Notiz über zwei der Binomialreihe verwandte Reihengruppen.

Von dem w. M. Prof. Dr. **E. Weiss.**

Vor Kurzem stiess ich bei einer eingehenderen Discussion des Lagrange'schen Reversionssatzes[1] auf ein paar Specialfälle von zwei der Binomialreihe verwandten Reihengruppen und wurde dadurch veranlasst, dieselbe allgemeiner zu untersuchen. Von den eben erwähnten Reihengruppen ist die eine folgende:

$$\left.\begin{aligned} X_r^{(m)} = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m+2r+1)}{2!}x^2 + \\ \frac{m(m+3r+1)(m+3r+2)}{3!}x^3 + \quad + \\ + \frac{m(m+nr+1)(m+nr+2)\ldots(m+nr+n-1)}{n!}x^n + . \end{aligned}\right\} A$$

oder, übersichtlicher geschrieben:

$$\left.\begin{aligned} X_r^{(m)} = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m}{2}\binom{m+2r+1}{1}x^2 + \ldots + \\ + \frac{m}{n}\binom{m+nr+n-1}{n-1}x^n + . \end{aligned}\right\} A'$$

Diese Reihe enthält, wie man sofort erkennt, die Binomialreihe als Specialfälle in sich. Es ist nämlich:

$$\text{für } r=0: X_0^{(m)} = (1-x)^{-m}$$
$$\text{für } r=-1: X_1^{(m)} = (1+x)^{m}$$

---

[1] Entwickelungen zum Lagrange'schen Reversionstheorem etc. Denkschr. d. kais. Akad. d. Wissensch. XLIX. Bd., pag. 133.

Was zunächst die Convergenzbedingungen betrifft, folgt für r ganz und positiv aus dem Bildungsgesetze der Reihe unmittelbar:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{[m+n(r+1)]}{[m+nr+1]}\frac{[m+n(r+1)+1]}{[m+nr+2]}\cdot\;\ldots\;\frac{[m+n(r+1)+r-1]}{[m+nr+r]}\cdot\frac{[m+n(r+1)+r]}{[n+1]}x=$$

$$=\frac{(r+1)^{r+1}}{r^r}\cdot\frac{\left[1+\frac{m}{n(r+1)}\right]\left[1+\frac{m+1}{n(r+1)}\right]\cdot\cdot\;\cdot\left[1+\frac{m+r-1}{n(r+1)}\right]\left[1+\frac{m+r}{n(r+1)}\right]}{\left[1+\frac{m+1}{nr}\right]\left[1+\frac{m+2}{nr}\right]\qquad\left[1+\frac{m+r}{nr}\right]\left[1+\frac{1}{n}\right]}x=$$

$$=\frac{(r+1)^{r+1}}{r^r}\cdot\frac{1+\frac{2m+r}{2n}+.}{1+\frac{2m+r+3}{2n}+.}\cdot x=\frac{(r+1^{r+1}}{r^r}\;\frac{x}{1+\frac{3}{2n}+.}\qquad 1)$$

Dieselbe Relation gilt auch für r negativ ganz. Für r gebrochen positiv, etwa $r=+\frac{p}{q}$, wo p und q ganze Zahlen vorstellen mögen, würde es zu sehr weitläufigen Rechnungen führen, wollte man die Convergenzbedingungen aus zwei unmittelbar auf einander folgenden Reihengliedern ableiten. Vergleicht man aber das allgemeine Glied mit dem Index nq, also u_{nq} mit $u_{(n+1)q}$, so erhält man durch eine der obigen ganz gleiche Analyse leicht:

$$\frac{u_{(n+1)q}}{u_{nq}}=\frac{(r+1)^{(r+1)q}}{r^{rq}}\;\frac{x^q}{1+\frac{3}{2n}+.}\qquad 2)$$

Etwas eingehender wollen wir uns indess mit dem Falle r negativ, gebrochen, also $r=-\frac{p}{q}$ beschäftigen.

Hier ist:

$$u_{nq} = (-1)^{nq-1} \cdot \frac{m[np-(m+1)][np-(m+2)]\ldots .[np-(m+nq-1)]}{(nq)!} x^{nq}$$

Der grösste Factor im Zähler ist der zweite $np-(m+1)$; der kleinste der letzte $n(p-q)-(m-1)$. Ist nun:

a) $p > q$, das heisst r seinem absoluten Werthe nach ein u n e c h t e r Bruch, so sind von einem bestimmten Reihengliede an alle Factoren des Zählers positiv, und man gewinnt durch eine Vergleichung von u_{nq} mit $u_{(n+1)q}$ wieder genau die Relation 2). Ist hingegen:

b) $p < q$, das heisst r ein e c h t e r Bruch, so sind von einer bestimmten Stelle an, die ersten Factoren des Zählers positiv, die letzten negativ. Ist überdies m ganz, so erfolgt der Übergang der Factoren aus den positiven in negative Werthe durch Null und es entfällt daher in der Reihe von einer bestimmten Stelle an jedes $q$te Glied. Ausserdem ist hier:

$$\frac{u_{(n+1)q}}{u_{nq}} = (-1)^p \cdot \frac{(r+1)^{(r+1)q}}{(-r)^{rq}} \quad \frac{x^q}{1+\frac{3}{2n}+\ldots} \tag{3}$$

Fassen wir daher das Resultat dieser Untersuchungen zusammen, so findet, wenn man im letzten Falle von dem Factor $(-1)^p$ absiebt, Convergenz statt:

$$\text{für } -1 < r < 0, \text{ so lange } x < \frac{(-r)^r}{(r+1)^{(r+1)}}$$

für alle anderen Werthe von r hingegen, so lange $x < \frac{r^r}{(r+1)^{r+1}}$.

Für die Grenzwerthe:

$$x = \frac{(-r)^r}{(r+1)^{r+1}}$$

und

$$x = \frac{r^r}{(r+1)^{r+1}}$$

respective ist:

$$\lim n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = +\frac{3}{2},$$

es convergirt daher auch noch für diese unsere Reihe, und wir können daher den Satz aussprechen:

Die Reihe, deren allgemeines Glied u_n den Ausdruck hat:

$$u_n = \frac{m}{n} \cdot \binom{m+nr+n-1}{n-1} x^n,$$

convergirt:

$$\left.\begin{array}{l} \text{für } -1 < r < 0 \text{ und } x \leqq \dfrac{(-r)^r}{(r+1)^{r+1}} \\ \text{für } \left\{\begin{array}{l} -\infty < r < 1 \\ 0 < r < +\infty \end{array}\right. \quad x \leqq \dfrac{r^r}{(r+1)^{r+1}} \end{array}\right\} \quad 5)$$

Für $r = 0$ und $r = -1$ geht die Reihe in die binomische über und es gelten dann die bekannten Convergenzbedingungen.

Vor Allem ist nun weiter zu bemerken, dass die durch die obige Reihe dargestellten Functionen Potenzgrössen sind. Man überzeugt sich nämlich durch eine einfache Multiplication leicht von dem Stattfinden der Relation:

$$X_r^{(m)} \quad X_r^{(1)} = X_r^{(m+1)} \qquad 6)$$

woraus, wenn man Kürze halber $X_r^{(1)}$ durch X_r schlechtweg bezeichnet, unmittelbar folgt:

$$X_r^{(m)} = X_r^m \qquad 7)$$

Es handelt sich also jetzt nur noch darum, X_r zu ermitteln. Gehen wir zu diesem Zwecke auf die Gleichung *A)* zurück, so liefert sie:

$$X_r = 1 + \frac{1}{1}\,x + \frac{1(2r+2)}{2!}\,x^2 + \frac{1\,.\,(3r+2)(3r+3)}{3!}\,x^3 + \ldots \frac{1(nr+2)(nr+3)\ldots(nr+n)}{n!}\,x^n + \ldots =$$

$$= 1 + x\left[1 + \frac{r+1}{1!}\,x + \frac{(r+1)(3r+2)}{2!}\,x^2 + \ldots \frac{(r+1)(nr+2)(nr+3)\ldots(nr+n-1)}{(n-1)!}\,x^{n-1} + \ldots\right] =$$

$$= 1 + x\,X_r^{r+1}.$$

Man findet daher die Summe aller hieher gehörigen Reihen durch Auflösung der dreigliederigen Gleichung:

$$xX_r^{r+1} - X_r + 1 = 0 \qquad 8)$$

Die einfachsten Specialfälle dieser Gleichung ergeben sich, abgesehen von den schon oben erwähnten Werthen $r = 0$ und $r = -1$, die bloss die Auflösung einer Gleichung ersten Grades erfordern, für $r = +1, -\frac{1}{2}$ und -2, und führen auf quadratische Gleichungen. Übrigens sind die Reihen für $r = +1$ und $r = -2$ im Grunde eben sowenig von einander verschieden, wie die für $r = 0$ und $r = -1$. Bezeichnet man nämlich die Reihe *A)*, deren Werth von r, m und x abhängt, mit $F(x, m, r)$, so lässt das allgemeine Glied unschwer die Beziehung erkennen:

$$F(x, m, r) = F(-x, -m, -r-1). \qquad \ldots\ldots\ldots 9)$$

Die Gleichung 8) enthält daher bloss zwei Reihen, deren Summe aus der Auflösung einer quadratischen Gleichung sich ergibt. Sie lauten mit Weglassung der zweiten Wurzel, welche nicht den hier betrachteten, sondern stammverwandten Reihen angehört:

Für $r = -2$:

$$(1+\sqrt{1+4x})^m = 2^m\left[1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-3)}{1.2}x^2+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{m[2n-(m+1)][2n-(nr+2)]\ldots[n-m+1]}{n!}x^n\ldots\right]$$

$$x \gtrless \pm\frac{1}{4}$$

$r = -\frac{1}{2}$:

$$(2+x^2+x\sqrt{4+x^2})^m = \frac{1}{2^m}(x+\sqrt{4+x^2})^{2m} =$$

$$= 2^m\left[1+\frac{m}{1}x+\frac{m^2}{1.2}x^2+\ldots\frac{m\left[m-\left(\frac{n}{2}-1\right)\right]\left[m-\left(\frac{n}{2}-2\right)\right]\ldots\left[m+\left(\frac{n}{2}-1\right)\right]}{n!}x^n+\ldots\right]$$

$$x \gtrless \pm 2.$$

daher, wenn man noch $\frac{m}{2}$ an die Stelle von m und $2x$ an die Stelle von x treten lässt, für $r = -\frac{1}{2}$ einfacher:

$$(x+\sqrt{1+x^2})^m = 1+\frac{m}{1}x+\frac{m^2}{1.2}+x^2+\frac{m(m+1)(m-1)}{3!}x^3+\ldots+$$

$$+\frac{m(m-n+2)(m-n+4)(m-n+6)\ldots(m+n-2)}{n!}x^n+\ldots$$

$$x \leqq \pm 1.$$

Die Auflösung einer kubischen Gleichung erfordern die Werthe: $r = +2,\ +\frac{1}{2},\ -\frac{1}{3}$ und die homologen $r = -3,\ -\frac{3}{2},\ -\frac{2}{3}$; die einer biquadratischen Gleichung $r = +3,\ +\frac{1}{3},\ -\frac{1}{4}$ oder $r = -4,\ -\frac{4}{3},\ -\frac{3}{4}$; etc.

Eine beachtenswerthe Eigenschaft der Gleichung 8) besteht ferner darin, dass sie für den einen Grenzwerth $x = \frac{r^r}{(r+1)^{r+1}}$ zwei gleiche Wurzeln $X_r = \frac{r+1}{r}$ besitzt. Denn der Gleichung 8) kommt bekanntlich dann eine doppelte Wurzel zu, wenn mit ihr gleichzeitig ihr Differentialquotient erfüllt ist, wenn also mit 8) coëxistirt:

$$(r+1)\,x X_r^r - 1 = 0 \tag{10)}$$

Aus der Verbindung dieser beiden Gleichungen folgt:

$$X_r = \frac{r+1}{r} \tag{11)}$$

$$x = \frac{r^r}{(r+1)^{r+1}} \tag{12)}$$

Sei nun zunächst wieder r ganz und positiv, so lässt sich die Gleichung 8) für den obigen Werth von x auch so schreiben:

$$\frac{r^r}{(r+1)^{r+1}} X_r^{r+1} - X_r + 1 =$$

$$= \frac{1}{r}[z-1]^2[z^{r-1} + 2z^{r-2} + 3z^{r-3} + \ldots (r-1)z + r] = 0 \tag{8*)}$$

wo zur Abkürzung gesetzt wurde:

$$z = \frac{r}{r+1} X_r$$

Der blosse Anblick dieser Gleichung lässt nun erkennen, dass ihr ausser $z = 1$ keine weitere positive Wurzel mehr zukommt. Da aber für ein positives r und $x = \frac{r^r}{(r+1)^{r+1}}$ die Reihe *A)* eine positive Summe haben muss, so ist $X_r = \frac{r+1}{r}$ auch die Summe der Reihe. Wir gewinnen damit das interessante Resultat:

$$\left(\frac{r+1}{r}\right)^m = 1 + \frac{m}{1} x_r + \frac{m(m+2r+1)}{2!} x_r^2 + \tag{14)}$$

$$\frac{m(m+3r+1)(m+3r+2}{3!} x_r^3 +$$

$$+ \frac{m(m+nr+1)(m+nr+2 \ldots .(m+nr+n-1)}{n!} x_r^n +$$

$$x_r = \frac{r^r}{(r+1)^{r+1}}$$

Wir haben oben nur den Fall r ganz und positiv betrachtet. Es lässt sich indess leicht zeigen, dass alles bisher Gesagte auch für positive gebrochene r, ferner für r negativ ganz, und für r negativ, unecht gebrochen seine Giltigkeit behält.

Für ein negatives, echt gebrochenes r, also $r = -\frac{p}{q}, p<q$ haben wir früher als Grenze der Convergenz $x = \frac{(-r)^r}{(r+1)^{r+1}}$ gefunden. Ist nun p eine gerade Zahl, so fällt wenigstens für die hier in Betracht kommende Wurzel $x = \frac{(-r)^r}{(r+1)^{r+1}}$ mit $x = \frac{r^r}{(r+1)^{r+1}}$ zusammen; es reducirt sich also auf den früheren Fall. Für p ungerade, q gerade besitzt die Gleichung 8) für $x = \frac{(-r)^r}{(r+1)^{r+1}}$ keine ohne Weiteres allgemein angebbare Wurzel, während die Annahme $x = \frac{r^r}{(r+1)^{r+1}}$ diese Grösse imaginär macht. Die Reihe *A)* zerfällt daher für diesen Werth von x in zwei Theile, deren reeller die Summe $X_r = \frac{r+1}{r}$ und imaginärer die Summe Null hat. Für p und q ungerade und $x = -\frac{(-r)^r}{(r+1)^{r+1}}$, also im Grunde $x = \frac{r^r}{(r+1)^{r+1}}$ kommt der Gleichung wieder die Wurzel $X_r = \frac{r+1}{r}$ zu.

Für den zweiten Grenzwerth der Convergenz $x = -\frac{r^r}{(r+1)^{r+1}}$ lässt sich im Allgemeinen keine Wurzel der Gleichung 8) angeben. Hingegen besitzt sie für $x = -\frac{r}{(r+1)^{r+1}}$ und $x = -\frac{(r+1)^r}{r^{r+1}}$ die Wurzeln $X_r = \frac{r-1}{r}$ und $X_r = \frac{r}{r+1}$, respective; diese Werthe von x liegen aber ausserhalb der Grenze der Convergenz der Reihe X_r.

Mit der bisher betrachteten Reihengruppe im innigen Zusammenhange steht die folgende, deren Bildungsgesetz ähnlich, aber etwas einfacher ist:

$$Y_r^{(m)} = 1 + \binom{m+2r+1}{1} x + \binom{m+3r+2}{2} x^2 + \ldots$$
$$+ \binom{m+nr+n-1}{n-1} x^{n-1} + \ldots \qquad B)$$

Hier haben wir:

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{(r+1)^{r+1}}{r^r} \cdot \frac{x}{1+\frac{1}{2n}+}$$

$$\text{Lim} \frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{(r+1)^{r+1}}{r^r} x \ldots$$

und für $x = \frac{r^r}{(r+1)^{r+1}}$

$$\text{Lim}\, n \left[\frac{u_{n-1}}{u_n} - 1\right] = \frac{1}{2}$$

Die obige Reihe convergirt daher für $x < \pm \frac{r^r}{(r+1)^{r+1}}$; sie divergirt aber bereits für $x = \pm \frac{r^r}{(r+1)^{r+1}}$. Sie enthält als Specialfälle wohl ebenfalls die binomische Reihe (für $r = 0$ und $r = -1$) in sich, ist aber trotzdem im Allgemeinen keine einfache Potenzfunction. Denn es ist, wie leicht ersichtlich:

$$Y_r^{(m)} = \frac{1}{m} \cdot \frac{d(X_r^m)}{dx} = X_r^{m-1} \frac{dX}{dx}$$

Aus Gleichung 8) folgt aber

$$\frac{dX_r}{dx} = -\frac{X_r^{r+1}}{(r+1)xX_r^r - 1} = -\frac{X_r^{r+2}}{rX_r - (r+1)}$$

und damit:

$$Y_r^{(m)} = \frac{X_r^{m+r+1}}{(r+1) - rX_r} \qquad 15)$$

Für die beiden oben betrachteten Specialfälle $r = -2$ und $r = -\frac{1}{2}$ ist:

$$Y_{-2}^{(m)} = \frac{X_{-2}^{m-1}}{2X_{-2}-1} = \frac{(1+\sqrt{1+4x})^{m-1}}{2^{m-1}\sqrt{1+4x}}$$

$$Y_{-\frac{1}{2}}^{(m)} = \frac{2X_{-\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}}}{X_{-\frac{1}{2}}+1} = \frac{1}{2^{2m-1}} \; \frac{(x+\sqrt{4+x^2})^{2m}}{\sqrt{4+x^2}}$$

oder im ersten Falle $m+1$ und $\frac{x}{4}$, im zweiten $\frac{m}{2}$ und $2x$ statt m und x setzend:

$$\frac{(1+\sqrt{1+x})^m}{\sqrt{1+x}} = 2^m \left[1 + \binom{m-2}{1}\cdot\frac{x}{4} + \binom{m-3}{2}\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \dots\dots \binom{m-n}{n-1}\left(\frac{x}{4}\right)^{n-1} + \right]$$

$$\frac{(x+\sqrt{1+x^2})^m}{\sqrt{1+x^2}} = 1 + \begin{pmatrix} m \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}(2x) + \begin{pmatrix} m+1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}(2x)^2 + \dots\dots \begin{pmatrix} m+n-2 \\ 2 \\ n-1 \end{pmatrix}(2x)^{n-1} + .$$

Zum Schlusse sei noch erwähnt, dass wohl bereits Lagrange in seiner schönen Abhandlung „Nouvelle méthode pour résoudre es équations littérales“ (Lagrange oeuvres, T. III, p. 5 ff.) beider Entwickelung der Wurzeln einer Gleichung in Reihen auf einige Specialfälle der zuerst betrachteten Reihengruppe A) stiess, dass er aber, dem Zwecke jener Abhandlung entsprechend, die Eigenschaften derselben nicht weiter verfolgte.