $s_1'=0$, $g_1'=0$ ist.

Aus Gleichung 27) folgt die für die Aufstellung der Tangentengleichung nothwendige Grösse:

$$\frac{\partial F}{\partial\xi_i}=g\frac{\partial s_1}{\partial\xi_i}+s_1\frac{\partial g}{\partial\xi_i}+g_1\frac{\partial s}{\partial\xi_i}+s\frac{\partial g_1}{\partial\xi_i}$$

und für den vorliegenden Fall einfacher:

$$\frac{\partial F'}{\partial\xi_i'}=g'\frac{\partial s_1'}{\partial\xi_i'}+s_1'\frac{\partial g_1'}{\partial\xi_i'}.$$

Auf diese Art resultirt speciell der Ausdruck:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F'}{\partial \xi'_1} &= (A\xi'_1+B\xi'_2+C\xi'_3)(\sigma_2\xi'_3+\sigma_3\xi'_2)+(A\xi'_2\xi'_3+B\xi'_1\xi'_3+C\xi'_1\xi'_2)\sigma_1 = \\ &= A(\sigma_1\xi'_2\xi'_3+\sigma_2\xi'_1\xi'_3+\sigma_3\xi'_1\xi'_2)+B[\sigma_3\xi'^2_2+\xi'_3(\sigma_2\xi'_2+\sigma_1\xi'_1)]+ \\ &\quad + C[\sigma_2\xi'^2_3+\xi'_2(\sigma_3\xi'_3+\sigma_1\xi'_1)]\end{aligned}$$

und mit Rücksicht auf die Gleichung:

$$s'_1 = 0, \quad \frac{\partial F'}{\partial \xi'_1} = (\xi'^2_2-\xi'^2_3)(B\sigma_3-C\sigma_2).$$

Die Gleichung einer der imaginären Asymptoten ist also:

$$\begin{aligned}(\xi'^2_2-\xi'^2_3)(B\sigma_3-C\sigma_2)\xi_1+(\xi'^2_3-\xi'^2_1)(C\sigma_1-A\sigma_3)\xi_2+ \\ +(\xi'^2_1-\xi'^2_2)(A\sigma_2-B\sigma_1)\xi_3 = 0\end{aligned}$$

eine Gleichung, welche durch die Ausdrücke 30) erfüllt wird, ob nun ξ'_i die Coordinaten des einen oder des anderen der imaginären Kreispunkte bezeichnen. Der Punkt C_1 ist daher der reelle Durchschnitt der imaginären Asymptoten. Er liegt, wie unmittelbar ersichtlich, gleichfalls auf der Curve.

Die Construction der Curve unterliegt nun keinem Anstand mehr. Wir wollen nur noch auf einige mehr oder weniger interessante Beziehungen derselben zu der früher untersuchten Parabel hinweisen, die in vortheilhafter Weise zur Vereinfachung der Construction benützt werden können.

Die neuen Coordinaten des Brennpunktes der genannten Parabel erhält man durch Anwendung der Transformationsformeln die wieder aus 12) und 20) folgen:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= -\frac{\sqrt{\eta^2+\zeta^2}}{\xi}x_1+\frac{\sqrt{\xi^2+\zeta^2}}{\eta}x_2+\frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}{\zeta}x_3 \\ \xi_2 &= \frac{\sqrt{\eta^2+\zeta^2}}{\xi}x_1-\frac{\sqrt{\xi^2+\zeta^2}}{\eta}x_2+\frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}{\zeta}x_3 \\ \xi_3 &= \frac{\sqrt{\eta^2+\zeta^2}}{\xi}x_1+\frac{\sqrt{\xi^2+\zeta^2}}{\eta}x_2-\frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}{\zeta}x_3\end{aligned}$$

und ergeben sich mit Rücksicht auf 14), 19), 21) und 22) proportional zu:

$$-\frac{\sigma_1}{A}+\frac{\sigma_2}{B}+\frac{\sigma_3}{C}, \quad \frac{\sigma_1}{A}-\frac{\sigma_2}{B}+\frac{\sigma_3}{C}, \quad \frac{\sigma_1}{A}+\frac{\sigma_2}{B}-\frac{\sigma_3}{C}.$$

Die Verbindungslinie dieses Punktes mit dem Doppelpunkt, $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3$ der Curve besitzt demnach die Gleichung:

$$\left(\frac{\sigma_3}{C} - \frac{\sigma_2}{B}\right)\xi_1 + \left(\frac{\sigma_1}{A} - \frac{\sigma_3}{C}\right)\xi_2 + \left(\frac{\sigma_2}{B} - \frac{\sigma_1}{A}\right)\xi_1 = 0$$

oder:

$$A(B\sigma_3 - C\sigma_2)\,\xi_1 + B(C\sigma_1 - A\sigma_3)\,\xi_2 + C(A\sigma_2 - B\sigma_1)\,\xi_3 = 0.$$

Aus der letzten Gleichungsform ist ersichtlich, dass der Punkt (C) in derselben Geraden liegt.

Die Verbindungslinie des Doppelpunktes mit irgend einem Punkt der Curve dritter Ordnung steht, wie nachgewiesen wurde, senkrecht auf einer Tangente der Parabel, welche durch denselben Punkt hindurchgeht. Die Verbindungslinie des Brennpunktes der Parabel mit dem Doppelpunkt muss daher senkrecht auf jener Tangente stehen, welche durch den Punkt C an die Parabel gezogen werden kann, der Punkt C ist also gleichzeitig der Fusspunkt des Perpendikels aus dem Brennpunkt auf eine Tangente. Dieser Fusspunkt liegt aber bekanntlich auf der Scheiteltangente, und da diese parallel zur Leitlinie verläuft, ist diese Tangente die durch den Punkt C gehende Parallele zur reellen Asymptote.

Da die Punkte C und α in zwei Parallelen liegen, die von $g = 0$ entgegengesetzt gleiche Abstände besitzen, muss diese Gerade die Strecke $C\alpha$ im Halbirungspunkte (0) treffen (s. Fig. 4). Mithin ist $OC = OD = O\alpha$, die Punkte C, D, α liegen auf einem Kreise mit dem Durchmesser $C\alpha$ und der Winkel $CD\alpha$ ist als Winkel im Halbkreis ein Rechter, ein Ergebniss, wodurch die Construction des Punktes α sich wesentlich vereinfacht.

Eine nähere Betrachtung der Gleichung 27) gibt über eine andere interessante Entstehungsart der Curve dritter Ordnung Aufschluss. Die Gleichung geht durch Inversion in sich selbst über. Hieraus folgt, dass für jeden Curvenpunkt auch der inverse in derselben Curve liegt. Er liegt aber auch in der conjugirten Geraden zu jener, welche parallel zu g durch den ursprünglich angenommenen Punkt geht, denn soll der zu einem Punkt der Geraden $g + \lambda\, g_1 = 0$ inverse Punkt in der conjugirten Geraden liegen, so müssen seine Coordinaten ξ_i' die Gleichung $g' - \lambda\, g_1' = 0$ erfüllen. Da aber die ξ_i' proportional zu den Producten

$\xi_{l'}$ ξ_{l} sind, geht die letzte Gleichung durch diese Substitution in $s - \lambda\, s_1 = 0$ über, die im Vereine mit $g + \lambda\, g_1 = 0$ ausdrückt, dass alle Punkte der Curve dritter Ordnung dieser Bedingung genügen. Zwei inverse Punkte können aber als Brennpunkte eines Kegelschnittes aufgefasst werden, welcher die Seiten des Fundamentaldreieckes berührt. Der Halbirungspunkt der Verbindungslinie beider Brennpunkte liegt nach dem früher Gesagten auf der Geraden $g = 0$.

Die Curve dritter Ordnung ist mithin der geometrische Ort der Brennpunkte von Kegelschnitten, welche drei gegebene Gerade berühren und deren Mittelpunkte auf einer Geraden liegen. Der Ort der Mittelpunkte von Kegelschnitten, welche vier feste Gerade berühren, ist die Gerade, welche die Mittelpunkte der Diagonalen ihres Vierseits verbindet. [1] Umgekehrt berühren alle Kegelschnitte, welche drei feste Gerade berühren und deren Mittelpunkte in einer Geraden liegen, noch eine vierte Gerade. Es ist nämlich leicht, eine vierte Gerade so zu bestimmen, dass die Mittelpunktsgerade die Halbirungspunkte der Diagonalen des so gebildeten Viereckes enthält. Ist (s. Fig. 5) I II III das Fundamentaldreieck, g die Gerade der Kegelschnittsmittelpunkte, so braucht man nur die Dreiecksseiten zu halbiren, diese Punkte zu einem neuen Dreieck zusammenzufassen und die Schnitte 1, 2, 3 der Seiten desselben mit der Geraden g mit den entsprechenden Eckpunkten I, II, III zu verbinden. Die Schnittpunkte M_1, M_2, M_3 der Seiten des Fundamentaldreieckes mit diesen Verbindungslinien liegen auf der gesuchten Geraden G. Es ist unmittelbar aus der Figur zu ersehen, dass die Diagonalen des Vierseits I II M_1 M_2 durch diese Gerade halbirt werden.

Die untersuchte Curve ist daher ein specieller Fall der Brennpunktscurve von Kegelschnitten, welche vier gegebene Gerade berühren, und diese letztgenannte Curve wurde bereits eingehend vom Standpunkte der neueren Geometrie untersucht. [2]

Wir benützen hievon nur das Ergebniss, welches bereits Salmon [3] anführt, nämlich dass die Eckpunkte des Viereckes

---

[1] Salmon, a. G. d. K. p. 265.

[2] H. Schrötter, Math. Ann. Bd. V, p. 50; Durège, p. 83; Salmon a. G. d. K. p. 369.

[3] Salmon, a. G. d. K. p. 369.

und die Schnittpunkte der Gegenseiten auf dieser Curve liegen. Die früher construirte Gerade G muss daher als Verbindungslinie jener Curvenpunkte, in welchen die Seiten des Fundamentaldreieckes getroffen werden, mit der Geraden 25) identisch sein, die man zur Construction der Curventangenten in den Eckpunkten des Fundamentaldreieckes benützen kann.

Ein ebener, zur Schwingungsrichtung senkrechter Schnitt der Isogyrenfläche kann nach den gegebenen Daten construirt werden, wenn die optischen Constanten des Krystallplättchens bekannt sind. Die Isogyren selbst erhält man durch Schnitte, die parallel zu dieser Richtung verlaufen. Aus einem Schnitt der ersten Art lässt sich aber durch lineare Construction ein Schnitt der zweiten Art ableiten.

Es sei O, (s. Fig. 6) der Mittelpunkt des Kegels dritter Ordnung, P ein Punkt seines Schnittes mit der Ebene E. Es handelt sich nun um die Construction des Punktes P', in welchem der Strahl OP die zu E senkrechte Ebene E' trifft. Der Inbegriff aller Punkte P' gibt dann die neue Schnittcurve. Um diese Curve in die angenommene Zeichenfläche E zu bringen, denkt man sich die Ebene E' um die Schnittlinie MN in die Ebene E umgelegt und zwar so, dass die Punkte D' und D, in welchen die von O auf E und E' gefällten Perpendikel diese Ebene treffen, auf verschiedene Seiten der Schnittlinie MN zu liegen kommen. D' und D stehen unter der Voraussetzung $OD = OD'$ nach der Umlegung gleich weit von dem Punkt L ab, in welchem das von D auf die Schnittlinie MN gefällte Perpendikel diese schneidet. Aus der Figur geht hervor, dass der umgelegte Punkt der Senkrechten angehört, die man in Q' auf MN in der Ebene E ziehen kann. Mit Rücksicht auf die Proportion:

$$OD : P'Q' = PD : PQ'$$

gelangt man zu der in Fig. 7 angegebenen Construction des Punktes P' aus P.

Um also eine beliebige Isogyre für eine gegebene Platte zu construiren, geht man in folgender Weise vor: Die Lage der Platte in Bezug auf den Krystall ist gegeben, wenn man die Trassen der drei durch die Elasticitätsachsen, die von irgend einem Punkt der einen Begrenzungsfläche ausgehen, gelegten

Ebenen auf der anderen Grenzfläche kennt. Es sei A_1 A_2 A_3 (s. Fig. 8) das von ihnen gebildete Dreieck,[1] R und S die Schnittpunkte der optischen Achsen, ferner JJ' die Richtung, für welche die Isogyre bestimmt werden soll. Zieht man im Abstand p, in diesem Fall der Plattendicke, von D eine Senkrechte auf JJ', so ist die neue Linie MN die Schnittlinie jener Ebene, deren Schnitt mit der betreffenden Fläche dritter Ordnung die zu übertragende Curve liefert. Zuerst construirt man die den Punkten A_1, A_2, A_3, R, S entsprechenden Punkte A'_1, A'_2, A'_3, R', S' und für diese nach den gemachten Angaben die betreffende Curve. In Fig. 8 bedeutet P den Brennpunkt der Parabel, s die Scheiteltangente derselben und A die reelle Asymptote der Curve dritter Ordnung sammt ihrem Schnittpunkt α mit der Curve, C den reellen Durchschnitt der imaginären Asymptoten. Die Figur zeigt die Construction der Punkte E und F nach der einen, H und G nach der anderen Methode.

Es ist ersichtlich, dass die durch den Punkt D' parallel mit MN gezogene Gerade bei der Übertragung in die Ebene E zur unendlich entfernten Geraden wird. Die drei in dieser Geraden liegenden Curvenpunkte, also der Doppelpunkt D' und der Punkt F, werden die unendlich fernen Punkte der neuen Curve und die Tangenten in ihnen die Asymptoten. Alle Isogyren sind daher Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt im Unendlichen und dem entsprechend mit zwei parallelen Asymptoten. Je nachdem nun der dritte Schnittpunkt der durch D' parallel mit MN gezogenen Geraden die Curve in der Schlinge oder ausserhalb derselben trifft, liegt der Wendepunkt der übertragenen Curve entweder zwischen den parallelen Asymptoten oder ausserhalb derselben, so dass man entweder die eine oder die andere der typischen Formen der Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt im Unendlichen erhält.[2]

---

[1] Falls das Schnittdreieck von vornherein gegeben ist, bekommt man den Abstand seiner Ebene vom Coordinatenursprung als zweite Kathete eines rechtwinkeligen Dreieckes (s. Fig. 1) mit der Hypothenuse OA_1 und einer Kathete A_1D. Die Länge OA_1 erhält man, indem man über A_1A_2 einen Halbkreis beschreibt und den Schnittpunkt desselben mit der Höhe A_3 III mit A_1 verbindet.

[2] Salmon, h. eb. C. p. 216.

Je zwei sich entsprechende Linien beider Ebenen schneiden sich in der Axe MN. Um daher die einer Geraden entsprechende zu ziehen, verbindet man ihren Schnittpunkt mit der Geraden $D'F$ mit dem Punkt L und zieht durch den Schnittpunkt der zu übertragenden Geraden mit MN die Parallele zu dieser Verbindungslinie. Auf diese Weise wurden die Asymptoten der neuen Curve K' (t_1, t_2, t_3) construirt, als Übertragungen der Tangenten in den Punkten D' (welche zugleich Parabeltangenten und als solche leicht zu construiren sind) und F. Der untere Zweig der Curve K besitzt in seinem weiteren Verlauf einen Wendepunkt; ein dritter Curvenzweig fällt nach links ausserhalb der Zeichenfläche.

Die angegebenen Constructionen versagen ihren Dienst, wenn die Isogyre für eine Schwingungsrichtung bestimmt werden soll, welche parallel zu einer der ursprünglichen Coordinatenebenen verläuft. In diesem Fall zerfällt aber die Fläche dritter Ordnung in eine Ebene und eine Fläche zweiter Ordnung, deren Schnitt mit der Krystallplatte unmittelbar ohne Schwierigkeit construirt werden kann.

Es sei z. B. $\xi = 0$. Die Gleichung der Isogyrenfläche wird demnach:

$$x\,[-A\eta\zeta x^2+(B\eta y-C\zeta z)(\zeta y-\eta z)] = 0,$$

zerfällt also in die Gleichungen:

$$x = 0; \quad A\eta\zeta x^2+(C\zeta z-B\eta y)(\zeta y-\eta z) = 0.$$

Zwischen den Richtungscosinussen ξ, η, ζ und den Richtungscosinussen α, β, γ der Begrenzungsflächen der Platte, besteht die Relation: $\beta\eta+\gamma\zeta = 0$, mit deren Hilfe die zweite Gleichung die Form:

$$(C\beta z+B\gamma y)(\beta y+\gamma z) = A\beta\gamma x^2$$

gewinnt. Die Isogyre ist der Schnitt dieser Fläche mit der Ebene:

$$\alpha x+\beta y+\gamma z = p.$$

Die Gleichung dieser Curve in trimetrischen Coordinaten, bezogen auf die Trassen der Coordinatenebenen als Fundamentallinien, erhält man durch die Substitution der Werthe:

$$x = \frac{\alpha\beta\gamma}{p}\;\frac{s_1 x_1}{\alpha},\; y = \frac{\alpha\beta\gamma}{p}\;\frac{s_2 x_2}{\beta},\; z = \frac{\alpha\beta\gamma}{p}\;\frac{s_3 x_3}{\gamma}$$

in der Form:

$$(B\frac{\gamma}{\beta}s_2x_2 + C\frac{\beta}{\gamma}s_3x_3)(s_2x_2+s_3x_3) = \frac{A}{\alpha^2}s_1^2x_1^2$$

Für $s_2x_2 + s_3x_3 = 0$ muss $x_1^2 = 0$ sein, das heisst, die Gerade $s_2x_2 + s_3x_3 = 0$, welche parallel zu $x_1 = 0$ durch die Ecke $x_2 = x_3 = 0$ hindurchgeht, tangirt im Schnittpunkt mit der Geraden $x_1 = 0$, also im Unendlichen, die Curve, d. h. sie ist eine Asymptote derselben. Die Curve zweiter Ordnung ist mithin eine Hyperbel. Ebenso berührt die Gerade:

$$h = B\frac{\gamma}{\beta}s_2\,x_2 + C\frac{\beta}{\gamma}s_3x_3 = 0$$

die Curve dort, wo sie $x_1 = 0$ schneidet. Für $g_1 = 0$ als Gleichung der unendlich fernen Geraden wird:

$$s_2x_2 + s_3x_3 = g_1 - s_1x_1,$$

durch welche Substitution die Curvengleichung übergeht in:

$$g_1h = \frac{s_1x_1}{\alpha}(A\frac{\beta\gamma}{\alpha}s_1x_1 + B\frac{\alpha\gamma}{\beta}s_2x_2 + C\frac{\alpha\beta}{\gamma}s_3x_3)$$

oder:

$$g_1h = \frac{s_1x_1}{\alpha}g$$

und die Gerade $g = 0$ ist wieder jene, welche durch den Höhenpunkt des Fundamentaldreieckes und den Halbirungspunkt T von RS, in welchen Punkten die optischen Achsen die Ebene treffen, hindurchgeht. Für $g_1 = 0$ muss $g = 0$ sein, d. h. die zweite Asymptote der Hyperbel ist parallel zu dieser Geraden. Die Gerade h verbindet den Punkt $g = 0$, $x_1 = 0$ mit dem Eckpunkt $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ des Fundamentaldreieckes.

Der Berührungspunkt einer Hyperbeltangente halbirt das zwischen den Asymptoten liegende Stück derselben, ein Satz, der zur Construction der zweiten Asymptote führt, deren Richtung ja bekannt ist. In Fig. 9 wurde die Isogyre 1 in dieser Weise construirt. Die eine der gestrichelten Linien ist die Gerade g, die zweite die Tangente im Schnittpunkte derselben mit der Curve. 1′ und 1″ sind die Asymptoten der Hyperbel, welche, nachdem noch der Punkt *E* bekannt ist, construirt werden kann.

Fig. 9 zeigt sechs Isogyren, welche nach den angegebenen Regeln für ein Topasplättchen construirt wurden, dessen Begrenzungsflächen gleiche Neigung gegen die drei Elasticitätsachsen besitzen. Der Winkel der optischen Achsen wurde zu 56° 58′ angenommen, wie er Strahlen von der Wellenlänge der Fraunhofer'schen Linie *D* entspricht. Ein Krystall mit grossem Achsenwinkel wurde gewählt, da sich für einen solchen die Constructionen selbst bei einem kleineren Massstab der Zeichnung mit genügender Genauigkeit durchführen lassen, was bei der Annahme eines kleinen Achsenwinkels nicht der Fall wäre. Die Schwingungsrichtungen, für welche die Isogyren gelten, sind parallel den Seiten und Höhen des Fundamentaldreieckes. Die ersteren lieferten als Isogyren die Hyperbeln 1, 2, 3 und die entsprechenden, ebenso bezeichneten Geraden, die anderen die Curven dritter Ordnung 4, 5, 6, von welchen bei keiner der dritte Curvenzweig dargestellt werden konnte. Die zu einer Curve gehörigen Asymptoten wurden mit der gleichen Zahl wie diese bezeichnet, nur wurden die Ziffern mit Accenten versehen, so dass z. B. die zur Curve 5 gehörigen Asymptoten die Geraden 5′, 5″, 5‴ sind

Die genannten Curven stellen die Isogyren in der Gestalt dar, in welcher sie vor der Brechung erscheinen würden. Um über ihre Gestalt nach der Brechung ins Klare zu kommen, genügt es nach Lommel,[1] die Dimensionen der Curve um das μ-fache zu vergrössern, wenn man mit μ einen geeignet zu wählenden, mittleren Brechungscoëfficienten des Krystalls bezeichnet.

[1] Lommel, Wied. Ann. 18.

H. Pitsch: Über die Isogyrenfläche der doppeltbrechenden Krystalle.

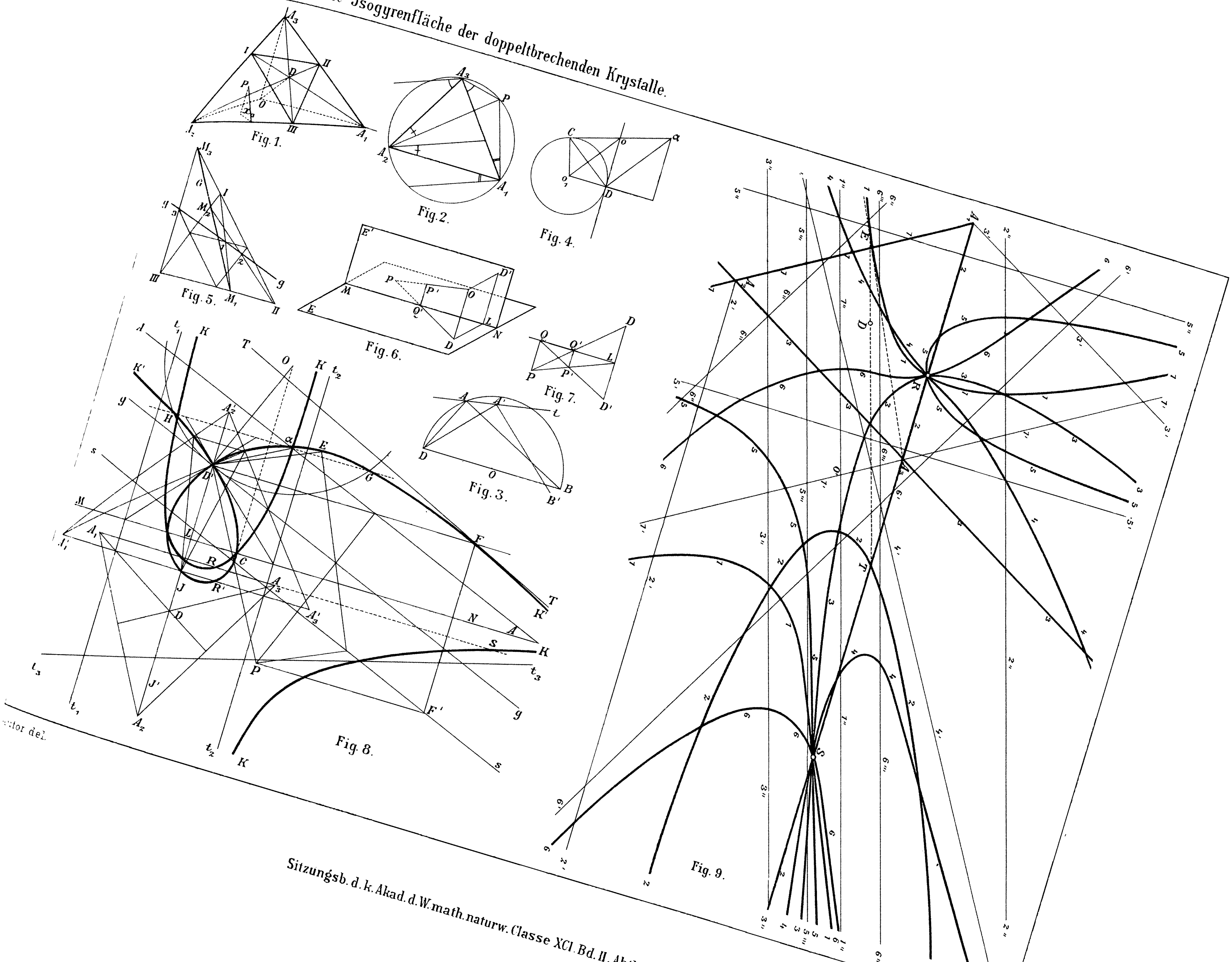

Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 3.

Fig. 4.

Fig. 5.

Fig. 6.

Fig. 7.

Fig. 8.

Fig. 9.

...ctor del.

K. k. Hof u. Staatsdruckerei.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1885

Band/Volume: 91_2

Autor(en)/Author(s): Pitsch Hanns

Artikel/Article: Über die Isogyrenfläche der doppeltbrechenden Krystalle. 527-552