

Arithmetische Notiz.

Von dem **c. M. Leopold Gegenbauer.**

Bezeichnet man die Anzahl derjenigen Divisoren einer ganzen Zahl α , welche ihr nach dem Modul k congruent sind und einen complementären Divisor besitzen, der nach demselben Modul der positiven Einheit congruent ist, mit $A_0(\alpha)$, so besteht, wie eine einfache Rechnung ergibt, die Gleichung:

$$1) \quad \sum_{x=1}^{x=\sigma} A_0(kx - \rho) = \sum_{x=1}^{x=\sigma} \left[\frac{(k-1)x + \sigma - \rho}{kx - \rho} \right] \quad (\rho < k).$$

Es sei nun α_λ die Anzahl derjenigen Werthe von x , für welche:

$$\left[\frac{(k-1)x + \sigma - \rho}{kx - \rho} \right] = \lambda \quad \text{ist.}$$

Alsdann sind die sämmtlichen Werthe von x , für welche λ gleich 1 ist:

$$x = \sigma, \sigma - 1, \sigma - 2, \dots, \sigma - \alpha_1 + 1$$

und man hat daher die Relationen:

$$\frac{\sigma + (k-1)(\sigma - \alpha_1 + 1) - \rho}{k(\sigma - \alpha_1 + 1) - \rho} < 2$$

$$\frac{\sigma + (k-1)(\sigma - \alpha_1) - \rho}{k(\sigma - \alpha_1) - \rho} \geq 2,$$

aus welchen folgt:

$$\sigma - \alpha_1 \leq \frac{\sigma + \rho}{k+1} < \sigma - \alpha_1 + 1$$

und daher ist:

$$\alpha_1 = \sigma - \left[\frac{\sigma + \rho}{k+1} \right].$$

Es ist ferner:

$$\left[\frac{(k-1)x + \sigma - \rho}{kx - \rho} \right] = 2$$

für:

$$x = \sigma - \alpha_1, \sigma - \alpha_1 - 1, \sigma - \alpha_1 - 2, \dots, \sigma - \alpha_1 - \alpha_2 + 1$$

während diese ganze Zahl für:

$$x = \sigma - \alpha_1 - \alpha_2$$

den Werth 3 erhält, und daher hat man die Beziehungen:

$$\frac{\sigma + (k-1)(\sigma - \alpha_1 - \alpha_2 + 1) - \rho}{k(\sigma - \alpha_1 - \alpha_2 + 1) - \rho} < 3$$

$$\frac{\sigma + (k-1)(\sigma - \alpha_1 - \alpha_2) - \rho}{k(\sigma - \alpha_1 - \alpha_2) - \rho} \geq 3$$

oder auch:

$$\sigma - \alpha_1 - \alpha_2 \leq \frac{\sigma + 2\rho}{2k+1} < \sigma - \alpha_1 - \alpha_2 + 1.$$

Aus dieser Relation folgt:

$$\sigma - \alpha_1 - \alpha_2 = \left[\frac{\sigma + 2\rho}{2k+1} \right].$$

und daher ist:

$$\alpha_2 = \left[\frac{\sigma + \rho}{k+1} \right] - \left[\frac{\sigma + 2\rho}{2k+1} \right].$$

Es sei nun:

$$2) \quad \alpha_\lambda = \left[\frac{\sigma + (\lambda-1)\rho}{(\lambda-1)k+1} \right] - \left[\frac{\sigma + \lambda\rho}{\lambda k+1} \right]$$

für:

$$\lambda = 1, 2, 3, \dots, \lambda_1.$$

Zur Bestimmung von α_{λ_1+1} hat man die Relationen:

$$\frac{\sigma + (k-1)(\sigma - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \dots - \alpha_{\lambda_1+1} + 1) - \rho}{k(\sigma - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \dots - \alpha_{\lambda_1+1} + 1) - \rho} < \lambda_1 + 1$$

$$\frac{\sigma + (k-1)(\sigma - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \dots - \alpha_{\lambda_1+1}) - \rho}{k(\sigma - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \dots - \alpha_{\lambda_1+1}) - \rho} \geq \lambda_1 + 1$$

also:

$$\sigma - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \dots - \alpha_{\lambda_1+1} \leq \frac{\sigma + (\lambda_1 + 1)\rho}{(\lambda_1 + 1)k + 1} < \sigma - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \dots - \alpha_{\lambda_1+1} + 1$$

aus welcher Relation folgt:

$$\sigma - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \dots - \alpha_{\lambda_1+1} = \left\lfloor \frac{\sigma + (\lambda_1 + 1)\rho}{(\lambda_1 + 1)k + 1} \right\rfloor$$

und daher ist:

$$\alpha_{\lambda_1+1} = \left\lfloor \frac{\sigma + \lambda_1 \rho}{\lambda_1 k + 1} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{\sigma + (\lambda_1 + 1)\rho}{(\lambda_1 + 1)k + 1} \right\rfloor.$$

Da die Relation 2) für $\lambda = 1, 2$ bewiesen wurde, so gilt sie allgemein. Nun ist der grösste Werth, welchen die erwähnten ganzen Zahlen annehmen können:

$$3) \left\lfloor \frac{\sigma - 1}{k - \rho} \right\rfloor + 1 = \tau$$

Derselbe wird für:

$$\alpha_\tau = \left\lfloor \frac{\sigma + (\tau - 1)\rho}{(\tau - 1)k + 1} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{\sigma + \tau \rho}{\tau k + 1} \right\rfloor$$

Werthe von x angenommen.

Aus der Gleichung 3) folgt aber:

$$\tau + 1 > \frac{\sigma - 1}{k - \rho} + 1 \geq \tau$$

und daher ist:

$$\tau k + 1 > \sigma + \tau \rho$$

also:

$$\left\lfloor \frac{\sigma + \tau \rho}{\tau k + 1} \right\rfloor = 0.$$

Die Gleichung 1) verwandelt sich demnach in die folgende:

$$4) \sum_{x=1}^{x=\sigma} A_0(kx - \rho) = \sigma + \sum_{x=1}^{x=\left\lfloor \frac{\sigma-1}{k-\rho} \right\rfloor} \left\lfloor \frac{\rho x + \sigma}{kx + 1} \right\rfloor.$$

Man kann diese Gleichung auch in folgender Weise schreiben:

$$\sum_{x=1}^{x=\sigma} A_0(kx-\rho) = \sigma + \left[\frac{\sigma-1}{k-\rho} \right] + \sum_{x=1}^{x=\left[\frac{\sigma-1}{k-\rho} \right]} \left[\frac{\sigma-1-(k-\rho)x}{kx+1} \right].$$

Ist $\tau-1$ die Anzahl derjenigen Werthe von x , für welche:

$$\left[\frac{\sigma-(k-\rho)x-1}{kx+1} \right] = 0$$

wird, so bestehen die Relationen:

$$\frac{\sigma-(k-\rho)\tau-1}{k\tau+1} < 1$$

$$\frac{\sigma-(k-\rho)(\tau-1)-1}{k(\tau-1)+1} \geq 1$$

so ist:

$$\tau-1 \leq \frac{\sigma-2}{2k-\rho} < \tau$$

Aus welcher Relation folgt:

$$\tau-1 = \left[\frac{\sigma-2}{2k-\rho} \right].$$

Man kann daher die letzte Gleichung auch in folgender Form schreiben:

$$5) \sum_{x=1}^{x=\sigma} A_0(kx-\rho) = \sigma + \left[\frac{\sigma-1}{k-\rho} \right] + \sum_{x=1}^{x=\left[\frac{\sigma-2}{2k-\rho} \right]} \left[\frac{\sigma-1-(k-\rho)x}{kx+1} \right].$$

Nun ist:

$$\left[\frac{\sigma-1}{k-\rho} \right] = \left[\frac{\sigma-2}{k-\rho} \right] + \varepsilon$$

wo ε den Werth $+1$ oder 0 hat, je nachdem:

$$\sigma \equiv 1 \pmod{(k-\rho)}$$

und daher:

$$k\sigma - \rho \equiv 0 \pmod{(k-\rho)}$$

ist, oder nicht.

Es ist ferner:

$$\left[\frac{\sigma-2}{2k-\rho} \right] = \left[\frac{\sigma-3}{2k-\rho} \right] + \eta$$

wo η den Werth $+1$ oder 0 besitzt, je nachdem σ der Congruenz:

$$\sigma \equiv 2 \pmod{(2k-\rho)}$$

und daher $k\sigma-\rho$ der Congruenz:

$$k\sigma-\rho \equiv 0 \pmod{(2k-\rho)}$$

genügt, oder nicht.

Schreibt man nun in den Gleichungen 4) und 5) für $\sigma: \sigma-1$ und subtrahirt die dadurch entstehenden Gleichungen von den ursprünglichen, so ergeben sich die Formeln:

$$6) \quad A_0(k\sigma-\rho) = 1 + \varepsilon + \sum_{x=1}^{x=\left[\frac{\sigma-2}{k-\rho}\right]} \left\{ \left[\frac{\rho x + \sigma}{kx+1} \right] - \left[\frac{\rho x + \sigma - 1}{kx+1} \right] \right\}$$

$$7) \quad A_0(k\sigma-\rho) = 1 + \varepsilon + \eta + \sum_{x=1}^{x=\left[\frac{\sigma-3}{2k-\rho}\right]} \left\{ \left[\frac{\sigma-1-(k-\rho)x}{kx+1} \right] - \left[\frac{\sigma-2-(k-\rho)x}{kx+1} \right] \right\}$$

Setzt man in den Formeln 4), 5), 6) und 7):

$$k = 2, \quad \rho = 1$$

so erhält man die speciellen Relationen:

$$8) \quad \sum_{x=1}^{x=\sigma} \psi(2x-1) = \sigma + \sum_{x=1}^{x=\sigma-1} \left[\frac{x+\sigma}{2x+1} \right]$$

$$9) \quad \sum_{x=1}^{x=\sigma} \psi(2x-1) = 2\sigma-1 + \sum_{x=1}^{x=\left[\frac{\sigma-2}{3}\right]} \left[\frac{\sigma-1-x}{2x+1} \right]$$

$$10) \quad \psi(2\sigma-1) = 2 + \sum_{x=1}^{x=\sigma-2} \left\{ \left[\frac{x+\sigma}{2x+1} \right] - \left[\frac{x+\sigma-1}{2x+1} \right] \right\}$$

$$11) \quad \psi(2\sigma-1) = 2 + \eta + \sum_{x=1}^{x=\left[\frac{\sigma}{3}\right]-1} \left\{ \left[\frac{\sigma-1-x}{2x+1} \right] - \left[\frac{\sigma-2-x}{2x+1} \right] \right\}$$

wo η den Werth $+1$ oder 0 hat, je nachdem $2\sigma-1$ durch 3 theilbar ist oder nicht und $\psi(\alpha)$ die Anzahl der Divisoren der Zahl α bezeichnet. Die speciellen Formeln 9) und 11) hat schon Herr V. Buniakowsky mitgetheilt.

Von den in den aufgestellten Gleichungen enthaltenen arithmetischen Theoremen mögen die folgenden besonders hervorgehoben werden:

Wenn für alle Werthe von x , welche nicht grösser als

$$\left[\frac{\alpha-k}{k(k-\rho)} - \frac{1}{k} \right] \text{ sind:}$$

$$\left[\frac{\alpha}{k(kx+1)} + \frac{\rho}{k} \right] = \left[\frac{\alpha-k}{k(kx+1)} + \frac{\rho}{k} \right]$$

ist, so besitzt die nach dem Modul k der Zahl $-\rho$ congruente Zahl α ausser α höchstens einen ihr nach dem Modul k congruente Theiler mit complementärem Divisor von der Form $k\lambda+1$, nämlich $k-\rho$.

Wenn für alle Werthe von x , welche nicht grösser als

$$\left[\frac{\alpha-k}{k(2k-\rho)} - \frac{1}{k} \right] \text{ sind:}$$

$$\left[\frac{\alpha}{k(kx+1)} + \frac{\rho}{k} \right] = \left[\frac{\alpha-k}{k(kx+1)} + \frac{\rho}{k} \right]$$

ist, so besitzt die nach dem Modul k der Zahl $-\rho$ congruente Zahl α ausser α höchstens zwei ihr nach dem Modul k congruente Theiler mit complementärem Divisor von der Form $k\lambda+1$, nämlich $k-\rho$ und $2k-\rho$.

Eine nach dem Modul k der Zahl $-\rho$ congruente, durch $k-\rho$ nicht theilbare Zahl α ist keine Primzahl, wenn auch nur

für einen $\left[\frac{\alpha-k}{k(k-\rho)} - \frac{1}{k} \right]$ nicht übersteigenden Werth von x :

$$\left[\frac{\alpha}{k(kx+1)} + \frac{\rho}{k} \right] > \left[\frac{\alpha-k}{k(kx+1)} + \frac{\rho}{k} \right]$$

ist.

Eine nach dem Modul k der Zahl $-\rho$ congruente, weder durch $k-\rho$ noch durch $2k-\rho$ theilbare Zahl ist keine Primzahl, wenn auch nur für einen $\left[\frac{\alpha-k}{k(2k-\rho)} - \frac{1}{k} \right]$ nicht übersteigenden Werth von x :

$$\left[\frac{\alpha}{k(kx+1)} + \frac{\rho}{k} \right] > \left[\frac{\alpha-k}{k(kx+1)} + \frac{\rho}{k} \right]$$

ist.

Eine ungerade Zahl α ist eine Primzahl, wenn für alle $\left[\frac{\alpha-3}{2} \right]$ nicht übersteigenden Werthe von x :

$$\left[\frac{\alpha}{2(2x+1)} + \frac{1}{2} \right] = \left[\frac{\alpha-2}{2(2x+1)} + \frac{1}{2} \right]$$

ist.

Eine durch 3 nicht theilbare ungerade Zahl α ist eine Primzahl, wenn für alle $\left[\frac{\alpha-5}{6} \right]$ nicht übersteigenden Werthe von x :

$$\left[\frac{\alpha}{2(2x+1)} + \frac{1}{2} \right] = \left[\frac{\alpha-2}{2(2x+1)} + \frac{1}{2} \right]$$

ist.

Eine ungerade Zahl α von der Form $3n-1$ ist eine Primzahl, wenn für alle $\left[\frac{\alpha-5}{6} \right]$ nicht übersteigenden Werthe von x :

$$\left[\frac{\alpha}{3(3x+1)} + \frac{1}{3} \right] = \left[\frac{\alpha-3}{3(3x+1)} + \frac{1}{3} \right]$$

ist.

Eine durch 5 nicht theilbare ungerade Zahl α von der Form $3n-1$ ist eine Primzahl, wenn für alle $\left[\frac{\alpha-8}{15} \right]$ nicht übersteigenden Werthe von x :

$$\left[\frac{\alpha}{3(3x+1)} + \frac{1}{3} \right] = \left[\frac{\alpha-3}{3(3x+1)} + \frac{1}{3} \right]$$

ist.

Eine durch 3 nicht theilbare Zahl α von der Form $4n-1$ ist eine Primzahl, wenn für alle $\left[\frac{\alpha-7}{12}\right]$ nicht übersteigenden Werthe von x :

$$\left[\frac{\alpha}{4(4x+1)} + \frac{1}{4}\right] = \left[\frac{\alpha-4}{4(4x+1)} + \frac{1}{4}\right]$$

ist.

Eine weder durch 3 noch durch 7 theilbare Zahl von der Form $4n-1$ ist eine Primzahl, wenn für alle $\left[\frac{\alpha-11}{28}\right]$ nicht übersteigenden Werthe von x :

$$\left[\frac{\alpha}{4(4x+1)} + \frac{1}{4}\right] = \left[\frac{\alpha-4}{4(4x+1)} + \frac{1}{4}\right]$$

ist.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse](#)

Jahr/Year: 1885

Band/Volume: [91_2](#)

Autor(en)/Author(s): Gegenbauer Leopold

Artikel/Article: [Arithmetische Notiz. 1194-1201](#)