

Über die Divisoren der ganzen Zahlen.

Von dem c. M. **Leopold Gegenbauer.**

Ich habe unlängst einige Theoreme über diejenigen Divisoren der ganzen Zahlen mitgetheilt, welche durch kein Quadrat (ausser 1) theilbar sind („Asymptotische Gesetze der Zahlentheorie." Denkschriften der k. Akademie der Wissenschaften, mathematisch-naturwissenschaftliche Classe, 50. Band, I. Abtheilung, p. 36 ff.). In den folgenden Zeilen sollen zunächst einige allgemeinere Sätze, welche sich auf jene Divisoren der ganzen Zahlen, die r^{te} Potenzen und durch keine $(\sigma r)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar sind, beziehen und in denen die eben erwähnten Theoreme als specielle Fälle enthalten sind, abgeleitet und sodann einige Sätze über die Anzahl jener Divisoren einer Zahl, welche nach einem geraden Modul vorgeschriebenen Zahlen congruent sind, aufgestellt werden.

Bezeichnet man die Summe der k^{ten} Potenzen derjenigen Theiler einer Zahl n, welche r^{te} Potenzen und durch keine $(\sigma r)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar sind, mit $\tau_{r,k,\sigma}(n)$, so ist, da bekanntlich $\mu_\sigma(m)$ gleich Null ist, wenn m durch eine σ^{te} Potenz (ausser 1) theilbar ist, sonst aber den Werth $+1$ besitzt:

$$1)\qquad \tau_{r,k,\sigma}(n) = \sum_{d_r} \mu_\sigma\left(\sqrt[r]{\frac{n}{d_r}}\right)\frac{n^k}{d_r^k}$$

wo die Summation über alle Divisoren d_r von n zu erstrecken ist, deren complementärer Divisor eine r^{te} Potenz ist.

Die Formel 1) zeigt, dass folgende Gleichung besteht:

$$2)\qquad \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\tau_{r,k,\sigma}(n)}{n^{s+k}} = \frac{\zeta(rs)\,\zeta(s+k)}{\zeta(\sigma rs)}.$$

Es ist:

$$\sum_{x=1}^{x=[\sqrt[r]{n}]} \left[\frac{n}{x^r}\right] x^{rk} \mu_\sigma(x) = \sum_{x=1,\, y=1}^{x=[\sqrt[r]{n}],\, y=n} \varepsilon\left(\frac{n}{x^r y}\right) x^{rk} \mu_\sigma(x)$$

$$= \sum_{x=1}^{x=n} \varepsilon\left(\frac{n}{x}\right) \left(\sum_{d_r} \mu_\sigma\left(\sqrt[r]{\frac{x}{d_r}}\right) \frac{x^k}{d_r^k}\right)$$

also nach 1):

$$3) \qquad \sum_{x=1}^{x=n} \tau_{r,k,\sigma}(x) = \sum_{x=1}^{x=[\sqrt[r]{n}]} \left[\frac{n}{x^r}\right] x^{rk} \mu_\sigma(x).$$

Schreibt man in der bekannten Relation:

$$\mathfrak{Q}_r(n) = \sum_{x=1}^{x=[\sqrt[r]{n}]} \left[\frac{n}{x^r}\right] \mu(x)$$

für n : $\left[\frac{n}{y^r}\right]$, multiplicirt mit y^k und summirt bezüglich y von 1 $[\sqrt[r]{n}]$, so erhält man:

$$\sum_{y=1}^{y=[\sqrt[r]{n}]} \mathfrak{Q}_r\left(\left[\frac{n}{y^r}\right]\right) y^k = \sum_{x,\, y=1}^{x,\, y=[\sqrt[r]{n}]} \left[\frac{n}{(xy)^r}\right] y^k \mu(x)$$

$$= \sum_{x=1}^{x=[\sqrt[r]{n}]} \left[\frac{n}{x^r}\right] \left(\sum_d \mu\left(\frac{x}{d}\right) d^k\right)$$

oder, weil:

$$\sum_d \mu\left(\frac{m}{d}\right) d^k = \varphi_k(m)$$

ist:

$$4) \qquad \sum_{y=1}^{y=[\sqrt[r]{n}]} \mathfrak{Q}_r\left(\left[\frac{n}{y^r}\right]\right) y^k = \sum_{x=1}^{x=[\sqrt[r]{n}]} \left[\frac{n}{x^r}\right] \varphi_k(x)$$

aus welcher Formel für $k = 0$ die specielle von Herrn Bugajef und mir aufgestellte Gleichung:

$$\sum_{y=1}^{y=\left[\sqrt[r]{n}\right]} \mathfrak{Q}_r\left(\left[\frac{n}{y^r}\right]\right) = n$$

folgt.

Schreibt man in dieser speciellen Formel für $r : \sigma r$ und für $n : \left[\frac{n}{x^r}\right]$, multiplicirt sodann mit $\mu_\sigma(x)$ und summirt bezüglich x von 1 bis $\left[\sqrt[r]{n}\right]$, so erhält man:

$$\sum_{y=1,\, x=1}^{y=\left[\sqrt[\sigma r]{n}\right],\, x=\left[\sqrt[r]{n}\right]} \mathfrak{Q}_{\sigma r}\left(\left[\frac{n}{(y^\sigma x)^r}\right]\right)\mu_\sigma(x) = \sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[r]{n}\right]} \left[\frac{n}{x^r}\right]\mu_\sigma(x)$$

oder wegen 3):

$$\sum_{x=1}^{x\left[\sqrt[r]{n}\right]} \mathfrak{Q}_{\sigma r}\left(\left[\frac{n}{x^r}\right]\right)\left(\sum_{d_\sigma} \mu_\sigma(d_\sigma)\right) = \sum_{x=1}^{x=n} \tau_{r,0,\sigma}(x),$$

welche Relation man unter Berücksichtigung der Formel:

$$\sum_{d_\sigma} \mu_\sigma(d_\sigma) = 1$$

in die folgende verwandeln kann:

5)
$$\sum_{x=1}^{x=n} \tau_{r,0,\sigma}(x) = \sum_{x=1}^{=\left[\sqrt[r]{n}\right]} \mathfrak{Q}_{\sigma r}\left(\left[\frac{n}{x^r}\right]\right).$$

Man hat daher das Theorem:

Die ganzen Zahlen von 1 bis n besitzen eben so viele Divisoren, welche r^{te} Potenzen und durch keine $(\sigma r)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar sind, als die Summe der Anzahlen derjenigen Zahlen beträgt, welche durch keine $(\sigma r)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar und beziehungsweise nicht grösser, als

$$\frac{n}{1^r}, \frac{n}{2^r}, \frac{n}{3^r}, \ldots, \frac{n}{[\sqrt[r]{n}]^r}$$

sind.

Aus der Gleichung 3) ergibt sich die Relation:

$$\sum_{x=1}^{x=n} \tau_{r,-k,\sigma}(x) = n \sum_{x=1}^{x=[\sqrt[r]{n}]} \frac{\mu_\sigma(x)}{x^{r(k+1)}} - \sum_{x=1}^{x=[\sqrt[r]{n}]} \frac{\varepsilon_x \mu_\sigma(x)}{x^{rk}}$$
$$(0 \leqq \varepsilon_x < 1),$$

welche wegen der bekannten Formel:

$$\sum_{x=1}^{x=\infty} \frac{\mu_\sigma(x)}{x^s} = \frac{\zeta(s)}{\zeta(\sigma s)}$$

in die folgende übergeht:

$$6) \qquad \sum_{x=1}^{x=n} \tau_{r,-k,\sigma}(x) = \frac{\zeta(r(k+1))}{\zeta(\sigma r(k+1))} n - \Delta_1 \qquad (r(k+1) > 1)$$

wo:

$$\Delta_1 = n \sum_{x=[\sqrt[r]{n}]+1}^{x=\infty} \frac{\mu_\sigma(x)}{x^{r(k+1)}} + \sum_{x=1}^{x=[\sqrt[r]{n}]} \frac{\varepsilon_x \mu_\sigma(x)}{x^{rk}}$$

ist.

Aus der letzten Gleichung leitet man leicht folgende Relationen ab:

$$|\Delta_1| < \frac{\zeta(r(k+1))}{\zeta(\sigma r(k+1)) n^{k-\frac{1}{r}}} + \frac{\zeta(rk)}{\zeta(\sigma rk)} \qquad (rk > 1)$$

oder einfacher, wenn auch weniger genau:

$$|\Delta_1| < \frac{\pi^2}{6}\left(1 + \frac{1}{n^{k-\frac{1}{r}}}\right) \qquad (rk > 1)$$

$$|\Delta_1| < \frac{\zeta(r+1)}{\zeta(\sigma(r+1))} + \log n + C + \frac{1}{n} \qquad (rk = 1)$$

$$|\Delta_1| < \left(\frac{\zeta(r)}{\zeta(\sigma r)} + 1\right) n^{\frac{1}{r}} \qquad (k = 0,\ r > 1)$$

Die eben abgeleiteten Relationen liefern sofort die Gleichungen:

$$7)\quad \lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=1}^{x=n} \tau_{r,\,-k,\,\sigma}(x)}{n} = \frac{\zeta(r(k+1))}{\zeta(\sigma r(k+1))}$$

$$8)\quad \lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=1}^{x=n} \tau_{r,\,-k,\,2\sigma}(x)}{n} = \frac{2\Gamma(2\sigma r(k+1)+1)\zeta(r(k+1))}{(2\pi)^{2\sigma r(k+1)} B_{\sigma r(k+1)}}$$

$$9)\quad \lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=1}^{x=n} \tau_{r,\,-2k+1,\,\sigma}(x)}{n} = \frac{\Gamma(2\sigma rk+1) B_{rk}}{(2\pi)^{2rk(\sigma-1)} \Gamma(2rk+1) B_{\sigma rk}}$$

$$10)\quad \lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=1}^{x=n} \tau_{2r,\,-k,\,\sigma}(x)}{n} = \frac{\Gamma(2\sigma r(k+1)+1) B_{r(k+1)}}{(2\pi)^{2r(k+1)(\sigma-1)} \Gamma(2r(k+1)+1) B_{\sigma r(k+1)}}$$

Bezeichnet man mit $\tilde{\tau}_{r,k,\sigma}(n)$ die Summe der $k$ten Potenzen derjenigen Divisoren einer ganzen Zahl n, welche $r$te Potenzen und mindestens durch eine (σr)te Potenz (ausser 1) theilbar sind, so ergeben sich aus den letzten Gleichungen die folgenden Relationen:

$$11)\quad \lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=1}^{x=n} \tilde{\tau}_{r,\,-k,\,\sigma}(x)}{n} = \zeta(r(k+1)) \left\{1 - \frac{1}{\zeta(\sigma r(k+1))}\right\}$$

$$12)\quad \lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=1}^{x=n} \tilde{\tau}_{r,\,-k,\,2\sigma}(x)}{n} = \zeta(r(k+1)) \left\{1 - \frac{2\Gamma(2\sigma r(k+1)+1)}{(2\pi)^{2\sigma r(k+1)} B_{\sigma r(k+1)}}\right\}$$

$$13)\quad \lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=1}^{x=n} \tilde{\tau}_{r,\,-2k+1,\,\sigma}(x)}{n} = \frac{(2\pi)^{2kr} B_{kr}}{2\Gamma(2kr+1)} \left\{1 - \frac{2\Gamma(2\sigma kr+1)}{(2\pi)^{2\sigma kr} B_{\sigma kr}}\right\}$$

$$14)\quad \lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=1}^{x=n} \tilde{\tau}_{2r,\,-k,\,\sigma}(x)}{n} =$$

$$= \frac{(2\pi)^{2r(k+1)} B_{r(k+1)}}{2\Gamma(2r(k+1)+1)} \left\{1 - \frac{2\Gamma(2\sigma r(k+1)+1)}{(2\pi)^{2\sigma r(k+1)} B_{\sigma r(k+1)}}\right\}$$

Man kann die aufgestellten Formeln auch auf dem folgenden Wege ableiten.

Schreibt man in der Gleichung:

$$\sum_{x=1}^{x=[\sqrt[r]{n}]} \left[\frac{n}{x^r}\right] x^{rk} = \bar{P}_{k,r}(n)$$

für $n:\left[\frac{n}{y^{\sigma r}}\right]$, multiplicirt sodann mit $y^{\sigma kr}\mu(y)$ und summirt bezüglich y von 1 bis $[\sqrt[\sigma r]{n}]$, so erhält man:

$$\sum_{y=1}^{y=[\sqrt[\sigma r]{n}]} \bar{P}_{k,r}\left(\left[\frac{n}{y^{\sigma r}}\right]\right) y^{\sigma rk}\mu(y) = \sum_{x=1,\,y=1}^{x=[\sqrt[r]{n}],\,y=[\sqrt[\sigma r]{n}]} \left[\frac{n}{(xy^\sigma)^r}\right] (xy^\sigma)^{rk}\mu(y)$$

$$= \sum_{x=1}^{x=[\sqrt[r]{n}]} \left[\frac{n}{x^r}\right] x^{rk} \left(\sum_{d_\sigma} \mu\left(\sqrt[\sigma]{\frac{x}{d_\sigma}}\right)\right)$$

oder wegen der Gleichung:

$$\sum_{d_\sigma} \mu\left(\sqrt[\sigma]{\frac{n}{d_\sigma}}\right) = \mu_\sigma(n)$$

$$\sum_{y=1}^{y=[\sqrt[\sigma r]{n}]} \bar{P}_{k,r}\left(\left[\frac{n}{y^{\sigma r}}\right]\right) y^{\sigma rk}\mu(y) = \sum_{x=1}^{x=[\sqrt[r]{n}]} \left[\frac{n}{x^r}\right] x^{rk}\mu_\sigma(x)$$

welche Gleichung sich nach Formel 3) in die folgende verwandelt:

$$15)\qquad \sum_{x=1}^{x=n} \tau_{r,k,\sigma}(x) = \sum_{y=1}^{y=\left[\sqrt[\sigma r]{n}\right]} \overline{P}_{k,r}\left(\left[\frac{n}{y^{\sigma r}}\right]\right) y^{\sigma r k}\mu(y).$$

Den speciellen Fall $\sigma=2$, $r=1$ dieser Formel habe ich schon früher a. a. O. mitgetheilt.

Verbindet man die Relation 15) mit den von mir mitgetheilten Gleichungen:

$$\overline{P}_{-k,r}(m) = m\zeta(r(k+1)) + \frac{\varepsilon\zeta(r(k+1))}{(m+1)^{rk-1}} + \varepsilon'\zeta(rk)$$
$$(rk>1;\ 0\leqq|\varepsilon|,\ |\varepsilon'|<1)$$

$$\overline{P}_{-k,r}(m) = m\zeta(r+1)+\varepsilon\zeta(r+1)+\varepsilon'\left(\log m+C+\frac{1}{m}\right)$$
$$(rk=1;\ 0\leqq|\varepsilon|,\ |\varepsilon'|<1)$$

$$\overline{P}_{-k,r}(m) = m\zeta(r) + \varepsilon(\zeta(r)+1)m^{\frac{1}{r}}$$
$$(k=0,\ r>1;\ 0\leqq|\varepsilon|,\ |\varepsilon'|<1)$$

so erhält man ebenfalls die oben aufgestellten Formeln.

Die Relation 15) gestattet aber auch den bisher noch nicht behandelten Fall $r=1$, $k=0$ zu erledigen. Setzt man in derselben nämlich $r=1$, $k=0$, so verwandelt sie sich in:

$$16)\qquad \sum_{x=1}^{x=n} \tau_{1,0,\sigma}(x) = \sum_{y=1}^{y=\left[\sqrt[\sigma]{n}\right]} \Psi\left(\left[\frac{n}{y^{\sigma}}\right]\right)\mu(y).$$

Nun ist bekanntlich:

$$\Psi(m) = m(\log m+2C-1)+\varepsilon\sqrt{m}$$

wo:

$$|\varepsilon|<4$$

ist.

Die Gleichung 16) verwandelt sich daher in:

$$\sum_{x=1}^{x=n} \tau_{1,0,\sigma}(x) = \sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[\sigma]{n}\right]} \left[\frac{n}{x^{\sigma}}\right]\left\{\log\left[\frac{n}{x^{\sigma}}\right]+2C-1\right\}\mu(x)+\sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[\sigma]{n}\right]} \varepsilon_x\mu(x)\sqrt{\left[\frac{n}{x^{\sigma}}\right]}$$

oder:

17) $$\sum_{x=1}^{x=n} \tau_{1,\,0,\,\sigma}(x) = \frac{n}{\zeta(\sigma)}\left\{\log n + 2\,C - 1 + \frac{\sigma \mathfrak{F}_\sigma}{\zeta(\sigma)}\right\} + \Delta_2$$

wo:

$$\mathfrak{F}_\sigma = \sum_{x=1}^{x=\infty} \frac{\log x}{x^\sigma}$$

$$\Delta_2 = -n\left\{(2\,C-1)\sum_{y=[\sqrt[\sigma]{n}]+1}^{y=\infty} \frac{\mu(y)}{y^\sigma} - \sum_{y=1}^{y=[\sqrt[\sigma]{n}]} \frac{\mu(y)\log\left(1-\frac{\varepsilon''_y y^\sigma}{n}\right)}{y^\sigma} - \right.$$

$$\left. - \sum_{y=[\sqrt[\sigma]{n}]+1}^{y=\infty} \frac{\mu(y)}{y^\sigma}\log\left(\frac{y^\sigma}{n}\right)\right\} - \sum_{y=1}^{y=[\sqrt[\sigma]{n}]} \varepsilon'_y \mu(y)\left\{\log\left(\left[\frac{n}{y^\sigma}\right]\right) + 2C - 1\right\} +$$

$$+ \sum_{y=1}^{y=[\sqrt[\sigma]{n}]} \varepsilon_y \mu(y)\sqrt{\left[\frac{n}{y^\sigma}\right]}$$

$$(0 \leqq |\varepsilon_y|,\ \varepsilon'_y,\ \varepsilon''_y < 1)$$

ist. Aus der letzten Gleichung ergibt sich für $\sigma > 2$ die Beziehung:

$$|\Delta_2| < n^{\frac{1}{\sigma}}\{\log n + 2\,C + \zeta(\sigma)(2C-1)\} + \sqrt{n}\left(\zeta\left(\frac{\sigma}{2}\right) + 2\log 2 + 4\right)$$

während für $\sigma = 2$, wie schon Herr Mertens gefunden hat:

$$|\Delta_2| < \left(\frac{1}{2}\log n + 5 + 3\,C + 2\log 2\right)\sqrt{n} + 2$$

ist.

Aus der Gleichung 17) ergeben sich daher die Relationen:

18) $$\lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=1}^{x=n} \tau_{1,\,0,\,\sigma}(x)}{n} = \left\{\log n + 2\,C - 1 + \frac{\sigma\mathfrak{F}_\sigma}{\zeta(\sigma)}\right\}\frac{1}{\zeta(\sigma)}$$

19) $$\lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=1}^{x=n} \bar{\tau}_{1,\,0,\,\sigma}(x)}{n} = \left\{1 - \frac{1}{\zeta(\sigma)}\right\}\{\log n + 2\,C - 1\} - \frac{\sigma\mathfrak{F}_\sigma}{\zeta(\sigma)^2}$$

$$20)\ \lim_{n=\infty}\frac{\sum\limits_{x=1}^{x=n}\tau_{1,\,0,\,2\sigma}(x)}{n}=$$
$$=\frac{2\Gamma(2\sigma+1)}{(2\pi)^{2\sigma}B_\sigma}\left\{\log n+2C-1+\frac{4\sigma\Gamma(2\sigma+1)\mathfrak{F}_{2\sigma}}{(2\pi)^{2\sigma}B_\sigma}\right\}$$

$$21)\ \lim_{n=\infty}\frac{\sum\limits_{x=1}^{x=n}\tilde{\tau}_{1,\,0,\,2\sigma}(x)}{n}=$$
$$=\left\{1-\frac{2\Gamma(2\sigma+1)}{(2\pi)^{2\sigma}B_\sigma}\right\}\{\log n+2C-1\}-\frac{8\sigma[\Gamma(2\sigma+1)]^2\mathfrak{F}_{2\sigma}}{(2\pi)^{4\sigma}B_\sigma^2}$$

$$22)\ \lim_{\eta,\,n=\infty}\frac{\sum\limits_{x=n-\eta+1}^{x=n+\eta}\tau_{1,0,\sigma}(x)}{2\eta}=\left\{\log n+2C+\frac{\sigma\mathfrak{F}_\sigma}{\zeta(\sigma)}\right\}\frac{1}{\zeta(\sigma)}$$
$$\left(\lim_{\eta,\,n=\infty}\frac{\eta}{n}=0,\ \lim_{\eta,\,n=\infty}\frac{\sqrt{n}}{\eta}=0\right)$$

$$23)\ \lim_{\eta,\,n=\infty}\frac{\sum\limits_{x=n-\eta+1}^{x=n+\eta}\tilde{\tau}_{1,0,\,\sigma}(x)}{2\eta}=\left\{1-\frac{1}{\zeta(\sigma)}\right\}\{\log n+2C\}-\frac{\sigma\mathfrak{F}_\sigma}{\zeta(\sigma)^2}$$

$$24)\ \lim_{\eta,\,n=\infty}\frac{\sum\limits_{x=n-\eta+1}^{x=n+\eta}\tau_{1,\,0,\,2\sigma}(x)}{2\eta}=$$
$$=\frac{2\Gamma(2\sigma+1)}{(2\pi)^{2\sigma}B_\sigma}\left\{\log n+2C+\frac{4\sigma\Gamma(2\sigma+1)\mathfrak{F}_{2\sigma}}{(2\pi)^{2\sigma}B_\sigma}\right\}$$

$$25)\ \lim_{\eta,\,n=\infty}\frac{\sum\limits_{x=n-\eta+1}^{x=n+\eta}\tilde{\tau}_{1,\,0,\,2\sigma}(x)}{2\eta}=$$
$$=\left\{1-\frac{2\Gamma(2\sigma+1)}{(2\pi)^{2\sigma}B_\sigma}\right\}\{\log n+2C\}-\frac{8\sigma[\Gamma(2\sigma+1)]^2\mathfrak{F}_{2\sigma}}{(2\pi)^{4\sigma}B_\sigma^2}$$

$$26)\ \lim_{\eta, n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=n-\eta+1}^{n=n+\eta} \tau_{1,\,0,\,\sigma}(x)}{2\eta} = \lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=1}^{x=[ne]} \tau_{1,\,0,\,\sigma}(x)}{[ne]}$$

$$27)\ \lim_{\gamma, n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=n-\eta+1}^{x=n+\eta} \tilde{\tau}_{1,\,0,\,\sigma}(x)}{2\eta} = \lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=1}^{x=[ne]} \tilde{\tau}_{1,\,0,\,\sigma}(x)}{[ne]}$$

$$28)\ \lim_{s=\infty} \frac{\sum\limits_{x=1}^{x=10^s} \tau_{1,\,0,\,\sigma}(x) - \sum\limits_{x=1}^{x=10^{s-1}} \tau_{1,\,0,\,\sigma}(x)}{10^s - 10^{s-1}} =$$

$$= \frac{1}{\zeta(\sigma)} \left\{ s \log 10 + \frac{\log 10}{9} + 2C - 1 + \frac{\sigma \mathfrak{F}_\sigma}{\zeta(\sigma)} \right\}$$

$$29)\ \lim_{s=\infty} \frac{\sum\limits_{x=1}^{x=10^s} \tilde{\tau}_{1,\,0,\,\sigma}(x) - \sum\limits_{x=1}^{x=10^{s-1}} \tilde{\tau}_{1,\,0,\,\sigma}(x)}{10^s - 10^{s-1}} =$$

$$= \left\{ 1 - \frac{1}{\zeta(\sigma)} \right\} \left\{ s \log 10 + \frac{\log 10}{9} + 2C - 1 \right\} - \frac{\sigma \mathfrak{F}_\sigma}{\zeta(\sigma)^2}$$

$$30)\ \lim_{s=\infty} \frac{\sum\limits_{x=1}^{x=10^s} \tau_{1,\,0,\,2\sigma}(x) - \sum\limits_{x=1}^{x=10^{s-1}} \tau_{1,\,0,\,2\sigma}(x)}{10^s - 10^{s-1}} =$$

$$= \frac{2\Gamma(2\sigma+1)}{(2\pi)^{2\sigma} B_\sigma} \left\{ s \log 10 + \frac{\log 10}{9} + 2C - 1 + \frac{4\sigma \Gamma(2\sigma+1) \mathfrak{F}_{2\sigma}}{(2\pi)^{2\sigma} B_\sigma} \right\}$$

$$31)\ \lim_{s=\infty} \frac{\sum\limits_{x=1}^{x=10^s} \tilde{\tau}_{1,\,0,\,2\sigma}(x) - \sum\limits_{x=1}^{x=10^{s-1}} \tilde{\tau}_{1,\,0,\,2\sigma}(x)}{10^s - 10^{s-1}} =$$

$$= \left\{ 1 - \frac{2\Gamma(2\sigma+1)}{(2\pi)^{2\sigma} B_\sigma} \right\} \left\{ s \log 10 + \frac{\log 10}{9} + 2C - 1 \right\} - \frac{8\sigma \{\Gamma(2\sigma+1)\}^2 \mathfrak{F}_{2\sigma}}{(2\pi)^{4\sigma} B_\sigma^2}.$$

Von den in den abgeleiteten Formeln enthaltenen arithmetischen Theoremen mögen die folgenden erwähnt werden:

Die Summe der reciproken k^{ten} Potenzen derjenigen Divisoren einer ganzen Zahl, welche r^{te} Potenzen und durch keine $(\sigma r)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar sind, beträgt im Mittel:

$$\frac{\zeta(r(k+1))}{\zeta(\sigma r(k+1))}.$$

Die Summe der reciproken k^{ten} Potenzen derjenigen Divisoren einer ganzen Zahl, welche r^{te} Potenzen und durch keine $(2\sigma r)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar sind, beträgt im Mittel:

$$\frac{2\Gamma(2\sigma r(k+1)+1)\zeta(r(k+1))}{(2\pi)^{2\sigma r(k+1)}B_{\sigma r(k+1)}}.$$

Die Summe der reciproken $(2k-1)^{\text{ten}}$ Potenzen derjenigen Divisoren einer ganzen Zahl, welche r^{te} Potenzen und durch keine $(\sigma r)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar sind, beträgt im Mittel:

$$\frac{\Gamma(2\sigma rk+1)B_{rk}}{(2\pi)^{2rk(\sigma-1)}\Gamma(2rk+1)B_{\sigma rk}}$$

Die Summe der reciproken k^{ten} Potenzen derjenigen Divisoren einer ganzen Zahl, welche $(2r)^{\text{te}}$ Potenzen und durch keine $(2\sigma r)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar sind, beträgt im Mittel:

$$\frac{\Gamma(2\sigma r(k+1)+1)B_{r(k+1)}}{(2\pi)^{2r(k+1)(\sigma-1)}\Gamma(2r(k+1)+1)B_{\sigma r(k+1)}}.$$

Die Summe der reciproken k^{ten} Potenzen derjenigen Divisoren einer ganzen Zahl, welche r^{te} Potenzen und mindestens durch eine $(\sigma r)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar sind, beträgt im Mittel:

$$\zeta(r(k+1))\left(1-\frac{1}{\zeta(\sigma r(k+1))}\right).$$

Die Summe der reciproken k^{ten} Potenzen derjenigen Divisoren einer ganzen Zahl, welche r^{te} Potenzen und mindestens durch eine $(2\sigma r)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar sind, beträgt im Mittel:

$$\zeta(r(k+1))\left\{1-\frac{2\Gamma(2\sigma r(k+1)+1)}{(2\pi)^{2\sigma r(k+1)}B_{\sigma r(k+1)}}\right\}.$$

Die Summe der reciproken $(2k-1)^{\text{ten}}$ Potenzen derjenigen Divisoren einer ganzen Zahl, welche r^{te} Potenzen und mindestens durch eine $(\sigma r)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar sind, beträgt im Mittel:

$$\frac{(2\pi)^{2rk}B_{rk}}{2\Gamma(2rk+1)}\left\{1-\frac{2\Gamma(2\sigma rk+1)}{(2\pi)^{2\sigma rk}B_{\sigma rk}}\right\}.$$

Die Summe der reciproken k^{ten} Potenzen derjenigen Divisoren einer ganzen Zahl, welche $(2r)^{\text{te}}$ Potenzen und mindestens durch eine $(2\sigma r)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar sind, beträgt im Mittel:

$$\frac{(2\pi)^{2r(k+1)}B_{r(k+1)}}{2\Gamma(2r(k+1)+1)}\left\{1-\frac{2\Gamma(2\sigma r(k+1)+1)}{(2\pi)^{2\sigma r(k+1)}B_{\sigma r(k+1)}}\right\}.$$

Die Anzahl derjenigen Divisoren einer ganzen Zahl, welche r^{te} Potenzen und durch keine $(\sigma r)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar sind, beträgt für $r>1$ im Mittel:

$$\frac{\zeta(r)}{\zeta(\sigma r)}.$$

Die Anzahl derjenigen Divisoren einer ganzen Zahl, welche r^{te} Potenzen und durch keine $(2\sigma r)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar sind, beträgt für $r>1$ im Mittel:

$$\frac{2\Gamma(2\sigma r+1)\zeta(r)}{(2\pi)^{2\sigma r}B_{\sigma r}}.$$

Die Anzahl derjenigen Divisoren einer ganzen Zahl, welche $(2r)^{\text{te}}$ Potenzen und durch keine $(2\sigma r)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar sind, beträgt im Mittel:

$$\frac{2\Gamma(2\sigma r+1)B_r}{(2\pi)^{2r(\sigma-1)}\Gamma(2r+1)B_{\sigma r}}.$$

Die Anzahl derjenigen Divisoren einer ganzen Zahl, welche r^{te} Potenzen und mindestens durch eine $(\sigma r)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar sind, beträgt für $r>1$ im Mittel:

$$\zeta(r)\left(1-\frac{1}{\zeta(\sigma r)}\right).$$

Die Anzahl derjenigen Divisoren einer ganzen Zahl, welche r^{te} Potenzen und mindestens durch eine $(2\sigma r)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar sind, beträgt für $r > 1$ im Mittel:

$$\zeta(r)\left\{1 - \frac{2\Gamma(2\sigma r+1)}{(2\pi)^{2\sigma r} B_{\sigma r}}\right\},$$

Die Anzahl derjenigen Divisoren einer ganzen Zahl, welche $(2r)^{\text{te}}$ Potenzen und mindestens durch eine $(2\sigma r)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar sind, beträgt im Mittel;

$$\frac{(2\pi)^{2r} B_r}{2\Gamma(2r+1)}\left\{1 - \frac{2\Gamma(2\sigma r+1)}{(2\pi)^{2\sigma r} B_{\sigma r}}\right\}.$$

Jede ganze Zahl hat im Mittel $\frac{15}{\pi^2}$ quadratische Divisoren, welche durch keine vierte Potenz (ausser 1) theilbar sind.

Jede ganze Zahl hat im Mittel $\frac{315}{2\pi^4}$ quadratische Divisoren, welche durch keine sechste Potenz (ausser 1) theilbar sind.

Jede ganze Zahl hat im Mittel $\frac{1505}{\pi^6}$ quadratische Divisoren, welche durch keine achte Potenz (ausser 1) theilbar sind.

Jede ganze Zahl hat im Mittel $\frac{31185}{2\pi^8}$ quadratische Divisoren, welche durch keine zehnte Potenz (ausser 1) theilbar sind.

Jede ganze Zahl hat im Mittel $\frac{105}{\pi^4}$ biquadratische Divisoren, welche durch keine achte Potenz (ausser 1) theilbar sind.

Jede ganze Zahl hat im Mittel $\frac{14189175}{1382\pi^8}$ biquadratische Divisoren, welche durch keine zwölfte Potenz (ausser 1) theilbar sind.

Ist:

$$\lim_{\eta,\, n=\infty} \frac{\eta}{n} = 0$$

$$\lim_{\eta,\, n=\infty} \frac{\sqrt{n}}{\eta} = 0$$

so besitzt jede ganze Zahl in dem Intervalle $n-\eta+1\ldots n+\eta$ im Mittel:

$$\left\{\log n+2C+\frac{\sigma\mathfrak{F}_\sigma}{\zeta(\sigma)}\right\}\frac{1}{\zeta(\sigma)}$$

Divisoren, welche durch keine σ^{te} Potenz (ausser 1) theilbar sind, und:

$$\left(1-\frac{1}{\zeta(\sigma)}\right)(\log n+2C)-\frac{\sigma\mathfrak{F}_\sigma}{\zeta(\sigma)^2}$$

Divisoren, welche mindestens einen Primfactor in der σ^{ten} oder einer höheren Potenz enthalten.

Ist:

$$\lim_{\eta,\,n=\infty}\frac{\eta}{n}=0$$

$$\lim_{\eta,\,n=\infty}\frac{\sqrt{n}}{\eta}=0$$

so besitzt jede ganze Zahl in dem Intervalle $n-\eta+1\ldots n+\eta$ im Mittel ebenso viele Divisoren, welche durch keine (mindestens eine) σ^{te} Potenz theilbar sind, als jede ganze Zahl in dem Intervalle $1\ldots[ne]$.

Ist:

$$\lim_{\eta,\,n=\infty}\frac{\eta}{n}=0$$

$$\lim_{\eta,\,n=\infty}\frac{\sqrt{n}}{\eta}=0$$

so besitzt jede ganze Zahl in dem Intervalle $n-\eta+1\ldots n+\eta$ im Mittel:

$$\frac{2\Gamma(2\sigma+1)}{(2\pi)^{2\sigma}B_\sigma}\left(\log n+2C+\frac{4\sigma\Gamma(2\sigma+1)\mathfrak{F}_{2\sigma}}{(2\pi)^{2\sigma}B_\sigma}\right)$$

Divisoren, welche durch keine $(2\sigma)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar sind, und:

$$\left(1-\frac{2\Gamma(2\sigma+1)}{(2\pi)^{2\sigma}B_\sigma}\right)(\log n+2C)-\frac{8\sigma\mathfrak{F}_{2\sigma}\{\Gamma(2\sigma+1)\}^2}{(2\pi)^{4\sigma}B_\sigma^2}$$

Divisoren, welche mindestens einen Primfactor in der $(2\sigma)^{\text{ten}}$ oder einer höheren Potenz enthalten.

Jede s-zifferige Zahl hat im Mittel:

$$\frac{1}{\zeta(\sigma)}\left(s\log 10+\frac{\log 10}{9}+2C-1+\frac{\sigma\mathfrak{F}_\sigma}{\zeta(\sigma)}\right)$$

Divisoren, welche durch keine σ^{te} Potenz (ausser 1) theilbar sind, und:

$$\left(1-\frac{1}{\zeta(\sigma)}\right)\left(s\log 10+\frac{\log 10}{9}+2C-1\right)-\frac{\sigma\mathfrak{F}_\sigma}{\zeta(\sigma)^2}$$

Divisoren, welche mindestens einen Primfactor in der σ^{ten} oder einer höheren Potenz enthalten.

Jede s-zifferige Zahl hat im Mittel:

$$\frac{2\Gamma(2\sigma+1)}{(2\pi)^{2\sigma}B_\sigma}\left(s\log 10+\frac{\log 10}{9}+2C-1+\frac{4\sigma\Gamma(2\sigma+1)\mathfrak{F}_{2\sigma}}{(2\pi)^{2\sigma}B_\sigma}\right)$$

Divisoren, welche durch keine $(2\sigma)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar sind, und:

$$\left(1-\frac{2\Gamma(2\sigma+1)}{(2\pi)^{2\sigma}B_\sigma}\right)\left(s\log 10+\frac{\log 10}{9}+2C-1\right)-\frac{8\sigma\mathfrak{F}_{2\sigma}\{\Gamma(2\sigma+1)\}^2}{(2\pi)^{4\sigma}B_\sigma^2}$$

Divisoren, welche mindestens einen Primfactor in der $(2\sigma)^{\text{ten}}$ oder einer höheren Potenz enthalten.

Man hat ferner:

$$\sum_{x=1}^{x=n}(-1)^{\left[\frac{x-1}{r}\right]}\left[\frac{n}{x}\right]=\sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n}]}(-1)^{\left[\frac{x-1}{r}\right]}\left[\frac{n}{x}\right]+$$

$$+\sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n}]}R_r\left(\left[\frac{n}{x}\right]\right)-[\sqrt{n}]R_r([\sqrt{n}])$$

wo:

$$R_r(z)=\alpha$$

ist, wenn:

$$z\equiv\pm\alpha\ (\mathrm{mod.}\ 2r)$$

ist.

Aus dieser Gleichung folgt:

$$\sum_{x=1}^{x=n}(-1)^{\left[\frac{x-1}{r}\right]}\left[\frac{n}{x}\right]=n\sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n}]}\frac{(-1)^{\left[\frac{x-1}{r}\right]}}{x}+\Delta_3$$

wo:

$$\Delta_3 = -\sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n}]} (-1)^{\left[\frac{x-1}{r}\right]} \varepsilon_x + \sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n}]} R_r\left(\left[\frac{n}{x}\right]\right) - [\sqrt{n}]\, R_r([\sqrt{n}])$$

$$(0 \leqq \varepsilon_x < 1)$$

ist.

Nun ist aber:

$$32)\quad \frac{1}{m}\log(1+x^m) + \frac{2}{m}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\left[\frac{m}{2}\right]} \operatorname{cotang}\frac{(2\lambda-1)\pi}{2m} \cdot$$

$$\cdot\left\{\operatorname{arctang}\frac{x-\cos\frac{(2\lambda-1)\pi}{m}}{\sin\frac{(2\lambda-1)\pi}{m}} + \frac{\pi}{2} - \frac{(2\lambda-1)\pi}{m}\right\} =$$

$$= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdot\ \cdot + \frac{x^m}{m} - \frac{x^{m+1}}{m+1} - \frac{x^{m+2}}{m+2} - \frac{x^{m+3}}{m+3} -$$

$$- \frac{x^{2m}}{2m} + \frac{x^{2m+1}}{2m+1} + \frac{x^{2m+2}}{2m+2} + \frac{x^{2m+3}}{2m+3} +$$

$$+ \frac{x^{3m}}{3m} - \frac{x^{3m+1}}{3m+1} -$$

und daher hat man auch:

$$\sum_{x=1}^{x=n} (-1)^{\left[\frac{x-1}{r}\right]} \left[\frac{n}{x}\right] =$$

$$= n\left\{\frac{\log 2}{r} + \frac{\pi}{r^2}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\left[\frac{r}{2}\right]} (r-2\lambda+1)\operatorname{cotang}\frac{(2\lambda-1)\pi}{2r}\right\} + \Delta_4$$

wo:

$$|\Delta_4| < (2r+1)\sqrt{n} + \frac{2}{\sqrt{n}}$$

ist.

Es ist daher:

$$33)\ \lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=1}^{x=n} (-1)^{\left[\frac{x-1}{r}\right]} \left[\frac{n}{x}\right]}{n} =$$

$$= \frac{\log 2}{r} + \frac{\pi}{r^2} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\left[\frac{r}{2}\right]} (r-2\lambda+1) \operatorname{cotang} \frac{(2\lambda-1)\pi}{2r}.$$

Den speciellen Fall $r = 6$ dieser Formel habe ich schon früher a. a. O. mitgetheilt.

Da $(-1)^{\left[\frac{x-1}{r}\right]}$ den Werth $+1$ hat, wenn x einer der Zahlen $1, 2, 3, 4, \ldots, r$ nach dem Modul $2r$ congruent ist, und in allen anderen Fällen gleich -1 ist, so ist der Zähler des auf der linken Seite der letzten Gleichung stehenden Bruches die Differenz aus der Anzahl derjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche eine der Formen $2r\mu+1, 2r\mu+2, \ldots, 2r\mu+r$ besitzen, und der Anzahl der übrigen Divisoren.

Man hat daher die Theoreme:

Die Anzahl derjenigen Divisoren einer ganzen Zahl, welche nach dem Modul $2r$ einer der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, r$ congruent sind, übertrifft die Anzahl der übrigen Theiler im Mittel um:

$$\frac{\log 2}{r} + \frac{\pi}{r^2} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\left[\frac{r}{2}\right]} (r-2\lambda+1) \operatorname{cotang} \frac{(2\lambda-1)\pi}{2r}.$$

Ist:

$$\lim_{\eta,\, n=\infty} \frac{\eta}{n} = 0$$

$$\lim_{\eta,\, n=\infty} \frac{\sqrt{n}}{\eta} = 0$$

so hat jede ganze Zahl im Intervalle $n-\eta+1 \ldots n+\eta$ im Mittel:

$$\frac{1}{2}\left(\log n + 2C + \frac{\log 2}{r} + \frac{\pi}{r^2} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\left[\frac{r}{2}\right]} (r-2\lambda+1) \operatorname{cotang} \frac{(2\lambda-1)\pi}{2r}\right)$$

Divisoren, welche nach dem Modul $2r$ einer der Zahlen 1, 2, 3, ..., r congruent sind, und:

$$\frac{1}{2}\left(\log n+2C-\frac{\log 2}{r}-\frac{\pi}{r^2}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\left[\frac{r}{2}\right]}(r-2\lambda+1)\operatorname{cotang}\frac{(2\lambda-1)\pi}{2r}\right)$$

Divisoren, welche eine der Formen $2\mu r$, $2\mu r+r+1$, $2\mu r+r+2$, ., $2\mu r+2r-1$ besitzen.

Jede s-zifferige Zahl hat im Mittel:

$$\frac{1}{2}\left(s\log 10+2C-1+\frac{\log 10}{9}+\frac{\log 2}{r}+\right.$$
$$\left.+\frac{\pi}{r^2}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\left[\frac{r}{2}\right]}(r-2\lambda+1)\operatorname{cotang}\frac{(2\lambda-1)\pi}{2r}\right)$$

Divisoren, welche nach dem Modul $2r$ einer der Zahlen 1, 2, 3, ..., r congruent sind, und:

$$\frac{1}{2}\left(s\log 10+2C-1+\frac{\log 10}{9}-\frac{\log 2}{r}-\right.$$
$$\left.-\frac{\pi}{r^2}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\left[\frac{r}{2}\right]}(r-2\lambda+1)\operatorname{cotang}\frac{(2\lambda-1)\pi}{2r}\right)$$

Divisoren, welche eine der Formen $2\mu r$, $2\mu r+r+1$, $2\mu r+r+2$, ., $2\mu r+2r-1$ besitzen.

Es ist ferner:

$$\sum_{x=1}^{x=\left[\frac{n+1}{2}\right]}(-1)^{\left[\frac{x-1}{r}\right]}\left[\frac{n}{2x-1}\right]=\sum_{x=1}^{x=\lambda_1}(-1)^{\left[\frac{x-1}{r}\right]}\left[\frac{n}{2x-1}\right]+$$
$$+\sum_{x=1}^{x=\lambda_1}R_r\left(\left[\frac{n+x}{2x}\right]\right)-\lambda_1 R_r(\lambda_1)$$

wo:

$$\lambda_1 = \left[\frac{\sqrt{8n+1}+1}{4}\right]$$

ist.

Berücksichtigt man die Formel 32), so kann man diese Gleichung sofort in folgender Weise schreiben:

$$\sum_{x=1}^{x=\left[\frac{n+1}{2}\right]} (-1)^{\left[\frac{x-1}{r}\right]} \left[\frac{n}{2x-1}\right] = \frac{\pi n}{4r} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=r} \operatorname{cotang} \frac{(2\lambda-1)\pi}{4r} + \Delta_5$$

wo, wie man leicht findet:

$$|\Delta_5| < \frac{(2r+1)(2n+1)+4}{\sqrt{8n+1}-3} + \frac{3(2r+1)}{4}$$

ist.

Es ist also:

$$34)\quad \lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=1}^{x=\left[\frac{n+1}{2}\right]} (-1)^{\left[\frac{x-1}{r}\right]} \left[\frac{n}{2x-1}\right]}{n} = \frac{\pi}{4r} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=r} \operatorname{cotang} \frac{(2\lambda-1)\pi}{4r}$$

Den speciellen Fall $r = 3$ dieser Formel habe ich schon früher a. a. O. mitgetheilt.

Da $(-1)^{\left[\frac{x-1}{r}\right]}$ den Werth $+1$ hat, wenn $2x-1$ eine der Formen $4r\mu+1$, $4r\mu+3$, $4r\mu+5$, . ., $4r\mu+2r-1$ besitzt, in allen anderen Fällen aber gleich -1 ist, so ist der Zähler des auf der linken Seite der letzten Gleichung befindlichen Bruches die Differenz aus der Anzahl derjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche eine der Formen $4r\mu+1$, $4r\mu+3$, $4r\mu+5$, ., $4r\mu+2r-1$ besitzen, und der Anzahl der übrigen ungeraden Divisoren.

Man hat daher die arithmetischen Theoreme:

Die Anzahl derjenigen Divisoren einer Zahl, welche eine der Formen $4r\mu+1$, $4r\mu+3$, $4r\mu+5$, $4r\mu+2r-1$ besitzen, übertrifft die Anzahl der übrigen ungeraden Divisoren im Mittel um:

$$\frac{\pi}{4r}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=r}\operatorname{cotang}\frac{(2\lambda-1)\pi}{4r}.$$

Die Anzahl derjenigen Divisoren einer Zahl, welche eine der Formen $4r\mu+2,\ 4r\mu+4,\ 4r\mu+6,\ \ldots,\ 4r\mu+2r$ besitzen, übertrifft die Anzahl der übrigen geraden Divisoren im Mittel um:

$$\frac{\log 2}{2r}+\frac{\pi}{4r^2}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=r}(r-2\lambda+1)\operatorname{cotang}\frac{(2\lambda-1)\pi}{4r}.$$

Ist:

$$\lim_{\eta,\, n=\infty}\frac{\eta}{n}=0$$

$$\lim_{\eta,\, n=\infty}\frac{\sqrt{n}}{\eta}=0$$

so hat jede Zahl in dem Intervalle $n-\eta+1\ldots n+\eta$ im Mittel:

$$\frac{1}{4}\left(\log n+2C+\log 2+\frac{\pi}{4r}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=r}\operatorname{cotang}\frac{(2\lambda-1)\pi}{4r}\right)$$

Divisoren, welche nach dem Modul $4r$ einer der Zahlen $1, 3, 5, \ldots, 2r-1$ congruent sind, und:

$$\frac{1}{4}\left(\log n+2C+\log 2-\frac{\pi}{4r}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=r}\operatorname{cotang}\frac{(2\lambda-1)\pi}{4r}\right)$$

Divisoren, welche eine der Formen $4r\mu+2r+1,\ 4r\mu+2r+3, \ldots, 4r\mu+4r-1$ besitzen.

Jede s-zifferige Zahl hat im Mittel:

$$\frac{1}{4}\left(s\log 10+2C-1+\log 2+\frac{\log 10}{9}+\frac{\pi}{4r}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=r}\operatorname{cotang}\frac{(2\lambda-1)\pi}{4r}\right)$$

Divisoren, welche nach dem Modul $4r$ einer der Zahlen $1, 3, 5, \ldots, 2r-1$ congruent sind, und:

$$\frac{1}{4}\left(s \log 10+2C-1+\log 2+\frac{\log 10}{9}-\frac{\pi}{4r}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=r}\operatorname{cotang}\frac{(2\lambda-1)\pi}{4r}\right)$$

Divisoren, welche eine der Formen $4r\mu+2r+1$, $4r\mu+2r+3$, $\ldots$, $4r\mu+4r-1$ besitzen.

Ist:

$$\lim_{\eta,\, n=\infty}\frac{\eta}{n}=0$$

$$\lim_{\eta,\, n=\infty}\frac{\sqrt{n}}{\eta}=0$$

so hat jede ganze Zahl in dem Intervalle $n-\eta+1\ldots n+\eta$ im Mittel:

$$\frac{1}{4}\left(\log n+2C+\frac{\log 2}{2r}-\log 2+\right.$$
$$\left.+\frac{\pi}{4r^2}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=r}(r-2\lambda+1)\operatorname{cotang}\frac{(2\lambda-1)\pi}{4r}\right)$$

Divisoren, welche nach dem Modul $4r$ einer der Zahlen 2, 4, 6, $\ldots$, $2r$ congruent sind, während die Anzahl der übrigen geraden Divisoren:

$$\frac{1}{4}\left(\log n+2C-\log 2-\frac{\log 2}{2r}-\right.$$
$$\left.-\frac{\pi}{4r^2}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=r}(r-2\lambda+1)\operatorname{cotang}\frac{(2\lambda-1)\pi}{4r}\right)$$

beträgt.

Jede s-zifferige Zahl hat im Mittel:

$$\frac{1}{4}\left(s\log 10+2C-1-\log 2+\frac{\log 10}{9}+\frac{\log 2}{2r}+\right.$$
$$\left.+\frac{\pi}{4r^2}\sum_{\lambda-1}^{\lambda=r}(r-2\lambda+1)\operatorname{cotang}\frac{(2\lambda-1)\pi}{4r}\right)$$

Divisoren, welche nach dem Modul $4r$ einer der Zahlen 2, 4, 6, ..., $2r$ congruent sind, während die Anzahl der übrigen geraden Divisoren:

$$\frac{1}{4}\left(s\log 10+2C-1-\log 2+\frac{\log 10}{9}-\frac{\log 2}{2r}-\right.$$
$$\left.-\frac{\pi}{4r^2}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=r}(r-2\lambda+1)\operatorname{cotang}\frac{(2\lambda-1)\pi}{4r}\right)$$

beträgt.