

# Über einen neuen topologischen Process und die Entstehungsbedingungen einfacher Verbindungen und Knoten in gewissen geschlossenen Flächen

von

Dr. Friedrich Dingeldey in Darmstadt.

(Mit 5 Tafeln.)

Bekanntlich<sup>1</sup> lassen sich alle Gebilde, welche ein ringförmig geschlossener untordirter oder um ein beliebiges ganzes Vielfaches von  $180^\circ$  tordirter rechteckiger Streifen liefert, sobald man denselben längs seiner Mittellinie parallel zu seinen Rändern vollständig zerschneidet, nach Einführung von vier Hilfsbegriffen: positive und negative Verbindung *a*ter Art, positiver und negativer Knoten *a*ter Art, vollständig und einfach durch die zwei nachstehenden Sätze topologisch präcisiren:

I. Enthielt der geschlossene Streifen vor Ausführung des Mittelschnittes eine Gesammttorsion um irgend ein gerades Vielfaches von  $180^\circ$  in positivem oder negativem Sinne, also etwa um  $\pm 2a \times 180^\circ$ , wobei *a* eine beliebige positive ganze Zahl bedeutet, so liefert jener Schnitt zwei ringförmig geschlossene Streifen, welche gleichsinnig mit den ursprünglich vorhandenen Torsionen mit einander in einer positiven oder negativen Verbindung *a*ter Art stehen und je dieselbe Gesammttorsion wie der ursprüngliche Streifen besitzen.

---

<sup>1</sup> S. h. die Abhandlung von Herrn Prof. Simony: „Über eine Reihe neuer Thatsachen aus dem Gebiete der Topologie“, *Mathematische Annalen* Bd. XIX, S. 110, sowie die dritte Auflage der Brochure desselben Autors: „Gemeinfassliche, leicht controlirbare Lösung der Aufgabe: ‚In ein ringförmig geschlossenes Band einen Knoten zu machen‘ und verwandter merkwürdiger Probleme“ (Wien, Gerold & Comp., 1881).

II. Enthielt der geschlossene Streifen vor Ausführung des Mittelschnittes eine Gesammttorsion um irgend ein ungerades Vielfaches von  $180^\circ$  in positivem oder negativem Sinne, also etwa um  $\pm(2a+1) \times 180^\circ$ , so liefert jener Schnitt einen einzigen ringförmig geschlossenen Streifen mit einem längs desselben verschiebbaren Knoten *a*ter Art, welcher positiv oder negativ ist in Übereinstimmung mit dem Sinne der in dem Bande ursprünglich vorhandenen Torsionen; auch die Gesammttorsion des neu erzeugten Streifens ist stets gleichsinnig mit jener des ursprünglichen, ihr absoluter Betrag jedoch auf  $4(a+1) \times 180^\circ$  gestiegen.

Dieselben Hilfsbegriffe genügen nun auch, um zwei andere Gruppen topologischer Gebilde vollständig und einfach zu beschreiben, welche nach Vornahme einer gewissen, in §. 1 näher zu betrachtenden Operation aus ringförmig geschlossenen tordirten oder untordirten Streifen erzeugbar sind. Es wird sich zugleich das Resultat ergeben, dass hiebei die Art des entstehenden Gebildes, d. h. die durch ihre Windungszahlen charakterisirte Art der Verbindung oder des Knotens, völlig unabhängig davon ist, ob der geschlossene Streifen ursprünglich irgend welche Torsionen enthielt oder untordirt war. Die Art des entstehenden Gebildes hängt vielmehr lediglich von der Anzahl gewisser Verdrehungen ab, die dem geschlossenen Streifen ertheilt werden. Dabei ist noch zu beachten, dass man in den Fällen, in welchen sich zwei ringförmig geschlossene Streifen ergeben, durch gewisse Längsdrehungen die in dem einen Ringe enthaltenen Torsionen um eine beliebige Anzahl vermehren oder vermindern kann, während alsdann aber gleichzeitig in dem anderen Ringe eben so viele Torsionen von entgegengesetztem Sinne auftreten. Auch die einzelnen Umfänge der zwei Ringe können verschieden sein, nur der gesammte Umfang beider Ringe bleibt, so lange man mit geschlossenen Streifen von ursprünglich gleicher Länge operirt, stets constant (§. 2).

In §. 3 wird gezeigt, in welcher Weise sich auch graphisch die in §. 1 erhaltenen Resultate begründen lassen.

Eine weitere Erzeugungsweise einfacher Verbindungen und Knoten, die auf den ersten Blick von der soeben erwähnten verschieden zu sein scheint, sich aber als äquivalent mit ihr erweist,

wird in §. 4 betrachtet; dieselbe führte mich unmittelbar zu einem neuen topologischen Process und zu einer aus demselben hervorgehenden neuen Erzeugungsweise einer speciellen Serie sogenannter Knotenverbindungen, wie sie Herr Simony bei unverdrehten Ringen von kreisförmigem Querschnitte durch einen, den Ring bis zur Mittellinie durchsetzenden, längs der letzteren in sich selbst zurückkehrenden Schnitt erhielt.<sup>1</sup>

In §. 5 werden einige Beispiele zu den in den vorhergehenden Paragraphen erwähnten Erzeugungsweisen gegeben.

In einem zweiten Abschnitte der vorliegenden Arbeit betrachte ich die Erzeugung einfacher Verbindungen und Knoten bei geschlossenen Flächen, die aus beliebig vielen tordirten oder untordirten Streifen derart zusammengesetzt sind, dass die Mittellinien der einzelnen Streifen gerade so in zwei Punkten zusammenlaufen, wie etwa die Meridiane einer Kugel in den beiden Polen. Ein längs den Mittellinien sämtlicher Streifen in sich selbst zurücklaufender Schnitt liefert alsdann mitunter sehr verwickelte Gebilde, welche zunächst für den Fall von drei, mit beliebigen Torsionen behafteten Streifen von Herrn J. L. Schuster eingehend untersucht und nach ihren Grundtypen oder topologischen Gattungsbegriffen classificirt worden sind.<sup>2</sup> Ich gebe nun diejenigen Fälle an, in welchen bei einer aus beliebig vielen Streifen zusammengesetzten Fläche durch jenen Mittelschnitt einfache Verbindungen und Knoten irgend welcher Art entstehen (§§. 6—8). Hiebei soll durch das Attribut „einfach“ nicht nur angedeutet werden, dass ich die Erzeugung mehrfacher Verbindungen und Knoten<sup>3</sup> unberücksichtigt lasse, sondern ich will

<sup>1</sup> S. h. die Abhandlung von Herrn Simony: „Über eine Reihe neuer mathematischer Erfahrungssätze“ (Sitzungsber. d. kais. Akad. der Wissenschaften in Wien, Bd. LXXXV, Abth. II, 1882, S. 910 ff., oder auch Math Annalen, Bd. XXIV, S. 255 f.).

<sup>2</sup> S. h. die Abhandlung von Herrn Schuster: „Über jene Gebilde, welche geschlossenen, aus drei tordirten Streifen hergestellten Flächen durch gewisse Schnitte entspringen“ (Sitzungsber. d. kais. Akad. d. Wissenschaften in Wien, Bd. XCVII, Abth. II, 1888, S. 217—246).

<sup>3</sup> Hinsichtlich der Gattungsbegriffe „ $k$ -fache Verbindung“, „ $k$ -facher Knoten“ vergl. Herrn Simony's Abhandlung: „Über jene Gebilde, welche aus kreuzförmigen Flächen durch paarweise Vereinigung ihrer Enden und

damit auch sagen, dass in dem sich ergebenden Gebilde nur eine Verbindung, respective ein Knoten, natürlich beliebiger Art, auftreten soll.

In §. 9 wird gezeigt, in welcher Weise man die in §. 7 und §. 8 erhaltenen Resultate wenigstens in den einfacheren Fällen leicht graphisch begründen kann.

Schliesslich erwähne ich noch zwei Erzeugungsweisen, welche überhaupt dieselben Gebilde liefern, wie jene längs ihrer Mittellinie durchschnittenen Streifen einer aus beliebig vielen Streifen zusammengesetzten Fläche. Die eine dieser Erzeugungsweisen verdanke ich einer gütigen brieflichen Mittheilung von Herrn Prof. Simony, die andere rührt von Herrn Schuster her und ist in dessen „topologischer Radwelle“ realisirt (§. 10).

### Erster Abschnitt.

Über neue Erzeugungsweisen topologischer Gebilde, insbesondere Verbindungen und Knoten, in ringförmig geschlossenen Streifen.

#### §. 1.

#### Transformation eines rechteckigen Streifens in ein ringförmig geschlossenes Band.

Enthält ein ringförmig geschlossener Streifen eine beliebige Anzahl Torsionen, so liefert ein in der Mittellinie des Streifens in sich selbst zurücklaufender Längsschnitt ein Gebilde, für welches die in der Einleitung zu vorliegender Arbeit unter I. und II. angeführten Sätze gelten. Das durch den Schnitt erhaltene Gebilde hängt also hier lediglich von der Anzahl derjenigen Torsionen ab, die der geschlossene Streifen vor Ausführung des Schnittes enthielt. Ihrer Art nach gleiche Gebilde kann man nun auch durch eine andere Operation erhalten, die zum Theil in gewissen Verdrehungen besteht, welche mit dem geschlossenen Streifen vorgenommen werden. Bei dieser Operation erweist sich aber die Art des entstehenden Gebildes als gänzlich unabhängig von den in dem geschlossenen Streifen

---

gewisse in sich selbst zurückkehrende Schnitte entstehen“ (Sitzungsber. d. kais. Akad. d. Wissensch. in Wien, Bd. LXXXIV, Abth. II, 1881, S. 255f., oder auch Math. Annalen, Bd. XIX, S. 119 f.).

ursprünglich vorhandenen Torsionen; die letzteren treten vielmehr nur additiv zu denjenigen Torsionen hinzu, welche die Anwendung dieser neuen Operation auf einen untordirten geschlossenen Streifen in diesem hervorrufen würde. Hingegen wird sich zeigen, dass diese Art genau in derselben Weise nur von der Anzahl jener, sofort näher zu beschreibenden Verdrehungen abhängt, wie sie bei den durch die Sätze I. und II. definirten Gebilden von der Anzahl derjenigen Torsionen abhängig ist, welche der geschlossene Streifen ursprünglich enthielt.

Um dies nachzuweisen und um zugleich die neue Operation abzuleiten, gehe ich zunächst aus von einem rechteckigen Papierstreifen; wird das eine Ende desselben in beliebiger Weise tordirt und mit dem anderen Ende vereinigt, so gelten für den auf solche Weise ringförmig geschlossenen Streifen die beiden Sätze I. und II. Aber diese Sätze gelten offenbar auch dann noch, wenn man aus dem Streifen, bevor man ihn tordirt und seine beiden Enden zusammenheftet, ein beliebig gestaltetes Flächenstück  $F$  (Fig. 1, Taf. I) ausschneidet, das nur nicht so gross sein darf, dass es in den Umriss  $A C B D$  eingreift; ich kann auch die beiden Seitentheile  $C$  und  $D$  nach oben, respective unten ausdehnen, so dass ich ein geschlossenes Oval  $A C B D$  erhalte, welches auf seiner Unterlage flach aufliegt (Fig. 2). Wenn ich alsdann ein Streifentheilchen  $B$  nach einer Verdrehung um beliebige Vielfache von  $180^\circ$  mit einem nicht an  $B$  anstossenden Streifentheilchen  $A$  (am bequemsten natürlich mit einem Theilchen, das recht weit von  $B$  entfernt liegt) etwa durch zwei Nadeln vereinige, die senkrecht zur Richtung der Tangente in  $A$  gesteckt sind, und dann zwischen den beiden Nadeln die Breite des Streifens quer durchschneide, so weist das so entstehende Gebilde offenbar gleichfalls diejenigen Verbindungen oder Knoten auf, welche die beiden Sätze I. und II. für den gewöhnlichen ringförmig geschlossenen Streifen fordern. Es ist bei der Verdrehung des Streifentheilchens  $B$  natürlich darauf zu achten, dass diese Drehung so stattfindet, wie es gemäss der Entstehung der Figur 2 aus Figur 1 (Taf. I) geschehen muss, also nicht um die Mittellinie  $mn$  der Begrenzung des geschlossenen Ovals als Axe, sondern um eine Gerade  $rs$  als Axe, die in der Ebene des Ovals

liegt und in  $B$  senkrecht zur Mittellinie verläuft, oder kürzer ausgedrückt: um die Verbindungslinie  $AB$  als Axe. (Würde man um die Mittellinie drehen, so erhielte man natürlich stets zwei getrennte, um entgegengesetzte Vielfache von  $180^\circ$  verdrehte Ringe.)

Und nun der letzte Schritt! Ob der geschlossene Streifen vor seiner Verdrehung flach aufliegt, wie in Fig. 2, oder ob seine Begrenzung aufrecht stehend ist, wie in Fig. 3 (Taf. I), ist gleichgiltig: die Sätze I. und II. gelten ebensowohl für Fig. 2 wie für Fig. 3. Das Gebilde, von dem ich aber im letzteren Falle ausgehe, stellt einen ringförmig geschlossenen untordirten Streifen dar. Wenn ich bei ihm ein Theilchen  $B$  einem anderen  $A$  entgegenbiege, um beliebige Vielfache von  $180^\circ$  auf die soeben angegebene Art und Weise verdrehe, mit  $A$  vereinige und dann die Vereinigungsstelle  $A \equiv B$  quer durchschneide, so besitzt das alsdann entstehende Gebilde wiederum dieselben Verbindungen oder Knoten, welche die Sätze I. und II. fordern. Die Drehung, welche vor dem Vereinigen der beiden Streifentheilchen stattfindet, will ich, hauptsächlich im Hinblick auf ihre Äquivalenz mit einer in §. 4 zu schildernden Drehung, als Rotation bezeichnen.

Was die Breite des durch die soeben beschriebene Operation aus dem ringförmig geschlossenen Streifen entstandenen Gebildes betrifft, so ist dieselbe natürlich unverändert geblieben, da kein Längsschnitt, sondern nur ein einfacher Querschnitt geführt wurde.

Aus gleichem Grunde ist auch die gesammte Länge des erzeugten Gebildes dieselbe wie die des geschlossenen Streifens, freilich nur vom rein topologischen Standpunkte betrachtet: in Wirklichkeit hat sie sich um das kleine Stückchen verringert, das für die beiden Nadeln oder die zusammenheftende Materie nöthig ist und das daher als beliebig klein angesprochen werden darf.

Endlich ist die Thatsache, dass bei dieser Rotation kein Schnitt längs der Mittellinie des ringförmig geschlossenen Streifens geführt wird, die Ursache des Umstandes, dass die Art des erzeugten Gebildes ganz unabhängig davon ist, ob dieser Streifen mit Torsionen behaftet war oder nicht. Waren Torsionen vorhanden, so setzt sich die Gesammttorsion des neu

erzeugten Gebildes aus ihnen und aus denjenigen Torsionen additiv zusammen, welche durch die Rotation entstehen. Fand eine Rotation statt um ungerade Vielfache von  $180^\circ$ , etwa um  $\pm(2r+1) \times 180^\circ$ , und bezeichnet  $\pm a$  den Betrag der in dem ringförmig geschlossenen Streifen ursprünglich vorhandenen Torsionen, so wird daher der Betrag der Gesammttorsion des durch die Rotation erzeugten Gebildes gleich

$$\pm 4(r+1) \times 180^\circ \pm a \times 180^\circ$$

Im Falle einer Rotation um gerade Vielfache von  $180^\circ$ , etwa um  $\pm 2r \times 180^\circ$ , wird jener Betrag gleich

$$\pm 4r \times 180^\circ \pm a \times 180^\circ;$$

in diesem Falle, in welchem nach Satz I. zwei Ringe entstehen, verstehe ich unter Gesammttorsion natürlich die Summe der in den beiden Ringen enthaltenen Torsionen.

Ich habe bisher nur gesagt, dass die beiden Theilchen  $A$  und  $B$  des geschlossenen Streifens nach Vornahme jener Drehung mit einander vereinigt werden müssen, habe aber noch nicht festgesetzt, welche Seiten der beiden Theilchen hiebei auf einander gelegt werden sollen. Die Art dieser Vereinigung ist aber in dem Falle, in welchem zwei Ringe entstehen, wo also eine Rotation um gerade Vielfache von  $180^\circ$  stattfand, von Einfluss auf die einzelnen Torsionen dieser Ringe; ich sage auf die einzelnen Torsionen: die Gesammttorsion, d. h. die Summe der in beiden Ringen enthaltenen Torsionen, wird durch die Vereinigungsweise nicht alterirt, denn nachdem jene Rotation vollzogen, können neue Torsionen in dem Streifen nicht auftreten, wie auch die beiden Theilchen  $A$  und  $B$  vereinigt werden mögen, da der Streifen ringförmig geschlossen ist. Daher brauche ich hinsichtlich der Art der Vereinigung nur den Fall zu berücksichtigen, dass eine Rotation um gerade Vielfache von  $180^\circ$  stattfand; drehe ich um ungerade Vielfache, so entsteht ja nach Führung des Querschnittes überhaupt nur ein einziger Ring, eine Vertheilung der Torsion auf zwei Bestandtheile des erzeugten Gebildes kann alsdann nicht stattfinden.

Die Vereinigung der zwei gegenüber liegenden Theilchen  $A$  und  $B$  eines ringförmig geschlossenen Streifens lässt sich nun

auf vier verschiedene Arten vornehmen, wie ich an dem einfachen Beispiele eines untordirten Streifens zeigen will, da im allgemeinen Falle die Sache sich ganz ebenso verhält. Jeder Art entspricht eine eigene Vertheilung der in dem Streifen durch die Rotation hervorgerufenen Torsionen auf die beiden durch die Vereinigung entstandenen Bezirke. Es werde durch Fig. 4 (Taf. I) der flach in die Ebene niedergelegte ringförmig geschlossene Streifen dargestellt; alsdann ist sofort klar, dass folgende Möglichkeiten vorhanden sind:

1. Die beiden oberen Seiten von *A* und *B* werden aneinander geheftet;
2. die beiden unteren Seiten von *A* und *B* werden aneinander geheftet;
3. die obere Seite von *B* wird unmittelbar unter die untere Seite von *A* gelegt;
4. die untere Seite von *B* kommt unmittelbar auf die obere Seite von *A* zu liegen.

In allen vier Fällen entstehen durch die Vereinigung zwei ringförmige Bezirke, von denen der dem Beschauer abgewandte mit  $R_1$ , der andere mit  $R_2$  bezeichnet werden möge. Man sieht nun sofort ein, dass in den Fällen 1. und 2. weder im Ringe  $R_1$ , noch im Ringe  $R_2$  eine Änderung in der Anzahl der in Folge der Rotation bereits vorhandenen Torsionen eintreten kann. Diese Vereinigungsweisen will ich deshalb als „reguläre“ bezeichnen. Bei einer Vereinigung im Sinne des Falles 3. tritt jedoch im Ringe  $R_1$  eine positive, in  $R_2$  eine negative Torsion auf, und im Falle 4. ist es gerade umgekehrt. Diese beiden Vereinigungsweisen will ich als „irreguläre“ bezeichnen.

Fand also eine Rotation statt im Betrage von  $t = \pm 2r \times 180^\circ$ , so enthält bei regulärer Vereinigung jeder Ring  $t$  Torsionen; bei irregulärer Vereinigung ist der Torsionscoefficient  $x_1$  des Ringes  $R_1$  gleich  $t + 1$ , der von  $R_2$  ist  $x_2 = t - 1$  oder umgekehrt.

Enthielt der ringförmig geschlossene Streifen schon von Hause aus etwa  $a$  Torsionen in positivem oder negativem Sinne, so verdient der Fall einer Rotation um gerade Vielfache von  $180^\circ$ , also um  $t = \pm 2r \times 180^\circ$ , auch noch insofern eine besondere Erwähnung, als hier hinsichtlich der Vertheilung jener ursprünglichen Torsionen auf die beiden bei der Rotation entstehenden

Ringe  $a + 1$  verschiedene Möglichkeiten vorliegen. Man kann nämlich vor der Vereinigung der beiden Streifentheilchen  $A$  und  $B$  eine beliebige Anzahl  $a_1$  der ursprünglich vorhandenen  $a$  Torsionen etwa in den Theil des geschlossenen Streifens schieben, der später den Ring  $R_1$  bildet; die übrigen  $a_2 = a - a_1$  Torsionen befinden sich alsdann in dem Ringe  $R_2$ . Da  $a_1$  alle Werthe von 0 bis  $a$  durchlaufen kann, so ergeben sich in der That  $a + 1$  Möglichkeiten. Mit Berücksichtigung des Sinnes der in dem ringförmig geschlossenen Streifen ursprünglich vorhandenen Torsionen erhält man alsdann für die Torsionscoefficienten  $x_1$  und  $x_2$  der beiden Ringe  $R_1$  und  $R_2$  folgende Werthe:

Bei regulärer Vereinigung ist:

$$x_1 = t \pm a_1, \quad x_2 = t \pm a_2,$$

bei irregulärer Vereinigung ist

dem Falle 3. entsprechend:

$$x_1 = t + 1 \pm a_1, \quad x_2 = t - 1 \pm a_2,$$

dem Falle 4. entsprechend:

$$x_1 = t - 1 \pm a_1, \quad x_2 = t + 1 \pm a_2.$$

Die Gesammttorsion ist aber stets gleich  $2t \pm a$ , wie auch schon oben (S. 85) bemerkt wurde.

Schliesslich wäre noch zu erwähnen, dass die beiden Ringe nur dann von gleicher Grösse sind, wenn jene Theilchen  $A$  und  $B$  des geschlossenen Streifens so liegen, dass sie denselben in zwei gleiche Theile theilen. Besitzen aber  $A$  und  $B$  eine solche Lage, dass sie auf dem geschlossenen Streifen Theile von verschiedener Grösse markiren, so bildet der kleinere Theil des Streifens einen kleineren Ring, der grössere Theil einen grösseren Ring. Es ist dies ganz natürlich, muss aber der Vollständigkeit halber erwähnt werden.

Ebenso ist selbstverständlich, dass durch wiederholte Vornahme der oben beschriebenen Rotation nicht nur jeder geschlossene Streifen mit beliebig vielen, von einander isolirten Knoten beliebiger Art versehen werden kann, sondern man kann auch eine ganze Kette von Ringen herstellen, in denen sich Knoten befinden.

## §. 2.

**Längsdrehungen des ringförmig geschlossenen Streifens.**

Die Torsionscoefficienten der zwei bei einer Rotation um gerade Vielfache von  $180^\circ$  entstehenden Ringe lassen sich auch noch insofern ändern, als es möglich ist, die in dem einen Ringe enthaltenen Torsionen um eine beliebige Anzahl zu vermehren, während dann aber gleichzeitig in dem anderen Ringe ebenso viele Torsionen von entgegengesetztem Sinne auftreten.

Ertheilt man nämlich vor Vereinigung der beiden Streifen-theilchen *A* und *B* (Fig. 4, Taf. I) dem Stücke *BC* des geschlossenen Streifens eine Torsion um die Mittellinie — eine Längsdrehung — im Betrage  $\pm l \times 180^\circ$  (wie dies im Falle der positiven Torsionen der Pfeil *p* bei *B* andeuten mag), so bedingt diese Drehung von *BC* um  $\pm l \times 180^\circ$  ein gleichzeitiges Auftreten einer Torsion um  $\mp l \times 180^\circ$  in dem übrigen Theile des geschlossenen Streifens, da ein solcher Streifen keine neuen Drehungen acquiriren kann. Je nachdem man also die Stelle *B* im einen oder anderen Sinne um die Mittellinie des Streifens *l*-mal verdreht, erhält der Ring *R*<sub>1</sub> einen Zuwachs seiner Torsionszahl um  $\pm l \times 180^\circ$ , während sich gleichzeitig die Torsionen von *R*<sub>2</sub> um  $\mp l \times 180^\circ$  ändern.

In dem allgemeinen Falle, dass der geschlossene Streifen von Hause aus *a* positive oder negative Torsionen enthielt und Rotationen im Betrage  $t \times 180^\circ = \pm 2r \times 180^\circ$ , sowie Längsdrehungen im Betrage  $\pm l \times 180^\circ$  stattfanden, ergeben sich daher für die Torsionscoefficienten *x*<sub>1</sub> und *x*<sub>2</sub> der beiden Ringe *R*<sub>1</sub> und *R*<sub>2</sub> im Anschlusse an die Formeln in §. 1 folgende Werthe:

Bei regulärer Vereinigung ist:

$$x_1 = t \pm a_1 \pm l, \quad x_2 = t \pm a_2 \mp l,$$

bei irregulärer Vereinigung ist  
dem Falle 3. entsprechend:

$$x_1 = t + 1 \pm a_1 \pm l, \quad x_2 = t - 1 \pm a_2 \mp l,$$

dem Falle 4. entsprechend:

$$x_1 = t - 1 \pm a_1 \pm l, \quad x_2 = t + 1 \pm a_2 \mp l.$$

Die Gesamttorsion ist wieder stets gleich  $2t \pm a_1 \pm a_2 = 2t \pm a$ .

### §. 3.

#### Graphische Darstellung.

Auch auf graphischem Wege lassen sich die in §. 1 erhaltenen Resultate, soweit sie sich nicht auf die Torsionscoëfficienten, sondern nur auf die Art des erzeugten Gebildes beziehen, leicht demonstrieren, wie es Taf. II für die einfachsten Fälle zeigt. Es ist leicht einzusehen, dass z. B. Rotationen um positive Vielfache von  $180^\circ$  so darzustellen sind, wie es der Pfeil in Fig. 7 andeutet: die linke untere Hälfte des geschlossenen Streifens ist z. B. im Falle einer positiven Torsion um  $1 \times 180^\circ$  vor dem Zusammenheften der zwei gegenüberliegenden Streifen-theile einfach über die rechte Hälfte zu legen (vergl. Fig. 9), bei mehrfachen positiven Torsionen in dem eingeschlagenen Sinne fortgesetzt um die rechte Hälfte zu schlingen; bei negativen Torsionen findet Analoges statt mit der rechten unteren Hälfte des Streifens.

Fig. 8 stellt den Fall dar, dass keine Rotation stattfand; man sieht sofort, dass beim Durchschneiden der durch den Strich *m* angedeuteten Vereinigungsstelle zwei isolirte Ringe entstehen. Fig. 9 repräsentirt den Fall einer positiven Rotation um  $1 \times 180^\circ$ ; wird die Vereinigungsstelle durchschnitten und die ganze Figur im Sinne des Uhrzeigers um  $90^\circ$  in ihrer Ebene gedreht, so entsteht offenbar durch eine kleine Deformation Fig. 10, also ein einziges geschlossenes Band.<sup>1</sup> Die Figuren 11 und 12 repräsentiren den Fall einer negativen Rotation um  $1 \times 180^\circ$ . Fig. 13 stellt eine positive Rotation um  $2 \times 180^\circ$  schematisch dar; Fig. 14 ist mit Fig. 13 äquivalent, wie eine Trennung der Vereinigungsstelle und Drehung von Fig. 13 um

<sup>1</sup> Man beachte hier die Übereinstimmung der Figuren 10, 12, 14, 17, 20 mit den entsprechenden Figuren 4, 6, 10, 16, 24 in der dritten Auflage der Brochure des Herrn Simony: „Gemeinfassliche, leicht controlirbare Lösung der Aufgabe: „In ein ringförmig geschlossenes Band einen Knoten zu machen“ und verwandter merkwürdiger Probleme“ (Wien, Gerold & Comp., 1881).

90° im Sinne des Uhrzeigers sofort ergibt. Man erhält also im Falle  $t = +2 \times 180^\circ$  in der That zwei Ringe in positiver Verbindung erster Art. Analoges wie von Fig. 13 gilt von Fig. 15, nur erfolgte bei Fig. 15 die Rotation um  $2 \times 180^\circ$  in negativem Sinne, so dass hier die Verbindung erster Art als negativ anzusehen ist. Fig. 16 repräsentirt die positive Rotation um  $3 \times 180^\circ$ ; diese Figur ist mit Fig. 17 äquivalent und ergibt daher<sup>1</sup> einen positiven Knoten erster Art, während, wie ebenfalls leicht ersichtlich, Fig. 18 dem negativen Knoten erster Art entspricht. Fig. 19 repräsentirt die positive Rotation um  $4 \times 180^\circ$ ; es ist dann wieder Fig. 20 mit Fig. 19 äquivalent und ergibt daher der Fall  $t = +4 \times 180^\circ$  in der That zwei Ringe in einer positiven Verbindung zweiter Art, während Fig. 21, der Rotation  $t = -4 \times 180^\circ$  entsprechend, zwei Ringe in negativer Verbindung zweiter Art liefern würde. U. s. w.

#### §. 4.

##### Ein neuer topologischer Process.

Alle Verbindungen und Knoten, welche sich durch die in den vorhergehenden Paragraphen besprochene Operation herstellen lassen, kann man auch in anderer Weise, aber wiederum von einem ringförmig geschlossenen Streifen ausgehend, erzeugen, und zwar folgendermassen:

Man nehme einen ringförmig geschlossenen, der Einfachheit halber untordirten Streifen und lege ihn so zusammen, wie es Fig. 5 (Taf. I) zeigt, so dass man also, von oben betrachtend, nur die obere Seite der einen Hälfte der beiden übereinander gelegten Hälften des Streifens sieht. Man denke sich ferner in der Mitte  $M$  eine zur Zeichenebene senkrechte Drehaxe befindlich und drehe nun die obere Hälfte des Streifens im Sinne der Bewegung des Uhrzeigers um diese Axè, wie dies Fig. 6 (Taf. I) andeutet. Nachdem diese Rotation unter beständigem Festhalten der beiden in  $M$  übereinander liegenden Streifentheilchen um  $t \times 180^\circ$  erfolgt ist, vereinige man die beiden in  $M$  befindlichen Theilchen in derselben Weise, wie dies früher in §. 1 nach Vollzug der Rotationen geschah. Führt man nun wieder durch die Vereinigungsstelle einen

<sup>1</sup> S. die Anmerkung auf der vorhergehenden Seite.

Querschnitt, so ergeben sich in dem Bande genau dieselben positiven Verbindungen und Knoten, die wir in §. 1 bei einer positiven Rotation um  $t \times 180^\circ$  erhielten. Dreht man die obere Hälfte des Streifens in dem der Bewegung des Uhrzeigers entgegengesetzten Sinne, so erhält man die negativen Verbindungen und Knoten. Ebenso findet Übereinstimmung mit den früher angegebenen Werthen der Torsionscoefficienten statt, auch wenn der geschlossene Streifen ursprünglich schon Torsionen enthielt und vor der Vereinigung der beiden Theilchen noch Längsdrehungen erfolgten: es gelten dieselben Formeln, welche wir in §. 1 und 2 für die Torsionscoefficienten im Falle der regulären Vereinigung aufgestellt haben.

Dass diese Übereinstimmung stattfindet, ist sehr leicht erklärlich. Würden wir nämlich den soeben beschriebenen Process graphisch darstellen, so würden sich durch eine einfache Deformation genau die Figuren der Tafel II ergeben; und auch aus dem Umstande folgt schon die Übereinstimmung, dass auch hier um die Verbindungslinie der zwei übereinander gelegten Theilchen als Axe gedreht wird, wie dies früher bei der Rotation geschah; wo gleichfalls diese Verbindungslinie als Drehaxe diente.

Es wirft sich nun unmittelbar die Frage auf: Was für Gebilde entstehen, wenn man die obere Hälfte des geschlossenen Streifens nicht um Vielfache von  $180^\circ$ , sondern um ungerade Vielfache von  $90^\circ$  im Sinne des Uhrzeigers dreht, in  $M$  beide Hälften kreuzweise zusammenheftet und nun einen die Mittellinie des ganzen Streifens durchsetzenden, in sich selbst zurückkehrenden Längsschnitt führt? Ferner kann man fragen, was für Gebilde bei dieser Rotation um ungerade Vielfache von  $90^\circ$  entstehen, wenn der Streifen schon von Hause aus irgend welche Torsionen enthielt, wobei noch zu beachten ist, dass diese ursprünglich vorhandenen Torsionen auch auf die zwei durch das Zusammenheften entstehenden Bezirke beliebig vertheilt und überdies dem geschlossenen Streifen vor dem Zusammenheften noch solche Längsdrehungen ertheilt werden können, wie wir schon in §. 2 betrachteten. Kurz, es eröffnet sich hier eine ganze Fülle weiterer Fragen. Ich habe in dieser Hinsicht bereits einige Resultate erhalten, die ich später gelegentlich zu publiciren gedenke. Hier sei nur bemerkt, dass

sich im Falle einer Rotation um  $1 \times 90^\circ$  natürlich nur solche Gebilde ergeben können, wie Herr Simony aus kreuzförmigen Flächen durch paarweise Vereinigung zweier benachbarten Enden (geschlossenen Flächen erster Classe) und einen in sich selbst zurückkehrenden Längsschnitt durch die Mittellinie erhielt<sup>1</sup>; denn die zu diesem Schnitte fertige Fläche ist eben im Falle einer Rotation um  $1 \times 90^\circ$  eine Fläche erster Classe. Dreht man jedoch nicht einmal um  $90^\circ$ , sondern eine beliebige ungerade Anzahl mal, so liefert jener Längsschnitt im Allgemeinen complicirtere Gebilde, und zwar häufig diejenigen Gebilde, welche Herr Simony bei der Untersuchung jener Erscheinungen erhielt, welche bei einem unverdrehten, biegsamen Ringe von kreisförmigem Querschnitte auftreten, wenn man einen, den Ring bis zur Mittellinie durchsetzenden, längs der letzteren in sich selbst zurückkehrenden Schnitt durch denselben führt.<sup>2</sup> Herr Simony bezeichnet die hiebei auftretenden topologischen Gattungsbegriffe als Knotenverbindungen. Ausgehend von einem untordirten geschlossenen Streifen und ohne Hinzufügung von Längsdrehungen erhielt ich nun beispielsweise bei Rotationen  $t$  um ungerade Vielfache von  $90^\circ$  im Sinne der Bewegung des Uhrzeigers nachstehende Serie von Knotenverbindungen:

Es lieferte:

|          |   |
|----------|---|
| $t = 1$  | ein knotenfreies Gebilde,                     |
| $t = 3$  | eine Knotenverbindung vom Typus $[(+)_1^2]$ , |
| $t = 5$  | $[(+)_1^3]$ ,                                 |
| $t = 7$  | $[(+)_1(+)_2^2]$ ,                            |
| $t = 9$  | $[(+)_2^3]$ ,                                 |
| $t = 11$ | $[(+)_2(+)_3^2]$ ,                            |

<sup>1</sup> S. h. die Abhandlung von Herrn Simony: „Über jene Gebilde, welche aus kreuzförmigen Flächen durch paarweise Vereinigung ihrer Enden und gewisse in sich selbst zurückkehrende Schnitte entstehen“ (Sitzungsber. d. kais. Akad. d. Wissensch. in Wien, Bd. LXXXIV, Abth. II, 1881, S. 237, oder auch Math. Annalen, Bd. XIX, S. 111).

<sup>2</sup> S. h. Herrn Simony's Abhandlung: „Über eine Reihe neuer mathematischer Erfahrungssätze“ (Sitzungsber. d. kais. Akad. d. Wissensch. in Wien, Bd. LXXXV, Abth. II, 1882, S. 907—928, oder auch Math. Annalen, Bd. XXIV, S. 253 ff.).

und dies sind merkwürdiger Weise von Fall zu Fall genau dieselben Gebilde, welche Herr Simony bei Ringen von kreisförmigem Querschnitte erhielt, wenn die Axendrehung des schneidenden Instrumentes bei Vollendung des Schnittes  $-t \times 360^\circ$  beträgt, und die um die Mittellinie des betreffenden Ringes erfolgende Drehung des Schnittes in vier Umläufen vollendet wird.<sup>1</sup> Allgemein würde sich für  $t = 4k + \rho$  im Falle  $\rho = 1$  eine Knotenverbindung vom Typus  $[(+)_k^3]$ , im Falle  $\rho = 3$  eine solche vom Typus  $[(+)_k(+)^2_{k+1}]$  ergeben.<sup>2</sup> Erfolgt die Rotation um ungerade Vielfache von  $90^\circ$  in dem der Bewegung des Uhrzeigers entgegengesetzten Sinne, so entstehen die entsprechenden Knotenverbindungen von negativem Typus.

### §. 5.

#### Beispiele.

Es sei mir gestattet, einige Beispiele zu den in den vorhergehenden Paragraphen betrachteten topologischen Processen zu geben.

Enthält ein ringförmig geschlossenes Band vier negative Torsionen, so kann dasselbe mittelst einer positiven Rotation um  $1 \times 180^\circ$  in ein untordirtes geschlossenes Band verwandelt werden. Nach §. 1 ist nämlich die Torsionszahl  $x$  des bei einer Rotation um  $\pm(2r+1) \times 180^\circ$  entstehenden Gebildes gleich  $\pm 4(r+1) - a$ , wenn das Band vor der Rotation schon  $a$  negative Torsionen enthielt; in unserem Falle ist nun die Rotation  $t = +(2r+1) = 1$ , mithin  $r = 0$ , ferner  $a = 4$ , also wird  $x = 4 - 4 = 0$ .

Hätte das geschlossene Band ursprünglich acht negative Torsionen enthalten, so würde eine positive Rotation um  $3 \times 180^\circ$  ein untordirtes Band mit einem positiven Knoten erster Art liefern, denn alsdann wäre  $t = +(2r+1) = 3$ , mithin  $r = 1$  und  $x = 4 \cdot 2 - 8 = 0$ .

Man erhält zwei untordirte Ringe in positiver Verbindung zweiter Art, wenn bei regulärer Vereinigung für  $t = +4$  ( $r = +2$ )

<sup>1</sup> Ibid. S. 917.

<sup>2</sup> Ibid. S. 921.

sich im Falle einer Rotation um  $1 \times 90^\circ$  natürlich nur solche Gebilde ergeben können, wie Herr Simony aus kreuzförmigen Flächen durch paarweise Vereinigung zweier benachbarten Enden (geschlossenen Flächen erster Classe) und einen in sich selbst zurückkehrenden Längsschnitt durch die Mittellinie erhielt<sup>1</sup>; denn die zu diesem Schnitte fertige Fläche ist eben im Falle einer Rotation um  $1 \times 90^\circ$  eine Fläche erster Classe. Dreht man jedoch nicht einmal um  $90^\circ$ , sondern eine beliebige ungerade Anzahl mal, so liefert jener Längsschnitt im Allgemeinen complicirtere Gebilde, und zwar häufig diejenigen Gebilde, welche Herr Simony bei der Untersuchung jener Erscheinungen erhielt, welche bei einem unvertreten, biegsamen Ringe von kreisförmigem Querschnitte auftreten, wenn man einen, den Ring bis zur Mittellinie durchsetzenden, längs der letzteren in sich selbst zurückkehrenden Schnitt durch denselben führt.<sup>2</sup> Herr Simony bezeichnet die hiebei auftretenden topologischen Gattungsbegriffe als Knotenverbindungen. Ausgehend von einem untordirten geschlossenen Streifen und ohne Hinzufügung von Längsdrehungen erhielt ich nun beispielsweise bei Rotationen  $t$  um ungerade Vielfache von  $90^\circ$  im Sinne der Bewegung des Uhrzeigers nachstehende Serie von Knotenverbindungen:

Es lieferte:

|          |   |
|----------|---|
| $t = 1$  | ein knotenfreies Gebilde,                     |
| $t = 3$  | eine Knotenverbindung vom Typus $[(+)_1^2]$ , |
| $t = 5$  | $[(+)_1^3]$ ,                                 |
| $t = 7$  | $[(+)_1(+)_2^2]$ ,                            |
| $t = 9$  | $[(+)_2^3]$ ,                                 |
| $t = 11$ | „ „ $[(+)_2(+)_3^2]$ ,                        |

<sup>1</sup> S. h. die Abhandlung von Herrn Simony: „Über jene Gebilde, welche aus kreuzförmigen Flächen durch paarweise Vereinigung ihrer Enden und gewisse in sich selbst zurückkehrende Schnitte entstehen“ (Sitzungsber. d. kais. Akad. d. Wissensch. in Wien, Bd. LXXXIV, Abth. II, 1881, S. 237, oder auch Math. Annalen, Bd. XIX, S. 111).

<sup>2</sup> S. h. Herrn Simony's Abhandlung: „Über eine Reihe neuer mathematischer Erfahrungssätze“ (Sitzungsber. d. kais. Akad. d. Wissensch. in Wien, Bd. LXXXV, Abth. II, 1882, S. 907—928, oder auch Math. Annalen, Bd. XXIV, S. 253 ff.).

und dies sind merkwürdiger Weise von Fall zu Fall genau dieselben Gebilde, welche Herr Simony bei Ringen von kreisförmigem Querschnitte erhielt, wenn die Axendrehung des schneidenden Instrumentes bei Vollendung des Schnittes  $-t \times 360^\circ$  beträgt, und die um die Mittellinie des betreffenden Ringes erfolgende Drehung des Schnittes in vier Umläufen vollendet wird.<sup>1</sup> Allgemein würde sich für  $t = 4k + \rho$  im Falle  $\rho = 1$  eine Knotenverbindung vom Typus  $[(+)_k^3]$ , im Falle  $\rho = 3$  eine solche vom Typus  $[(+)_k(+)^2_{k+1}]$  ergeben.<sup>2</sup> Erfolgt die Rotation um ungerade Vielfache von  $90^\circ$  in dem der Bewegung des Uhrzeigers entgegengesetzten Sinne, so entstehen die entsprechenden Knotenverbindungen von negativem Typus.

### §. 5.

#### Beispiele.

Es sei mir gestattet, einige Beispiele zu den in den vorhergehenden Paragraphen betrachteten topologischen Processen zu geben.

Enthält ein ringförmig geschlossenes Band vier negative Torsionen, so kann dasselbe mittelst einer positiven Rotation um  $1 \times 180^\circ$  in ein untordirtes geschlossenes Band verwandelt werden. Nach §. 1 ist nämlich die Torsionszahl  $x$  des bei einer Rotation um  $\pm(2r+1) \times 180^\circ$  entstehenden Gebildes gleich  $\pm 4(r+1) - a$ , wenn das Band vor der Rotation schon  $a$  negative Torsionen enthielt; in unserem Falle ist nun die Rotation  $t = +(2r+1) = 1$ , mithin  $r = 0$ , ferner  $a = 4$ , also wird  $x = 4 - 4 = 0$ .

Hätte das geschlossene Band ursprünglich acht negative Torsionen enthalten, so würde eine positive Rotation um  $3 \times 180^\circ$  ein untordirtes Band mit einem positiven Knoten erster Art liefern, denn alsdann wäre  $t = +(2r+1) = 3$ , mithin  $r = 1$  und  $x = 4 \cdot 2 - 8 = 0$ .

Man erhält zwei untordirte Ringe in positiver Verbindung zweiter Art, wenn bei regulärer Vereinigung für  $t = +4$  ( $r = +2$ )

<sup>1</sup> Ibid. S. 917.

<sup>2</sup> Ibid. S. 921.

die Werthe  $x_1 = t + a_1 + l$ ,  $x_2 = t + a_2 - l$  verschwinden (§. 2). Aus den Gleichungen  $0 = 4 + a_1 + l$  und  $0 = 4 + a_2 - l$  folgt alsdann  $a_1 + a_2 = -8$ , d. h. das Band muss ursprünglich acht negative Torsionen enthalten. Den Gleichungen  $a_1 + l = -4$  und  $a_2 - l = -4$  kann nun in mehrfacher Weise genügt werden; gibt man nämlich z. B.  $a_1$  einen der Werthe  $-8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0$ , so sind die entsprechenden Werthe von  $a_2$ :  $0, -1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8$  und die von  $l$ :  $+4, +3, +2, +1, 0, -1, -2, -3, -4$ .

Ausgehend von zwei ringförmig geschlossenen Streifen, deren einer eine negative, der andere eine positive Torsion um  $1 \times 180^\circ$  enthält, kann man unter Anwendung genau gleicher Operationen auf beide Streifen im ersten einen positiven Knoten erster Art, im zweiten einen solchen zweiter Art erzeugen. Da man nämlich mit Hilfe einer positiven Rotation um  $1 \times 180^\circ$  die Torsionszahl um vier positive Einheiten vermehren kann, so besitzt nach Vollzug dieser Operation der eine Streifen drei, der andere fünf positive Torsionen; wird nun in beiden Fällen ein Längsschnitt durch die Mittellinie des Streifens geführt, so ergibt sich nach dem Satze II. (Einleitung) ein positiver Knoten erster, respective zweiter Art.

Dieses Resultat ist in dem folgenden Satze als specieller Fall enthalten: Erzeugt man in einem um irgend ein ungerades Vielfaches  $\pm(2a+1)$  von  $180^\circ$  tordirten, ringförmig geschlossenen Streifen durch Rotation um  $\pm(2k+1) \times 180^\circ$  einen Knoten vom Typus  $(\pm)_k$ , so bleibt die Torsionszahl ungerade, so dass die Ausführung eines Längsschnittes nunmehr eine primäre Knotenverschlingung Oter Ordnung<sup>1</sup> liefert.

Noch will ich bemerken, dass man in dem soeben betrachteten allgemeinen Falle zwei isolirte Knoten, nämlich einen vom Typus  $(\pm)_a$  und einen vom Typus  $(\pm)_k$  erhalten würde, wenn man zuerst den Längsschnitt und hierauf die Rotation ausführte.

<sup>1</sup> Vergl. über diesen topologischen Gattungsbegriff Herrn Simony's Abhandlung: „Über den Zusammenhang gewisser topologischer Thatsachen mit neuen Sätzen der höheren Arithmetik und dessen theoretische Bedeutung“ (Sitzungsber. d. kais. Akad. d. Wissensch. in Wien, Bd. XCVI, II. Abth., 1887, S. 202).

## Zweiter Abschnitt.

Über Erzeugungsweisen einfacher Verbindungen und Knoten in geschlossenen Flächen, welche in gewisser Weise aus beliebig vielen tordirten Streifen hergestellt sind.

### §. 6.

#### Definitionen und Bezeichnungen.

Verfertigt man nach dem Muster der schematischen Fig. 22 (Taf. III) eine Fläche, welche aus beliebig vielen, etwa  $u$ , Streifen  $T_1, T_2, \dots, T_u$  zusammengesetzt ist, deren Mittellinien  $oa_1, oa_2, \dots, oa_u$  sämtlich in einem und demselben Punkte  $o$  zusammenlaufen, so lässt sich aus dieser Fläche mit  $u$ -bandförmigen Fortsätzen eine geschlossene Fläche in einfachster Weise dadurch herstellen, dass man auch alle noch freien Enden  $a_1, a_2, \dots, a_u$  jener  $u$ -Fortsätze in einem und demselben Punkte  $o'$  insgesamt vereinigt, wie Fig. 23 (Taf. III) andeutet. Bevor wir diese Vereinigung ausführen, wollen wir noch jedem Streifen beliebige Torsionen um irgend welche ganze Vielfache von  $180^\circ$  ertheilen, und zwar mag  $\pm t_i$  die Torsionszahl des Streifens  $T_i$  bedeuten, so dass also  $\pm t_i$  eine beliebige ganze Zahl ist, deren Vorzeichen von dem Sinne der Drehung abhängt. Diese Drehung werde als positiv oder negativ definirt, je nachdem dieselbe im Sinne der Pfeile  $p$  (Fig. 23) oder im entgegengesetzten Sinne vorgenommen worden ist. Die auf solche Weise erhaltene geschlossene Fläche will ich im Folgenden als geschlossene Fläche bezeichnen, welche aus  $u$ -Streifen hergestellt ist. Ein längs den Mittellinien sämtlicher Streifen in sich selbst zurücklaufender Schnitt  $a_1oa_2a_3oa_4a_5o \dots a_1$  liefert alsdann neue geschlossene Flächen, welche mit  $F_1, F_2, \dots, F_u$  bezeichnet werden mögen, wenn sie sich hinsichtlich ihres Inhalts zu der ursprünglichen Fläche respective wie 1 zu  $u$ , oder wie 2 zu  $u, \dots$ , oder wie  $u$  zu  $u$  verhalten. Die jeweilige Gesamtverdrehung einer solchen Fläche  $F_i$  werde durch  $x_i \times 180^\circ$  bezeichnet, wobei sich der Torsionscoefficient  $x_i$  als lineare Function der Torsionscoefficienten  $t_1, t_2, \dots, t_u$  ergeben wird.

In den beiden nächsten Paragraphen gebe ich nun diejenigen Torsionen an, welche den einzelnen Fortsätzen ertheilt werden müssen, um durch jenen längs der Mittellinie geführten Schnitt einfache Verbindungen oder Knoten zu erhalten.

### §. 7.

#### Erzeugung einfacher Verbindungen.

Wenn wir fragen, welche Torsionen den einzelnen Streifen einer aus beliebig vielen Streifen hergestellten geschlossenen Fläche zu ertheilen sind, um durch Führung des Mittelschnittes zwei Flächen zu erhalten, die mit einander in einer positiven oder negativen Verbindung irgend welcher Art stehen, so ist zuerst die Vorfrage zu erledigen, wie man die Torsionen zu wählen hat, um überhaupt gerade zwei Flächen zu erhalten. Hierüber geben nun diejenigen Sätze Auskunft, welche von Herrn Schuster für eine Classification aller jener Flächensysteme angegeben worden sind, welche bei geschlossenen, aus beliebig vielen tordirten Streifen hergestellten Flächen in Betracht kommen. <sup>1</sup> Hiernach erhält man durch Führung des Mittelschnittes zwei Flächen in den folgenden zwei Fällen:

1. Wenn bei einer aus beliebig vielen tordirten Streifen hergestellten Fläche zwei Torsionscoefficienten gerade, alle übrigen ungerade Zahlen sind;

2. wenn bei einer aus einer geraden Anzahl tordirter Streifen hergestellten Fläche sämtliche Torsionscoefficienten ungerade Zahlen sind.

Die Resultate meiner Experimente behufs Erzeugung einfacher Verbindungen sind nun folgende:

A. Flächen, die aus beliebig vielen ( $u$ -)tordirten Streifen hergestellt sind.

1. Zwei beliebige Streifen  $T_h$  und  $T_k$  besitzen respective die Torsionscoefficienten  $t_h = 0$ ,  $t_k = \pm 2k$ , die übrigen  $u-2$

---

<sup>1</sup> S. h. die Abhandlung von Herrn Schuster: „Über jene Gebilde, welche geschlossenen, aus drei tordirten Streifen hergestellten Flächen durch gewisse Schnitte entspringen“ (Sitzungsber. d. kais. Akad. d. Wissenschaften in Wien, Bd. XCVII, Abth. II, 1888, S. 241 f.).

Torsionscoefficienten sind, bei beliebiger Vertheilung auf die  $u-2$  Streifen, theils  $+1$ , theils  $-1$ , sind also nur ihrem absoluten Werthe nach gleich 1.

Befinden sich zwischen  $T_h$  und  $T_k$  im einen Theile des ganzen Cyclus  $p$ , im anderen  $q$ -Streifen, so dass also  $p+q+2=u$ , so erhält man nach Führung des Mittelschnittes eine Fläche  $F_{p+1}$  und eine  $F_{q+1}$  in einer Verbindung  $k$ ter Art, welche positiv oder negativ ist in Übereinstimmung mit dem Vorzeichen der Zahl  $t_k$ ; für die Art der Verbindung ist es daher gleichgiltig, wie viele Torsionen gleich  $+1$ , wie viele gleich  $-1$  sind, indem diese Art nur von dem geradzahligem Torsionscoefficienten  $t_k = \pm 2k$  abhängt. Wohl aber sind die in den beiden resultirenden Flächen  $F_{p+1}$  und  $F_{q+1}$  enthaltenen Torsionen durch die Anzahl der positiven und negativen Torsionscoefficienten vom Werthe  $|1|$  bestimmt,<sup>1</sup> und zwar in folgender Weise: Sind  $p'$  jener  $p$ -Torsionen gleich  $+1$ ,  $p''$  gleich  $-1$ , analog  $q'$  der  $q$ -Torsionen gleich  $+1$ ,  $q''$  gleich  $-1$ , so besitzen die Torsionscoefficienten der beiden Flächen die Werthe:

$$x_{p+1} = t_k + 4(p' - p''), \quad x_{q+1} = t_k + 4(q' - q'').$$

Die Thatsache, dass die Art der Verbindung von der Anzahl der Torsionen, welche ihrem Werthe nach einerseits gleich  $+1$ , andererseits gleich  $-1$  sind, völlig unabhängig ist, wird auch fernerhin stets dann wiederkehren, wenn nicht alle Torsionen gleich  $|1|$  sind, sondern zwei derselben ausgezeichnete Werthe besitzen; nur der Fall, dass sämtliche Torsionen gleich  $|1|$  sind, wird von dieser Regel abweichen. Analoges findet auch statt bei der Erzeugung von Knoten. Ich werde diese Thatsache bei der weiteren Aufzählung der Fälle, in denen Verbindungen oder Knoten entstehen, nicht mehr besonders hervorheben, wohl aber kann die in §. 9 behandelte graphische Darstellung auch dafür eine Erklärung abgeben, wesshalb gerade der Unterschied  $p' - p''$ , respective  $q' - q''$  zwischen der Anzahl positiver und negativer Torsionen vom Werthe  $|1|$  in den Werthen der Torsionscoefficienten  $x_{p+1}$ , respective  $x_{q+1}$  auftritt.

<sup>1</sup> Der absolute Werth einer beliebigen Zahl  $n$  werde, wie gewöhnlich, durch  $|n|$  bezeichnet

Weitere Fälle, in denen Verbindungen entstehen, sind:

B. Flächen, die aus einer **geraden** Anzahl von Streifen hergestellt sind,  $u = 2n$ .

2. Zwei beliebige Streifen  $T_h$  und  $T_k$  besitzen die Torsionscoefficienten  $t_h = \pm 2h$ ,  $t_k = \pm 2k$ , die  $2n-2$  übrigen Torsionen betragen zur einen Hälfte je  $+1 \times 180^\circ$ , zur anderen Hälfte je  $-1 \times 180^\circ$ , und zwar bei beliebiger Vertheilung der  $n-1$  positiven und der  $n-1$  negativen Torsionen auf die  $2n-2$  Streifen. Man erhält, bei gleicher Bezeichnungsweise wie unter 1, eine  $F_{p+1}$  und eine  $F_{q+1}$  in Verbindung von der Art  $\left| \frac{t_h + t_k}{2} \right|$ , welche positiv oder negativ ist in Übereinstimmung mit dem Vorzeichen von  $t_h + t_k$ . Die Torsionscoefficienten sind:

$$x_{p+1} = t_h + t_k + 4(p' - p''), \quad x_{q+1} = t_h + t_k + 4(q' - q'').$$

Hierbei ist

$$p' + q' = p'' + q'' = n - 1, \quad p' + q' + p'' + q'' + 2 = 2n.$$

3. Zwei beliebige Streifen  $T_h$  und  $T_k$  besitzen die Torsionscoefficienten  $t_h = \pm(2h+1)$ ,  $t_k = \pm(2k+1)$ , die  $2n-2$  übrigen Torsionen betragen, wiederum bei beliebiger Vertheilung, zur einen Hälfte je  $+1 \times 180^\circ$ , zur anderen Hälfte je  $-1 \times 180^\circ$ . Man erhält zwei gleiche Flächen  $F_n$  in Verbindung von der Art  $\left| \frac{t_h + t_k}{2} \right|$ ; auch hier stimmt das Vorzeichen dieser Verbindung wieder überein mit dem Vorzeichen von  $t_h + t_k$ . Der Torsionscoefficient ist für beide Flächen gleich  $t_h + t_k$ .

4. Sämmtliche Streifen besitzen den Torsionscoefficienten  $|1|$  und zwar seien  $p'$  dieser Torsionen gleich  $+1 \times 180^\circ$ ,  $p'' = 2n - p'$  gleich  $-1 \times 180^\circ$ . Man erhält zwei gleiche Flächen  $F_n$  in einer Verbindung von der Art  $\left| \frac{p'' - p'}{2} \right|$  oder, was dasselbe ist, von der Art  $|n - p'|$  oder  $|p'' - n|$ ; diese Verbindung ist positiv oder negativ in Übereinstimmung mit dem Vorzeichen von  $p'' - p'$ , das heisst je nachdem die Anzahl der negativen oder die der positiven Torsionen überwiegt. Der Torsionscoefficient ist für beide Flächen gleich  $p' - p''$ .

Es folgt nun noch ein singulärer Fall:

5a. Zwei beliebige Streifen  $T_h$  und  $T_k$  besitzen den Torsionscoefficienten  $t_h = t_k = +2$ , alle übrigen  $2n-2$  Torsionen betragen

bei beliebiger Vertheilung  $|1| \times 180^\circ$ , so zwar, dass die Anzahl der Torsionen vom Betrage  $-1 \times 180^\circ$  die Anzahl der Torsionen vom Betrage  $+1 \times 180^\circ$  um zwei Einheiten übertrifft. Man erhält eine Fläche  $F_{p+1}$  und eine  $F_{q+1}$  in negativer Verbindung zweiter Art; die Torsionscoefficienten sind:

$$x_{p+1} = 4 + 4(p' - p''), \quad x_{q+1} = 4 + 4(q' - q'').$$

Hiebei ist

$$p' + q' + 2 = p'' + q'', \quad p' + q' + p'' + q'' = 2n - 2,$$

also

$$p' + q' = n - 2, \quad p'' + q'' = n.$$

5b. Es ist  $t_h = t_k = -2$ , alle übrigen  $2n - 2$  Torsionen betragen bei beliebiger Vertheilung  $|1| \times 180^\circ$ , so zwar, dass die Anzahl der hierunter befindlichen positiven Torsionen die Anzahl der negativen um zwei Einheiten übertrifft. Man erhält eine Fläche  $F_{p+1}$  und eine  $F_{q+1}$  in positiver Verbindung zweiter Art mit den Torsionscoefficienten

$$x_{p+1} = -4 + 4(p' - p''), \quad x_{q+1} = -4 + 4(q' - q''),$$

wobei

$$p' + q' = p'' + q'' + 2, \quad p' + q' + p'' + q'' = 2n - 2,$$

also

$$p' + q' = n, \quad p'' + q'' = n - 2.$$

C. Flächen, die aus einer **ungeraden** Anzahl von Streifen hergestellt sind,  $u = 2n + 1$ .

6a. Zwei beliebige Streifen  $T_h$  und  $T_k$  besitzen die Torsionscoefficienten  $t_h = +2h$ ,  $t_k = +2$ , alle übrigen  $2n - 1$  Torsionen betragen bei beliebiger Vertheilung  $|1| \times 180^\circ$ , jedoch so, dass die Anzahl der hierunter befindlichen negativen Torsionen die Anzahl der positiven um eine Einheit übertrifft. Man erhält eine Fläche  $F_{p+1}$  und eine  $F_{q+1}$  in positiver Verbindung ( $h - 1$ )ter Art mit den Torsionscoefficienten

$$x_{p+1} = 2h + 2 + 4(p' - p''), \quad x_{q+1} = 2h + 2 + 4(q' - q''),$$

wobei

$$p' + q' + 1 = p'' + q'', \quad p' + q' + p'' + q'' + 2 = 2n + 1,$$

also

$$p' + q' = n - 1, \quad p'' + q'' = n.$$

6b. Es ist  $t_h = -2h$ ,  $t_k = -2$ , alle übrigen  $2n - 1$  Torsionen sind gleich  $|1| \times 180^\circ$ , jedoch so, dass die Anzahl der

hierunter befindlichen positiven Torsionen die der negativen um eine Einheit übertrifft: Eine Fläche  $F_{p+1}$  in negativer Verbindung ( $h-1$ ter Art mit einer  $F_{q+1}$ ;

$$x_{p+1} = -2h - 2 + 4(p' - p''), \quad x_{q+1} = -2h - 2 + 4(q' - q''),$$

wobei

$$p' + q' = p'' + q'' + 1, \quad p' + q' + p'' + q'' + 2 = 2n + 1,$$

also

$$p' + q' = n, \quad p'' + q'' = n - 1.$$

6c. Es ist  $t_h = +2h$ ,  $t_k = -2$ , alle übrigen  $2n-1$  Torsionen sind gleich  $|1| \times 180^\circ$ , jedoch so, dass die Anzahl der hierunter befindlichen positiven Torsionen die der negativen um eine Einheit übertrifft: Eine Fläche  $F_{p+1}$  in positiver Verbindung ( $h+1$ ter Art mit einer  $F_{q+1}$ ;

$$x_{p+1} = 2h - 2 + 4(p' - p''), \quad x_{q+1} = 2h - 2 + 4(q' - q''),$$

wobei

$$p' + q' = p'' + q'' + 1, \quad p' + q' + p'' + q'' + 2 = 2n + 1,$$

also

$$p' + q' = n, \quad p'' + q'' = n - 1.$$

6d. Es ist  $t_h = -2h$ ,  $t_k = +2$ , alle übrigen  $2n-1$  Torsionen sind gleich  $|1| \times 180^\circ$ , jedoch so, dass die Anzahl der hierunter befindlichen negativen Torsionen die der positiven um eine Einheit übertrifft: Eine Fläche  $F_{p+1}$  in negativer Verbindung ( $h+1$ ter Art mit einer  $F_{q+1}$ ;

$$x_{p+1} = -2h + 2 + 4(p' - p''), \quad x_{q+1} = -2h + 2 + 4(q' - q''),$$

wobei

$$p' + q' + 1 = p'' + q'', \quad p' + q' + p'' + q'' + 2 = 2n + 1,$$

also

$$p' + q' = n - 1, \quad p'' + q'' = n.$$

## §. 8.

### Erzeugung einfacher Knoten.

Fragen wir nach den Torsionen, welche den einzelnen Streifen einer aus beliebig vielen Streifen hergestellten geschlossenen Fläche zu ertheilen sind, um durch Führung des Mittelschnittes eine einzige Fläche mit einem einfachen Knoten irgend welcher Art zu erhalten, so ist wieder zuerst die Vorfrage zu erledigen, unter welchen Bedingungen man gerade eine einzige Fläche erhält. Der schon oben benutzte Satz von Herrn

Schuster beantwortet uns diese Frage dahin, dass man in den folgenden zwei Fällen durch Führung des Mittelschnittes nur eine Fläche erhält:

1. wenn bei einer aus beliebig vielen tordirten Streifen hergestellten Fläche ein Torsionscoefficient eine gerade Zahl ist, während alle übrigen ungerade sind;

2. wenn bei einer aus einer ungeraden Anzahl tordirter Streifen hergestellten Fläche sämtliche Torsionscoefficienten ungerade Zahlen sind.

Die Resultate meiner Experimente behufs Erzeugung einfacher Knoten sind nun folgende:

A. Flächen, die aus **beliebig vielen** ( $u$ ) tordirten Streifen hergestellt sind.

1. Zwei beliebige Streifen  $T_h$  und  $T_k$  besitzen die Torsionscoefficienten  $t_h = 0$ ,  $t_k = \pm(2k+1)$ , die übrigen  $u-2$  Torsionscoefficienten sind, bei willkürlicher Vertheilung auf die  $u-2$  Streifen, theils  $+1$ , theils  $-1$ , sind also nur ihrem absoluten Werthe nach gleich 1. Man erhält nach Führung des Mittelschnittes eine Fläche  $F_u$  mit einem Knoten  $k^{\text{ter}}$  Art, welcher positiv oder negativ ist in Übereinstimmung mit dem Vorzeichen von  $t_k$ . Der Torsionscoefficient der Fläche ist

$$x_u = 2(t_k \pm 1) + 4(p' - p''),$$

wobei  $p'$  die Anzahl der positiven,  $p''$  die der negativen Torsionen um  $|1| \times 180^\circ$  bedeutet und das Vorzeichen von 1 mit demjenigen von  $t_k$  gleichsinnig ist.

Noch möchte ich mir erlauben einen Satz mitzutheilen über die Erzeugung mehrerer Knoten in Flächen, die aus beliebig vielen Streifen hergestellt sind; zwar geht dieser Satz, strenge genommen, über die Grenzen dieser Abhandlung hinaus, darf aber doch vielleicht hier eine Stelle finden. Derselbe lautet:

Sind die Torsionszahlen  $t_1, t_2, \dots, t_u$  einer aus  $u$  Streifen zusammengesetzten geschlossenen Fläche mit Ausnahme eines einzigen:  $t_r$  ungerade, so liefert die Ausführung eines längs der Mittellinien sämtlicher Streifen in sich selbst zurückkehrenden Schnittes für  $t_r = 0$  eine einzige geschlossene Fläche  $F_u$  mit der Torsionszahl

$$x_u = 2(t_1 \pm 1) + 2(t_2 \pm 1) + \dots + 2(t_{r-1} \pm 1) + \\ + 2(t_{r+1} \pm 1) + \dots + 2(t_u \pm 1)$$

und  $u-1$  isolirten und beliebig vertauschbaren einfachen Knoten, wobei jeder ungeraden Torsionszahl  $t_i$  ( $i = 1, 2, \dots, r-1, r+1, \dots, u$ ) ein gleichsinniger Knoten mit der Windungszahl  $\frac{1}{2} \{|t_i| - 1\}$  entspricht und in dem Ausdrucke für den Torsionscoefficienten  $x_u$  das Vorzeichen von 1 stets mit jenem des zugehörigen  $t_i$  übereinstimmt.

Die  $u-1$  Knoten lassen sich auch nebeneinander mit einer gemeinsamen Basis anordnen, so dass sie eine Knotenreihe bilden, deren Glieder mit einander vertauschbar sind. Fig. 24 (Taf. III) stellt eine solche aus vier Gliedern bestehende Knotenreihe dar. Von den Knotenverbindungen unterscheiden sich diese Reihen dadurch, dass bei ersteren die einzelnen Glieder der Verbindung unvertauschbar sind, weil die einzelnen Knotenwindungen von den Schlusstheilen aller nachfolgenden Knoten durchsetzt werden; die Knoten einer Knotenreihe lassen sich jedoch in beliebiger Weise umordnen.

**B. Flächen, die aus einer geraden Anzahl von Streifen hergestellt sind,  $u = 2n$ .**

2. Zwei beliebige Streifen  $T_h$  und  $T_k$  besitzen die Torsionscoefficienten  $t_h = \pm 2h$ ,  $t_k = \pm (2k+1)$ , die  $2n-2$  übrigen Torsionen betragen bei beliebiger Vertheilung zur einen Hälfte je  $+1 \times 180^\circ$ , zur anderen Hälfte je  $-1 \times 180^\circ$ . Man erhält eine Fläche  $F_u$  mit einem Knoten von der Windungszahl  $|\pm h \pm k|$ , wobei die Vorzeichen von  $h$  und  $k$  gleichsinnig sind mit denjenigen von  $t_h$ , respective  $t_k$ ; dieser Knoten ist positiv oder negativ in Übereinstimmung mit dem Vorzeichen von  $\pm h \pm k$ . Der Torsionscoefficient der Fläche ist

$$x_u = 2(t_h + t_k \pm 1),$$

wobei  $\pm 1$  mit  $t_k$  gleichsinnig ist.

**C. Flächen, die aus einer ungeraden Anzahl von Streifen hergestellt sind,  $u = 2n+1$ .**

3. Sämmtliche Streifen besitzen den Torsionscoefficienten  $|1|$ , und zwar seien  $p'$  dieser Torsionen gleich  $+1 \times 180^\circ$ ,  $p'' = 2n+1-p'$  gleich  $-1 \times 180^\circ$ . Man erhält eine Fläche  $F_u$

mit einem Knoten von der Windungszahl  $k = \frac{|p'' - p'| - 1}{2}$  oder, was dasselbe ist, von der Windungszahl  $\frac{|u - 2p'| - 1}{2}$  oder  $\frac{|2p'' - u| - 1}{2}$ ; dieser Knoten ist positiv, wenn die Anzahl der negativen Torsionen die der positiven um mehr als eine Einheit übertrifft, d. h. für  $p'' - p' > 1$ , er ist negativ, wenn die Anzahl der positiven Torsionen die der negativen um mehr als eine Einheit übertrifft, d. h. für  $p' - p'' > 1$ , man erhält eine knotenfreie Fläche, wenn die Differenz zwischen der Anzahl positiver und negativer Torsionen gleich 1 ist, d. h. für  $|p' - p''| = 1$ . Der Torsionscoefficient der Fläche ist seinem absoluten Zahlenwerthe nach gleich  $4k$ , und zwar ist derselbe positiv, wenn der Knoten negativ ist, und umgekehrt.

Auch hier tritt wieder ein singulärer Fall auf:

4 a. Zwei beliebige Streifen  $T_h$  und  $T_k$  besitzen den Torsionscoefficienten  $t_h = t_k = +3$ , alle übrigen  $2n - 1$  Torsionen betragen bei beliebiger Vertheilung  $|1| \times 180^\circ$ , jedoch so, dass die Anzahl der hierunter befindlichen negativen Torsionen die der positiven um eine Einheit übertrifft. Man erhält eine Fläche  $F_u$  mit einem negativen Knoten erster Art und dem Torsionscoefficienten  $x_u = +4$ .

4 b. Es ist  $t_h = t_k = -3$ , alle übrigen  $2n - 1$  Torsionen betragen bei beliebiger Vertheilung  $|1| \times 180^\circ$ , jedoch so, dass die Anzahl der hierunter befindlichen positiven Torsionen die der negativen um eine Einheit übertrifft. Man erhält eine Fläche  $F_u$  mit einem positiven Knoten erster Art und dem Torsionscoefficienten  $x_u = -4$ .

5 a. Zwei beliebige Streifen  $T_h$  und  $T_k$  besitzen die Torsionscoefficienten  $t_h = +(2h + 1)$ ,  $t_k = +2$ , alle übrigen  $2n - 1$  Torsionen betragen bei beliebiger Vertheilung  $|1| \times 180^\circ$ , jedoch so, dass die Anzahl der hierunter befindlichen negativen Torsionen die der positiven um eine Einheit übertrifft. Man erhält eine Fläche  $F_u$  mit einem positiven Knoten  $(h - 1)$ ter Art und dem Torsionscoefficienten  $x_u = 4(h + 1)$ .

5 b. Es ist  $t_h = -(2h + 1)$ ,  $t_k = -2$ , alle übrigen  $2n - 1$  Torsionen sind gleich  $|1| \times 180^\circ$ , jedoch so, dass die Anzahl der

hierunter befindlichen positiven Torsionen die der negativen um eine Einheit übertrifft: Eine Fläche  $F_u$  mit einem negativen Knoten  $(h-1)$ ter Art;  $x_u = -4(h+1)$ .

5c. Es ist  $t_h = +(2h+1)$ ,  $t_k = -2$ , alle übrigen  $2n-1$  Torsionen sind gleich  $|1| \times 180^\circ$ , jedoch so, dass die Anzahl der hierunter befindlichen positiven Torsionen die der negativen um eine Einheit übertrifft: Eine Fläche  $F_u$  mit einem positiven Knoten  $(h+1)$ ter Art;  $x_u = 4(h+1)$ .

5d. Es ist  $t_h = -(2h+1)$ ,  $t_k = +2$ , alle übrigen  $2n-1$  Torsionen sind gleich  $|1| \times 180^\circ$ , jedoch so, dass die Anzahl der hierunter befindlichen negativen Torsionen die der positiven um eine Einheit übertrifft: Eine Fläche  $F_u$  mit einem negativen Knoten  $(h+1)$ ter Art;  $x_u = -4(h+1)$ .

Vergleicht man die Fälle, in denen Verbindungen entstehen, mit den Fällen, welche Knoten liefern, so zeigt sich eine gewisse Correspondenz hinsichtlich der mehr oder minder grossen Allgemeinheit der Torsionscoefficienten der einzelnen Streifen.

Wie leicht zu sehen, entsprechen sich die Fälle:

- |                                |                |
|--------------------------------|----------------|
| 1. bei Verbindungen und        | 1. bei Knoten, |
| 2. und 3. bei Verbindungen und | 2. bei Knoten, |
| 4. bei Verbindungen und        | 3. bei Knoten, |
| 5.                             | 4. „           |
| 6. „                           | 5. „           |

### §. 9.

#### Graphische Darstellung.

Die in den zwei vorhergehenden Paragraphen erhaltenen Resultate lassen sich, mit Ausnahme der auf die Torsionscoefficienten bezüglichen Resultate, auch leicht graphisch darstellen, indem man an eine schematische Darstellung anknüpft, welche von Herrn Schuster gegeben ist gelegentlich seiner Untersuchung der Flächengruppen, welche entstehen, wenn man bei einer geschlossenen Fläche, die aus beliebig vielen tordirten Streifen hergestellt ist, den Mittelschnitt führt.<sup>1</sup> Einige Beispiele mögen diese Darstellungsweise erläutern.

Ist z. B. die Anzahl  $u$  der Streifen gleich 3 und sind die einzelnen Torsionscoefficienten  $t_1 = t_2 = t_3 = -1$ , so haben wir

<sup>1</sup> S. h. die bereits citirte Abhandlung von Herrn Schuster, S. 237 f.

den durch Fig. 25 (Taf. III) dargestellten Fall; rückt man nun die Windungen der einzelnen Torsionen näher zusammen, so entsteht Fig. 26 (Taf. III), und diese ist offenbar äquivalent mit Fig. 27 (Taf. IV), liefert also einen positiven Knoten erster Art in Übereinstimmung mit §. 8, 3.

Der Fall  $u = 3$ ,  $t_1 = t_2 = +3$ ,  $t_3 = -1$  wird durch Fig. 28 dargestellt; diese Figur lässt sich leicht in Fig. 29 überführen, woraus sich unmittelbar der negative Knoten erster Art Fig. 30 ergibt, indem man den Streifenheil  $AB$  rückwärts, den Theil  $CD$  aufwärts in die Höhe klappt (§. 8, 4.).

Der Fall  $u = 4$ ,  $t_1 = +4$ ,  $t_2 = 0$ ,  $t_3 = t_4 = +1$  wird durch Fig. 31 dargestellt, ergibt also, wie unmittelbar ersichtlich, eine Fläche  $F_1$  in positiver Verbindung zweiter Art mit einer Fläche  $F_3$  (§. 7, 1.).

Die übrigen Figuren bedürfen kaum weiterer Erläuterung. Fig. 32 repräsentirt den Fall  $u = 4$ ,  $t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = +1$ , ihre Äquivalenz mit Fig. 33 (Taf. V) zeigt, dass man zwei Flächen  $F_2$  in negativer Verbindung zweiter Art erhält (§. 7, 4.). Fig. 34 repräsentirt den Fall  $u = 5$ ,  $t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = t_5 = +1$ , liefert also, da sie mit Fig. 35 äquivalent ist, einen negativen Knoten zweiter Art (§. 8, 3.).

Übrigens wird durch diese graphische Darstellung klar, weshalb beim Vorhandensein positiver und negativer Torsionen um  $|1| \times 180^\circ$  gerade die Differenz zwischen der Anzahl beider Torsionsarten auf den Werth des Torsionscoefficienten der sich ergebenden Fläche von Einfluss ist (vergl. §. 7, 4). Es heben sich nämlich je eine positive und eine negative Torsion gegenseitig auf, so dass nur noch jene Differenz Einfluss üben kann.

### §. 10.

#### Herrn Simony's neue Erzeugungsweise topologischer Gebilde und Herrn Schuster's topologische Radwelle.

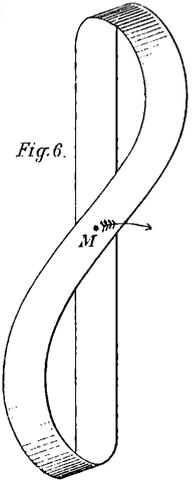
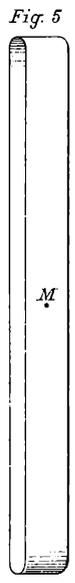
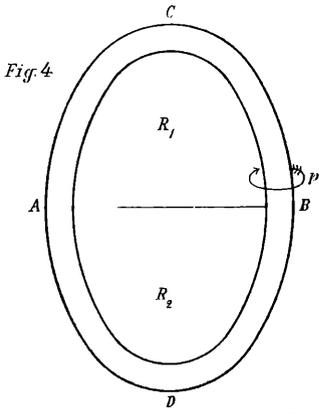
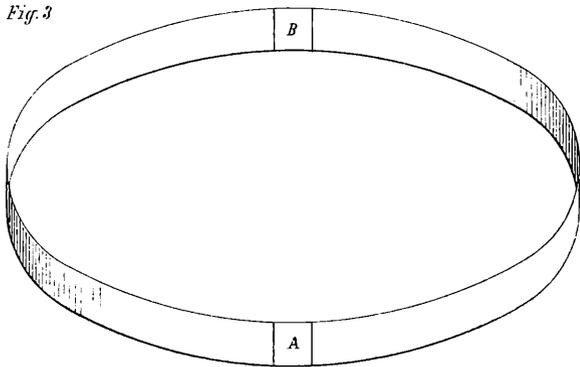
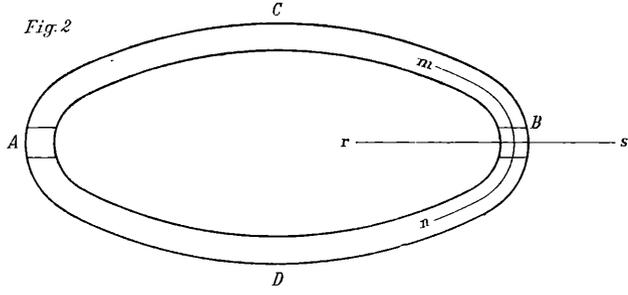
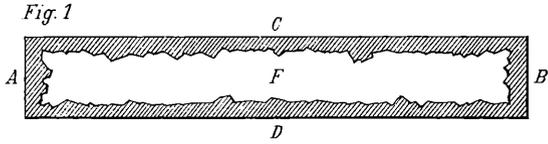
Wir hatten bisher angenommen, dass die einzelnen Streifen einer aus beliebig vielen Streifen zusammengesetzten Fläche insgesamt von einem und demselben Punkte oder von einer kreisförmigen Basis (vergl. Fig. 22, Taf. III) ausgehen und in einem anderen Punkte oder einem anderen kreisförmigen Flächenstücke wieder zusammenlaufen. Für die Gestalt der durch den Mittelschnitt erzeugten Gebilde ist es nun offenbar ganz nebensächlich,

ob jene Flächenstücke kreisförmig sind oder nicht. Statt die Ränder zweier Kreisflächen zu verbinden, können die einzelnen Streifen auch zwei beliebige gerade oder krumme Linien miteinander verbinden, ja sie können auch sämmtlich in eine und dieselbe Ebene niedergelegt werden. Im letzteren Falle ergibt sich eine Erzeugungsweise, die mir Herr Simony mittheilte. Wir würden hienach beim Vorhandensein von drei, respective vier Streifen etwa solche Flächen erhalten, wie durch die Figuren 36, respective 37 (Taf. V) dargestellt werden, falls alle Streifen noch frei von Torsionen sind. Will man die Streifen tordiren, so schneide man dieselben an den schraffirten Stellen quer durch, drehe die rechts befindlichen Theile bei positiver Torsion im Sinne des Pfeiles  $p$ , bei negativer Torsion im entgegengesetzten Sinne und vereinige dann wieder beide Streifentheile. Die punktirte Linie möge den Mittelschnitt andeuten. Die betreffenden Flächen kann man sich leicht in folgender Weise herstellen: Man lege ein Papierquadrat (Fig. 38) längs seiner Mittelsenkrechten  $aa'$  und  $bb'$  zusammen, wie Fig. 39 zeigt, und schneide die schraffirten Stücke weg. Es entfaltet sich alsdann Fig. 39 zu Fig. 36 und stellt eine geschlossene, ebene, aus drei Streifen gebildete Fläche dar. Will man eine Fläche mit vier Streifen herstellen, so sind schraffirte Stücke wegzuschneiden, wie Fig. 40 zeigt, und analog ist weiter zu schreiten, wenn man Flächen mit einer noch grösseren Anzahl Streifen erhalten will.

Wie Herr Schuster gezeigt hat, lassen sich alle Gebilde, welche dem Mittelschnitte einer aus beliebig vielen tordirten Streifen hergestellten geschlossenen Fläche entspringen, auch mit Hilfe der von ihm erfundenen „topologischen Radwelle“<sup>1</sup> erzeugen. Ich muss dies der Vollständigkeit halber besonders erwähnen und füge nur noch hinzu, dass mir der genannte Apparat bei meinen Untersuchungen vorzügliche Dienste geleistet hat.

---

<sup>1</sup> Näheres hierüber findet man in der oben citirten Arbeit von Herrn Schuster, S. 244 ff.



Autogr del

Lith. Anst. J. Barth, Wien, Fünfhauts.

# ZOBODAT - [www.zobodat.at](http://www.zobodat.at)

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse](#)

Jahr/Year: 1889

Band/Volume: [98\\_2a](#)

Autor(en)/Author(s): Dingeldey Friedrich

Artikel/Article: [Über einen neuen topologischen Process und die Entstehungsbedingungen einfacher Verbindungen und Knoten in gewissen geschlossenen Flächen 79-106](#)