Über die Verschiebung des Vereinigungspunktes der Strahlen beim Durchgange eines Strahlenbüschels monochromatischen Lichtes durch ein Prisma mit gerader Durchsicht.

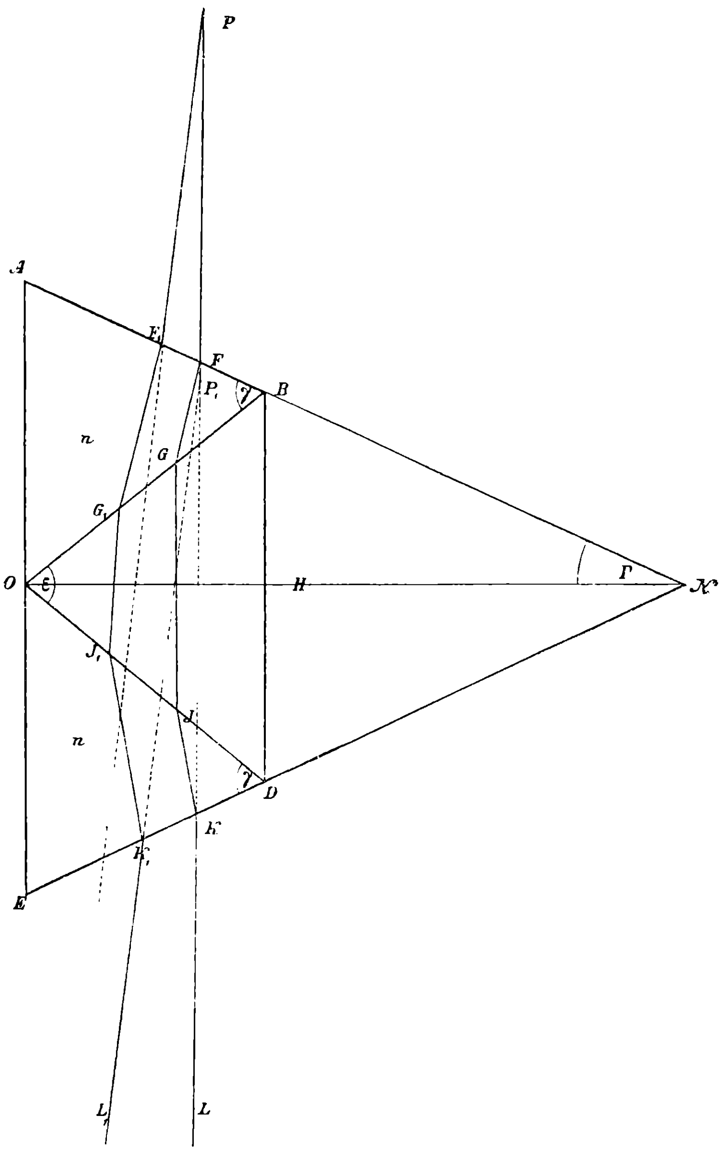
Von Dr. **J. v. Hepperger,**
Assistent an der k. k. Sternwarte zu Wien.

(Mit 2 Holzschnitten.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 5. März 1885.)

Wenn von einem Punkte ausgehende Strahlen homogenen Lichtes auf ein Prisma fallen, so treten dieselben nach dem Durchgange durch das Prisma divergent aus, und zwar so, dass sie in ihrer rückwärtigen Verlängerung sich nicht mehr in einem einzigen Punkte schneiden würden. Wenn jedoch der Strahlenkegel eine sehr geringe Öffnung besitzt, wie z. B. der Lichtkegel in einem Fernrohre von verhältnissmässig grosser Brennweite, so erleiden die einzelnen Strahlen beim Durchtritte durch ein Prisma eine solche Brechung, dass sie anscheinend wie von einem Punkte ausgegangen ihren weiteren Weg fortsetzen. Dieser Punkt, den man mit einigem Rechte Bildpunkt nennen kann, fällt seiner Lage nach nicht mit der Lichtquelle zusammen und erscheint speciell bei Prismen mit gerader Durchsicht auf der die Lichtquelle und das Auge verbindenden Geraden in der Richtung der Lichtbewegung verschoben. Auf die Grösse dieser Verschiebung ist besonders Rücksicht zu nehmen bei der Construction von solchen Telespektroskopen, bei welchen Prismen zwischen dem Objectiv des Fernrohres und dem Spalte des Spektroskops in Anwendung kommen. Da hiezu gewöhnlich Prismen mit gerader Durchsicht genommen werden, so werde ich auch nur für solche die Grösse der Verschiebung des Vereinigungspunktes der Strahlen bestimmen, und der Vereinfachung wegen die Voraussetzung machen, dass der angewandte Prismensatz aus drei Prismen bestehe, wovon die äusseren gleiche Brechungsexponenten und gleiche brechende Winkel besitzen mögen, und das mittlere Prisma gleichschenklig sein soll. Ferner werde ich nur die Vor-

Fig. 1.



gänge in Betracht ziehen, welche sich in einem Hauptschnitte des Prismensatzes abspielen und des weiteren die Annahme machen, dass die Lichtquelle nur monochromatisches Licht aussende.

Es stelle *ABDE* den mit dem leuchtenden Punkte *P* in einer Ebene gelegenen Hauptschnitt des Prismensatzes dar. Brechungsexponent und brechender Winkel der äusseren Prismen mögen mit n, γ, die correspondirenden Grössen für das mittlere Prisma mit ν, bezeichnet werden. Ferners ist $OB = OD$. O sei der Anfangspunkt eines Systemes rechtwinkliger Coordinaten; der positive Theil der Abscissenaxe erstrecke sich in der Richtung der den Winkel ε halbirenden Geraden *ON*, der der Ordinatenaxe in der Richtung *OA*.

PFGJKL sei der Weg jenes Strahles, für welchen die Summe der Ablenkungen der einzelnen Prismen gleich Null ist, so zwar, dass *PF* und *KL* in einer Linie liegen, welche auf *ON* senkrecht steht. $PF_1G_1J_1K_1L_1$ sei der Weg irgend eines anderen Strahles. Die Coordinaten des Punktes *P* seien ξ, η. — Die übrigen Bestimmungsstücke des Laufes des beliebig gewählten Strahles $PF_1G_1J_1K_1L_1$ mögen folgendem Schema entnommen werden:

Brechung bei	F_1	G_1	J_1	K_1
Abscis. ob. Punkte .			v_2	v_3
Ordinat. ob. Punkte .	w	w_1	w_2	w_3
Einfallswinkel	α	$\gamma-\beta$	$\varepsilon-\chi$	
Brechungswinkel ...	β	χ	$\gamma-\beta'$	
Neigung des einfallenden Strahles gegen die Absc.-Achse	$90°-(\Gamma-\alpha)$	$90°-(\Gamma-\beta)$	$90°-(\chi-\frac{\varepsilon}{2})$	$90°-(\beta'-\Gamma)$
Neigung des gebrochenen Strahles gegen die Absc.-Achse	$90°-(\Gamma-\beta)$	$90°-(\chi-\frac{\varepsilon}{2})$	$90°-(\beta'-\Gamma)$	$90°-(\alpha'-\Gamma)$
Brechungsexponent.		$\frac{\nu}{n}$	$\frac{n}{\nu}$	$\frac{1}{n}$
Absz. d. Bildpunktes	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4
Ordin. d. Bildpunktes			η_3	η_4

Einfalls- und Brechungswinkel sind hierin als durchaus positive Grössen zu betrachten und an die Relationen geknüpft

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{\sin\alpha'}{\sin\beta'}=n;\quad \frac{\sin\chi}{\sin(\gamma-\beta)}=\frac{\sin(\varepsilon-\chi)}{\sin(\gamma-\beta')}=\frac{n}{\nu}$$

Die Prismenwinkel γ und sind ebenfalls positive Grössen und mit Γ durch die Gleichung verbunden

$$\Gamma=\gamma-\frac{\varepsilon}{2}$$

Bedeuten x, y die laufenden Coordinaten, so sind die Gleichungen des einfallenden Strahles (PF_1) und des gebrochenen (F_1G_1) nachstehende:

$$(PF_1)\qquad\qquad\qquad\qquad (F_1G_1)$$

$$\eta-w=(\xi-v)\operatorname{cotg}(\Gamma-\alpha);\qquad y-w=(x-v)\operatorname{cotg}(\Gamma-\beta)\quad 1)$$

Ich suche vorerst die Coordinaten des Bildpunktes von P mit Bezug auf die erste Trennungslinie AB. Die Coordinaten dieses Punktes, welche ich mit ξ_1, η_1 bezeichnet habe, erhält man durch Bestimmung des virtuellen Schnittpunktes eines von P ausgegangenen, unendlich nahe an F_1 gebrochenen Strahles mit dem Strahle F_1 G_1. Durch entsprechende Differenziation obiger Gleichungen erhält man:

$$-\partial w=\frac{\xi-v}{\sin^2(\Gamma-\alpha)}\,\partial\alpha-\operatorname{cotg}(\Gamma-\alpha)\,.\,\partial v$$

$$-\partial w=\frac{\xi_1-v}{\sin^2(\Gamma-\beta)}\,\partial\beta-\operatorname{cotg}(\Gamma-\beta)\,.\,\partial v$$

Den Zusammenhang zwischen den Grössen w und v vermittelt die Gleichung:

$$w-BH=(OH-v)\operatorname{tg}\Gamma$$

Demgemäss ist:

$$\partial w=-\operatorname{tg}\Gamma\,.\,\partial v$$

Anderseits ist auch:

$$\cos\alpha\,.\,\partial\alpha=n\cos\beta\,.\,\partial\beta$$

Unter Berücksichtigung dieser beiden Relationen bekommt man:

$$[\operatorname{tg}\Gamma+\operatorname{cotg}(\Gamma-\alpha)]\,\partial v=\frac{\xi-v}{\sin^2(\Gamma-\alpha)}\,.\,\partial\alpha$$

$$[\operatorname{tg}\Gamma + \operatorname{cotg}(\Gamma-\beta)]\,\partial v = \frac{\xi_1 - v}{\sin^2(\Gamma-\beta)}\;\frac{\cos\alpha}{n\cos\beta}\,.\,\partial\alpha$$

Durch Elimination von ∂v und $\partial\alpha$ aus vorstehenden Gleichungen erhält man nach einfacher Reduction die Bestimmungsgleichung für ξ_1:

$$\xi_1 - v = (\xi - v)\,.\,n\,.\,\frac{\cos^2\beta\,.\,\sin(\Gamma-\beta)}{\cos^2\alpha\,.\,\sin(\Gamma-\alpha)} \qquad 2)$$

Die zugehörige Ordinate ist bestimmt durch:

$$\eta_1 - w = (\xi_1 - v)\operatorname{cotg}(\Gamma-\beta)$$

Bei der nächstfolgenden Brechung an *OB* haben ξ_1, η_1 an Stelle von ξ, η zu treten, und sind überhaupt alle in der Columne F_1 enthaltenen Grössen durch die nebenstehenden der Columne G_1 zu ersetzen. Man erhält sonach:

$$\xi_2 - v_1 = (\xi_1 - v_1)\,.\,\frac{\nu}{n}\;\frac{\cos^2\chi\,.\,\sin\left(\chi-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\cos^2(\gamma-\beta)\sin(\Gamma-\beta)} \qquad 3)$$

$$\eta_2 - w_1 = (\xi_2 - v_1)\,.\operatorname{cotg}\left(\chi - \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

und in gleicher Weise fortfahrend:

$$\xi_3 - v_2 = (\xi_2 - v_2)\,.\,\frac{n}{\nu}\;\frac{\cos^2(\gamma-\beta')\sin(\beta'-\Gamma)}{\cos^2(\varepsilon-\chi)\,.\,\sin\left(\chi-\frac{\varepsilon}{2}\right)} \qquad 4)$$

$$\eta_3 - w_2 = (\xi_3 - v_2)\,.\operatorname{cotg}(\beta'-\Gamma)$$

$$\xi_4 - v_3 = (\xi_3 - v_3)\,\frac{1}{n}\,\frac{\cos^2\alpha'\,.\,\sin(\alpha'-\Gamma)}{\cos^2\beta'\,.\,\sin(\beta'-\Gamma)} \qquad 5)$$

$$\eta_4 - w_3 = (\xi_4 - v_3)\operatorname{cotg}(\alpha'-\Gamma)$$

Betrachtet man daher den Punkt ξ, η als Emissionspunkt eines Strahlenfächers von unendlich kleiner Öffnung, dessen Mittellinie gegen einen beliebigen Punkt des entsprechenden Hauptschnittes des Prismensatzes gerichtet ist, so treten die Strahlen nach allen Brechungen so aus dem Prisma aus, als kämen sie von einem Punkte, dessen Coordinaten ξ_4, η_4 sind. Des allgemeinen Characters der vorstehenden Entwicklungen halber gelten dieselben auch für den Fall, dass der von dem Punkte ξ, η ausgehende Axenstrahl den Prismensatz unter dem Einfallswinkel trifft, welcher dem Minimum der Ablenkung entspricht, und demgemäss nach den gemachten Voraussetzungen den Prismensatz so verlässt, dass der austretende Strahl mit dem eintretenden in derselben Geraden zu liegen kommt. In diesem Falle ist aber $\xi_4 = \xi$, und dem entsprechend $\eta - \eta_4$ die auf der gemeinschaftlichen Mittellinie gemessene Verschiebung der Scheitelpunkte des ein- und austretenden Strahlenfächers, oder die Differenz von Gegenstands- und Bildweite für den betreffenden Prismensatz. Als Vorbereitung zum Übergange auf diesen Grenzfall werde ich noch folgende Umgestaltungen vornehmen.

Die Elimination von $\xi - v$ aus den Gleichungen 1) und 2) ergibt:

$$\xi_1 - v = (\eta - w) . n . \frac{\cos^2\beta . \sin(\Gamma - \beta)}{\cos^2\alpha . \cos(\Gamma - \alpha)} \tag{6}$$

Nach Vornahme der Unterstellung:

$$X = \frac{\nu}{n} \frac{\cos^2\chi . \sin(\chi - \frac{\varepsilon}{2})}{\cos^2(\gamma - \beta)\sin(\Gamma - \beta)}$$

$$Y = \frac{n}{\nu} \frac{\cos^2(\gamma - \beta')\sin(\beta' - \Gamma)}{\cos^2(\varepsilon - \chi)\sin(\chi - \frac{\varepsilon}{2})}$$

lauten die Gleichungen 3) und 4):

$$\xi_2 - v_1 = (\xi_1 - v_1) . X$$
$$\xi_3 - v_2 = (\xi_2 - v_2) . Y$$

durch Elimination von ξ_2 erhält man:

$$\xi_3 = v_2 - (v_2 - v_1) . Y + (\xi_1 - v_1) . X . Y$$

Es ist aber, wie aus dem Dreiecke OG_1J_1 folgt:

$$v_2 = v_1 \frac{\cos\chi}{\cos(\varepsilon - \chi)}$$

daher

$$v_2 - v_1 = -\frac{2v_1}{\cos(\varepsilon - \chi)} \sin\frac{\varepsilon}{2} . \sin(\chi - \frac{\varepsilon}{2})$$

und demgemäss

$$(v_2 - v_1)\, Y = 2v_1 . \frac{n}{\nu} . \frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}\cos^2(\gamma - \beta')\sin(\Gamma - \beta')}{\cos^3(\varepsilon - \chi)}$$

während

$$X.Y = -\frac{\cos^2\chi . \cos^2(\gamma - \beta') . \sin(\Gamma - \beta')}{\cos^2(\varepsilon - \chi) . \cos^2(\gamma - \beta') . \sin(\Gamma - \beta)}$$

Der Grenzfall, welchen ich jetzt betrachten werde, zeichnet sich dadurch aus, dass der einfallende Strahl parallel zur Ordinaten-Axe liegt, also die vordere Prismenfläche unter dem Einfallswinkel Γ trifft, und durch den Prismensatz weder abgelenkt noch verschoben wird. Die aus dieser Annahme erwachsenden Bedingungsgleichungen sind folgende:

$$\alpha = \alpha' = \Gamma; \quad \xi_4 = v_3 = v = \xi$$

$$\beta = \beta'; \quad v_2 = v_1$$

$$\chi = \frac{\varepsilon}{2}; \quad w_2 = -w_1$$

$$w_3 = -w$$

Mit Rücksichtnahme hierauf gelangt man zu folgenden Formeln

$$(v_2 - v_1) . Y = 2v_1 . \frac{n}{\nu} . \frac{\sin\frac{\varepsilon}{2} \cos^2(\gamma - \beta) \sin(\Gamma - \beta)}{\cos^3\frac{\varepsilon}{2}}$$

$$X.Y = -1$$

Nach Einführung der Bezeichnung

$$Z = \frac{n}{\nu} . \frac{\sin\frac{\varepsilon}{2} . \cos^2(\gamma - \beta) \sin(\Gamma - \beta)}{\cos^3\frac{\varepsilon}{2}}$$

erhält man

$$\xi_3 = 2v_1 - 2v_1 Z - \xi_1$$

Aus Formel 6) wird

$$\xi_1 - \xi = (\eta - w) . n . \frac{\cos^2\beta . \sin(\Gamma - \beta)}{\cos^2\Gamma} \tag{7}$$

Durch Zusammenfassung des Gleichungspaares 5) erhält man unter Berücksichtigung der Bedingungsgleichungen für den in Rede stehenden Grenzfall:

$$\eta_4 + w = -(\xi_3 - \xi) . \frac{1}{n} . \frac{\cos^2\Gamma}{\cos^2\beta . \sin(\Gamma - \beta)}$$

Durch Multiplication dieser Gleichung mit der unmittelbar vorangehenden ergibt sich:

$$(\eta_4+w)(\xi_1-\xi) = -(\eta-w)(\xi_3-\xi)$$

oder

$$\eta_4(\xi_1-\xi) = \eta(\xi-\xi_3)-w(\xi_1-\xi_3)$$

Diese Gleichung verwandelt sich nach Einsetzung des früher abgeleiteten Ausdruckes für ξ_3 in folgende:

$$\eta_4(\xi_1-\xi) = \eta(\xi-2v_1-2v_1 . Z+\xi_1)-w(\xi_1-2v_1+2v_1 . Z+\xi_1)$$

$$\eta_4(\xi_1-\xi) = -\eta(\xi_1-\xi)+2(\eta-w)(\xi_1-v_1)+2(\eta-w) . v_1 Z.$$

Es ist daher

$$\eta_4 = -\eta+2(\eta-w)\frac{\xi_1-\xi+\xi-v_1}{\xi_1-\xi} + 2\frac{\eta-w}{\xi_1-\xi} . v_1 Z$$

$$\eta_4 = \eta-2w+2\frac{\eta-w}{\xi_1-\xi}(\xi-v_1+v_1 Z)$$

Durch Verbindung dieser Gleichung mit Gleichung 7) erhält man nach einfacher Reduction:

$$\frac{1}{2}(\eta-\eta_4) = w - \frac{1}{n}\,\frac{\cos^2\Gamma}{\cos^2\beta . \sin(\Gamma-\beta)}(\xi-v_1+v_1 Z)$$

Ich werde nun die Grössen ξ, w, v_1 als Functionen der Constanten des Prismensatzes und einer einzigen Variablen (λ) ausdrücken, welche die Entfernung des Punktes, in welchem der einfallende Strahl die erste Prismenfläche trifft, von der zugehörigen brechenden Kante darstellen soll. Nenne ich die Länge einer Seite des als gleichschenklig vorausgesetzten mittleren Prisma's c, so finden folgende Relationen statt:

$$BF = KD = \lambda; \quad w = c \sin\frac{\varepsilon}{2} + \lambda \sin\Gamma$$

$$OB = OD = c; \quad \xi = c \cos\frac{\varepsilon}{2} - \lambda \cos\Gamma$$

$$v_1 = c \cos\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\lambda \cos\frac{\varepsilon}{2}\cos\beta}{\cos(\gamma-\beta)}.$$

Hieraus bestimmt sich

$$\xi-v_1 = \lambda\left[\frac{\cos\frac{\varepsilon}{2}\cos\beta}{\cos(\gamma-\beta)} - \cos\Gamma\right]$$

Da aber

$$\cos\frac{\varepsilon}{2} = \cos(\gamma - \Gamma)$$

so wird

$$\xi - v_1 = \frac{\lambda \sin\gamma \,.\, \sin(\Gamma - \beta)}{\cos(\gamma - \beta)}$$

Durch Substitution dieser Ausdrücke ergibt sich:

$$\frac{1}{2}(\eta - \eta_4) = c\sin\frac{\varepsilon}{2} + \lambda\sin\Gamma - \frac{\lambda}{n}\,\frac{\cos^2\Gamma\sin\gamma}{\cos^2\beta \,.\, \cos(\gamma - \beta)}$$

$$-\frac{Z}{n}\,\frac{\cos^2\Gamma}{\cos^2\beta \,.\, \sin(\Gamma - \beta)}\left(c\cos\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\lambda\cos\frac{\varepsilon}{2}\cos\beta}{\cos(\gamma - \beta)}\right).$$

Die Bestimmungsgleichung für $\eta - \eta_4$, welche Grösse ich mit V bezeichnen will, besitzt sonach die Form:

$${}^1\!/_2\, V = c \,.\, R + \lambda \,.\, S,$$

da

$$\frac{1}{n} = \frac{\sin\beta}{\sin\Gamma};\; \frac{n}{\nu} = \frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}}{\sin(\gamma - \beta)}$$

so ist, wenn ich zur Vereinfachung der Schreibweise $\delta = \gamma - \beta$ setze,

$$R = \sin\frac{\varepsilon}{2}\left[1 - \frac{1}{\nu}\,\frac{\cos^2\delta \,.\, \cos^2\Gamma}{\cos^2\frac{\varepsilon}{2}\cos^2\beta}\right]$$

$$S = \sin\Gamma + \frac{Z}{n}\,\frac{\cos^2\Gamma \,.\, \cos\frac{\varepsilon}{2}}{\cos\beta \,.\, \cos\delta \,.\, \sin(\Gamma - \beta)} - \frac{1}{n}\,\frac{\cos^2\Gamma\sin\gamma}{\cos^2\beta \,.\, \cos\delta}$$

Ich werde nun noch den Ausdruck für S etwas vereinfachen.

Es ist

$$\sin\Gamma + \frac{Z}{n}\cdot\frac{\cos^2\Gamma \,.\, \cos\frac{\varepsilon}{2}}{\cos\beta \,.\, \cos\delta\,\sin(\Gamma - \beta)} =$$

$$\sin\Gamma + \frac{\mathrm{tg}^2\frac{\varepsilon}{2} \,.\, \sin\beta\cos\delta \,.\, \cos^2\Gamma}{\cos\beta\sin\delta \,.\, \sin\Gamma} =$$

$$\frac{\sin^2\Gamma\cos\beta\sin\delta + \mathrm{tg}^2\frac{\varepsilon}{2}\sin\beta\cos\delta \,.\, \cos^2\Gamma}{\cos\beta\sin\delta\sin\Gamma} =$$

$$\frac{\sin^2\Gamma(\sin\gamma-\cos\delta\sin\beta)+\mathrm{tg}^2\frac{\varepsilon}{2}\sin\beta.\cos\delta.\cos^2\Gamma}{\cos\beta.\sin\delta.\sin\Gamma}=$$

$$\frac{\sin\gamma}{\cos\beta.\sin\delta.\sin\Gamma}\left\{\sin^2\Gamma+\frac{\cos\delta\sin\beta\sin(\varepsilon-\gamma)}{\cos^2\frac{\varepsilon}{2}}\right\}$$

Nach diesen vorläufigen Entwicklungen kann ich den Factor von λ folgendermassen schreiben:

$$S=\frac{\sin\gamma}{\cos^2\beta.\sin\delta.\cos\delta.\sin\Gamma}\left\{\begin{array}{c}\sin^2\Gamma\cos\beta\cos\delta-\cos^2\Gamma\sin\beta\sin\delta\\ +\dfrac{\cos^2\delta.\sin\beta.\cos\beta.\sin(\varepsilon-\gamma)}{\cos^2\frac{\varepsilon}{2}}\end{array}\right\}$$

Die ersten zwei Glieder des in der Klammer befindlichen Ausdruckes ergeben, wenn man $\cos\delta$ und $\sin\delta$ mittelst der Relation $\delta=\gamma-\beta$ als Functionen von γ und β ausdrückt:

$$\cos\gamma(\sin^2\Gamma\cos^2\beta+\cos^2\Gamma\sin^2\beta)+\sin\gamma\sin\beta\cos\beta(\sin^2\Gamma-\cos^2\Gamma)$$

oder

$$\cos\gamma(\sin^2(\Gamma-\beta)+\sin 2\Gamma\sin\beta\cos\beta)-\sin\gamma\sin\beta\cos\beta\cos 2\Gamma,$$

das ist

$$\cos\gamma\sin^2(\Gamma-\beta)-\sin\beta\cos\beta\sin(\varepsilon-\gamma).$$

Durch Hinzufügung des dritten Gliedes erhält man, da

$$\cos^2\frac{\varepsilon}{2}-\cos^2\delta=\sin(\Gamma-\beta)\sin(\gamma+\frac{\varepsilon}{2}-\beta)$$

$$S=\frac{\sin\gamma\sin(\Gamma-\beta)}{\cos^2\beta.\sin\delta.\cos\delta.\sin\Gamma}\left\{\begin{array}{c}\cos\gamma\sin(\Gamma-\beta)\\ -\dfrac{\sin\beta\cos\beta.\sin(\varepsilon-\gamma)\sin(\gamma+\frac{\varepsilon}{2}-\beta)}{\cos^2\frac{\varepsilon}{2}}\end{array}\right\}$$

Da

$$R=\sin\frac{\varepsilon}{2}\left[1-\frac{1}{\nu}\frac{\cos^2\delta\cos^2\Gamma}{\cos^2\frac{\varepsilon}{2}\cos^2\beta}\right],$$

so erhält man V aus der Gleichung

$$V=2c.R+2\lambda.S, \tag{8}$$

worin für R und S obige Ausdrücke einzusetzen sind. Vorstehende Gleichung lässt sofort erkennen, dass V, das ist die Grösse der Verschiebung des Vereinigungspunktes der Strahlen, unabhängig ist von α, und in Folge dessen durch Entfernung des Prismensatzes von dem Ausgangspunkte der Strahlen nicht geändert wird. Die Gleichung 8) behält aber auch dann noch ihre Giltigkeit bei, wenn die Strahlen convergent auf das Prisma fallen, wie sofort daraus erhellt, dass der Gang der in Fig. 1) gezeichneten Strahlen genau derselbe bleiben würde, wenn das Licht den Prismensatz in umgekehrter Richtung durchlaufen würde, wenn also die einfallenden Strahlen durch LK, $L_1 K_1$ dargestellt wären. Letztere Strahlen würden sich nicht mehr im Punkte P_1 schneiden, sondern im Punkte P; ihr Durchschnittspunkt wäre sonach wiederum in der Richtung der Lichtbewegung verschoben worden.

Um die bisherigen Entwicklungen an einem Beispiele zu illustriren, nehme ich an, dass das mittlere Prisma einen brechenden Winkel von 120° besitze und aus Flintglas Nr. 13 bestehe, während die beiden äusseren Prismen aus Glas von St. Gobin gefertigt seien. Die Brechungsexponenten dieser Glassorten sind für die nachbenannten Fraunhofer'schen Linien folgende:

	Flintglas Nr. 13 (ν)	Glas von St. Gobin (n)
B.	1·627749	1·586757
F.	1·648260	1·595808
H..	1·671062	1·604761

Es soll nun der Prismensatz für Licht von der Wellenlänge F gerade Durchsicht gewähren. Da $\varepsilon = 120°$ und der Einfallswinkel $\Gamma = \gamma - \frac{\varepsilon}{2}$ angenommen wurde, so muss γ den Werth besitzen:

$$\gamma = 69° \; 10' \; 53''74.$$

Es ist also

$$\begin{aligned} \Gamma &= 9° \; 10' \; 53''74 \\ \beta &= 5 \;\;\; 44 \;\;\; 18·84 \\ \delta &= 63 \;\;\; 26 \;\;\; 34·90 \\ R &= +0·452489 \\ S &= -0·209754 \end{aligned}$$

Wenn nun die Länge jeder der beiden Seiten des mittleren Prisma's 20 Mm. beträgt, und für λ die Werthe 0·5 Mm. und 8·5 Mm. angenommen werden, so ergibt sich:

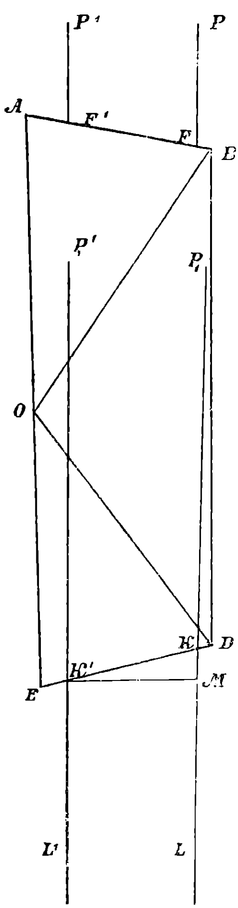
$$\left.\begin{array}{ll} \text{für } \lambda = 0\cdot 5 \text{ Mm.} & V = 17\cdot 8898 \text{ Mm.} \\ \text{für } \lambda = 8\cdot 5 & V = 14\cdot 5337 \end{array}\right\} c = 20 \text{ Mm.}$$

Einer Änderung von λ um 8 Mm. entspricht also eine Änderung der Verschiebung (ΔV) im Betrage von:

$$\Delta V = -3\cdot 3561 \text{ Mm.}$$

In ähnlicher Weise bedingt eine Änderung von λ auch eine Änderung der Verschiebung des Vereinigungspunktes andersfärbiger Strahlen, für welche unter den angenommenen Verhältnissen keine gerade Durchsicht mehr existirt. Es seien P und P' zwei Punkte, welche sich in gleicher Entfernung von der den brechenden Winkel des mittleren Prisma's halbirenden Geraden befinden, und Licht von der Wellenlänge B unter dem Einfallswinkel Γ auf das Prisma senden. Der virtuelle Schnittpunkt der von P ausgehenden, bei F auf das Prisma fallenden und in der Richtung KL austretenden Strahles mit einem der Nachbarstrahlen sei P_1; P'_1 sei in gleicher Weise dem Punkte P' conjugirt.

Fig. 2.



Da angenommen wurde, dass die Strahlen PF und $P'F'$ unter demselben Winkel Γ auf das Prisma fallen, so muss auch zwischen den austretenden Strahlen Parallelismus bestehen. Wenn ich den Austrittswinkel, den früheren Bezeichnungen conform, α' nenne und $K'M$ senkrecht zu KL ziehe, so ist auch

$$\sphericalangle KK'M = \alpha'$$

Es sei ferners

$$\begin{array}{ll} BF = \lambda; & BF' = \lambda'; \\ DK = \sigma; & DK' = \sigma'; \\ P_1K = l; & P'_1K' = l'; \\ \multicolumn{2}{l}{OB = OD = c = 20 \text{ Mm.}} \end{array}$$

Ich kann nun die durch Änderung von λ bewirkte Änderung der Verschiebung die ich wieder mit ΔV bezeichnen will, ausdrücken in der Form:

$$\Delta V = l - l' + (\sigma' - \sigma)\sin\alpha'.$$

Zur numerischen Bestimmung dieser Grössen dienen die bereits entwickelten Gleichungen:

$$\xi_1 - v = (\eta - w).n.\frac{\cos^2\beta.\sin(\Gamma-\beta)}{\cos^2\Gamma}$$

$$w = c\sin\frac{\varepsilon}{2} + \lambda\sin\Gamma$$

$$v = c\cos\frac{\varepsilon}{2} - \lambda\cos\Gamma$$

$$v - v_1 = \lambda.\frac{\sin\gamma\sin(\Gamma-\beta)}{\cos(\gamma-\beta)}$$

$$\xi_2 - v_1 = (\xi_1 - v_1)\frac{\nu}{n}.\frac{\cos^2\chi\sin\left(\chi - \frac{\varepsilon}{2}\right)}{\cos^2(\gamma-\beta)\sin(\Gamma-\beta)}$$

$$v_1 - v_2 = 2v_1.\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}.\sin\left(\chi-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\cos(\varepsilon-\chi)}$$

$$\xi_3 - v_2 = (\xi_2 - v_2)\frac{n}{\nu}\frac{\cos^2(\gamma-\beta')\sin(\beta'-\Gamma)}{\cos^2(\varepsilon-\chi)\sin\left(\chi-\frac{\varepsilon}{2}\right)}$$

$$v_2 - v_3 = \sigma.\frac{\sin\gamma\sin(\beta'-\Gamma)}{\cos(\gamma-\beta')}$$

$$\xi_4 - v_3 = (\xi_3 - v_3)\frac{1}{n}.\frac{\cos^2\alpha'\sin(\alpha'-\Gamma)}{\cos^2\beta'\sin(\beta'-\Gamma)}$$

$$\eta_4 - w_3 = (\xi_4 - v_3).\operatorname{cotg}(\alpha'-\Gamma).$$

Zur Bestimmung der in vorstehenden Formeln vorkommenden Grösse σ dient die Gleichung

$$\sigma = \lambda.\frac{\cos\beta.\cos\chi.\cos(\gamma-\beta')}{\cos(\gamma-\beta).\cos(\varepsilon-\chi)\cos\beta'}$$

$$+ c.\frac{\cos(\gamma-\beta')}{\cos\beta'}\left[1 - \frac{\cos\chi}{\cos(\varepsilon-\chi)}\right],$$

welche man durch Elimination von OG und OJ (s. Fig. 1) aus folgenden Gleichungen erhält:

$$c - OG = BF \frac{\cos\beta}{\cos(\gamma-\beta)}$$

$$OJ = OG.\frac{\cos\chi}{\cos(\varepsilon-\chi)}$$

$$DK = (c - OJ).\frac{\cos(\gamma-\beta')}{\cos\beta'}.$$

In diesen Gleichungen ist $BF = \lambda$ und $DK = \sigma$; die Grösse l erhält man nun aus der Gleichung

$$l^2 = (\eta_4 - w_3)^2 + (\xi_4 - v_3)^2$$

und ebenso

$$l'^2 = (\eta'_4 - w'_3)^2 + (\xi'_4 - v'_3)^2$$

worin $\eta'_4 - w'_3$, $\xi'_4 - v'_3$ die durch Ersetzung von λ durch λ' veränderten Werthe von $\eta_4 - w_3$, $\xi_4 - v_3$ darstellen.

Diese Formeln gelten in gleicher Weise auch für den Fall, dass die Punkte P, P' Licht von irgend einer anderen Wellenlänge aussenden. Im Folgenden gebe ich eine Zusammenstellung der numerischen Werthe von l, l', ΔV, sowie der wichtigsten zu deren Bestimmung dienenden Grössen, welche berechnet worden sind, unter der Annahme, dass Licht von der Wellenlänge der Linie B respective H unter dem Einfallswinkel Γ auf den Prismensatz von der früher beschriebenen Form und Zusammensetzung auftrifft und die Ordinate der Punkt P, P' 20 Mm. beträgt, während $\lambda = 0{\cdot}5$ Mm., $\lambda' = 8{\cdot}5$ Mm. gesetzt wurde.

$$\eta = 20 \text{ Mm.}$$

	B	H
Γ	9°10'53"74	9°10'53"74
β	5 46 17·08	5 42 23·20
χ	60 39 30·42	59 13 53·44
β'	7 14 34·28	3 51 15·39
α'	11 32 23·74	6 11 33·28

		B	H
		mm	mm
$\lambda = 0 \cdot 5$ mm	v	$9 \cdot 506405$	$9 \cdot 506405$
	w	$17 \cdot 400290$	$17 \cdot 400290$
	$v - v_1$	$0 \cdot 062109$	$0 \cdot 063435$
	$v_1 - v_2$	$0 \cdot 368656$	$- 0 \cdot 449210$
	$v_2 - v_3$	$- 0 \cdot 058932$	$- 0 \cdot 018756$
	σ	$0 \cdot 876660$	$0 \cdot 090219$
	l	$20 \cdot 7145$	$17 \cdot 8003$
	v'	$1 \cdot 608900$	$1 \cdot 608900$
$\lambda' = 8 \cdot 5$	w'	$18 \cdot 676800$	$18 \cdot 676800$
	$v' - v'_1$	$1 \cdot 055860$	$1 \cdot 078392$
	$v'_1 - v'_2$	$0 \cdot 021588$	$- 0 \cdot 025237$
	$v'_2 - v'_3$	$- 0 \cdot 603650$	$- 1 \cdot 642930$
	σ'	$8 \cdot 979950$	$7 \cdot 902572$
	l'	$24 \cdot 3954$	$23 \cdot 5982$
	$(\sigma' - \sigma) \sin \alpha'$	$1 \cdot 6211$	$0 \cdot 8427$
	ΔV	$-2 \cdot 0598$	$-4 \cdot 9552$

Wenn $\eta = 30°$ angenommen wird, so ergibt sich für

	B	H
	mm	mm
l	$30 \cdot 8210$	$27 \cdot 4721$
l'	$34 \cdot 5017$	$33 \cdot 2697$
ΔV	$- 2 \cdot 0596$	$- 4 \cdot 9549$

Da für diese Lichtsorten nicht mehr gerade Durchsicht besteht, so wird auch ΔV nicht mehr vollständig unabhängig von η sein. Im vorliegenden Falle sind jedoch die Abweichungen der Werthe für ΔV von den obigen so klein, dass sie noch vollständig innerhalb der Unsicherheitsgrenze der angewandten 6stelligen logarithmischen Rechnung liegen. Vorstehendes Beispiel lässt ersehen, dass ΔV nicht unbeträchtliche Werthe annehmen kann.

Wie aus Gleichung 8) hervorgeht, hängt die Grösse der Verschiebung nicht nur von den Constanten des Prismensatzes, sondern auch von λ ab.

Da

$$\frac{\sin \Gamma}{\sin \beta} = n; \frac{\sin \frac{\varepsilon}{2}}{\sin \delta} = \frac{n}{\nu}$$

ist, und

$$0^\circ < \gamma < 180^\circ$$
$$0 < \varepsilon < 180$$
$$\gamma > \frac{\varepsilon}{2}$$

sein muss, so könnte S, das ist der Factor von λ, nur dann unendlich gross werden, wenn $\beta = 90^\circ$ oder $\delta = 90^\circ$ wäre. β und δ sind jedoch Brechungswinkel und müssen kleiner als 90° sein, damit die Strahlen das Prisma durchsetzen können. S kann sonach als eine durchaus endliche Grösse angesehen werden, und wird nur dann gleich Null, wenn entweder $\sin(\Gamma - \beta) = 0$, oder der in der Klammer befindliche Ausdruck seinem Werthe nach verschwindet.

Wenn aber $\sin(\Gamma - \beta) = 0$ also $\Gamma = \beta$ ist, so muss auch $n = \nu$ sein. Dieser Fall tritt ein, wenn entweder $n = \nu = 1$ oder der Hauptschnitt des gerade Durchsicht gewährenden Prismensatzes ein Rechteck darstellt.

Soll demnach ganz allgemein stets dieselbe Verschiebung des Vereinigungspunktes der Strahlen eintreten, gleichviel in welchem Punkte des Hauptschnittes die Mittellinie des Strahlenbüschels den Prismensatz trifft, so muss die Gleichung zu Recht bestehen

$$\cos\gamma \cos^2\frac{\varepsilon}{2} \sin(\Gamma - \beta) = \sin\beta \,.\, \cos\beta \,.\, \sin(\varepsilon - \gamma) \sin\left(\gamma + \frac{\varepsilon}{2} - \beta\right) \quad 9)$$

Ich werde nun die Grösse der Verschiebung bestimmen unter der Voraussetzung, dass die Constanten des Prismensatzes solche Werthe besitzen, dass obige Gleichung erfüllt wird, der Factor von λ sonach der Null gleich wird. Da in diesem Falle

$$\sin\Gamma + \frac{Z}{n} \frac{\cos^2\Gamma \cos\frac{\varepsilon}{2}}{\cos\beta \,.\, \cos\delta \sin(\Gamma - \beta)} - \frac{\cos^2\Gamma \sin\gamma}{n \cos^2\beta \,.\, \cos\delta} = 0$$

so folgt, dass

$$\frac{Z \,.\, \cos^2\Gamma \cos\frac{\varepsilon}{2}}{n \cos^2\beta \,.\, \sin(\Gamma - \beta)} =$$
$$\frac{\cos\delta}{\cos\beta} \left\{ \frac{\cos^2\Gamma \sin\gamma}{n \,.\, \cos^2\beta \,.\, \cos\delta} - \sin\Gamma \right\} =$$

$$\frac{\sin\beta\cos^2\Gamma\sin\gamma - \sin^2\Gamma\,.\cos^2\beta\,.\cos\delta}{\cos^3\beta\,.\sin\Gamma} =$$

$$\frac{\sin\beta\cos^2\Gamma(\sin\delta\cos\beta + \cos\delta\sin\beta) - \sin^2\Gamma\cos^2\beta\cos\delta}{\cos^3\beta\,.\sin\Gamma} =$$

$$\frac{\cos^2\Gamma\sin\beta\,.\cos\beta\,.\sin\delta - \cos\delta(\sin^2\Gamma\cos^2\beta - \cos^2\Gamma\sin^2\beta)}{\cos^3\beta\,.\sin\Gamma} =$$

$$\frac{\cos^2\Gamma\sin\beta\sin\delta}{\cos^2\beta\,.\sin\Gamma} - \frac{\cos\delta\,.\sin(\Gamma-\beta)\sin(\Gamma+\beta)}{\cos^3\beta\,.\sin\Gamma}$$

Nenne ich nun die Grösse der Verschiebung für diesen Fall V_0, so wird dieselbe, da

$$\tfrac{1}{2}V_0 = c\left\{\sin\frac{\varepsilon}{2} - \frac{Z\cos^2\Gamma\cos\frac{\varepsilon}{2}}{n\cos^2\beta\,.\sin(\Gamma-\beta)}\right\}$$

bestimmt durch die Gleichung

$$\tfrac{1}{2}V_0 = c\left\{\begin{array}{l}\sin\dfrac{\varepsilon}{2} - \dfrac{\cos^2\Gamma\sin\beta\sin\delta}{\cos^2\beta\,.\sin\Gamma} \\ + \dfrac{\cos\delta\sin(\Gamma-\beta)\sin(\Gamma+\beta)}{\cos^3\beta\,.\sin\Gamma}\end{array}\right\}$$

Es ist aber $\sin\dfrac{\varepsilon}{2} - \dfrac{\cos^2\Gamma\sin\beta\sin\delta}{\cos^2\beta\sin\Gamma} =$

$$\frac{1}{\cos^2\beta\sin\Gamma}\left\{\begin{array}{l}\cos^2\beta\sin\Gamma(\sin\gamma\cos\Gamma - \cos\gamma\sin\Gamma) \\ -\sin\beta\cos^2\Gamma(\sin\gamma\cos\beta - \cos\gamma\sin\beta)\end{array}\right\} =$$

$$\frac{1}{\cos^2\beta\,.\sin\Gamma}\left\{\begin{array}{l}\sin\gamma\cos\Gamma\cos\beta(\sin\Gamma\cos\beta - \cos\Gamma\sin\beta) \\ -\cos\gamma(\sin^2\Gamma\cos^2\beta - \cos^2\Gamma\sin^2\beta)\end{array}\right\} =$$

$$\frac{\sin(\Gamma-\beta}{\cos^2\beta\,.\sin\Gamma}\{\sin\gamma\cos\Gamma\cos\beta - \cos\gamma\sin(\Gamma+\beta)\}$$

Die Bestimmungsgleichung für V_0 erhält hiedurch folgende Gestalt:

$$\tfrac{1}{2}V_0 = \frac{c\sin-\beta\Gamma))}{\cos^2\beta\sin\Gamma}\left\{\begin{array}{r}\sin\gamma\cos\Gamma\cos\beta - \cos\gamma\sin(\Gamma+\beta) \\ + \dfrac{\cos\delta\sin(\Gamma+\beta)}{\cos\beta}\end{array}\right\}$$

$$= \frac{c\sin\gamma\,.\sin(\Gamma-\beta)}{\cos^2\beta\sin\Gamma}\left\{\begin{array}{c}\cos\Gamma\cos\beta \\ + \dfrac{\sin\beta\,.\sin(\Gamma+\beta)}{\cos\beta}\end{array}\right\}$$

woraus man nach einfacher Reduction folgende Formel gewinnt:

$$V_0 = \frac{c.\sin\gamma \sin(\Gamma - \beta)}{\cos^3\beta}\{2\operatorname{cotg}\Gamma + \sin 2\beta\} \qquad 10)$$

Wenn also Gleichung 9) erfüllt ist, kann man die Verschiebung des Vereinigungspunktes der Strahlen aus Gleichung 10) berechnen. Wenngleich die Änderungen von V, welche durch kleine Änderungen von λ hervorgerufen werden, im Allgemeinen nicht bedeutend sein werden, so können sie doch unter Umständen hinreichend gross sein, um die Deutlichkeit des Bildes eines monochromatisches Licht aussendenden Gegenstandes ungünstig zu beeinflussen. Von einem solchen Gegenstande würde z. B. das Objectiv eines Fernrohres ein Bild entwerfen, welches in einer zur Fernrohraxe senkrechten Ebene gelegen ist. Das vom Prismensatze gelieferte virtuelle Bild des reellen Fernrohrbildes kann nun letzterem nicht mehr parallel liegen, wenn die Constanten des Prismensatzes die Gleichung 9) nicht erfüllen, kann also auch nicht sich in einer zur Fernrohraxe senkrechten Ebene befinden, sondern muss mehr oder minder aus dieser Ebene herausgedreht erscheinen und zwar im Sinne der Drehung um eine zu den brechenden Prismenkanten parallele Axe. Bei der Betrachtung des Bildes durch ein stark vergrösserndes Ocular können daher auch nicht alle Theile des Bildes gleiche Schärfe bewahren. Wenn jedoch Gleichung 9) erfüllt ist, und mithin die Verschiebung des Vereinigungspunktes der Strahlen durchaus constant wird, so kann das Fernrohrbild durch den Prismensatz betrachtet nur parallel zu sich selbst in der Richtung der Fernrohraxe verschoben erscheinen, und daher selbst bei bedeutender Ocularvergrösserung volle Schärfe bewahren.

Da Gleichung 9) nur drei von einander unabhängige Winkelgrössen, γ, ε, β enthält, mit Bezug auf γ jedoch vom zweiten, mit Bezug auf und β aber vom dritten Grade ist, so gestaltet sich die Auflösung der Gleichung am einfachsten, wenn ε und β als ihrem Werthe nach bekannt betrachtet werden dürfen. Wenn man nicht γ, sondern die mit δ bezeichnete Winkelgrösse $\gamma - \beta$ als Unbekannte ansieht, so gelangt man unter Berücksichtigung, dass den Bedingungen der Aufgabe gemäss $\delta < 90°$ sein muss, zu einer einfachen Beziehung zwischen ε und β, welche unter allen

Umständen statthaben muss, damit eine brauchbare Wurzel für δ existiren kann.

Da
$$\Gamma - \beta = \delta - \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\gamma = \delta + \beta$$

so kann man Gleichung 9) folgende Form geben

$$\frac{\sin(\delta - \frac{\varepsilon}{2})}{\sin(\delta + \frac{\varepsilon}{2})} = \frac{\sin\beta\cos\beta}{\cos^2\frac{\varepsilon}{2}} \frac{\sin(\varepsilon - \beta - \delta)}{\cos(\beta + \delta)}$$

Zum Zwecke der Bestimmung von δ kann man hieraus nachstehende Gleichung ableiten:

$$\operatorname{tg}\delta . \frac{\cos^2\frac{\varepsilon}{2}\cos(\frac{\varepsilon}{2} - \beta) - \sin\beta\cos\beta\sin(\frac{\varepsilon}{2} - \beta)}{\sin\frac{\varepsilon}{2}\cos\beta . \cos^2(\frac{\varepsilon}{2} - \beta)} =$$
$$1 + \operatorname{cotg}\frac{\varepsilon}{2} \quad \operatorname{tg}\beta . \operatorname{tg}^2(\frac{\varepsilon}{2} - \beta) . \operatorname{tg}^2\delta$$

Da der Ausdruck rechts vom Gleichheitszeichen eine unter allen Umständen positive Grösse darstellt, und $\operatorname{tg}\delta$ nicht negativ werden darf, so muss auch

$$\cos^2\frac{\varepsilon}{2}\cos(\frac{\varepsilon}{2} - \beta) > \sin\beta\cos\beta\sin(\frac{\varepsilon}{2} - \beta)$$

sein, damit ein positiver Wurzelwerth für $\operatorname{tg}\delta$ möglich werde.

Wenn man aus gegebenen Glassorten einen Prismensatz construiren will, welcher die durch Gleichung 9) ausgedrückte Eigenthümlichkeit der Constanz der Verschiebung besitzen soll, so besteht die Aufgabe, aus den gegebenen Werthen von n und ν die entsprechenden Werthe von γ und ε zu bestimmen. Die Gleichungen, welche zur Lösung dieser Aufgabe dienen, sind folgende:

$$n\sin\beta = \sin(\gamma - \frac{\varepsilon}{2})$$

$$\sin(\gamma - \beta) = \frac{\nu}{n}\sin\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\frac{\sin(\gamma-\beta-\frac{\varepsilon}{2})}{\sin(\gamma-\beta+\frac{\varepsilon}{2})}\cdot\frac{\cos^2\frac{\varepsilon}{2}}{\sin\beta\,.\cos\beta}=\sin\varepsilon-\cos\varepsilon\,.\operatorname{tg}\gamma \tag{9}$$

Ich werde vorerst mittelst der ersten zwei Gleichungen die Winkel γ und β als Functionen von n, ν, $\frac{\varepsilon}{2}$ ausdrücken.

$$\operatorname{tg}(\gamma-\beta)=\frac{\nu\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}}{\sqrt{n^2-(\nu^2-n^2)\operatorname{tg}^2\frac{\varepsilon}{2}}}$$

Da der Winkel $\gamma-\beta$ im ersten Quadranten liegen muss, so ist die Wurzelgrösse in vorstehender Gleichung stets mit positivem Vorzeichen zu nehmen. Diese Wurzelgrösse sei mit dem Buchstaben y bezeichnet, also

$$y=+\sqrt{n^2-(\nu^2-n^2)\operatorname{tg}^2\frac{\varepsilon}{2}}$$

y ist demnach als eine wesentlich positive Grösse anzusehen. Es ist ferner

$$\cos(\gamma-\beta)=\frac{1}{n}.y\cos\frac{\varepsilon}{2}=\cos\gamma\cos\beta+\sin\gamma\sin\beta$$

$$\sin(\gamma-\beta)=\frac{\nu}{n}\sin\frac{\varepsilon}{2}=\sin\gamma\cos\beta-\cos\gamma\sin\beta$$

Hieraus erhält man:

$$\frac{1}{n}\cdot y\cos\frac{\varepsilon}{2}\sin\gamma-\frac{\nu}{n}\sin\frac{\varepsilon}{2}\cos\gamma=\sin\beta$$

Da aber auch

$$\sin\beta=\frac{1}{n}\sin(\gamma-\frac{\varepsilon}{2})$$

so ergibt sich:

$$\operatorname{tg}\gamma=\frac{(\nu-1)\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}}{y-1}$$

Durch Verbindung dieser Gleichung mit der folgenden

$$\operatorname{tg}(\gamma-\beta)=\frac{\nu\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}}{y}$$

erhält man

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{(\nu - y)\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}}{\nu(\nu-1)\operatorname{tg}^2\frac{\varepsilon}{2} + y^2 - y}$$

Da aber

$$\operatorname{tg}^2\frac{\varepsilon}{2} = \frac{n^2 - y^2}{\nu^2 - n^2}$$

so lässt sich der Ausdruck für $\operatorname{tg}\beta$ durch Division mit $(\nu - y)$ in folgenden umgestalten:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{(\nu^2 - n^2)\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}}{n^2(\nu + y) - \nu y - n^2}$$

Es ist daher

$$\frac{1}{\sin\beta \, . \cos\beta \, . \operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}} = \frac{1 + \operatorname{tg}^2\beta}{\operatorname{tg}\beta . \operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}} =$$

$$\frac{[n^2(\nu+y) - \nu y - n^2]^2 + (\nu^2 - n^2)^2 \operatorname{tg}^2\frac{\varepsilon}{2}}{(\nu^2 - n^2)[n^2(\nu+y) - \nu y - n^2]\operatorname{tg}^2\frac{\varepsilon}{2}} =$$

$$\frac{[n^2(\nu+y) - \nu y - n^2]^2 + (\nu^2 - n^2)(n^2 - y^2)}{[n^2(\nu+y) - \nu y - n^2](n^2 - y^2)} =$$

$$\frac{n^2[n^2(\nu+y)^2 - 2(\nu+y)(n^2+\nu y) + (\nu+y)^2]}{[n^2(\nu+y) - \nu y - n^2](n^2 - y^2)} .$$

oder

$$\frac{1}{(\nu+y)\sin\beta \, . \cos\beta \, . \operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}} = \frac{n^2[(n^2+1)(\nu+y) - 2\nu y - 2n^2]}{[n^2(\nu+y) - \nu y - n^2](n^2 - y^2)} \qquad 11)$$

Der Ausdruck links vom Gleichheitszeichen lässt sich aber auch durch Transformation der Gleichung 9) als Function von y und den beiden Brechungsexponenten darstellen. Unter Berücksichtigung der Relation

$$\operatorname{tg}(\gamma - \beta) = \frac{\nu \operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}}{y}$$

erhält man nämlich aus Gleichung 9)

$$\frac{\frac{\nu \operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}}{y}\cos\frac{\varepsilon}{2}-\sin\frac{\varepsilon}{2}}{\frac{\nu \operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}}{y}\cos\frac{\varepsilon}{2}+\sin\frac{\varepsilon}{2}}\cdot\frac{\cos^2\frac{\varepsilon}{2}}{\sin\beta\,.\cos\beta}=$$

$$2\sin\frac{\varepsilon}{2}\cos\frac{\varepsilon}{2}-\left(\cos^2\frac{\varepsilon}{2}-\sin^2\frac{\varepsilon}{2}\right)\operatorname{tg}\gamma$$

oder

$$\frac{\nu-y}{\nu+y}\;\frac{1}{\sin\beta\,.\cos\beta}=2\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}-\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\varepsilon}{2}\right)\operatorname{tg}\gamma$$

da

$$\operatorname{tg}\gamma=\frac{(\nu-1)\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}}{y-1}$$

so lässt sich obige Gleichung auch folgendermassen schreiben:

$$\frac{1}{(\nu+y)\sin\beta\,.\cos\beta\,.\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}}=$$

$$\frac{1}{\nu-y}\left\{2-\frac{(\nu-1)(1-\operatorname{tg}^2\frac{\varepsilon}{2}}{y-1}\right\}$$

Es ist aber

$$1-\operatorname{tg}^2\frac{\varepsilon}{2}=\frac{\nu^2-2n^2+y^2}{\nu^2-n^2}$$

und daher

$$\frac{1}{(\nu+y)\sin\beta\,.\cos\beta\,.\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}}=$$

$$\frac{1}{(\nu-y)(y-1)(\nu^2-n^2)}\left\{2(y-1)(\nu^2-n^2)-(\nu-1)(\nu^2-2n^2+y^2)\right\}=$$

$$\frac{1}{(y-1)(\nu^2-n^2)}\left\{2n^2-\nu-\nu^2+(\nu-1)y\right\}$$

Unter Zuhilfenahme von Gleichung 11) gelangt man sonach zu folgender Gleichung:

$$\frac{n^2[(n^2+1)(\nu+y)-2\nu y-2n^2]}{[n^2(\nu+y)-\nu y-n^2](n^2-y^2)}=$$

$$\frac{2n^2-\nu-\nu^2+(\nu-1)y}{(y-1)(\nu^2-n^2)}$$

Diese Gleichung ist mit Bezug auf y vom vierten Grade, und lautet, wenn zur Abkürzung

$$\frac{n^2-\nu}{\nu-1}=a$$

$$\frac{\nu^2-n^2}{n^2-\nu}=b$$

gesetzt wird, in entwickelter Form wie folgt:

$$\left.\begin{array}{l} y^4+(2a+b)y^3-n^2b(2-a)y^2 \\ -n^2(2\nu-n^2b)y-n^2\nu a=0 \end{array}\right\} \quad 12)$$

Wenn demnach die Brechungsexponenten der beiden Glassorten, aus welchen ein dreigliedriger Prismensatz mit gerader Durchsicht und constanter Verschiebung des Vereinigungspunktes der Strahlen hergestellt werden soll, ihrem Werthe nach gegeben sind, so kann man durch Auflösung vorstehender Gleichung leicht den Werth von y finden, welcher den Bedingungen der Aufgabe Genüge leistet. Dieser Werth von y muss nämlich reell und positiv sein, und innerhalb der Grenzen o und n liegen, also

$$o \leqq y \leqq n$$

Es ist nämlich

$$y=+\sqrt{n^2-(\nu^2-n^2)\,\mathrm{tg}^2\frac{\varepsilon}{2}}$$

und

$$\nu>n$$

Nachdem die Brechungsexponenten der verschiedenen Glassorten so beschaffen sind, dass stets $n^2>\nu$ also a positiv ist, so kann Gleichung 12) der Natur des Problems entsprechend nur eine einzige reelle, positive Wurzel besitzen, nach deren Auffindung man die Constanten des Prismensatzes durch die Gleichungen

$$\mathrm{tg}\frac{\varepsilon}{2}=+\sqrt{\frac{n^2-y^2}{\nu^2-n^2}}$$

$$\mathrm{tg}\,\gamma=\frac{(\nu-1)\,\mathrm{tg}\frac{}{2}}{y-1}$$

eindeutig bestimmt erhält.

Die durch den Prismensatz hervorgebrachte Verschiebung des Vereinigungspunktes der Strahlen ist sodann gegeben durch die Formel:

$$V_0 = \frac{c \,.\, \sin\gamma \sin(\Gamma - \beta)}{\cos^3\beta} \{2 \operatorname{cotg} \Gamma + \sin 2\beta\}$$

Dass Gleichung 12) zum mindesten eine zwischen den Grenzen o und n gelegene reelle Wurzel besitzen muss, ergibt sich sofort aus den Ausdrücken, auf welche sich die Function

$$f(y) = y^4 + (2a+b)y^3 - n^2b(2-a)y^2 - n^2(2\nu - n^2b)y - n^2\nu a$$

reducirt, wenn für y der Reihe nach die Werthe $0, 1, n, \nu$ eingesetzt werden. Man erhält nämlich:

$$f(0) = -n^2\nu \,.\, \frac{n^2 - \nu}{\nu - 1}$$

$$f(1) = \frac{\nu(n^2-1)^2(\nu^2+1-2n^2)}{(n^2-\nu)(\nu-1)}$$

$$f(n) = \frac{n^2(\nu^2-n^2)(\nu+n)(n-1)^3}{(n^2-\nu)(\nu-1)}$$

$$f(\nu) = \frac{2\nu^2(n^2-1)(\nu^2-n^2)}{\nu-1}$$

Da nun $\begin{matrix} n > 1 \\ \nu > n \end{matrix}$ sein müssen, so wird

$$\text{für } n^2 > \nu \begin{cases} f(0) < 0 \\ f(n) > 0 \\ f(\nu) > 0 \end{cases}$$

Ob diese Wurzel zwischen 0 und 1 oder zwischen 1 und n liegt, hängt davon ab, ob der Ausdruck $\nu^2 + 1 - 2n^2$ einen positiven oder negativen Werth besitzt. Für die gebräuchlichen Glassorten fällt dieser Werth durchwegs negativ aus, so dass also die Wurzel zwischen 1 und n liegen wird.

Für $n^2 = \nu$ wird

$$y = 0$$

$$\sin\frac{\varepsilon}{2} = \frac{1}{n}$$

$$\Gamma = 90°$$

Es lässt sich in diesem Falle also kein Prisma construiren.

$$\text{für } n^2 < \nu \text{ wird} \begin{cases} f(0) > 0 \\ f(n) < 0 \\ f(\nu) > 0 \end{cases}$$

Gleichung 12) hätte sonach zwei positive Wurzeln, doch ist wenigstens bei Glassorten n^2 nie kleiner als ν.

Folgende Tafel gibt mit den Argumenten ν und n die Grösse y, sowie die daraus abgeleiteten brechenden Winkel, welche demnach die einen Prismensatz von gerader Durchsicht constituirenden Prismen besitzen müssen, damit Gleichung 12) erfüllt sei.

		$\nu = 1 \cdot 8$	$\nu = 1 \cdot 7$	$\nu = 1 \cdot 6$
$n = 1 \cdot 7$	y	1·66028		
	$\frac{\varepsilon}{2}$	31°41'44"		
	γ	36 48 11		
$n = 1 \cdot 6$	y	1·51457	1·56504	
	$\frac{\varepsilon}{2}$	32° 1'38"	30° 4'27"	
	γ	44 12 6	35 39 19	
$n = 1 \cdot 5$	y	1·31848	1·42097	1·46970
	$\frac{\varepsilon}{2}$	35°42'42"	30°59'17"	28°18'45"
	γ	61 1 24	44 57 41	34 32 4

Aus dieser Zusammenstellung geht hervor, dass Prismensätze deren Constanten Gleichung 12) erfüllen, keine bedeutende Dispersion besitzen können. Ein Prismensatz, aus den früher erwähnten Glassorten, (Flintglas Nr. 13, Glas von St. Gobin) bestehend, müsste, um für Licht von der Wellenlänge F gerade Durchsicht und constante Verschiebung zu gewähren, den Brechungsexponenten

$$\nu = 1 \cdot 648260$$
$$n = 1 \cdot 595808$$

entsprechend, folgende brechende Winkel besitzen:

$$\frac{\varepsilon}{2} = 29°17'19''47$$

$$\gamma = 32 \quad 7 \quad 54\cdot30$$

Hieraus folgt:

$$\Gamma = 2°50'34''83$$

$$\beta = 1 \quad 46 \quad 51\cdot97$$

Bezeichne ich die Dispersion innerhalb der Grenzen von *B* und *H* mit *D*, so ergibt sich aus der Dispersionsformel:

$$\frac{1}{2}\cos\Gamma\,.\cos(\gamma-\beta)\,.\,D = \cos\beta\,.\sin\frac{\varepsilon}{2}\,.\,d\nu - \sin\gamma\,.\,dn$$

da
$$d\nu = \nu_H - \nu_B = 0\cdot043313$$
$$dn = n_H - n_B = 0\cdot018004$$

für *D* der Werth

$$D = 1°32'34''$$

welcher mit dem durch directe Rechnung abgeleiteten (1°32'35") fast vollständig übereinstimmt.

Beträgt die Länge der Seiten des mittleren Prisma's wieder 20 Mm., so folgt aus Formel 10)

$$V_0 = \overset{\text{mm}}{7\cdot9632}$$

Für Licht von anderer Wellenlänge als *F* verschwindet auch in diesem Falle die Grösse ΔV nicht mehr vollständig, erreicht aber, wie aus folgendem ersichtlich wird, nur kleine Werthe;

$$\eta = 20 \text{ Mm.}$$

		B	*H*
	Γ	2°50'34"83	2°50'34"83
	α'	3 32 8·30	1 59 33·09
$\lambda = \overset{\text{mm}}{0\cdot5}$	v	16·943920 mm	16·943920 mm
	w	9·809022	9·809022
	σ	0·571742	0·415044
	l	22·0379	21·6214

		B	H
$\lambda' = 8\cdot5$	v'	$8\cdot953768$	$8\cdot953768$
	w'	$10\cdot205817$	$10\cdot205817$
	σ'	$8\cdot576191$	$8\cdot408624$
	l'	$22\cdot3757$	$22\cdot0887$
	$(\sigma'-\sigma)\sin\alpha'$	$0\cdot4936$	$0\cdot2779$
	ΔV	$+0\cdot1558$	$-0\cdot1894$

Ebenso wie in dem früheren Beispiele hat auch hier eine Änderung von η fast gar keinen Einfluss auf den Werth der Grösse ΔV.