Zur Theorie der Doppelintegrale expliciter irrationaler Functionen

von

Otto Biermann in Prag.

(Vorgelegt in der Sitzung am 17. Jänner 1889.)

Herr Nöther hat schon im II. Bande der Mathematischen Annalen die allgemeine Form der verschiedenen „Gattungen" mehrfacher Integrale algebraischer Functionen mehrerer Veränderlicher besprochen. Trotzdem vollführe ich in Folgendem die Herstellung der Doppelintegrale erster Gattung $\int\int f(x_1, x_2, y)\, dx_1\, dx_2$, wo y durch die Gleichung $y^2 - R(x_1, x_2) = 0$ an die unabhängigen Variabeln geknüpft ist. Ich gewinne die Form nach einer ausführlichen analytischen Darstellung der algebraischen Function y in der Umgebung irgend einer Stelle des durch die Gleichung gegebenen Gebildes und halte mich hiebei darum lange auf, weil mir eine ähnliche analytische Discussion einer algebraischen Function von höherer als der ersten Stufe nicht bekannt ist.

Die erste Frage für die Doppelintegrale erster Gattung ist die nach ihren Perioden. Ich beschreibe im zweiten Paragraphen den Vorgang, auf Grund dessen man die Perioden ableiten kann, um schliesslich die Zahl derselben namhaft zu machen und halte mich dabei an die Arbeit von Herrn Fuchs über die einfachen Integrale $\int \frac{f(x, y)\, dy}{\sqrt{R(x, y)}}$ mit einem veränderlichen Parameter x.

§. 1.

Es sei das irreductible algebraische Gebilde zweiter Stufe im Gebiete dreier Grössen zur Behandlung vorgelegt, welches durch die Gleichung bestimmt ist:

$$g_0(\xi_1, \xi_2)\eta^2 + 2g_1(\xi_1, \xi_2)\eta + g_2(\xi_1, \xi_2) = 0,$$

wo die ganzen rationalen Functionen g_0, g_1, g_2 keinen gemeinsamen Theiler besitzen.

Wir vollführen zunächst eine eindeutig umkehrbare Transformation des Gebildes in ein der Form nach einfacheres Gebilde. Setzt man

$$x_1 = \frac{A_1\xi_1 + A_2\xi_2 + A_3}{C_1\xi_1 + C_2\xi_2 + C_3}, \quad x_2 = \frac{B_1\xi_1 + B_2\xi_2 + B_3}{C_1\xi_1 + C_2\xi_2 + C_3}$$

und unterwirft die Substitutionscoëfficienten der Bedingung, dass

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = \delta$$

von Null verschieden sei, so entspricht nicht allein jedem Werthepaare (ξ_1, ξ_2) ein Werthsystem (x_1, x_2), sondern auch umgekehrt jedem Werthepaare (x_1, x_2) ein bestimmtes Werthsystem (ξ_1, ξ_2)

$$\xi_1 = \frac{1}{\Delta}\left((C_3B_2 - C_2B_3)x_1 - (C_3B_1 - B_3C_1)x_2 + (A_2B_3 - A_3B_2)\right)$$

$$\xi_2 = \frac{-1}{\Delta}\left((C_3B_1 - C_1B_3)x_1 - (C_3A_1 - C_1A_3)x_2 + (A_1B_3 - A_3B_1)\right),$$

wo mit Δ der Ausdruck:

$$(B_1C_2 - B_2C_1)x_1 - (A_1C_2 - A_2C_1)x_2 + (A_1B_2 - A_2B_1)$$

bezeichnet ist, der durch ξ_1 und ξ_2 dargestellt, gleich

$$\delta(C_1\xi_1 + C_2\xi_2 + C_3)^{-1}$$

zu setzen ist.

Substituirt man die Ausdrücke für ξ_1 und ξ_2 in der Discriminante der vorgelegten Gleichung:

$$g_1^2(\xi_1, \xi_2) - g_2(\xi_1, \xi_2)\, g_0(\xi_1, \xi_2) = \Theta(\xi_1, \xi_2)$$

oder, wenn diese einen quadratischen Theiler $k^2(\xi_1, \xi_2)$ hat, in dem Factor von Θ ohne einen solchen Theiler — er heisse $D(\xi_1, \xi_2)$ — so entsteht ein Ausdruck der Form

$$\frac{P(x_1, x_2)}{\Delta^n_{(x_1, x_2)}},$$

wo n die Ordnung von $D(\xi_1, \xi_2)$ anzeigt.

Ist n gerade, und zwar gleich $2m$, so setze man

$$y^2 = P(x_1, a_2),$$

dann wird

$$y = \frac{\delta^m \sqrt{D(x_1 x_2)}}{(C_1\xi_1 + C_2\xi_2 + C_3)^m} = \frac{\delta^m}{(C_1\xi_1 + C_2\xi_2 + C_3)^m} \frac{g_0\eta + g_1}{k(\xi_1, \xi_2)},$$

also eine rationale Function von ξ_1, ξ_2, η, und umgekehrt η eine rationale Function von x_1, x_2, y:

$$\eta = \left(\frac{k.y}{\Delta^m} - g_1\right)\frac{1}{g_0}.$$

Ist $n = 2m+1$, so setze man

$$y^2 = P(x_1, x_2).\Delta(x_1, x_2)$$

und man ersieht auch hier die Formeln, durch welche das ursprüngliche Gebilde in das durch die einfachere Gleichung

$$y^2 = R(x_1, x_2)$$

definirte transformirt wird, wo $R(x_1, x_2)$ eine ganze Function gerader Ordnung ohne quadratischen Theiler $k^2(x_1 x_2)$ ist.

Die Untersuchung des Gebildes $y'^2 = R^{(2m+1)}(x'_1, x'_2)$ kann man mit Hilfe einer Substitution

$$x'_1 = \frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3}{\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3}, \quad x'_2 = \frac{\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3}{\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3}$$

auf die eines Gebildes $y^2 = R^{(2m+2)}(x_1, x_2)$ zurückführen, aber umgekehrt kann man durch eine bloss lineare Substitution für x_1, x_2 von dem Gebilde $y'^2 = R^{(2m+2)}(x'_1, x'_2)$ zu einem Gebilde $y^2 = R^{(2m+1)}(x_1, x_2)$ nur dann übergehen, wenn $m \leqq 2$ ist, weil andernfalls die acht willkürlichen Constanten der Substitution nicht hinreichen, alle Glieder $(2m+2)^{\text{ter}}$ Dimension des Zählers des transformirten Ausdruckes $R^{(2m+2)}(x'_1, x'_2)$ zum Verschwinden zu bringen.

In gewissen einfachen Fällen eines Gebildes $y^2 = R(x_1, x_2)$ kann man durch eine rationale Transformation

$$x_1 = R_1(\xi_1, \xi_2), \quad x_2 = R_2(\xi_1, \xi_2)$$

jede rationale Function von x_1, x_2, y in eine rationale Function von ξ_1, ξ_2 umwandeln.

Ist zunächst

$$R(x_1, x_2) = a_{00} + a_{10}x_1 + a_{01}x_2,$$

so genügt zu diesem Zwecke eine Substitution

$$\begin{aligned} a_{00} + a_{10}x_1 + a_{01}x_2 &= \xi_1^2, \\ b_{10}x_1 + b_{01}x_2 &= \xi_2, \end{aligned}$$

wo die Coëfficienten b_{10}, b_{01} einzig und allein der Bedingung unterworfen sind, dass

$$a_{10}b_{01} - b_{10}a_{01}$$

nicht Null ist.

Ist andrerseits

$$R(x_1, x_2) = (a_{00} + a_{10}x_1 + a_{01}x_2)(a'_{00} + a'_{10}x_1 + a'_{01}x_2)$$

und hierin $a_{10}a'_{01} - a_{01}a'_{10}$ von Null verschieden, so setze man den einen Factor gleich ξ_1^2, den andern ξ_2^2. Verschwindet aber der genannte Ausdruck, so erreicht man durch die Substitution

$$\begin{aligned} a_{00} + a_{10}x_1 + a_{01}x_2 &= \xi_1^2, \\ b_{10}x_1 + b_{01}x_2 &= \xi_2, \end{aligned}$$

wo $|a_{10}b_{01} - a_{01}b_{10}| > 0$ ist, dass die rationale Function von x_1, x_2, y in eine solche von ξ_1, ξ_2 und

$$\left[\left(a'_{00} - a_{00}\frac{a'_{01}}{a_{01}}\right) + \frac{a'_{01}}{a_{01}}\xi_1^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

übergeht. Setzt man jetzt noch

$$\xi_1 = 2\sqrt{a'_{00} - a_{00}\frac{a'_{01}}{a_{01}}}\,\frac{\xi'_1}{1 - \xi'^2_1},$$

so erhält man eine rationale Function von ξ'_1 und ξ_2.

Ist aber

$$R(x_1, x_2) = a_{00} + a_{10}x_1 + a_{01}x_2 + a_{20}x_1^2 + a_{11}x_1x_2 + a_{02}x_2^2$$

und die Determinante

$$\begin{vmatrix} 2a_{20} & a_{11} & a_{10} \\ a_{11} & 2a_{02} & a_{01} \\ a_{10} & a_{01} & 2a_{00} \end{vmatrix}$$

nicht Null, so könnte man versuchen, durch die Substitutionen

$$\sqrt{R(x_1, x_2)} = \sqrt{a_{00}} + \alpha_{11} x_1 \xi_1 + \alpha_{21} x_2 \xi_1 + \alpha_{12} x_1 \xi_2 + \\ + \alpha_{22} x_2 \xi_2 + \alpha_{10} x_1 + \alpha_{20} x_2,$$

$$\beta_{10} x_1 + \beta_{20} x_2 = \beta_{00} + \beta_{01} \xi_1 + \beta_{02} \xi_2$$

einem Werthepaar (ξ_1, ξ_2) nur ein Paar von Werthen x_1, x_2 entsprechen zu lassen; doch hiezu reicht die Anzahl der willkürlichen Constanten nicht aus, und das geht umsoweniger an, wenn die algebraische Beziehung zwischen x_1, x_2, y, ξ_1 und ξ_2 durch eine andere ersetzt wird, in der x_1, x_2 und ξ_1, ξ_2 in höheren Potenzen auftreten.

Wir schliessen daher in Folgendem bei Untersuchung des durch eine Gleichung

$$F(y, x_1, x_2) = y^2 - R(x_1, x_2) = 0$$

bestimmten Gebildes zweiter Stufe nur den Fall aus, wo die ganze rationale Function $R(x_1, x_2)$ von der ersten Ordnung oder in das Product zweier linearer Factoren zerlegbar ist. Ausserdem habe $R(x_1, x_2)$ keinen rationalen Theiler $k^2(x_1, x_2)$. Im Übrigen soll $R(x_1, x_2)$ von beliebiger Ordnung und nur irreductibel sein, denn im Falle einer reductiblen Function $R(x_1, x_2)$ kann man die Untersuchung des Gebildes in mehrere Theile sondern.

Nun soll das Gebilde in der Umgebung jeder seiner Stellen durch Potenzreihen in zwei Hilfsgrössen dargestellt werden. Ist $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2$, $y = b = \sqrt{R(a_1, a_2)}$ eine einfache Stelle, und bildet man:

$$(y-b)^2 + 2b(y-b) = (x_1 - a_1)\left(\frac{\partial R}{\partial x_1}\right) + (x_2 - a_2)\left(\frac{\partial R}{\partial x_2}\right) + \ldots \\ + \frac{1}{n!}(x_1 - a_1)^n \left(\frac{\partial^n R}{\partial x_1^n}\right) + \ldots + \frac{(x_2 - a_2)^n}{n!}\left(\frac{\partial^n R}{\partial x_2^n}\right)$$

oder

$$y = b\left\{1 + \frac{1}{R(a_1, a_2)}\left(\frac{x_1 - a_1}{1}\left(\frac{\partial R}{\partial x_1}\right) + \frac{(x_2 - a_2)}{1}\left(\frac{\partial R}{\partial x_2}\right) + \ldots\right)\right\}^{\frac{1}{2}}$$

so kann man y in eine Reihe nach positiven Potenzen von $x_1 - a_1 = t_1$, $x_2 - a_2 = t_2$ entwickeln. Versteht man unter $\mathfrak{p}(t_1, t_2)$

eine nach positiven ganzen Potenzen von t_1 und t_2 fortschreitende Reihe ohne constantes Gled, aber im Allgemeinen mit Gliedern erster Dimension, so ist die Form der Entwicklung durch

$$y = b(1+\mathfrak{p}(t_1, t_2))$$

gegeben.

Führt man statt t_1 und t_2 convergente Potenzreihen in neuen Variablen τ_1 und τ_2 ein:

$$t_1 = \mathfrak{p}_1(\tau_1, \tau_2), \qquad t_2 = \mathfrak{p}_2(\tau_1, \tau_2),$$

so wird auch $y-b$ durch eine für $\tau_1 = \tau_2 = 0$ verschwindende Potenzreihe in τ_1 und τ_2 dargestellt.

Jeder Stelle (τ_1, τ_2) aus dem Convergenzbereich beider Reihen $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ gehört nicht allein eine Stelle (t_1, t_2) zu, sondern es gilt auch die Umkehrung, sofern nur

$$\frac{\partial \mathfrak{p}_1}{\partial \tau_1}\frac{\partial \mathfrak{p}_2}{\partial \tau_2} - \frac{\partial \mathfrak{p}_1}{\partial \tau_2}\frac{\partial \mathfrak{p}_2}{\partial \tau_1} = \frac{\partial(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2)}{\partial(\tau_1, \tau_2)}$$

für $\tau_1 = \tau_2 = 0$ von Null verschieden ist; unter dieser Bedingung kann man die Reihen umkehren.

Ist (a_1, a_2) eine Nullstelle von $R(x_1, x_2)$, so kann man den Weierstrass'schen Satz von der Zerlegung einer in der Form einer gewöhnlichen Potenzreihe dargestellten Function $F(u, v)$, die mit den Variabeln u, v verschwindet, in das Product zweier Reihen $\mathfrak{p}(u, v)$ und $\mathfrak{P}(u, v)$ benützen.[1]

Beginnt die Entwicklung von $F(u, 0)$ mit dem Gliede

$$\frac{1}{m!}\left(\frac{\partial^m F}{\partial u^m_{(0,0)}}\right) u^m = Cu^m,$$

so ist $\mathfrak{P}(0, 0) = 1$ und $\mathfrak{p}(u, v)$ hat die Gestalt

$$C(u^m + u^{m-1}.\mathfrak{p}_1(v) + . \quad + \mathfrak{p}_m(v)).$$

Hiebei ist

$$\mathfrak{p}_\mu(v) = -\frac{1}{\mu}(s_\mu + s_{\mu-1}\mathfrak{p}_1(v) + \ldots + s_1\mathfrak{p}_{\mu-1}(v))$$
$$(\mu = 1, 2 \quad m)$$

[1] Mit $\mathfrak{P}(u, v)$ ist im Gegensatze zu $\mathfrak{p}(u, v)$ eine Reihe bezeichnet, die ein constantes Glied besitzt.

wo s_l aus den Coëfficienten der Entwicklungen:

$$\left(\frac{F(u,o)-F(u,v)}{F(u,o)}\right)^{\lambda} = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} G_{\varkappa}^{(\lambda)}(v)\frac{u^k}{u^{m\lambda}} \quad (\lambda = 1, 2\ldots)$$

in folgender Weise zusammengesetzt ist:

$$s_l = l\sum_{\lambda=1}^{\infty} G_{m\lambda-l}^{(\lambda)}(v).$$

$G_{m\lambda-l}^{(\lambda)}(v)$ ist eine für $v = o$ verschwindende Potenzreihe, welche das Glied niedrigster Dimension v^{ν} enthält, sofern

$$F(u,o)-F(u,v) = v^{\nu}\mathfrak{P}_o(u,v)$$

zu setzen ist und $\mathfrak{P}_o(u,o)$ nicht verschwindet.

Die Anwendung dieses Satzes wird wegen der Umständlichkeit bei der Rechnung mit Schwierigkeiten verbunden sein, so dass wir zum Zwecke der analytischen Darstellung des Gebildes eine andere Entwicklungsform für $R(x_1\, x_2)$ herstellen, aus der man leicht weitere Schlüsse ziehen kann.

Bezeichnet man $x_1 - a_1 = \xi_1$, $x_2 - a_2 = \xi_2$ und lässt $R(x_1, x_2)$ in der Umgebung seiner Nullstelle (a_1, a_2) die Schreibweise zu:

$$\sum_{\mu_1,\mu_2} a_{\mu_1,\mu_2}\xi_1^{\mu_1}\xi_2^{\mu_2},$$

wo die Summe über alle aus den Werthereihen $\mu_1, \mu_2 = 0, 1, \ldots n$ zu bildenden Combinationen μ_1, μ_2 auszudehnen ist, in denen $\mu_1 + \mu_2 \geqq \mu$ und $\leqq n$ ist, und denkt man durch eine homogene lineare Substitution solche Variabeln ξ_1, ξ_2 eingeführt, dass eine der Grössen

$$a_{\mu,o} \quad \text{oder} \quad a_{o,\mu}$$

oder beide von Null verschieden sind, so kann man $R(x_1\, x_2)$ auch die Form geben:

$$a_{\mu,o}\left(\xi_1^{\mu} + \xi_1^{\mu-1}\frac{P_1}{P_0} + \ldots + \frac{P_{\mu}}{P_o}\right)\frac{P_o}{a_{\mu,o}}$$

oder

$$a_{o\mu}\left(\xi_2^{\mu} + \xi_2^{\mu-1}\frac{Q_1}{Q_0} + \ldots + \frac{Q_{\mu}}{Q_o}\right)\frac{Q_o}{a_{o,\mu}}$$

wo

$$P_o = a_{\mu o} + a_{\mu+1,0}\,\xi_1 + \ldots + a_{n,o}\,\xi_1^{n-\mu}$$
$$+\xi_2(a_{\mu,1} + \ldots + a_{n-1,1}\,\xi_1^{n-\mu-1})$$
$$+\xi_2^{n-\mu}(a_{\mu,n-\mu}),$$
$$P_\lambda = \xi_2^\lambda(a_{\mu-\lambda,\lambda} + \ldots + a_{\mu-\lambda,\,n-\mu+\lambda}\,\xi_2^{n-\mu}) = \xi_2^\lambda g_\lambda(\xi_2)$$

und demnach

$$y^2 = a_{\mu o}\,\xi_1^\mu\left(1 + \frac{\xi_2}{\xi_1}\frac{g_1(\xi_2)}{P_o} + \ldots + \left(\frac{\xi_2}{\xi_1}\right)^\mu \frac{g_\mu(\xi_2)}{P_o}\right)\frac{P_o}{a_{\mu,o}}$$

ist. Q_o, Q_λ findet man aus P_o und P_λ durch Vertauschung von ξ_1 und ξ_2, $a_{\alpha\beta}$ und $a_{\beta\alpha}$.

Bringt man P_o^{-1} auf die Form

$$\frac{1}{a_{\mu o}}(1 + \mathfrak{p}_o(\xi_1, \xi_2))$$

und setzt zunächst $\mu = 1$, so kann man y in eine gewöhnliche Potenzreihe zweier Hilfsvariabeln t_1 und t_2 entwickeln, wenn man

$$a_{\mu o}\,\xi_1 = \mathfrak{p}_1^2(t_1, t_2),\quad \xi_2 = \bar{\mathfrak{p}}_2(t_1, t_2)$$

setzt und hier $\bar{\mathfrak{p}}_2$ durch $\mathfrak{p}_1^2$ theilbar ist, d. h. der Quotient $\frac{\bar{\mathfrak{p}}_2}{\mathfrak{p}_1^2}$ selbst durch eine Potenzreihe darstellbar ist.

Es sei also

$$\xi_2 = \mathfrak{p}_1^2(t_1, t_2)\,\mathfrak{P}_2(t_1, t_2),$$

dann erhält man für y die Darstellungsform:

$$y = C\mathfrak{p}_1(t_1, t_2)(1 + \mathfrak{p}(t_1, t_2)),$$

wo $C = 1$ ist, wenn $\mathfrak{P}_2(t_1, t_2)$ kein constantes Glied hat.

Der Ausdruck $\frac{dx_1\,dx_2}{y}$ hat in der Umgebung der Stelle (a_1, a_2) die Gestalt:

$$\frac{2\,\mathfrak{p}_1^2(t_1, t_2)\cdot\frac{\partial(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{P}_2)}{\partial(t_1, t_2)}\,dt_1 dt_2}{a_{\mu o}\,C(1 + \mathfrak{p}(t_1, t_2))}.$$

Die Functionaldeterminante von $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ darf an der Stelle $(t_1, t_2) = (0, 0)$ nicht verschwinden, sonst würden einer Stelle (x_1, x_2) aus der Umgebung von (a_1, a_2) mehr als zwei Werthepaare (t_1, t_2) und dann mehr als zwei Werthe y zugehören, was nicht möglich ist.

Ist (a_1, a_2) ein Doppelpunkt des zu der Gleichung $R(x_1, x_2) = 0$ gehörenden Gebildes, und nennt man die zwei von einander verschiedenen Wurzeln der Gleichung:

$$a_{20}\left(\left(\frac{\xi_1}{\xi_2}\right)^2 + \frac{a_{11}}{a_{20}}\left(\frac{\xi_1}{\xi_2}\right) + \frac{a_{02}}{a_{20}}\right) = 0$$

z_i $(i = 1, 2)$, bestimmt dann zwei Grössen α_i und β_i derart, dass

$$\alpha_i - z_i\beta_i = 1$$

ist, so erhält man durch die Substitutionen:

$$\xi_1 = (-z_i + \alpha_i\xi_2^{(i)})\xi_1^{(i)}, \quad \xi_2 = (-1 + \beta_i\xi_2^{(i)})\xi_1^{(i)},$$

$$y^2 = \xi_1^{(1)2}\{\xi_1^{(1)}c_1 + \xi_2^{(1)}a_{20}(z_2 - z_1) + (\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(2)})_2 + \cdot\ \ \cdot\}$$

oder

$$y^2 = \xi_1^{(2)2}\{\xi_1^{(2)}c_2 + \xi_2^{(2)}a_{20}(z_1 - z_2) + (\xi_1^{(2)}, \xi_2^{(2)})_2 + \cdot\ \ \cdot\},$$

wo $(\xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)})_\nu$ das Aggregat von Gliedern νter Dimension bezeichnet und c_1, c_2 Constante sind.

Ist $z_1 = z_2 = -\dfrac{a_{11}}{2a_{20}} = z$ und wählt man α und β derart, dass

$$\alpha - z\beta = 1$$

ist, so führt die Substitution:

$$\xi_1 = (-z + \alpha\xi_2^{(0)})\xi_1^{(0)}, \quad \xi_2 = (-1 + \beta\xi_2^{(0)})\xi_1^{(0)}$$

auf

$$y^2 = \xi_1^{(0)2}\{\xi_1^{(0)}c_0 + (\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)})_2 + \cdot\ \ \cdot\}$$

und in der Klammer ist das einzige Glied, welches keine Potenz von $\xi_1^{(0)}$ als Factor enthält $a_{20}\,.\,\xi_2^{(0)2}$

Nach diesen Umbildungen erscheint die ursprüngliche Gleichung in einer Form, wo die Anwendung der früheren Lehren zum Zwecke der Entwicklung wieder möglich ist.

Man setze im Falle des einfachen Doppelpunktes der Curve $R(x_1, x_2) = 0$

$$\xi_1^{(i)} c_i = \mathfrak{p}_1^{2(i)}(t_1, t_2), \quad \xi_2^{(i)} = \mathfrak{p}_1^{2(i)}(t_1, t_2)\,\mathfrak{P}_2^{(i)}(t_1, t_2)$$

und erhält

$$y = \frac{C \mathfrak{p}_1^{(i)^3}(t_1, t_2)}{c}\left(1 + \mathfrak{p}^{(i)}(t_1, t_2)\right)$$

$$\frac{dx_1\,dx_2}{y} = \frac{c_i \dfrac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(t_1, t_2)}\,dt_1\,dt_2}{C \mathfrak{p}_1^{(i)^3}(t_1, t_2)\left(1 + \mathfrak{p}^{(i)}(t_1, t_2)\right)}$$

wo $\dfrac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(t_1, t_2)}$ den Factor $\mathfrak{p}_1^{(i)^4}(t_1, t_2)$ hat. Ist aber (a_1, a_2) ein Rückkehrpunkt, so führe man ein

$$\xi_1^{(0)} c_0 = \mathfrak{p}_1^2(t_1, t_2), \quad \xi_2^{(0)} = \mathfrak{p}_1(t_1, t_2) . \mathfrak{P}_2(t_1, t_2),$$

dann ergibt sich für y die Darstellungsform:

$$y = \frac{C}{c}\,\mathfrak{p}_1^3(t_1, t_2)\left(1 + \mathfrak{p}(t_1, t_2)\right)$$

und $\dfrac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(t_1, t_2)}$ hat den Factor $\mathfrak{p}_1^3(t_1, t_2)$.

In gleicher Weise wird man das gegebene Gebilde zu besprechen haben, wenn die Stelle (a_1, a_2) eine mehr als zweielementige des irreductiblen Gebildes $R = 0$ ist. Falls z. B. (a_1, a_2) eine dreielementige Stelle ist und die Gleichung

$$a_{30}\left(\left(\frac{\xi_1}{\xi_2}\right)^3 + \frac{a_{21}}{a_{30}}\left(\frac{\xi_1}{\xi_2}\right)^2 + \frac{a_{12}}{a_{30}}\left(\frac{\xi_1}{\xi_2}\right) + \frac{a_{03}}{a_{30}}\right) = 0$$

die dreifache Wurzel $\dfrac{\xi_1}{\xi_2} = z$ besitzt, führt eine Substitution wie früher zu der erwünschten Form von y. $\left(\dfrac{dx_1\,dx_2}{y}\right)$ wird an der Stelle $(t_1, t_2) = (0, 0)$ nicht mehr endlich bleiben.

Wenn bei einer Transformation der beschriebenen Art, die zu einer k-fachen Wurzel z_μ der Gleichung

$$a_{\mu, 0}\left(\frac{\xi_1}{\xi_2}, 1\right)_\mu = 0$$

gehört, in

$$R(x_1, x_2) = (\xi_1^{(\mu)})^{\mu} R^{(\mu)}(\xi_1^{(\mu)}, \xi_2^{(\mu)})$$

ein Glied $c(\xi_1^{(\mu)})^{\mu+1}$ nicht vorkommt, so hat man für $\xi_1^{(\mu)}, \xi_2^{(\mu)}$ neue Variabeln in der früheren Weise einzuführen und wegen der Irreductibilität von $R(x_1, x_2)$, die sich auf $R^{(\mu)}(\xi_1^{(\mu)}, \xi_2^{(\mu)})$ überträgt, wird man nach einer endlichen Anzahl von Transformationen zu einem Ausdrucke:

$$R(x_1, x_2) = (\xi_1^{(\mu)})^{\mu} (\xi_1^{(\mu_1)})^{\mu_1}, \qquad (\xi_1^{(\mu_\varkappa)})^{\mu_\varkappa} R^{(\mu_\varkappa)}(\xi_1^{(\mu_\varkappa)}, \xi_2^{(\mu_\varkappa)})$$

gelangen, wo $R^{(\mu_\varkappa)}$ ein Glied $c_\varkappa \xi_1^{(\mu_\varkappa)}$ enthält.

Beschränken wir uns auf den Fall derjenigen Curven $R = 0$, die im Endlichen keine mehr als zweielementigen Stellen haben, so ist die Discussion beendet, bei der unter Anderem auch hervorging, dass $\frac{dx_1\, dx_2}{y}$ höchstens an mehr als zweielementigen Stellen von $R(x_1, x_2)$ unendlich werden kann.

Nun ist das zweistufige Gebilde auch in der Umgebung der Stellen $(a_1, a_2) = (a_1, \infty), (\infty, a_2), (\infty, \infty)$ zu untersuchen.

Steht zunächst die Beschaffenheit des Gebildes in der Umgebung der Stelle (∞, ∞) in Frage, so schreiben wir die ganze Function n^{ter} Ordnung $R(x_1, x_2)$, die auch x_1^n enthalte, indess x_2 nur in der m^{ten} Potenz vorkomme, in der Form

$$x_1^n x_2^m R_0\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}\right) = x_1^n x_2^m R_0(\xi_1, \xi_2).$$

Dann ist $(\xi_1, \xi_2) = (0, 0)$ eine m-fache Nullstelle von R_0, denn wenn

$$\begin{aligned} R(x_1, x_2) = A_{00} + (A_{10} x_1 + A_{01} x_2) + \ldots + (A_{m,0} x_1^m + \ldots + A_{0,m} x_2^m) \\ + x_1 (A_{m+1,0}\, x_1^m + \ldots + A_{1,m} x_2^m) + \ldots \\ + x_1^{n-m} (A_{n,0}\, x_1^m + \ldots + a_{n-m,m}\, x_2^m) \end{aligned}$$

ist, wird

$$\begin{aligned} R_0(\xi_1, \xi_2) = (A_{n0}\, \xi_2^m + \ldots + A_{n-m,m}\, \xi_1^m) + \ldots \\ + \xi_1^{m-1} \xi_2^{n-1} (A_{01} \xi_1 + A_{10}\, \xi_2) + A_{00}\, \xi_1^m \xi_2^n. \end{aligned}$$

Setzen wir voraus, dass die Gleichung

$$A_{n,0}\left(\left(\frac{\xi_2}{\xi_1}\right)^m + \ldots + \frac{A_{n-m,m}}{A_{n,0}}\right) = 0$$

m gleiche Wurzeln z besitze und vollführen wir die Substitution

$$\xi_1 = (-z+\alpha\xi_1')\xi_2', \quad \xi_2 = (-1+\beta\xi_1')\xi_2',$$

wo

$$\alpha - \beta z = 1$$

ist, so wird

$$R_0(\xi_1, \xi_2) = \xi_2'^m R_0'(\xi_1', \xi_2'),$$

wo R_0' das einzige von ξ_2' freie Glied $A_{n,0}\,\xi_1'^m$ enthält und ein Glied $c\,\xi_2'$ vorkommen möge.

Man hat dann die Beziehungen

$$\xi_1' = \frac{z\xi_2 - \xi_1}{\alpha\xi_2 - \beta\xi_1}. \quad \xi_2' = \beta\xi_1 - \alpha\xi_2.$$

$$y^2 = \frac{R_0'(\xi_1', \xi_2')}{\xi_2'^n(-1+\beta\xi_1')^m(-z+\alpha\xi_1')^n}$$

und $R_0'(\xi_1', \xi_2')$ besitzt die Form:

$$\xi_2' Q_0' + \xi_1'^m A_{n0}\,.$$

Setzt man nun

$$c^{\frac{1}{n-1}}\xi_2' = \mathfrak{p}_2^2(t_1, t_2),\ \xi_1' = \mathfrak{P}_1(t_1, t_2)\,\mathfrak{p}_2^2(t_1, t_2),$$

so erhält y die Gestalt

$$\frac{Cc(1+\mathfrak{p}(t_1, t_2))}{\mathfrak{p}_2^{n-1}(t_1, t_2)}$$

und weil

$$\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(t_1, t_2)} = \frac{-2\dfrac{\partial(\mathfrak{P}_1, \mathfrak{p}_2)}{\partial(t_1, t_2)}}{\mathfrak{p}_2^3(t_1, t_2)(-z+\alpha\mathfrak{P}_1\mathfrak{p}_2^2)^2(-1+\beta\mathfrak{P}_1\mathfrak{p}_2^2)^2}$$

ist, nimmt $\dfrac{dx_1\,dx_2}{y}$ in der Umgebung der Stelle (∞, ∞) die Form an:

$$\frac{\mathfrak{p}_2^{n-4}(t_1, t_2)\dfrac{\partial(\mathfrak{P}_1, \mathfrak{p}_2)}{\partial(t_1, t_2)}\,dt_1\,dt_2}{C'(1+\mathfrak{p}(t_1, t_2))}\,.$$

Diese Formel leitete ich zum Zwecke der Vergleichung der Ergebnisse mit denjenigen von H. Nöther in den Mathematischen Annalen, Band II, ab.

Ich will in Folgendem über die Beschaffenheit des Gebildes $R(\overset{n}{x_1}, \overset{m}{x_2}) = 0$ die Annahme machen, dass sowohl $x_1 = \infty$ als auch $x_2 = \infty$ m, beziehungsweise n endliche und verschiedene x_2 oder x_1 Werthe entsprechen. Dann darf in $R(x_1, x_2)$ das Glied in $x_1^n x_2^m$ nicht fehlen und bei der Anordnung

$$\begin{aligned} R(x_1, x_2) &= x_2^m f_0(x_1) + \ldots + f_m(x_1) \\ &= x_1^n g_0(x_2) + \ldots + g_n(x_2) \end{aligned}$$

müssen $f_0(\overset{n}{x_1}), g_0(\overset{m}{x_2})$ verschiedene Nullstellen haben.

Kommt $R(x_1, x_2)$ die verlangte Beschaffenheit nicht zu, so setze man unter (a_1, a_2) eine Stelle verstehend, an welcher $R(x_1, x_2)$ nicht verschwindet,

$$x_1 = a_1 + \frac{\alpha_1}{\xi_1}, \quad x_2 = a_2 + \frac{\alpha_2}{\xi_2}$$

und man erhält

$$y^2 = \frac{R'(\xi_1, \xi_2)}{\xi_1^n \xi_2^m}$$

Sind hier n und m gerade, so betrachte man statt des Gebildes $y^2 = R(x_1, x_2)$ das durch die Gleichung

$$\eta^2 = R'(\xi_1, \xi_2)$$

bestimmte und beachte die Beziehung

$$y = \frac{\eta}{\xi_1^{\frac{n}{2}} \xi_2^{\frac{m}{2}}}.$$

Falls aber m oder n oder beide Exponenten ungerade sind, führe man

$$\eta^2 = \xi_2 R'(\xi_1, \xi_2), \ \xi_1 R'(\xi_1, \xi_2), \ \xi_1 \xi_2 R'(\xi_1, \xi_2)$$

ein, dann ist

$$y = \frac{\eta}{\xi_1^{\frac{n}{2}} \xi_2^{\frac{m+1}{2}}}, \ \frac{\eta}{\xi_1^{\frac{n+1}{2}} \xi_2^{\frac{m}{2}}}, \ \frac{\eta}{\xi_1^{\frac{n+1}{2}} \xi_2^{\frac{m+1}{2}}}$$

Denkt man jedesmal über die willkürlichen Coëfficienten $a_1, a_2, \alpha_1, \alpha_2$ so verfügt, dass in

$$\begin{aligned} R'(\xi_1, \xi_2) &= \xi_2^m f_0'(\xi_1) + \quad . + f_m'(\xi_1) \\ &= \xi_1^n g_0'(\xi_2) + . \quad + g_0'(\xi_2) \end{aligned}$$

$f_0'(\xi_1)$ und $g_0'(\xi_2)$ von einander verschiedene Nullstellen besitzen und unter diesen $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$ nicht vorkommt, so gelten für die nunmehr zu betrachtenden zweistufigen Gebilde betreffs der unendlich fernen Stelle die obigen Voraussetzungen.

Man kann bei der beschriebenen Transformation die willkürlichen Constanten stets auch so wählen, dass bei Untersuchung der singulären Stellen der jetzt reductiblen Gebilde

$$\xi_1 R'(\xi_1, \xi_2) = 0, \quad \xi_2 R'(\xi_1, \xi_2) = 0, \quad \xi_1, \xi_2 R'(\xi_1, \xi_2) = 0$$

die Reductibilität nicht den Fall mit sich bringt, wo das einstufige Gebilde in der Umgebung der singulären Stellen nicht so transformirt werden kann, dass eine erste Potenz einer der eingeführten Variabeln auftritt.

Wir sind also stets in der Lage, die genannte Voraussetzung über das Gebilde $y^2 = R(x_1, x_2)$ ohne Einschränkung der Allgemeinheit einzuführen, wollen aber in der Folge wieder festsetzen, dass $R(x_1, x_2)$ irreductibel sei.

Sind $(a_1^{(1)}, a_2^{(1)})$, $\quad (a_1^{(k)}, a_2^{(k)})$ die singulären Stellen des Gebildes $R(x_1, x_2) = 0$ derart, dass das Gebilde in der Umgebung von $(a_1^{(\nu)}, a_2^{(\nu)})$ durch Reihen

$$x_1 - a_1^{(\nu)} = t^{\mu_\nu}, \qquad x_2 - a_2^{(\nu)} = t\,\mathfrak{P}(t)$$

dargestellt wird — wo $\mathfrak{P}(0)$ auch Null sein kann — so ist das Geschlecht von $R(x_1, x_2) = 0$ durch den Ausdruck

$$\rho = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{k} (\mu_\nu - 1) - (m-1)$$

gegeben. Falls aber alle Verzweigungsstellen einfache sind und das Gebilde d Doppel- und r Rückkehrpunkte als mehrelementige Stellen besitzt, ist

$$k = m(m-1) - 2d - 2r$$

und jedes $\mu_\nu = 2$, also

$$\rho = \frac{1}{2}(m-1)(m-2)-(d+r).$$

Setzen wir der Einfachheit halber voraus, dass der Curve $R = 0$ nur Doppel- und Rückkehrpunkte zugehören, so können wir jetzt für das endlich bleibende Doppelintegral

$$\iint \frac{f(x_1, x_2)}{y} dx_1 \, dx_2$$

bestimmte Angaben machen.

Betreffs der eben genannten Punkte hat man $f(x_1, x_2)$ keiner Bedingung zu unterwerfen.

Bezeichnet man die Wurzeln von

$$\begin{array}{lll} f_0(x_1) = 0 \quad \text{mit} & x_1 = a_1^{(1)}, & a_1^{(m)} \\ g_0(x_2) = 0 & x_2 = a_2^{(1)}, & a_2^{(n)}, \end{array}$$

so ist in der Umgebung von (∞, a_2) oder (a_1, ∞)

$$y^2 = R(x_1, x_2) =$$

$$= x_1^n R_1\left(\frac{1}{x_1}, x_2\right) = x_1^n \left\{ \left(\frac{\partial R_1}{\partial\left(\frac{1}{x_2}\right)}\right) \frac{1}{x_1} + \left(\frac{\partial R_1}{\partial x_2}\right)(x_2 - a_2) + \ldots \right\},$$

$$y^2 = x_2^m R_2\left(x_1, \frac{1}{x_2}\right) = x_2^m \left\{ \left(\frac{\partial R_2}{\partial x_1}\right)(x_1 - a_1) + \left(\frac{\partial R_2}{\partial\left(\frac{1}{x_2}\right)}\right) \frac{1}{x_2} + \ldots \right\}.$$

Setzt man dann

$$\left(\frac{\partial R_1}{\partial\left(\frac{1}{x_2}\right)}\right)^{\frac{1}{n-1}} \frac{1}{x_1} = \mathfrak{p}_1^2(t_1, t_2), \quad x_2 - a_2^{(\mu)} = \mathfrak{p}_1^2(t_1, t_2)\,\mathfrak{P}_2(t_1, t_2)$$

oder

$$\left(\frac{\partial R_2}{\partial\left(\frac{1}{x_2}\right)}\right)^{\frac{1}{m-1}} \frac{1}{x_2} = \mathfrak{p}_2^2(t_1, t_2), \quad x_1 - a_1^{(\nu)} = \mathfrak{p}_2^2(t_1, t_2)\,\mathfrak{P}_1(t, t_2),$$

so folgt

$$y = \frac{\left(C_1(1+\mathfrak{p}'(t_1,t_2)\right)}{\left(\frac{\partial R_1}{\partial\left(\frac{1}{x_1}\right)}\right)\mathfrak{p}_1^{n-1}(t_1;t_2)} \quad \text{oder} \quad \frac{C_2\left(1+\mathfrak{p}''(t_1,t_2)\right)}{\left(\frac{\partial R_2}{\partial\left(\frac{1}{x_2}\right)}\right)\mathfrak{p}_2^{m-1}(t_1,t_2)}$$

und

$$\frac{dx_1 dx_2}{y} = \frac{-2\,.\,\mathfrak{p}_1^{n-2}(t_1,t_2)\frac{\partial(\mathfrak{p}_1,\mathfrak{P}_2)}{\partial(t_1,t_2)}dt_1 dt_2}{C_1\left(\frac{\partial R_1}{\partial\left(\frac{1}{x_1}\right)}\right)^{\frac{n-2}{n-1}}\left(1+\mathfrak{p}'(t_1,t_2)\right)}$$

oder

$$= \frac{-2\,\mathfrak{p}_2^{m-2}(t_1,t_2)\frac{\partial(\mathfrak{p}_2,\mathfrak{P}_1)}{\partial(t_1,t_2)}dt_1 dt_2}{C_2\left(\frac{\partial R_2}{\partial\left(\frac{1}{x_2}\right)}\right)^{\frac{m-2}{m-1}}\left(1+\mathfrak{p}''(t_1,t_2)\right)}.$$

An den übrigen Stellen des Typus (∞, a_2) oder (a_1, ∞), für die $\left(R_1\left(\frac{1}{x_1}, x_2\right)\right)$, $R_2\left(x_1, \frac{1}{x_2}\right)$ nicht verschwindet, setze man bei ungeradem $n = 2\nu+1$

$$R_1(0, a_2)x_1 = \frac{1}{t_1^2}, \quad x_2 - a_2 = t_2,$$

bei geradem $n = 2\nu$

$$R_1(0, a_2)x_1 = \frac{1}{t_2}, \quad x_2 - a_2 = t_2,$$

bei ungeradem $m = 2\mu+1$

$$x_1 - a_1 = t, \quad R_2(a_1, 0)x_2 = \frac{1}{t_2^2}$$

und bei geradem $m = 2\mu$

$$x_1 - a_1 = t_1, \quad R_2(a_1, 0)x_2 = \frac{1}{t_2}.$$

Dann geht für y der Reihe nach die Form hervor:

$$\frac{1+\mathfrak{p}(t_1^2, t_2)}{R_1^\nu(0, a_2)\, t_1^{2\nu+1}}, \quad \frac{1+\mathfrak{p}(t_1, t_2)}{R_1^{\frac{2\nu-1}{2}}(0, a_2)\,.\,t_1^\nu},$$

$$\frac{1+\mathfrak{p}(t_1, t_2^2)}{R_1^\mu(a_1, 0)\, t_2^{2\mu+1}}, \quad \frac{1+\mathfrak{p}(t_1, t_2)}{R_2^{\frac{2\mu-1}{2}}(a_1, 0)\,.\,t_2^\mu}$$

und $\frac{dx_1 dx_2}{y}$ wird von der Gestalt:

$$\frac{-2R_1^{\nu-1}(0, a_2)\, t_1^{2\nu-2}\, dt_1\, dt_2}{1+\mathfrak{p}(t_1^2, t_2)}, \quad \frac{-R_1^{\frac{2\nu-3}{2}}(0, a_2)\, t_1^{\nu-2}\, dt_1\, dt_2}{1+\mathfrak{p}(t_1, t_2)}$$

$$\frac{-2R_2^{\mu-1}(a_1, 0)\, t_2^{2\mu-2}\, dt_1\, dt_2}{1+\mathfrak{p}(t_1, t_2^2)}, \quad \frac{-R_2^{\frac{2\mu-3}{2}}(a_1, 0)\, t_2^{\mu-2}\, dt_1\, dt_2}{1+\mathfrak{p}(t_1, t_2)}$$

Zufolge der vorausgesetzten Beschaffenheit von $R(x_1, x_2)$ erhalten wir in der Umgebung der Stelle $(x_1, x_2) = (\infty, \infty)$ die Schreibweise

$$y^2 = x_1^n x_2^m R_0\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}\right)$$

und hier ist $R_0(0, 0) = A_{n,m}$ von Null verschieden.

Wenn n und m ungerade sind, führe man ein

$$\frac{A_{nm}}{x_1} = \mathfrak{p}_1^2(t_1, t_2), \quad \frac{1}{x_2} = \mathfrak{p}_2^2(t_1, t_2)\,.\,\mathfrak{P}(t_1, t_2)$$

und setze fest, dass $\mathfrak{p}_1$ durch $\mathfrak{p}_2$, oder $\mathfrak{p}_2$ durch $\mathfrak{p}_1$ theilbar ist, dann wird

$$y = \frac{A_{n,m}^{\nu+1}(1+\mathfrak{p}(t_1, t_2))}{\mathfrak{p}_1^{2\nu+1}(t_1, t_2)\, \mathfrak{p}_2^{2\mu+1}(t_1, t_2)}$$

$$\frac{dx_1\, dx_2}{y} = \frac{4\,\mathfrak{p}_1^{2\nu-2}(t_1, t_2)\, \mathfrak{p}_2^{2\mu-2}(t_1, t_2)\, \dfrac{\partial(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2)}{\partial(t_1, t_2)}\, dt_1\, dt_2}{A_{nm}^\nu(1+\mathfrak{p}'(t_1, t_2))}$$

Ähnlich gehe man in den übrigen Fällen vor.

Sehen wir nun nach, wann ein Doppelintegral

$$\iint F(x_1, x_2, y)\, dx_1\, dx_2,$$

wo F eine rationale Function bezeichne, überall endlich sein kann, so geht hervor, dass F der Quotient einer ganzen Function $f(x_1, x_2)$ und y sein muss, und zwar darf, wenn $n = 2\nu + 1$, $m = 2\mu + 1$ ist, in $f(x_1, x_2)$ x_1 in nicht höherer als der $(\nu - 1)^{\text{ten}}$, x_2 in nicht höherer als der $(\mu - 1)^{\text{ten}}$ Potenz vorkommen, und die Ordnung kann bis

$$\mu + \nu - 2 = \frac{m+n-4}{2}$$

ansteigen.

Nun enthält

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= \varphi_0(x_2)x_1^{\nu-1} + \quad + \varphi_{\nu-1}(x_2) \\ &= \psi_0(x_1)x_2^{\mu-1} + . \quad . + \psi_{\mu-1}(x_1) \end{aligned}$$

noch $\mu\nu$ Constante und an diese braucht man keine weiteren Forderungen zu knüpfen, denn unser nunmehriges Doppelintegral

$$\iint \frac{f(\overset{\nu-1}{x_1}, \overset{\mu-1}{x_2})\,dx_1\,dx_2}{\sqrt{R(\overset{n}{x_1}, \overset{m}{x_2})}}$$

wird offenbar auch an den Nullstellen der Typen $(\infty, a_2^{(\mu)})$ und $(a_1^{(\nu)}, \infty)$ endlich bleiben.

In den übrigen Fällen wird es ebenso leicht sein, die Form der endlich bleibenden Doppelintegrale festzustellen. Auch dann böten sich keine erheblichen Schwierigkeiten, wenn die zu dem Gebilde höherer Art:

$$y^p = R(x_1, x_2)$$

gehörenden Doppelintegrale „erster Gattung“ zu suchen wären.

§. 2.

Stellen wir nun die Aufgabe, Perioden unserer Doppelintegrale zu finden, so gedenken wir einerseits des Vorganges, den M. Poincaré[1] zur Bestimmung der Perioden von Doppelintegralen rationaler gebrochener Functionen einführte und bemerken, dass uns derselbe hier ganz aussichtslos erscheint, denn er besteht in folgender zusammengesetzten Aufgabe:

---

[1] Acta mathematica, Bd. 9.

Ist

$$x_1 = \xi_1 + i\eta_1, \quad x_2 = \xi_2 + i\eta_2,$$

und erhält man eine besondere singuläre Fläche in der vierfach ausgedehnten unendlichen Mannigfaltigkeit $(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)$ durch das Nullsetzen des imaginären und reellen Theiles eines algebraischen Ausdruckes $P(x_1, x_2)$, so führe man für $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2$ Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ neuer reeller Variabeln λ, μ, ν ein und integrire innerhalb des Raumes (λ, μ, ν) über eine Fläche, welche die der singulären Fläche innerhalb (λ, μ, ν) entsprechende singuläre Curve umschliesst.

Hier bei den endlich bleibenden Doppelintegralen expliciter irrationaler Functionen fehlen zunächst die singulären Flächen, und es ist nicht zu ersehen, über welche Flächen die Integration zu erstrecken ist, damit man Perioden erhält.

Wir wenden uns zu einem anderen Mittel, das in der Betrachtung der Perioden eines einfachen Integrales $\int \frac{f(x,y)\,dy}{\sqrt{R(x,y)}}$ mit einem Parameter x liegt. Sehen wir diese Perioden ω als Functionen des Parameters x an, und suchen die Cyclen der vieldeutigen Function $\omega(x)$, so wird das Integral

$$\int \omega(x)\,dx$$

längs eines solchen Cyclus eine Periode des Doppelintegrales

$$\iint \frac{f(x,y)\,dx\,dy}{\sqrt{R(x,y)}}$$

sein (man vergl. die Notiz von M. Picard in den Comptes rendus vom 25. Februar 1886, S. 410).

Wir haben vor Allem ω als Function des Parameters zu untersuchen.[1]

Wir führen folgende Bezeichnungen ein: Das Gebilde $R(x,y) = 0$ sei von der Ordnung $2m+2n+2$ und besitze das Glied $x^{2m+1}y^{2n+1}$; die

$$2n(2n+1) - 2(d+r) = N = 2p$$

[1] Siehe Fuchs, Crelle's Journal, Bd. 71.

Verzweigungsstellen seien

$$x = a_1, a_2, \qquad a_N,$$

die d Doppelpunkte

$$x = \alpha_1, \alpha_2, \qquad \alpha_d$$

und

$$x = \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \qquad \mathfrak{a}_{2m+1}$$

die Werthe, die $y = \infty$ zugehören, endlich

$$y = b_1, b_2, \qquad b_{2n+1}$$

die y-Werthe, welche $x = \infty$ entsprechen.

Geben wir x jetzt einen von den genannten Werthen verschiedenen Werth $x^{(0)}$, so gehen aus der Gleichung

$$R(x^{(0)}, \overset{2n+1}{y}) = 0$$

$2n+1$ verschiedene y-Werthe

$$b_0^{(0)}, b_1^{(0)}, \qquad b_{2n}^{(0)}$$

hervor, die nebst $y = \infty$ Verzweigungspunkte des überall endlichen Integrales

$$\int \frac{f(\overset{m-1}{x^{(0)}}, \overset{n-1}{y})\,dy}{z^{(0)}}$$

sind, wenn nunmehr $R(x, y) = z^2$ gesetzt wird und $z^{(0)}$ den Werth von $\sqrt{R(x^{(0)}, y)}$ anzeigt.

Verzeichnet man in der Riemann'schen Fläche $Y^{(0)}$ $2n$ Querschnitte, so ergeben sich zugehörig $2n$ Perioden $\omega_\nu(x^{(0)})$.

Führt man x von $x^{(0)}$ zu einem anderen Werthe $x^{(1)}$, ohne dabei durch eine der früher ausgeschlossenen Stellen zu gehen, so erhält man aus den Werthen $b^{(0)}$ — stetig längs bestimmter Wege $B^{(0)}$ fortschreitend — Werthe $b^{(1)}$, und jeder nicht auf einer Curve $B^{(0)}$ liegenden Stelle y gehört ein z Werth zu, der wieder in einen bestimmten anderen übergeht.

Dem Werthe $x^{(1)}$ entsprechend, bilde man wieder eine Riemann'sche Fläche $Y^{(1)}$. In stetig einander folgenden y-Punkten derselben folgen die z-Werthe stetig, ausser dann, wenn die Punkte durch Verzweigungsschnitte oder eine Curve $B^{(0)}$ getrennt werden. Bei dem Überschreiten derselben gehen die z-Werthe in die entgegengesetzten über; daher bestehen nun die Verzweigungsschnitte innerhalb $Y^{(1)}$ aus denen von $Y^{(0)}$ und den Curven $B^{(0)}$

Die Querschnitte gehen in andere continuirlich über und die zugehörigen Perioden seien $\omega_\nu(x^{(1)})$. Jede der $2n$ Perioden gibt im Vereine mit allen auf so entsprechenden Querschnitten in den verschiedenen Flächen zu bestimmenden Perioden eine Function von x. Jede Periode ist in der Umgebung jeder endlichen, oben nicht ausgeschlossenen Stelle regulären Verhaltens. Lässt man x aber von $x^{(0)}$ aus einen Umlauf um eine Verzweigungsstelle $x=a$ oder eine Stelle α vollführen, so werden die Werthe $b_0^{(0)}, \quad b_{2n}^{(0)}$ gruppenweise cyklisch in einander übergehen. Die Perioden in der aus $Y^{(0)}$ entstehenden Fläche werden darnach als ganze ganzzahlige lineare Functionen derer in $Y^{(0)}$ erscheinen, d. h. die Perioden haben als Functionen von x die Eigenschaft, nach einem Umlaufe von x um eine Stelle a in homogene lineare ganzzahlige Functionen der ursprünglichen Werthe überzugehen.

Zum Zwecke der näheren Beurtheilung des Verhaltens der Perioden betrachten wir mit H. Fuchs das Product der Differenzen der Wurzeln $y = b_0^{(0)}, \quad b_{2n}^{(0)}$ der Gleichung $R(x^{(0)}, y) = 0$

$$P = \Pi(b_\lambda^{(0)} - b_\mu^{(0)}) = \Pi(b_\lambda^{(0)} - y - (b_\mu^{(0)} - y))$$
$$= \Sigma c_{\varkappa_0, \varkappa_1, \ldots \varkappa_{2n}} (b_0^{(0)} - y)^{\varkappa_0} (b_1^{(0)} - y)^{\varkappa_0} . \quad (b_{2n}^{(0)} - y)^{\varkappa_{2n}},$$

wo die Coëfficienten c positive oder negative ganze Zahlen sind und $\varkappa_0, \varkappa_1, \quad \varkappa_{2n}$ Zahlen der Reihe $0, 1, 2, \quad 2n$ sind, deren Summen in jedem Glied $n(2n+1)$ ist, und bilden:

$$P . \omega(x^{(0)}) = -\Sigma c_{\varkappa_0, \varkappa_1, \ldots \varkappa_{2n}} \int \frac{(b_0^{(0)} - y)^{\varkappa_0} \ldots (b_{2n}^{(0)} - y)^{\varkappa_{2n}}}{\left(f_0(x^{(0)}) \prod\limits_{\nu=1}^{2n+1} (y - b_\nu^{(0)})\right)^{\frac{1}{2}}} f(x^{(0)}, y)\, dy$$

wo die Integrale über einen Querschnitt innerhalb $Y^{(0)}$ zu erstrecken sind.

Da die Integrale im Endlichen durchaus endlich bleiben, auch wenn mehrere der Grössen b zusammenfallen, so wird $\omega(x)$ selbst an den singulären Stellen a und α solchen Verhaltens, dass in deren Umgebung $P . \omega(x)$ nicht unendlich wird.

$P = \Pi(b_\lambda - y - (b_\mu - y))$ ist, als Function von x betrachtet, an den regulären Stellen x selbst regulär; an den Stellen a, wo zwei y-Werthe gleich werden und sich verzweigen, verschwindet P und lässt sich als Function von x in der Form

$$(x-a)^{\frac{1}{2}}\mathfrak{P}(x|a)$$

entwickeln, folglich ist an diesen Stellen

$$\lim_{x=a}\left((x-a)^{\frac{1}{2}}\omega(x)\right)$$

eine endliche von Null verschiedene Grösse.

In der Umgebung der Stellen von α gilt diese Eigenschaft bereits von

$$\lim_{x=\alpha}(x-a)\,\omega(x).$$

Lassen wir x in eine Stelle $\mathfrak{a}$ rücken, so entspricht diesem Werthe ein $y=\infty$ und in der Umgebung von $(x=\mathfrak{a}, y=\infty)$ wird:

$$R(x,y)=y^{2n+1}R_1\left(x,\frac{1}{y}\right)=y^{2n+1}\left\{\left(\frac{\partial R_1}{\partial x}\right)(x-\mathfrak{a})+\left(\frac{\partial R_1}{\partial\left(\frac{1}{y}\right)}\right)\frac{1}{y}+\ldots\right\}$$

und desshalb:

$$(R(x,y))_{x=\mathfrak{a},\,y=\infty}=\left\{y^{2n+1}\left[\left(\frac{\partial R_1}{\partial\left(\frac{1}{y}\right)}\right)\frac{1}{y}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)!}\left(\frac{\partial^{2n+1}R_1}{\partial\left(\frac{1}{y}\right)^{2n+1}}\right)\frac{1}{y^{2n+1}}\right]\right\}_{y=\infty}$$

Nennt man die $x=\mathfrak{a}$ entsprechenden y-Werthe ausser $y=\infty$

$$\beta_1, \beta_2, \qquad \beta_{2n}$$

und bildet:

$$\overline{P}=\Sigma\,\bar{c}_{\varkappa_0,\varkappa_1\ldots\varkappa_{2n}}(\beta_1-y)^{\varkappa_1}.\quad(\beta_{2n}-y)^{\varkappa_{2n}}\left(\frac{1}{y}\right)^{\varkappa_0}$$

$$=\Sigma\,\bar{c}_{\varkappa_0,\varkappa_1\ldots\varkappa_{2n}}\,y^{n(2n+1)-2\varkappa_0}\left(\frac{\beta_1}{y}-1\right)^{\varkappa_1}\quad\left(\frac{\beta_{2n}}{y}-1\right)^{\varkappa_{2n}}$$

so wird

$$\overline{P}.\omega=-\Sigma\,\bar{c}_{\varkappa_0,\varkappa_1\ldots\varkappa_{2n}}\int\frac{y^{n(2n+1)-2\varkappa_0-1}\prod_{\nu=1}^{2n}\left(\frac{\beta_\nu}{y}-1\right)^{\varkappa_\nu}.f\left(\mathfrak{a},\frac{1}{y}\right)dy}{\sqrt{\left(\frac{\partial R_1}{\partial\left(\frac{1}{y}\right)}\right)+\ldots+\frac{1}{(2n+1)!}\left(\frac{\partial^{2n+1}R_1}{\partial\left(\frac{1}{y}\right)^{2n+1}}\right)\frac{1}{y^{2n}}}}$$

Weil $\varkappa_0$ von 0 bis $2n$ wachsen kann, wird die rechte Seite unendlich werden können für $y = \infty$, wie $y^{n(2n+1)}$. Indem aber $\frac{1}{y} = (x-\mathfrak{a})\mathfrak{P}(x|\mathfrak{a})$ zu setzen ist, wird

$$\overline{P}.\omega.(x-\mathfrak{a})^{n(2n+1)}$$

an der Stelle $x = \mathfrak{a}$ endlich bleiben und zufolge der Beschaffenheit von $\overline{P}$ als Function von x, $\omega(x)$ an der Stelle $\mathfrak{a}$ regulären Verhaltens sein.

Wir haben endlich noch $x = \infty$ zu setzen, wobei y die $(2n+1)$ endlichen und verschiedenen Werthe $b_0, \quad b_{2n+1}$ annimmt.

Wir schreiben

$$R(x,y) = x^{2m+1} R_2\left(\frac{1}{x}, y\right), \quad f(x,y) = x^{m-1} f\left(\frac{1}{x}, y\right)$$

und sehen, dass

$$x^{\frac{1}{2}}\omega.\Pi\left(b_\mu - y - (b_\nu - y)\right)$$

in der Umgebung von $y = b$ regulär ist, und darum wird $x^{\frac{1}{2}}\omega(x)$ in der Umgebung von $x = \infty$ regulären Verhaltens, $\omega(x)$ also von der Form

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Aus den hier entwickelten Eigenschaften der $2n$ Perioden schliesst man, dass dieselben einer linearen Differentialgleichung $2n^{\text{ter}}$ Ordnung genügen, deren Coëfficienten rationale Functionen sind:

$$\frac{d^{2n}\omega}{dx^{2n}} + \frac{P_{2n-1}}{P_{2n}}\frac{d^{2n-1}\omega}{dx^{2n-1}} + . \quad + \frac{P_0}{P_{2n}}\omega = 0,$$

und zwar ist

$$\frac{P_{2n-i}}{P_{2n}} = \frac{F_{(p-1)i}(x)}{\psi^i_{(x)}},$$

wo

$$\psi(x) = (x-a_1) \qquad (x-a_N)(x-\alpha_1) \qquad (x-\alpha_d)$$

$$N+d = p$$

ist und $F_{(p-1)i}(x)$ eine ganze rationale Function bedeutet, deren Grad höchstens der $(p-1)i^{\text{te}}$ ist.

Die sämmtlichen Wurzeln der zu den singulären Stellen a und α gehörenden determinirenden Fundamentalgleichung sind rationale Zahlen.

Wenn man im besonderen Falle die zu den singulären Stellen gehörenden Fundamentalsysteme von Integralen des Näheren bestimmt, kann man dann auch die Cyclen für das allgemeine Integral $\omega(x)$ finden und längs den Wegen $\int \omega(x)dx$ bestimmen, um die Perioden des endlich bleibenden Doppelintegrales zu ermitteln.

Die Zahl der von einander unabhängigen Cyclen beträgt für die einzelne Periode $\omega_\nu(x)$ N, folglich gibt es $(2\rho)^2$ Perioden für das Doppelintegral.
