©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Über einen Kegelschnitt, welcher die Combinanteneigenschaft in Bezug auf ein Kegelschnittbüschel hat.

Von **F. Mertens.**

Bei der Frage nach den Covarianten eines Kegelschnittbüschels, welche zugleich die Combinanteneigenschaft besitzen, bin ich auf einen Kegelschnitt gestossen, welcher die genannte Eigenschaft hat und sonach zu je zwei Individuen des Kegelschnittbüschels in derselben Beziehung steht.

Ich will Kürze halber den Kegelschnitt, welcher von allen zwei gegebene Kegelschnitte $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}'$ in harmonischen Punktepaaren schneidenden Strahlen berührt wird, und den Kegelschnitt, von dessen Punkten zwei zu einander harmonische Tangentenpaare an $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}'$ gezogen werden können, die beiden harmonischen Kegelschnitte von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ nennen. Die Combinanteneigenschaft des obgenannten Kegelschnittes besteht dann darin, dass sich auf demselben die beiden harmonischen Kegelschnitte je zweier Individuen des Büschels (vollständig) schneiden.

Es seien

$$\begin{aligned} f_x &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1 + 2a_{12}x_1x_2 \\ f'_x &= a'_{11}x_1^2 + a'_{22}x_2^2 + a'_{33}x_3^2 + 2a'_{23}x_2x_3 + 2a'_{31}x_3x_1 + 2a'_{12}x_1x_2 \end{aligned}$$

zwei quadratische Formen von x_1, x_2, x_3 und

$$\begin{aligned} &A_{11}u_1^2 + A_{22}u_2^2 + A_{33}u_3^2 + 2A_{23}u_2u_3 + 2A_{31}u_3u_1 + 2A_{12}u_1u_2 \\ &A'_{11}u_1^2 + A'_{22}u_2^2 + A'_{33}u_3^2 + 2A'_{23}u_2u_3 + 2A'_{31}u_3u_1 + 2A'_{12}u_1u_2 \end{aligned}$$

die adjungirten Formen von f_x, f'_x, wo also

$$\begin{aligned} A_{11} &= a_{22}a_{33} - a_{23}^2 & \qquad A_{23} &= a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23} \\ A'_{11} &= a'_{22}a'_{33} - a_{23}^{2} & \qquad A'_{23} &= a'_{12}a'_{13} - a'_{11}a'_{23} \end{aligned}$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Setzt man dann

$$
\begin{aligned}
&(a_{22}a'_{33}+a_{33}a'_{22}-2a_{23}a'_{23})u_1^2+(a_{33}a'_{11}+a_{11}a'_{33}-2a_{13}a'_{13})u_2^2\\
&+(a_{11}a'_{22}+a_{22}a'_{11}-2a_{12}a'_{12})u_3^2\\
&+2(a_{12}a'_{13}+a_{13}a'_{12}-a_{11}a'_{23}-a_{23}a'_{11})u_2u_3\\
&+2(a_{12}a'_{23}+a_{23}a'_{12}-a_{22}a'_{13}-a_{13}a'_{22})u_3u_1\\
&+2(a_{13}a'_{23}+a_{23}a'_{13}-a_{33}a'_{12}-a_{12}a'_{33})u_1u_2=G_u,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(A_{22}A'_{33}+A_{33}A'_{22}-2A_{23}A'_{23})x_1^2+(A_{33}A'_{11}+A_{11}A'_{33}-2A_{13}A'_{13})x_2^2\\
&+(A_{11}A'_{22}+A_{22}A'_{11}-2A_{12}A'_{12})x_3^2\\
&+2(A_{12}A'_{13}+A_{13}A'_{12}-A_{11}A'_{23}-A_{23}A'_{11})x_2x_3\\
&+2(A_{12}A'_{23}+A_{23}A'_{12}-A_{22}A'_{13}-A_{13}A_{22})x_3x_1\\
&+2(A_{13}A'_{23}+A_{23}A'_{13}-A_{33}A'_{12}-A_{12}A'_{33})x_1x_2=g_x,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&a'_{11}A_{11}+a'_{22}A_{22}+a'_{3}\,A_{33}+2a'_{23}A_{23}+2a'_{31}A_{31}+2a'_{12}A_{12}=E,\\
&a_{11}A'_{11}+a_{22}A'_{22}+a_{33}A'_{33}+2a_{23}A'_{23}+2a_{31}A'_{31}+2a_{12}A'_{12}=E',
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&E'f_x+Ef'_x-3g_x=\varphi_x,\\
&E'f_x+Ef'_x-g_x=\Gamma_x,
\end{aligned}
$$

so ist φ_x eine Covariante mit Combinanteneigenschaft des Kegelschnittbüschels

1.) $$\lambda f_x+\lambda' f'_x=0$$

und

(2.) $$\varphi_x=0$$

die Gleichung des in Frage stehenden Kegelschnittes. Die von demselben behauptete Eigenschaft geht unmittelbar aus der Identität

$$\varphi_x\equiv\Gamma_x-2g_x$$

hervor, wenn man erwägt, dass

$$G_u=0\qquad g_x=0$$

die Gleichungen der beiden harmonischen Kegelschnitte von

(3.) $$f_x=0\qquad f'_x=0$$

(in Strahlen- und Punkt-Coordinaten) und dass Γ_x die — mit

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Punktcoordinaten geschriebene — adjungirte Form von G_u oder

$$\Gamma_x = 0$$

die Gleichung des ersten der beiden harmonischen Kegelschnitte in Punktcoordinaten ist. Der Kegelschnitt (2.) ist, da die Determinante der Form φ mit der Berührungsinvariante der Kegelschnitte (3.) zusammenfällt, immer und nur dann eine eigentliche (nicht zerfallende) Curve 2. Ordnung, wenn der Kegelschnittbüschel vier verschiedene Grundpunkte hat.

Man kann unmittelbar sechs Punkte des Kegelschnittes (2.) angeben. Zu diesem Ende nehme ich an, dass der Kegelschnittbüschel (1.) vier verschiedene Grundpunkte und ein reelles gemeinschaftliches Poldreieck habe. Denkt man sich dann in jeder Seite des letzteren das Punktepaar, welches sowohl von den durch den gegenüberliegenden Eckpunkt laufenden Seiten des Poldreieckes als auch den durch den nämlichen Punkt laufenden Seiten des vollständigen Viereckes, welches die Grundpunkte bilden, harmonisch getrennt wird, so hat man drei Punktepaare des Kegelschnittes (2.).

／ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1885

Band/Volume: 91_2

Autor(en)/Author(s): Mertens F.

Artikel/Article: Über einen Kegelschnitt, welcher die Combinanteneigenschaft in Bezug auf ein Kegelschnittbüschel hat. 637-639