Über veränderliche elektrische Ströme in dicken Leitungsdrähten.

Von dem w. M. **J. Stefan.**

Bei der Berechnung des Verlaufes, den ein veränderlicher elektrischer Strom in einer Drahtleitung nimmt, macht man gewöhnlich die Annahme, dass derselbe ebenso wie ein constanter Strom den Querschnitt des Drahtes in gleichförmiger Dichtigkeit erfüllt. Wenn nun auch die Art der äusseren elektromotorischen Kräfte eine solche Annahme rechtfertigt, so ist diess bezüglich der Wirkungen der Selbstinduction nicht der Fall. Diese haben auch bei gleichförmiger Stromdichte nicht für alle elementaren Fäden, in welche man den Draht zerlegt denken kann, denselben Werth, es kann desshalb die Dichtigkeit des Stromes nicht in allen Theilen des Querschnittes dieselbe sein.

Die Verschiedenheit der Selbstinduction in den verschiedenen Fasern eines Drahtes lässt sich in besonderen Fällen in Rechnung ziehen. Es hat schon Maxwell[1] eine solche Rechnung für den Fall eines sehr langen geradlinig gespannten Drahtes von kreisförmigem Querschnitt ausgeführt und ist dieselbe von Lord Rayleigh[2] insbesondere mit Rücksicht auf periodische elektrische Ströme vervollständigt worden.

Ich behandle im Folgenden dieselbe Aufgabe, jedoch in einer anderen Weise. Der von mir gewählte Gang der Rechnung scheint mir einen zweifachen Vortheil gegen den von Maxwell und Lord Rayleigh befolgten zu haben. Erstens lässt er erkennen, dass die gewonnenen Resultate nicht auf den speciellen Fall eines geradlinig gespannten Drahtes beschränkt sind. Zweitens

---

1 Treatise on Electricity II. Nr. 689.

2 Phil. Mag. XXI. 381. 1886.

führt er zu einem leicht verständlichen Bilde der zu bestimmenden Vorgänge.

Der Leitungsdraht habe die Länge l und den Querschnitt q. Aus demselben heben wir zwei parallele unendlich dünne Fäden heraus, die Stromstärken in diesen Fäden seien i und i'. Die inducirende Wirkung des zweiten Stromfadens auf den ersten ist durch die Grösse $M\frac{di'}{dt}$ bestimmt, wenn

$$M = 2l\left(\log\frac{2l}{\rho} - 1\right) \tag{1}$$

gesetzt wird. ρ bedeutet die Distanz der beiden Stromfäden. Wirkt in dem ersten Faden ausserdem die elektromotorische Kraft p, ist sein Widerstand ω, so dient zur Bestimmung von i die Gleichung

$$p = \omega i + \Sigma M\frac{di'}{dt}.$$

Die durch Σ angedeutete Summirung erstreckt sich über alle einzelnen Fäden, in die der Draht zerlegt gedacht wird.

Führt man statt i die Stromdichtigkeit u ein, so dass $i = udq$, wenn dq der Querschnitt des Fadens ist, ersetzt man ferner ω durch $\frac{l\sigma}{dq}$, worin σ den specifischen Widerstand des Drahtmaterials bedeutet, so kann man vorstehende Gleichung auch schreiben

$$p = l\sigma u + \int M\frac{du'}{dt}dq'.$$

Das Integral in dieser Gleichung kann in zwei Theile zerlegt werden. In dem ersten Theil

$$2l(\log 2l - 1)\int\frac{du'}{dt}dq'$$

kann der Integralausdruck durch $q\frac{dU}{dt}$ ersetzt werden, wenn U den mittleren Werth der Stromdichte bedeutet. Es bleibt also die Formel

$$p = l\sigma u + 2lq(\log 2l - 1)\frac{dU}{dt} - 2l\int\log\rho\frac{du'}{dt}dq' \tag{2}$$

Legt man in den Querschnitt des Drahtes ein System rechtwinkliger Coordinaten y und z und charakterisirt die Lage der Querschnittselemente dq und dq' durch y, z und y', z', so ist

$$\rho^2 = (y'-y)^2+(z'-z)^2.$$

Das Integral in dem letzten Gliede der vorigen Gleichung hat nun die Eigenschaft, dass die Summe seiner zweiten nach y und z genommenen Differentialquotienten $=$ Null ist, wenn der Punkt y, z ausserhalb des Querschnittes liegt. Diese Summe ist aber $= 2\pi \frac{du}{dt}$, wenn der Punkt y, z dem Querschnitte angehört, wie in dem Falle, um welchen es sich hier handelt.

Werden an der Gleichung (2) die angegebenen Differentiationen ausgeführt, so bleibt, da p für alle Stromfäden gleich angenommen wird und auch U von y und z unabhängig ist, die Gleichung

$$o = l\sigma\left(\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}\right) - 4\pi l\frac{du}{dt}$$

oder

$$\frac{du}{dt} = \frac{\sigma}{4\pi}\left(\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}\right) \tag{3}$$

Zur vollständigen Bestimmung von u gehört nun noch eine Gleichung, welche für die Oberfläche des Leitungsdrahtes gilt. Diese kann aus (2) abgeleitet werden Sie gestaltet sich sehr einfach, wenn der Querschnitt des Drahtes ein kreisförmiger ist und nur dieser Fall soll hier betrachtet werden. Die Stromdichte u ist dann um die Axe des Drahtes symmetrisch vertheilt, das Integral im letzten Gliede der Gleichung (2) hat dann für den Fall, dass der Punkt y, z in der Peripherie des Kreises liegt und dieser den Radius a hat, den Werth

$$\log a\int\frac{du'}{dt}dq' = q\log a\frac{dU}{dt}.$$

Bezeichnet man noch die Stromdichte in der Oberfläche des Drahtes mit u_1, so verwandelt sich die Gleichung (2) in

$$p = l\sigma u_1 + 2lq\left(\log\frac{2l}{a}-1\right)\frac{dU}{dt} \tag{4}$$

Die Gestalt, welche die Gleichungen (3) und (4) erhalten haben, ist bedingt durch die Formel (1), welche den Coëfficienten der gegenseitigen Induction zweier unendlich dünner geradliniger und paralleler Stromfäden ausdrückt. Dieser Coëfficient hat aber auch noch für andere als geradlinige Stromleiter dieselbe Form. So z. B. ist für zwei sehr nahe liegende Kreise, welche in zwei parallelen Ebenen liegen und ihre Mittelpunkte in derselben auf den beiden Ebenen senkrechten Axe haben,

$$M = 4\pi R\left(\log\frac{8R}{\rho} - 2\right),$$

wenn R einen Mittelwerth der beiden Radien der Kreise, ρ den Abstand der Kreislinien bedeutet. Bei der Ableitung dieser Formel ist vorausgesetzt, dass ρ eine sehr kleine Grösse im Vergleiche zu R ist. Da man $4\pi R = 2l$ setzen kann, so dass $2l$ die Länge der beiden Kreislinien bedeutet, so kann man auch

$$M = 2l\left(\log\frac{2l}{\rho} - 2\cdot 45158\right)$$

schreiben und dieser Ausdruck unterscheidet sich von dem unter (1) nur durch den Werth der in der Klammer stehenden numerischen Grösse.

Die Aufgabe, die Vertheilung der Dichte eines veränderlichen Stromes in einem kreisförmig gebogenen Leitungsdrahte zu bestimmen, wird also wieder zur Gleichung (3) und zu einer zweiten Gleichung führen, welche sich von der unter (4) nur durch einen andern Werth einer Zahlengrösse unterscheidet.

Die Art der Berechnung von M aus seiner elektrodynamischen Definition lässt erkennen, dass M auch für Leitungen von anderer Gestalt durch eine der Formel (1) analoge dargestellt werden kann, sobald der Krümmungsradius der Leitungscurve in jedem Punkte sehr gross ist gegen die Dicke des Leitungsdrahtes. Die aus den Gleichungen (3) und (4) abzuleitenden Folgerungen können also nicht blos für geradlinige Drähte, sondern auch für solche Leitungen, welche in krummen Linien geführt sind, angewendet werden, wenn diese krummen Linien der angeführten Bedingung entsprechen.

Der Ausdruck (1) des Inductionscoëfficienten M der beiden Stromfäden gilt nur unter der Voraussetzung, dass sowohl die Substanz des Leitungsdrahtes, dem die beiden Fäden angehören, als auch die Umgebung desselben als unmagnetisch betrachtet werden können. Von besonderer Wichtigkeit ist aber noch der Fall, dass der Leitungsdraht magnetisirbar, z. B. ein Eisendraht ist. Die Rechnung wird nur für einen Draht von kreisförmigem Querschnitt einfach, weil nur in diesem Falle seine Magnetisirung so beschaffen ist, dass keine freien magnetischen Massen auftreten.

Die Bewegungen der magnetischen Massen oder nach der von Hertz eingeführten Bezeichnung, die magnetischen Ströme, welche beim Durchgang eines veränderlichen elektrischen Stromes im Drahte entstehen, haben kreisförmige, geschlossene Bahnen, welche solenoidartig aneinander gereiht sind. Sie üben desshalb nach aussen und auch auf einen Punkt in der Oberfläche des Drahtes keine elektrische Kraft aus, wenn der Draht geschlossen ist. Dieselbe kann vernachlässigt werden, wenn der Draht offen, aber sehr lang ist. Die Gleichung (4) bleibt also bestehen auch für den Fall, dass es sich um einen Leitungsdraht aus Eisen handelt.

Für einen Stromfaden im Innern des Drahtes kann die Induction aus den elektrischen Kräften der magnetischen Ströme berechnet werden, für welche Kräfte dieselben Formeln gelten, wie für die magnetischen Kräfte elektrischer Ströme. Die Rechnung kann sowohl unter der einfachsten Voraussetzung, dass die Intensität der Magnetisirung der magnetisirenden Kraft proportional ist, als auch unter der Annahme eines anderen Gesetzes geführt werden. Nimmt man aber das bezeichnete einfache Gesetz an und das soll auch zum Behufe der leichten Ausführbarkeit der folgenden Untersuchungen geschehen, so kann man den Zuwachs, welchen die Induction durch die Magnetisirung des Drahtes erfährt, ohne weitere Rechnung aus dem Ausdrucke derselben in der Formel (2) ableiten, wenn man von demselben jenen Theil abtrennt, um welchen sich die Induction in einem inneren Faden von jener in der Oberfläche unterscheidet. Es ist dies der Theil

$$2l\int(\log a - \log\rho)\frac{du'}{dt}\,dq'\cdot$$

Dieser ist, wenn es sich um einen Eisendraht handelt $(1+4\pi k)$mal grösser zu nehmen, unter k die constante Magnetisirungszahl des Eisens verstanden. Dies ist darin begründet, dass die inducirenden Wirkungen elektrischer Ströme auch aus den Gesetzen der elektromagnetischen Induction berechnet werden können, wenn man annimmt, dass auch der leere oder eine als unmagnetisch bezeichnete Substanz enthaltende Raum magnetisirbar sei. Die Magnetisirungszahl desselben muss $= \frac{1}{4\pi}$ gesetzt werden, damit die Formeln den festgestellten absoluten Einheiten entsprechen. Enthält der Raum eine Substanz von der Magnetisirungszahl k, so ist die Magnetisirungszahl des so erfüllten Raumes $\frac{1}{4\pi} + k$ oder $(1+4\pi k)$mal grösser als die des leeren.

Für einen Eisendraht von kreisförmigem Querschnitt tritt an die Stelle der Gleichung (2) die Gleichung

$$p = l\sigma u + 2lq\left(\log\frac{2l}{a} - 1\right)\frac{dU}{dt} + 2l(1+4\pi k)\int \log\frac{a}{\rho}\frac{du'}{dt}dq'$$

und wendet man an diese die gleiche Operation an wie an (2), so folgt, wenn man zur Abkürzung der Formeln

$$1+4\pi k = \mu$$

setzt,

$$\frac{du}{dt} = \frac{\sigma}{4\pi\mu}\left(\frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right).$$

Diese Gleichung verwandelt sich in (3), wenn man $k = 0$ setzt. Sie gilt jedoch nicht wie (3) für einen beliebigen, sondern nur für einen kreisförmigen Querschnitt des Drahtes und unter der Bedingung, dass u nur eine Function von $r^2 = y^2 + z^2$ ist. Dieser Bedingung entsprechend ist sie also in der specielleren Form

$$\frac{du}{dt} = \frac{\sigma}{4\pi\mu}\left(\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr}\right) \tag{5}$$

anzuwenden. Da übrigens die Grenzbedingung (4) auch nur unter Voraussetzung, dass der Querschnitt kreisförmig und u nur Function von r ist, gilt, so kann bei den weiteren Rechnungen überhaupt nur von der speciellen Form, welche die Gleichung (5) besitzt, Gebrauch gemacht werden.

Zu Gleichungen ganz derselben Art, wie die Gleichungen (4) und (5) gelangt man auch, wenn man eine von der vorliegenden wesentlich verschiedene Aufgabe sich stellt, nämlich die Aufgabe: Es ist die Temperaturvertheilung in einem Cylinder unter der Voraussetzung zu bestimmen, dass derselbe nur durch seine Mantelfläche Wärme durch Strahlung an den umgebenden Raum abgibt oder aus demselben empfängt und die Wärmestrahlung der Temperaturdifferenz zwischen der Mantelfläche des Cylinders und des äusseren Raumes proportional ist. Bezeichnet man die Temperatur einer durch die Coordinaten y und z bestimmten Faser des Drahtes mit u, so liefert die Theorie der Wärmeleitung für u die Gleichung

$$\frac{du}{dt} = m\left(\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr}\right). \tag{6}$$

m bedeutet den Coëfficienten der Temperaturleitung, d. i. den Quotienten aus dem Coëfficienten der Wärmeleitung und der specifischen Wärme der Volumseinheit des Cylinders. Die Gleichung für die Oberfläche kann man so formuliren. Ist die Temperatur der Oberfläche des Cylinders $= u_1$, jene der Umgebung $= v$ und H der Coëfficient der Strahlung, so ist die in der unendlich kleinen Zeit τ vom Cylinder abgegebene Wärme

$$2\pi a l H(u_1 - v)\tau,$$

wenn a den Radius, l die Länge des Cylinders bedeutet.

Dieselbe Wärmemenge kann aber auch durch $-\pi a^2 lcs \frac{dU}{dt}\tau$ ausgedrückt werden, wenn U die mittlere Temperatur des Cylinders und cs die specifische Wärme der Volumseinheit desselben bedeutet.

Es ergibt sich demnach für die Oberfläche die Bedingung

$$acs\frac{dU}{dt} + 2H(u_1 - v) = 0. \tag{7}$$

Setzt man an Stelle der Temperatur v des äusseren Raumes die durch $l\sigma$ dividirte elektromotorische Kraft p, so sind die Temperatur im Cylinder und die Stromdichte im Leitungsdraht durch analoge Gleichungen gegeben und dieselbe Analogie muss auch zwischen den durch diese Gleichungen bestimmten Vorgängen bestehen.

Wird ein in allen Theilen gleich warmer Cylinder plötzlich in einen Raum von einer constanten aber höheren Temperatur gebracht, so steigt zuerst die Temperatur der an der Oberfläche und ihr zunächst liegenden Schichten, dann die der inneren, bis endlich der ganze Cylinder gleichförmig zur Temperatur des umgebenden Raumes erwärmt ist.

Ähnlich verhält es sich mit einem Leitungsdraht, in den plötzlich eine constante elektromotorische Kraft eingeschaltet wird. Die Wirkung dieser Kraft gleicht der Einstrahlung von Wärme. Der Strom gelangt zuerst in den peripherischen Schichten des Drahtes zu seiner definitiven Dichtigkeit, erst später in den inneren Schichten, zuletzt im centralen Faden.

In entgegengesetzter Weise verläuft der Extrastrom nach Ausschaltung der elektromotorischen Kraft. Sein Verlauf entspricht der Abkühlung des Drahtes, wenn derselbe aus dem Raume von höherer in einen Raum von tieferer Temperatur gebracht wird.

Wird ein Draht in einen Raum gebracht, dessen Temperatur mit der Zeit periodisch sich verändert, so stellt sich ein Beharrungszustand in der Temperaturvertheilung in dem Drahte ein, der Art, dass die Temperatur in allen Schichten desselben die periodischen Schwankungen mitmacht. Die Amplituden der Schwankungen nehmen jedoch gegen die Axe hin ab und zwar um so rascher, je kürzer die Periode dieser Schwankungen ist. Zugleich haben diese in den verschiedenen Schichten verschiedene Phasen, so dass die Maxima z. B. in jeder Schichte um so später eintreten, je weiter dieselbe von der Oberfläche entfernt ist.

In derselben Weise stellt sich der periodische Beharrungszustand der elektrischen Strömung in einer Drahtleitung her, wenn in dieser eine periodisch variirende elektromotorische Kraft thätig ist. Die Amplitude der Stromdichte nimmt gegen die Axe des Drahtes hin ab, zugleich tritt eine Verschiebung der Stromphasen ein, so dass die Strömung in den inneren Schichten eine Verspätung gegen die Strömung in den oberflächlichen Fasern zeigt. Je grösser die Schwingungszahl der elektromotorischen Kraft, desto stärker ist die Abnahme der Amplituden, desto grösser die Differenz der Stromphasen, und es kann auch der Fall eintreten, dass die elektrischen Strömungen in den oberflächlichen Schichten und in den axialen Fasern entgegengesetzte Richtungen haben.

Die Ungleichförmigkeit in der Vertheilung der Temperatur oder der Stromdichte ist um so geringer, je grösser der Coëfficient der Temperaturleitung m in der Gleichung (6) oder der analoge Coëfficient in der Gleichung (5) ist. Der thermische Coëfficient m ist für Kupfer $= 1\cdot 2$, der Coëfficient $\frac{\sigma}{4\pi} = 131$, da der specifische Widerstand des Kupfers $= 1650$ in absoluten Einheiten ist.

Noch grösser ist die Divergenz zwischen den Coëfficienten, welche in die Gleichung für die Oberfläche eingehen. Für Temperaturen, welche wenig von der des schmelzenden Eises abweichen, ist für eine schwarze Fläche in einer schwarnen Umgebung $H = 0\cdot 0001$ einer Calorie für Quadratcentimeter und Secunde als Einheiten. Für einen Kupferdraht von 4 Mm. Durchmesser wird also $\frac{2H}{acs} = 0\cdot 0012$. Der entsprechende Coëfficient in der Gleichung für den elektrischen Strom ist auch noch von der Länge des Drahtes abhängig. Für einen Kupferdraht von 1 Met. Länge und 4 Mm. Durchmesser findet man diesen Coëfficienten $= 1111$, für denselben Kupferdraht von 300 Klm. Länge $= 554$. Die thermischen und elektrischen Vorgänge verlaufen wohl ähnlich, aber in sehr verschiedenen Massverhältnissen.

Je grösser der specifische Leitungswiderstand eines Drahtes ist, desto geringer werden die Abweichungen von der Gleichförmigkeit der Stromvertheilung. Diese Abweichungen werden aber sehr bedeutend in Eisendrähten. Der specifische Widerstand des Eisens ist zwar grösser und zwar nahe 6mal grösser als jener des Kupfers. Da aber in dem Coëfficienten der Gleichung (5) nun der Divisor $1+4\pi k$ hinzutritt, welcher für kleine magnetisirende Kräfte $= 150$ angenommen werden kann, so ist der Coëfficient der Stromausgleichung für einen Eisendraht nicht 6mal grösser, sondern 25mal kleiner als für einen Kupferdraht.

Welchen Einfluss die Verschiedenheit dieser Coëfficienten auf die quantitativen Verhältnisse der Stromvertheilung hat, kann man nur aus den für bestimmte Fälle angepassten Auflösungen der Differentialgleichungen erfahren.

Eine Auflösung der Gleichung (5) bildet die folgende Reihe

$$u = T + \frac{\alpha r^2}{a^2}\frac{dT}{dt} + \frac{\alpha_2 r^4}{a^4}\frac{d^2T}{dt^2} + \frac{\alpha_3 r^6}{a^6}\frac{d^3T}{dt^3} + \qquad (8)$$

in welcher T eine von der Zeit t abhängige Function bedeutet und die Stromdichte in der Axe des Drahtes darstellt. $\alpha, \alpha_2, \alpha_3 \ldots$ sind constante Coëfficienten und zwar ist

$$\alpha = \frac{\mu\pi a^2}{\sigma}, \; \alpha_2 = \frac{\alpha^2}{4}, \; \alpha_3 = \frac{\alpha^3}{4.9}, \; \alpha_4 = \frac{\alpha^4}{4.9.16}, \ldots \qquad (9)$$

Aus (8) erhält man die Stromdichte u_1 in der Oberfläche, wenn man $r = a$ setzt. Es ist

$$u_1 = T + \alpha\frac{dT}{dt} + \alpha_2\frac{d^2T}{dt^2} + \alpha_3\frac{d^3T}{dt^3} + \qquad (10)$$

Aus derselben Gleichung erhält man die mittlere Stromdichte U, wenn man sie mit $2\pi r dr$ multiplicirt, nach r von o bis a integrirt und hierauf durch πa^2 dividirt. Es ist

$$U = T + \frac{\alpha}{2}\frac{dT}{dt} + \frac{\alpha_2}{3}\frac{d^2T}{dt^2} + \frac{\alpha_3}{4}\frac{d^2T}{dt^3} + \qquad (11)$$

Wirkt in der Leitung eine periodische elektromotorische Kraft, so ist im Zustande der Beharrung auch die Stromdichte in jedem Faden, also auch in der Axe des Drahtes eine periodische Function derselben Art. Es sei diese gegeben durch

$$T = \sin\gamma t.$$

Es sollen nun u_1 und U berechnet werden. Aus (10) und (11) folgen

$$u_1 = D\sin\gamma t + E\cos\gamma t$$
$$U = F\sin\gamma t + G\cos\gamma t,$$

worin die Zeichen D, E, F, G folgende vier Reihen bedeuten:

$$D = 1 - \frac{\alpha^2\gamma^2}{4} + \frac{\alpha^4\gamma^4}{4.9.16} -$$

$$E = \alpha\gamma - \frac{\alpha^3\gamma^3}{4.9} + \frac{\alpha^5\gamma^5}{4.9.16.25} - \tag{12}$$

$$F = 1 - \frac{1}{3}\frac{\alpha^2\gamma^2}{4} + \frac{1}{5}\cdot\frac{\alpha^4\gamma^4}{4.9.16} -$$

$$G = \frac{1}{2}\alpha\gamma - \frac{1}{4}\frac{\alpha^3\gamma^3}{4\cdot 9} + \frac{1}{6}\frac{\alpha^5\gamma^5}{4.9.16.25} -$$

Der Leitungsdraht soll ein Eisendraht von 4 Mm. Durchmesser sein, für welchen $\sigma = 9900$, $\mu = 150$ gesetzt werden kann. Die Intensität des Stromes soll 250 ganze Schwingungen in der Secunde vollführen. Da $a = 0\cdot 2$, und $\gamma = 500\,\pi$, so ist

$$\alpha\gamma = \frac{\mu\pi a^2}{\sigma}\gamma = 3.$$

Man findet

$$u_1 = -1\cdot 1108 \sin\gamma t + 2\cdot 2668 \cos\gamma t = 2\cdot 5243 \sin(\gamma t + 116^\circ\, 2').$$

Die Stromschwingungen haben also in der Oberfläche des Drahtes eine mehr als 2·5mal so grosse Amplitude, als jene in der Axe und sind den letzteren in der Phase um $116^\circ\, 2'$, also nahe um ein Drittel der ganzen Schwingungsdauer voraus.

Für die mittlere Stromdichte erhält man

$$U = 0\cdot 2779 \sin\gamma t + 1\cdot 3153 \cos\gamma t = 1\cdot 3443 \sin(\gamma t + 78^\circ\, 4').$$

Für einen Strom von doppelt so hoher Schwingungszahl, also für $\gamma = 1000\,\pi$ erhält man

$$u_1 = -5\cdot 839 \sin\gamma t + 0\cdot 529 \cos\gamma t = 5\cdot 863 \sin(\gamma t + 174^\circ\, 50').$$

Die Schwingungen in der Oberfläche haben eine fast 6mal grössere Amplitude als jene in der Axe und sind diesen nahezu um eine halbe Schwingungsdauer voraus. Die mittlere Stromdichte ist

$$U = -1\cdot 563 \sin\gamma t + 1\cdot 589 \cos\gamma t = 2\cdot 229 \sin(\gamma t + 134^\circ\, 32').$$

Führt man dieselbe Rechnung für einen Kupferdraht aus, so findet man für den Strom von 250 Schwingungen

$$u_1 = 1\cdot 0036 \sin(\gamma t + 6^\circ 50'),$$

woraus zu ersehen, dass in diesem Falle die Vertheilung der Stromdichte sehr wenig von der Gleichförmigkeit abweicht. Diese Abweichung bleibt auch noch für den Strom von der doppelten Schwingungszahl sehr klein, indem man für diesen

$$u_1 = 1 \cdot 0144 \sin(\gamma t + 13^\circ 40')$$

findet.

Nimmt man den Querschnitt des Kupferdrahtes entsprechend der besseren Leitungsfähigkeit sechsmal kleiner, so kommt die Vertheilung der Stromdichte der Gleichförmigkeit noch viel näher und beträgt z. B. die Phasendifferenz der Strömungen in der Axe nnd in der Oberfläche selbst für den Strom von der höheren Schwingungszahl nur einen Grad. Hingegen bietet ein Kupferdraht von 20 Mm. Durchmesser dieselben Verhältnisse, wie ein Eisendraht von 4 Mm. Dicke.

Es soll nun noch die Beziehung zwischen elektromotorischer Kraft und Stromstärke abgeleitet werden, und zwar nur für den speciellen Fall, dass es sich um eine einfache periodische Bewegung handelt. Zu dieser Ableitung dient die Gleichung (4), in welche die Werthe von u_1 und U einzuführen sind. Es ist jedoch zweckmässig, vorher u_1 durch U auszudrücken.

Es sei A_1 die Amplitude der Stromdichte in der Oberfläche, A jene der mittleren Stromdichte, so kann man

$$u_1 = A_1 \sin(\gamma t + \varphi_1), \; \mathrm{U} = A \sin(\gamma t + \varphi)$$

setzen, so dass $\varphi_1 - \varphi$ die Phasendifferenz der beiden Stromdichten darstellt. Man kann also auch

$$u_1 = \frac{A_1 \cos(\varphi_1 - \varphi)}{A} U + \frac{A_1 \sin(\varphi_1 - \varphi)}{\gamma A} \frac{dU}{dt}$$

schreiben und diesen Werth in die Gleichung (4) einstellen. Ferner kann man U durch die Stromstärke $J = qU$ ersetzen, unter q den Querschnitt des Drahtes verstanden. Die Gleichung (4) nimmt dann die Form an:

$$p = w' J + L' \frac{dJ}{dt},$$

d. h. der dicke Draht ist äquivalent einem unendlich dünnen Drahte, dessen Widerstand $= w'$ und dessen Coëfficient der Selbstinduction $= L'$ ist.

Was den Werth von w' anbetrifft, so ist, wenn man den Quotienten $\frac{l\sigma}{q}$, welcher den Widerstand des Leitungsdrahtes in seiner gewöhnlichen Bedeutung gibt, mit w bezeichnet

$$w' = w \frac{A_1 \cos(\varphi_1 - \varphi)}{A}.$$

In dem vorher betrachteten Beispiele, welches sich auf einen Eisendraht von 4 Mm. Durchmesser und einen Strom bezieht, der einem Tone von 250 Schwingungen entspricht, wurden $A_1 = 2\cdot5243$, $A = 1\cdot3433$, $\varphi_1 = 116° 2'$, $\varphi = 78° 4'$ gefunden.

Es sind dies Relativwerthe, welche sich auf die axiale Stromdichte als jene von der Amplitude $= 1$ und der Phase $= 0$ beziehen. Es ist dies jedoch ohne Belang, da in der Formel für w' nur das Verhältniss der Amplituden und die Differenz der Phasen vorkommt. Die Rechnung gibt $w' = 1\cdot4815\, w$.

Für den Strom, welcher dem doppelt so hohen Tone von 500 Schwingungen entspricht, findet man $w' = 2\cdot006\, w$.

Die im Leitungsdrahte entwickelte Wärme ist durch den Integralwerth von $w' J^2$ bestimmt. Es ist daher der Verbrauch von Energie in einer Leitung, welche von einem periodischen Strome durchflossen wird, immer grösser, als die gewöhnlichen Regeln ihn angeben.

Die Erhöhung des Widerstandes des Drahtes ist dadurch bedingt, dass die inneren Schichten desselben in geringerem Masse an der Stromleitung sich betheiligen und auch in Folge der Phasenverschiebung zur selben Zeit die Elektricität in einer Richtung führen, welche jener in den der Oberfläche nahe liegenden Schichten entgegengesetzt ist.

Dieselben Umstände, welche den Widerstand im Leitungsdrahte erhöhen, haben eine Verminderung der Wirkungen der Selbstinduction zur Folge. Der Coëfficient L' besteht aus zwei Theilen. Der erste Theil ist der Factor von $q \frac{dU}{dt} = \frac{dJ}{dt}$, der schon von Anfang an in der Gleichung (4) vorkommt, der zweite Theil kommt durch die Substitution von u_1 in dieselbe. Nach

Vornahme einer kleinen Transformation an diesem Theile erhält man:

$$L' = 2l(\log\frac{2l}{a} - 1) + \mu l \frac{A_1 \sin(\varphi_1 - \varphi)}{\alpha\gamma A}.$$

Für einen sehr dünnen Draht, für welchen α sehr klein ist wird $A = A_1$, und der Quotient von $\sin(\varphi_1 - \varphi)$ und $\alpha\gamma$, wie leicht zu finden ist, $= {}^1/_2$. Man erhält unter dieser Voraussetzung für L' denjenigen Ausdruck, welcher nach der gewöhnlichen Rechnungsart als Coëfficient der Selbstinduction L gefunden wird, nämlich:

$$L = 2l(\log\frac{2l}{a} - 1 + \frac{1}{4}\mu) = 2l(\log\frac{2l}{a} - \frac{3}{4} + \pi k).$$

Um die Veränderung, welche dieser Coëfficient durch die ungleichförmige Vertheilung der Stromdichte erleidet, ersichtlich zu machen, kann man schreiben

$$L' = L - \mu l\left(\frac{1}{2} - \frac{A_1 \sin(\varphi_1 - \varphi)}{\alpha\gamma A}\right).$$

Für die zwei behandelten Beispiele erhält man den Schwingungszahlen 250 und 500 entsprechend die an L anzubringenden Correctionen $= -0 \cdot 1149\, \mu l$ und $-0 \cdot 2163\, \mu l$.

Hätte die Ungleichförmigkeit der Stromdichte nur die Vergrösserung des Widerstandes allein zur Folge, so wäre damit nothwendig eine Verkleinerung der Stromstärke verbunden. Da aber gleichzeitig die Wirkung der Selbstinduction kleiner wird, so kann die Stromstärke auch grösser werden und wird dies namentlich für Ströme von hoher Schwingungszahl. So findet man für eine 300 Klm. lange Leitung aus Eisendraht von 4 Mm. Durchmesser für die Intensität eines Stromes von 250 Schwingungen nahe denselben Werth, wenn man die Stromdichte gleichförmig voraussetzt oder wenn man ihre Ungleichförmigkeit in Rechnung bringt.

Für einen Strom von 500 Schwingungen wird das mittlere Quadrat der Stromstärke in Folge der ungleichförmigen Vertheilung der Stromdichte 1·5mal, für einen Strom von 1000 Schwingungen 7·5mal grösser. Immer aber ist die Abschwächung der Ströme in einem Eisendrahte bedeutender, als in einem nicht magnetischen Drahte von denselben Dimensionen und demselben specifischen Widerstande.

Die Thatsache, dass für die telephonische Correspondenz auf grosse Distanzen Eisendrähte sich nicht eignen, hat man durch diese bedeutenden Abschwächungen, welche die periodischen Ströme durch die grosse Selbstinduction im Eisen erfahren, erklärt. Nachdem Lord Rayleigh zuerst darauf hingewiesen hat, dass die ungleichförmige Stromdichte eine scheinbare Erhöhung des Widerstandes der Drähte zur Folge habe, hat man diesen Umstand als einen weiteren Grund mehr für die Unbrauchbarkeit der Eisendrähte betrachtet.

Die oben gefundenen Resultate zeigen jedoch, dass die ungleichförmige Vertheilung der Stromdichte im Gegentheile die Abschwächung der Ströme, namentlich der Ströme von hoher Schwingungszahl auf ein geringeres Mass reducirt. Ebenso wird die Zeit, welche verfliesst, bis die Ströme die der elektromotorischen Kraft entsprechende Intensität erreichen, durch die ungleichförmige Vertheilung der Stromdichte abgekürzt. Sie ist aber natürlich für Eisendrähte viel grösser, als für nicht magnetische.

Die Vorgänge in einem Eisendrahte, welcher unter dem Einflusse einer veränderlichen elektromotorischen Kraft steht, sind übrigens noch complicirter, als die bisherigen Rechnungen sie darstellen. Die Intensität der Magnetisirung des Eisen steht zur Grösse der magnetisirenden Kraft nicht in einem constanten Verhältnisse.

Von diesem Gesetz weicht das Verhalten des Eisens auch schon bei kleinen magnetisirenden Kräften ab. Dasselbe ist veränderlich und lässt sich durch eine Formel nicht darstellen. Gilt das bezeichnete einfache Gesetz nicht, so wird der Coëfficient der Selbstinduction eines Drahtes keine constante, sondern eine von der Stromintensität abhängige Grösse. Ist z. B. die Beziehung zwischen dem inducirten Moment m und der magnetisirenden Kraft P durch die Gleichung $m = hP^n$ gegeben, so erhält man für den Coëfficienten der Selbstinduction eines dünnen geraden Drahtes von der Länge l und dem Radius a den Ausdruck

$$L = 2l\left(\log\frac{2l}{a} - \frac{3}{4} + \frac{2^{n+1}nh\pi}{(n+3)a^{n-1}}J^{n-1}\right).$$

Ist m nicht durch eine einzelne Potenz von P, sondern durch eine Reihe von solchen bestimmt, so kommt auch in L eine dem mit h multiplicirten Gliede entsprechende Reihe vor.

Die wesentliche Veränderung, welche durch ein anderes Gesetz, als das einfache $m = kP$, in das Problem gebracht wird, ist die, dass die zur Bestimmung der Stromstärke J dienende Gleichung aufhört, eine lineare zu sein. Der Einfluss dieser Veränderung auf die Lösungen der Gleichung lässt sich nicht allgemein characterisiren. Es mag hier nur auf den speciellen Fall hingewiesen werden, dass eine elektromotorische Kraft, die einem einfachen Tone entspricht, nicht mehr einen Strom von derselben Art zur Folge hat, sondern dass dieser Strom noch von einer unendlichen Reihe von Strömen entsprechend den Obertönen eines Grundtones begleitet wird.

Die Werthe von w' und L' sind im vorhergehenden aus den Amplituden A, A_1 und der Phasendifferenz $\varphi_1 - \varphi$ abgeleitet worden, desshalb, weil diese Grössen schon berechnet waren. Will man dieselben direct mit Hilfe der Reihen (12) bestimmen, so hat man dazu die Formeln

$$w' = w \frac{DF + EG}{F^2 + G^2}$$

$$L' = 2l \left(\log \frac{2l}{a} - 1\right) + \mu l \frac{EF - DG}{F^2 + G^2}.$$

Es gibt übrigens zur Bestimmung dieser zwei Grössen noch einen anderen Weg. Man kann aus den Formeln (10) und (11) T eliminiren, auch ohne die Voraussetzung, dass es eine einfache periodische Function ist, machen zu müssen.

Man findet

$$u_1 = U + \beta_1 \frac{dU}{dt} + \beta_2 \frac{d^2 U}{dt^2} + .$$

Die Coëfficienten β sind bestimmt durch die Gleichungen

$$\beta_1 = \frac{1}{2}\alpha, \quad \beta_2 = \frac{2}{3}\alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha\beta_1,$$

$$\beta_3 = \frac{3}{4}\alpha_3 - \frac{1}{3}\alpha_2\beta_1 - \frac{1}{2}\alpha\beta_2, \text{ u. s. w.}$$

Führt man den Werth von u_1 in die Gleichung (4) ein, so verwandelt sie sich, wenn man noch qU durch J ersetzt, in

$$p = w\left(J+\beta_1\frac{dJ}{dt}+\beta_2\frac{d^2J}{dt^2}+\ldots\right)+2l\left(\log\frac{2l}{a}-1\right)\frac{dJ}{dt}.$$

Diese Formel hat schon Maxwell abgeleitet, er hat von ihr jedoch nicht die einzige einfache Anwendung, welche sie zulässt, gemacht, nämlich die Anwendung auf den Fall, dass p und im Zustande der Beharrung also auch J eine einfache periodische Function der Zeit ist. Ist dieser Fall vorhanden, so hat man

$$\frac{d^2J}{dt^2} = -\gamma^2 J, \quad \frac{d^3J}{dt^3} = -\gamma^2\frac{dJ}{dt},$$

und es ist ersichtlich, dass sich die zweite Seite der letzten Gleichung in zwei Theile zusammenfassen lässt, von welchen der erste J, der zweite $\frac{dJ}{dt}$ als Factor enthält. Die mit J und $\frac{dJ}{dt}$ multiplicirten Grössen sind w' und L' und ist

$$w' = w(1-\beta_2\gamma^2+\beta_4\gamma^4+\ldots)$$

$$L' = L-\frac{l\mu}{\alpha\gamma}(\beta_3\gamma^3-\beta_5\gamma^5+\ldots).$$

Die in diesen Formeln enthaltenen Reihen besitzen nur einen geringen Grad von Convergenz, wenn es sich um Fälle, wie die oben berechneten handelt. Die Beschränkung auf wenige Glieder führt zu ganz unrichtigen Resultaten.

Die Werthe der Coëfficienten β sind:

$$\beta_2 = -\frac{\alpha^2}{12}, \quad \beta_3 = \frac{\alpha^3}{48}, \quad \beta_4 = -\frac{\alpha^4}{180}, \quad \beta_5 = \frac{13\alpha^5}{2^6.3^3.5},$$

$$\beta_6 = -\frac{11\alpha^6}{2^8.3.5.7}, \quad \beta_7 = \frac{647\,\alpha^7}{2^{11}.\,3^4.\,5.\,7},$$

Im Allgemeinen reducirt sich die Gleichung für J nicht mehr auf zwei nur J und $\frac{dJ}{dt}$ als Factoren enthaltende Theile. Es gibt dann keinen unendlich dünnen Draht, der an die Stelle des dicken gesetzt die Strombewegung in den übrigen Theilen der Leitung unverändert liesse, die Begriffe Widerstand und Inductionscoëfficient können nicht mehr zur Anwendung kommen. Es tritt hier derselbe Fall ein, wie bei der Stromverzweigung überhaupt. Auch eine aus dünnen Drähten bestehende verzweigte Leitung kann im Allgemeinen nicht durch einen einzigen dünnen Draht ersetzt werden, wohl aber dann, wenn der verzweigte Strom constant oder durch eine einfache periodische Function der Zeit bestimmt ist.

Für beliebig veränderliche Ströme geben die Gesetze der Stromverzweigung zu wenig Gleichungen, um die Intensitäten der Partialströme und ihre Differentialquotienten durch die Intensität des Gesammtstromes und den Differentialquotienten derselben auszudrücken. Sind aber die Ströme einfach periodisch, so kann man durch Differentiation der vorhandenen Gleichungen neue Gleichungen gewinnen, ohne die Zahl der zu bestimmenden Grössen zu vermehren und dadurch wird die Aufgabe eine bestimmte. Dies trifft auch dann zu, wenn die Periode der Function, durch welche die Stromstärke bestimmt ist, imaginär oder complex ist, denn es kommt nur darauf an, dass die Function einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit constanten Coëfficienten genügt.