VIII. SITZUNG VOM 21. MÄRZ 1889.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. E. Ritter v. Brücke übersendet eine Abhandlung für die Sitzungsberichte, betitelt: Van Deen's Blutprobe und Vitali's Eiterprobe.

Das w. M. Herr Prof. E. Weyr überreicht eine Abhandlung von Herrn Konrad Zindler in Graz: „Zur Theorie der Netze und Configurationen.“

Der Vorsitzende, Herr Prof. J. Stefan, überreicht eine für die Sitzungsberichte bestimmte Abhandlung: „Über einige Probleme der Theorie der Wärmeleitung.“

Das c. M. Herr Prof. Siegm. Exner in Wien überreicht eine Abhandlung unter dem Titel: „Durch Licht bedingte Verschiebung des Pigmentes im Insectenauge und deren physiologische Bedeutung.“

Herr Dr. J. Herzig überreicht eine von Dr. S. Zeisel und ihm verfasste Abhandlung unter dem Titel: „Neue Beobachtungen über Bindungswechsel bei Phenolen. (III. Mittheilung). Das Verhalten der Di- und Trioxybenzole gegen Jodäthyl und Kali.“

Herr Dr. Guido Goldschmiedt überreicht eine von ihm in Gemeinschaft mit Herrn Dr. Hugo Strache im I. chemischen Laboratorium der k. k. Universität in Wien ausgeführte Arbeit: „Zur Kenntniss der Orthodicarbonsäuren des Pyridins.“

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

v. Kuffner'sche Sternwarte in Wien (Ottakring). Publicationen. I. Bd. (Mit 12 Tafeln.) Herausgegeben von dem Leiter dieser Sternwarte Norbert Herz. Wien, 1889 4°.

Malvoz, M. Ernst, Sur le Mécanisme du Passage des Bactéries de la Mère au Foetus. Bruxelles, 1887; 8°.

Meunier, M. Alph., Le Nucléole des Spirogyra. Lierre, 1887; 8°.

Vor Kurzem ist in Wien eine Schrift von Ludwig Grossmann im Selbstverlage des Verfassers erschienen, betitelt: Anhang zum theoretischen Theile des Werkes: „Die Mathematik im Dienste der Nationalöconomie. Allgemeine Integration der linearen Differentialgleichungen höherer Ordnung, eine neue wissenschaftliche Errungenschaft auf dem Gebiete der reinen Mathematik“. Das Titelblatt dieser Druckschrift enthält die Bemerkung: „Priorität gewahrt durch die kaiserliche Akademie der Wissenschaften in Wien.“

Herr Ludwig Grossmann hat allerdings unter dem 24. Jänner d. J. ein versiegeltes Schreiben behufs Wahrung der Priorität bei der kaiserl. Akademie eingereicht, und zwar mit der Aufschrift: „Allgemeine Integration der linearen Differentialgleichungen höherer Ordnung.“ Um jedoch einer irrthümlichen Auffassung zu begegnen, sieht man sich veranlasst, den folgenden Sachverhalt bekannt zu geben.

Die mathem.-naturw. Classe der kais. Akademie nimmt seit Jahren auf Grund einer Bestimmung ihrer Geschäftsordnung versiegelte Briefe zum Zwecke der Wahrung der Priorität über Ersuchen jedes Einsenders in Verwahrung, aber der Inhalt ist ihr nur durch ein Schlagwort auf der Aussenseite des versiegelten Briefes bekannt. Die Classe ist daher selbstverständlich ganz ausser Stande, über den Werth oder Unwerth der einzelnen übersendeten Schriftstücke zu urtheilen.

Wien, am 16. März 1889.

Die mathematisch-naturwissenschaftliche Classe der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften:

J. Stefan, Vicepräsident der kaiserl. Akademie der Wissenschaften als Vorsitzender.	**E. Suess,** Secretär.

Über einige Probleme der Theorie der Wärmeleitung

von

J. Stefan,
M. k. Akad.

Die Probleme, um welche es sich hier handelt, beziehen sich auf solche Fälle, in welchen die Wärmebewegung mit einer Änderung des Aggregatzustandes des Leiters verbunden ist. Die einfachste Aufgabe dieser Art kann in folgender Weise formulirt werden.

Es ist ein Eisprisma gegeben, dessen Temperatur in allen seinen Punkten gleich seiner Schmelztemperatur, also 0° ist. Die eine Endfläche des Prisma wird zur Zeit $t = 0$ mit einer Wärmequelle von der unveränderlichen Temperatur a, welche höher ist als 0°, in dauernde Berührung gebracht. Die Wärme kann in das Prisma nicht eintreten, ohne das Eis in Wasser zu verwandeln, denn Wärme von höherer Temperatur als 0° kann das Eis nicht leiten. Nach einer Zeit t wird das Prisma aus zwei Theilen bestehen, aus einem Wasser- und einem Eisprisma. In dem ersteren wird die Temperatur von dem unteren bis zum oberen Ende von a bis o^0 abfallen. Das Gesetz dieses Temperaturabfalles, sowie das Gesetz des Wachsthums der Wassersäule sind zu bestimmen.

Bedeutet u die Temperatur zur Zeit t in jenem Querschnitte der Wassersäule, welcher durch die vom unteren Ende der Säule an gezählte Abscisse x bestimmt ist, so muss u der Differentialgleichung

$$\frac{du}{dt} = k \frac{d^2u}{dx^2} \tag{1}$$

genügen, in welcher k den Coefficienten der Temperaturleitung des Wassers, das ist den Quotienten aus dem Wärmeleitungsvermögen K und der specifischen Wärme der Volumseinheit des Wassers bedeutet. Für die Grenzflächen bestehen die Bedingungen $u = a$ für $x = o$ und $u = o$ für $x = h$, wenn mit h die Höhe der Wassersäule zur Zeit t bezeichnet wird. Für $x = h$ besteht aber noch eine Bedingung. Die durch den Endquerschnitt in der Zeit dt austretende Wärmemenge $-K\frac{du}{dx}dt$, in welchem Ausdruck $x = h$ zu setzen ist, bestimmt zugleich die Zunahme der Höhe der Wassersäule in der Zeit dt. Ist diese Zunahme dh und λ die Schmelzwärme der Volumseinheit des Eises, so ist

$$-K\frac{du}{dx}dt = \lambda dh \tag{2}$$

für $x = h$.

Bei der Aufstellung dieser Gleichung ist vorausgesetzt, dass das Wasser und das Eis gleiche Dichte haben. Nur dann kann die aus dem Eise entstandene Wassersäule denselben Querschnitt wie das Eisprisma haben und mit dem letzteren ein Continuum bilden. Will man die Verschiedenheit der Dichten ebenfalls in das Problem bringen, so müsste man entweder den Querschnitt der Wassersäule kleiner annehmen, oder dem Eisprisma eine Bewegung gegen den Anfangspunkt zuschreiben. Die Gleichung (2) würde nur insoferne geändert, dass in ihr λ nicht die Schmelzwärme der Volumseinheit, sondern der Gewichtseinheit des Eises bedeuten würde.

Der Differentialgleichung (1) und allen Bedingungen der Aufgabe kann man durch den Ausdruck

$$u = A\int_{\frac{x}{2\sqrt{kt}}}^{\alpha} e^{-z^2}dz \tag{3}$$

in welchem A und α zwei Constanten bedeuten, genügen. Zur Bestimmung derselben hat man zunächst für $x = 0$ und für jedes t

$$a = A\int_{0}^{\alpha} e^{-z^2}dz \tag{4}$$

Der Ausdruck (3) gibt $u = 0$ für $\frac{x}{2\sqrt{kt}} = \alpha$. Das durch diese Formel bestimmte x ist gleichbedeutend mit der Höhe h der Wassersäule zur Zeit t. Es gibt also

$$h = 2\alpha\sqrt{kt} \tag{5}$$

das Gesetz des Wachsthums der Wassersäule an.

Es ist zu bemerken, dass die Gleichung (3) nur für jene Werthe der x und t gilt, welche der Bedingung

$$\frac{x}{2\sqrt{kt}} \leqq \alpha$$

entsprechen, durch welche Bedingung auch das Gebiet, für welches die Differentialgleichung (1) selbst gilt, angegeben ist. Darin liegt der wesentliche Unterschied des vorliegenden Problems von den anderen, welche bisher in der Theorie der Wärmeleitung behandelt worden sind, dass die Gleichung nicht für ein von vorneherein gegebenes Gebiet gilt, sondern dieses mit der Zeit sich erweitert und zugleich das Gesetz seiner Erweiterung durch die Gleichung (1) selbst und die Bedingungsgleichung (2) bestimmt ist.

Die Gleichung (2) dient nun noch zur Bestimmung der Constanten α. Setzt man in diese Gleichung

$$\frac{du}{dx} = -Ae^{-\frac{h^2}{4kt}}\frac{1}{2\sqrt{kt}} = -Ae^{-\alpha^2}\frac{1}{2\sqrt{kt}}$$

und $dh = \alpha dt\sqrt{\frac{k}{t}}$ ein, so erhält man

$$AKe^{-\alpha^2} = 2\alpha\lambda k.$$

Führt man für A den Werth aus (4) ein und setzt $K = kc$, worin c die specifische Wärme der Volumseinheit des Wassers bedeutet, so erhält die Bestimmungsgleichung für α die Form

$$\alpha e^{-\alpha^2}\int_0^\alpha e^{-z^2}dz = \frac{ac}{2\lambda}. \tag{6}$$

Für das bestimmte Integral, welches in dieser Formel enthalten ist, sind schon Tafeln vorhanden, es hat also keine besondere Schwierigkeit, eine Tafel auch für den Ausdruck auf der ersten Seite der Gleichung herzustellen, aus welcher dann α für jeden gegebenen Werth dieses Ausdruckes gefunden werden kann.

Ich will nun zwei besondere Fälle in Betracht ziehen. Der erste Fall ist charakterisirt durch die Annahme $\lambda = 0$. Die Gleichung (6) gibt dann $x = \infty$, die Gleichungen (3) und (4) geben

$$u = \frac{2a}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{kt}}}^{\infty} e^{-z^2} dz \tag{7}$$

Es ist dies die schon von Fourier gegebene Lösung der Aufgabe, die Temperaturvertheilung in einer einfach begrenzten, unendlich langen Säule zu bestimmen, wenn diese Säule zur Zeit $t = 0$ überall die Temperatur $u = 0$, im Anfangsquerschnitte aber also für $x = 0$ für jede Zeit die Temperatur $u = a$ besitzt.

Auch die Formel (7) gibt für das Fortschreiten jeder zwischen 0 und a liegenden Temperatur u_1 das Gesetz, dass dasselbe proportional der Quadratwurzel aus der Zeit vor sich gehe, der Factor von $\sqrt{t}$ wächst, wenn u_1 kleiner gewählt wird und wird unendlich gross für $u_1 = 0$. Die Formel (3) hingegen gibt auch für die Fortpflanzung des Nullwerthes von u eine endliche durch die Gleichungen (5) und (6) vollkommen bestimmte Geschwindigkeit.

Der zweite besondere Fall, den ich betrachten will, ist der, in welchem λ sehr gross ist gegen ac. Es folgt dann aus der Gleichung (6), dass α einen sehr kleinen Werth besitzt. In erster Annäherung kann

$$\alpha^2 = \frac{ac}{2\lambda} \tag{8}$$

gesetzt werden. Für die Höhe der Wassersäule zur Zeit t erhält man die Formel

$$h = \sqrt{\frac{2\,ackt}{\lambda}} = \sqrt{\frac{2\,aKt}{\lambda}} \tag{9}$$

Die durch die Formel (8) bedingte Annäherung der Lösung wird auch erreicht, wenn man voraussetzt, dass der von $x = 0$ bis $x = h$ gehende Wärmestrom für jeden Augenblick so berechnet werden kann, als wäre der Abfall der Temperatur von $x = 0$ bis $x = h$ ein linearer. Es ist dann die in der Zeit dt dem Eise zugeführte Wärmemenge durch $K \frac{a}{h} dt$ bestimmt.

Setzt man

$$\frac{Ka}{h} dt = \lambda dh \tag{10}$$

so folgt sofort die Gleichung (9).

Vorgänge, für welche das durch die Formel (5) ausgedrückte Gesetz des linearen Wachsthums Geltung hat, kommen häufig vor, auch solche, auf welche unmittelbar die einfache Gleichung (10) anwendbar ist.

Ist zum Wachsthum einer Grösse Material erforderlich und stehen Zufuhr und Verbrauch desselben im Gleichgewicht, so ist die Geschwindigkeit des Wachsthums gleich der Intensität der Materialzufuhr, dividirt durch den Materialaufwand für die Wachsthumseinheit. Für die behandelte Aufgabe fällt der Satz mit der Bedingungsgleichung (2) zusammen, in welcher $\frac{dh}{dt}$ die Geschwindigkeit des Wachsthums, λ den Material-, das ist Wärmebedarf für die Einheit des Wachsthums darstellt.

Die Intensität der Materialzufuhr kann oft durch das dem Ohm'schen analoge Gesetz ausgedrückt werden, dass die Intensität des Materialstroms gleich ist der Betriebskraft, dividirt durch den Widerstand, den der Strom auf seiner Bahn zu überwinden hat. Ist dieser Widerstand der Länge der Strombahn proportional und geht der Materialstrom durch den wachsenden Körper selbst oder demselben parallel, so kann ein solcher Fall nach der Formel (10) berechnet werden, in welcher a die Betriebskraft repräsentirt.

Wird z. B. ein prismatisches Mauerwerk aufgeführt, so muss das dazu erforderliche Material, wenn das Werk in die Höhe rückt, auch in diese Höhe gehoben werden. Bleibt die Betriebskraft constant, so wird die in der Zeiteinheit bis zu einer Höhe h

gehobene Menge des Materials in demselben Masse kleiner, als die Höhe grösser ist und damit ist das Gesetz, dass sich die erreichten Höhen, wie die Quadratwurzeln aus den Bauzeiten verhalten, gegeben. Die Geschwindigkeit des Wachsthums wird aber ein anderes Gesetz befolgen, wenn der Materialaufwand für die Einheit des Wachsthums mit steigender Höhe abnimmt, wenn etwa statt eines Prisma eine Pyramide aufgeführt wird und lässt sich leicht ausrechnen, dass eine solche in dem sechsten Theile der Zeit, welche ein Prisma von gleicher Höhe beansprucht, fertig wird.

Das zu einem solchen Baue nöthige Material ist mindestens ein zweifaches, das feste der Bausteine und das flüssige des Mörtels, dessen Beförderung den zu diesem Wachsthum nöthigen Saftstrom darstellt. Stehen die beiden Materialströme nicht in dem Verhältnisse des Bedarfes der beiden Materialien, so staut sich das eine und die Geschwindigkeit des Wachsthums ist durch die Zufuhr des anderen allein bestimmt.

Die gleiche Betrachtung passt auch auf den Fall der Abteufung eines verticalen Schachtes, dessen Wachsthum keinen Aufwand, sondern eine Abfuhr von Material erfordert, welche aber demselben Gesetze unterworfen ist, wie die Hebung des Materials für einen in die Höhe gehenden Bau.

Dasselbe Gesetz des Wachsthums kommt auch zur Geltung, wenn die Zufuhr des zum Wachsthum nothwendigen Materials durch einen Diffusionsstrom bewerkstelligt wird, der durch den wachsenden Körper seinen Weg nimmt. Es kommt dieses Gesetz zur Geltung nicht nur dann, wenn der Diffusionsstrom nach der für den Beharrungszustand geltenden Formel berechnet werden darf, sondern allgemein, insoweit auf die Gestaltung eines Diffusionsstroms die für die Diffusion der Wärme giltige Differentialgleichung angewendet werden kann.

Der behandelten Aufgabe kann auch folgende inverse Fassung gegeben werden. Es sei ein Wasserprisma gegeben von durchaus gleichförmiger Temperatur $= 0°$. Die eine Endfläche des Prisma wird mit einem Körper von constanter Temperatur a' in Berührung gebracht und soll a' niedriger sein als 0° Das Wasser wird an diesen Körper anfrieren, es wird an denselben ein Eisprisma anwachsen und es soll nun wieder die Vertheilung der Temperatur in diesem Prisma, sowie das Gesetz des Wachsthums desselben bestimmt werden.

Diese Aufgabe ist theoretisch von der ersteren nicht verschieden. Die Höhe des Eisprisma wird durch die Formel (5) gegeben, nur ist darin für k nicht der Coefficient der Temperaturleitung des Wassers, sondern jener des Eises zu setzen. Ebenso ist in der Bestimmungsgleichung (6) unter c die specifische Wärme der Volumseinheit des Eises zu verstehen.

Die Bedingungen, welche diese Aufgabe bestimmen, sind experimentell erfüllbar deshalb, weil das Wasser nicht in Ruhe zu sein braucht. Die Rechnung würde auch in derselben Weise zu führen sein, wenn es sich um folgende Aufgabe handelte. Eine Kugel von der constanten Temperatur a', welche unter dem Eispunkte liegt, also z. B. eine mit einer Frostmischung gefüllte Metallkugel, werde in Wasser von 0° eingetaucht. Die Kugel wird von einer Eisschicht umschlossen werden. So lange die Dicke derselben klein bleibt gegen den Radius der Kugel, können auf diesen Fall die abgeleiteten Formeln angewendet werden.

Ich will nun folgende zweite Aufgabe behandeln: Es sind ein Wasser- und ein Eisprisma gegeben, deren Axen mit jener der Abscissen zusammenfallen und die sich zur Zeit $t = 0$ in $x = 0$ berühren. Das Wasserprisma soll auf der Seite der negativen, das Eisprisma auf der Seite der positiven x liegen und jedes sich bis ins unendliche erstrecken. Die Temperatur sei zur Zeit $t = 0$ im ersteren überall $= + a$, im zweiten $= - a'$. Es ist für die Zeit t der Ort, in welchem sich das Wasser und das Eisgebiet berühren und die Temperaturvertheilung in jedem dieser Gebiete zu bestimmen.

Die für $t = 0$ angenommene Discontinuität der Temperatur an der Berührungsfläche verschwindet in einer unendlich kleinen Zeit derart, dass diese Fläche die Temperatur Null annimmt. Zugleich aber wird im Allgemeinen diese Fläche verschoben, indem je nach den Werthen von a und a' Eis abschmelzen oder Wasser an das Eis anfrieren wird. Angenommen, es werde Eis abgeschmolzen, so erstreckt sich das Wassergebiet zur Zeit t von $x = -\infty$ bis $x = h$. Für dieses Gebiet gilt die Differentialgleichung (1). Es findet in dem jetzigen Falle aber auch im Eisgebiet eine Wärmebewegung statt, welche durch eine der Gleichung (1) analoge Gleichung bestimmt ist. Diese sei

$$\frac{du'}{dt} = k'\frac{d^2u'}{dx'^2} \tag{11}$$

und sollen in dieser, wie auch in allen folgenden Gleichungen die mit Strichen versehenen Buchstaben dieselbe Bedeutung für das Eis haben, welche die gleichen Buchstaben ohne Strich für das Wasser besitzen.

An Bedingungen sind nun gegeben: $u = a$ für $t = 0$ und alle negativen Werthe von x, $u' = -a'$ für $t = 0$ und alle positiven Werthe von x. Für die Trennungsfläche der beiden Gebiete, also für $x = h$ ist $u = u' = 0$ zu nehmen und die Gleichung

$$-K\frac{du}{dx} = -K\frac{du'}{dx} + \lambda\frac{dh}{dt} \tag{12}$$

zu erfüllen. Diese Gleichung besagt, dass die durch das Wasser zur Trennungsfläche in der Zeit dt zugeführte Wärme gleich ist der in derselben Zeit durch das Eis abgeführten mehr der zur Schmelzung der Eisschichte von der Dicke dh verbrauchten.

Den aufgestellten Gleichungen und Bedingungen kann man durch die Ausdrücke

$$u = A\int_{\frac{x}{2\sqrt{kt}}}^{\alpha} e^{-z^2}dz,\quad u' = A'\int_{\alpha'}^{\frac{x}{2\sqrt{k't}}} e^{-z^2}dz \tag{13}$$

genügen.

Zunächst sind A und A' durch die Gleichungen

$$a = A\int_{-\infty}^{\alpha} e^{-z^2}dz,\quad -a' = A'\int_{\alpha'}^{\infty} e^{-z^2}dz \tag{14}$$

bestimmt. Für die Trennungsebene des Wasser- und des Eisgebietes folgt zunächst aus $u = 0$

$$\frac{x}{2\sqrt{kt}} = \alpha.$$

Es ist also die Abscisse h dieser Trennungsebene durch

$$h = 2\alpha\sqrt{kt} \tag{15}$$

bestimmt. Das Gesetz für das Wachsthum des Wassergebietes hat also auch in dem jetzigen Falle dieselbe Form, wie in dem zuerst behandelten. Es folgt aber für die Trennungsfläche aus $u' = 0$ auch noch

$$h = 2\alpha'\sqrt{k't},$$

somit besteht zwischen α und α' die Relation

$$\alpha\sqrt{k} = \alpha'\sqrt{k'}. \tag{16}$$

Die Bedingungsgleichung (12) endlich liefert

$$KA\frac{e^{-\alpha^2}}{2\sqrt{kt}} = -K'A'\frac{e^{-\alpha'^2}}{2\sqrt{k't}} + \lambda\frac{\alpha\sqrt{k}}{\sqrt{t}}$$

und diese Gleichung kann in die Form

$$\frac{ac}{\alpha e^{\alpha^2}\int\limits_{-\infty}^{\alpha} e^{-z^2}dz} - \frac{a'c'}{\alpha' e^{\alpha'^2}\int\limits_{\alpha'}^{\infty} e^{-z^2}dz} = 2\lambda \tag{17}$$

gebracht werden und ist als Bestimmungsgleichung für α zu betrachten.

Ich will zunächst den speciellen Fall betrachten, dass α und α' kleine Zahlen sind. Die vorstehende Gleichung geht dann über in

$$\frac{ac}{\alpha\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} + \alpha\right)} - \frac{a'c'}{\alpha'\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \alpha'\right)} = 2\lambda$$

und daraus findet man mit Benützung der Relation (16)

$$2\alpha\sqrt{k}\left(\frac{\lambda\sqrt{\pi}}{2} + \frac{ack + a'c'k'}{\sqrt{\pi kk'}}\right) = ac\sqrt{k} - a'c'\sqrt{k'} \tag{18}$$

als Bestimmungsgleichung für α. Diese lehrt, dass α nur dann positiv ist, wenn $ac\sqrt{k}$ grösser ist als $a'c'\sqrt{k'}$. Ist der letztere

Ausdruck der grössere, so erhält α einen negativen Werth, es wird also nicht Eis abschmelzen, sondern es wird Wasser an das Eis anfrieren. Sind die beiden Ausdrücke gleich, so bleibt die Trennungsebene des Wassers und des Eises für alle Zeit an derselben Stelle.

Aus der für u aufgestellten Formel (13) ist ersichtlich, dass für die ursprüngliche Lage der Trennungsebene des Wasser- und Eisgebietes, das ist für $x = 0$ die Temperatur einen von t unabhängigen constanten Werth a_1 hat, welcher durch die Gleichung

$$a_1 = A \int_0^\alpha e^{-z^2} dz$$

bestimmt ist. Dabei ist vorausgesetzt, dass der Punkt $x = 0$ dem Gebiete der Gleichung (1) angehört, die Wanderung der Trennungsebene der beiden Gebiete also nach der Seite der positiven x erfolgt. Diese Eigenschaft des Punktes $x = 0$ hat zur Folge, dass in der Lösung der zweiten Aufgabe auch jene der ersten, und zwar in einer noch allgemeineren Fassung enthalten ist. Diese allgemeinere Fassung besteht darin, dass das in $x = 0$ mit einer Wärmequelle von unveränderlicher Temperatur a in Berührung gebrachte Eisprisma zur Zeit $t = 0$ nicht die Temperatur Null, sondern die Temperatur $-a'$ besitzt. Die Lösung dieser Aufgabe ist durch die Formeln (13) gegeben. Es ist nur an Stelle der ersten der Gleichungen (14)

$$a = A \int_0^\alpha e^{-z^2} dz$$

zu setzen. Die Gleichung (17) verwandelt sich dann in

$$\frac{ac}{\alpha e^{\alpha^2} \int_0^\alpha e^{-z^2} dz} - \frac{a'c'}{\alpha' e^{\alpha'^2} \int_{\alpha'}^\infty e^{-z^2} dz} = 2\lambda \tag{19}$$

und diese geht für $a' = 0$ in die specielle Form der Gleichung (6) über.

Es ist zu bemerken, dass, wenn man die erste Aufgabe in dieser allgemeineren Fassung als ein Wachsthumsproblem auffasst, der Material-, speciell Wärmebedarf für die Wachsthumseinheit nicht in seinem ganzen Betrage von vorneherein gegeben ist, sondern dass ein Theil desselben von der Beschaffenheit des Wärmestromes im Eise abhängig ist. Die Sache stellt sich aber anders, wenn die Wärme im Eise als unbeweglich, also k' sehr klein und wegen der Relation (16) α' sehr gross vorausgesetzt wird. Der Divisor von $a'c'$ in der Formel (19) convergirt mit wachsendem α' gegen den Grenzwerth $\frac{1}{2}$, die Formel verwandelt sich demnach in

$$\frac{ac}{\alpha e^{\alpha^2}\int\limits_0^{\alpha} e^{-z^2}dz} = 2(\lambda + a'c')$$

und besagt, dass die Schmelzwärme des Eises von der Temperatur $-a'$ um $a'c'$ grösser ist, als λ. Die Temperatur macht in diesem Falle in der Grenzebene des Wasser- und Eisgebietes einen Sprung von 0 zu $-a'$.

Ich will noch auf eine Specialisirung dieser Aufgaben hinweisen, welche für einige Anwendungen, welche ich von denselben bei anderen Untersuchungen machen werde, von Wichtigkeit ist. Die Formeln (17, 18, 19) geben für α auch dann einen bestimmten Werth, wenn $\lambda = 0$ gesetzt wird. Unter dieser Voraussetzung ist dann die zweite Aufgabe etwa so zu formuliren: Es ist ein unendlicher Stab gegeben, der zur Zeit $t = 0$ auf der Seite der negativen x die gleichförmig vertheilte Temperatur a, auf der Seite der positiven x aber die Temperatur $-a'$ besitzt. Das Material, aus welchem der Stab besteht, hat die Eigenschaft, dass es für positive Temperaturen durch die thermischen Constanten c und k bestimmt ist, für negative Temperaturen haben diese Constanten jedoch die Werthe c' und k'. Es soll die Temperaturvertheilung in diesem Stabe für die Zeit t angegeben werden. Die Lösung dieser Aufgabe geben, wie schon bemerkt, die vorhergehenden Formeln, wenn in denselben $\lambda = 0$ gesetzt wird.

Ausdruck der grössere, so erhält α einen negativen Werth, es wird also nicht Eis abschmelzen, sondern es wird Wasser an das Eis anfrieren. Sind die beiden Ausdrücke gleich, so bleibt die Trennungsebene des Wassers und des Eises für alle Zeit an derselben Stelle.

Aus der für u aufgestellten Formel (13) ist ersichtlich, dass für die ursprüngliche Lage der Trennungsebene des Wasser- und Eisgebietes, das ist für $x = 0$ die Temperatur einen von t unabhängigen constanten Werth a_1 hat, welcher durch die Gleichung

$$a_1 = A \int_0^\alpha e^{-z^2} dz$$

bestimmt ist. Dabei ist vorausgesetzt, dass der Punkt $x = 0$ dem Gebiete der Gleichung (1) angehört, die Wanderung der Trennungsebene der beiden Gebiete also nach der Seite der positiven x erfolgt. Diese Eigenschaft des Punktes $x = 0$ hat zur Folge, dass in der Lösung der zweiten Aufgabe auch jene der ersten, und zwar in einer noch allgemeineren Fassung enthalten ist. Diese allgemeinere Fassung besteht darin, dass das in $x = 0$ mit einer Wärmequelle von unveränderlicher Temperatur a in Berührung gebrachte Eisprisma zur Zeit $t = 0$ nicht die Temperatur Null, sondern die Temperatur $-a'$ besitzt. Die Lösung dieser Aufgabe ist durch die Formeln (13) gegeben. Es ist nur an Stelle der ersten der Gleichungen (14)

$$a = A \int_0^\alpha e^{-z^2} dz$$

zu setzen. Die Gleichung (17) verwandelt sich dann in

$$\frac{ac}{\alpha e^{\alpha^2} \int_0^\alpha e^{-z^2} dz} - \frac{a'c'}{\alpha' e^{\alpha'^2} \int_{\alpha'}^\infty e^{-z^2} dz} = 2\lambda \qquad (19)$$

und diese geht für $a' = 0$ in die specielle Form der Gleichung (6) über.

Es ist zu bemerken, dass, wenn man die erste Aufgabe in dieser allgemeineren Fassung als ein Wachsthumsproblem auffasst, der Material-, speciell Wärmebedarf für die Wachsthumseinheit nicht in seinem ganzen Betrage von vorneherein gegeben ist, sondern dass ein Theil desselben von der Beschaffenheit des Wärmestromes im Eise abhängig ist. Die Sache stellt sich aber anders, wenn die Wärme im Eise als unbeweglich, also k' sehr klein und wegen der Relation (16) α' sehr gross vorausgesetzt wird. Der Divisor von $a'c'$ in der Formel (19) convergirt mit wachsendem α' gegen den Grenzwerth $\frac{1}{2}$, die Formel verwandelt sich demnach in

$$\frac{ac}{\alpha e^{\alpha^2}\int\limits_0^\alpha e^{-z^2}dz} = 2(\lambda + a'c')$$

und besagt, dass die Schmelzwärme des Eises von der Temperatur $-a'$ um $a'c'$ grösser ist, als λ. Die Temperatur macht in diesem Falle in der Grenzebene des Wasser- und Eisgebietes einen Sprung von 0 zu $-a'$.

Ich will noch auf eine Specialisirung dieser Aufgaben hinweisen, welche für einige Anwendungen, welche ich von denselben bei anderen Untersuchungen machen werde, von Wichtigkeit ist. Die Formeln (17, 18, 19) geben für α auch dann einen bestimmten Werth, wenn $\lambda = 0$ gesetzt wird. Unter dieser Voraussetzung ist dann die zweite Aufgabe etwa so zu formuliren: Es ist ein unendlicher Stab gegeben, der zur Zeit $t = 0$ auf der Seite der negativen x die gleichförmig vertheilte Temperatur a, auf der Seite der positiven x aber die Temperatur $-a'$ besitzt. Das Material, aus welchem der Stab besteht, hat die Eigenschaft, dass es für positive Temperaturen durch die thermischen Constanten c und k bestimmt ist, für negative Temperaturen haben diese Constanten jedoch die Werthe c' und k'. Es soll die Temperaturvertheilung in diesem Stabe für die Zeit t angegeben werden. Die Lösung dieser Aufgabe geben, wie schon bemerkt, die vorhergehenden Formeln, wenn in denselben $\lambda = 0$ gesetzt wird.

Die behandelten Aufgaben haben für das experimentelle Studium der Vorgänge der Wärmeleitung nur wenig Werth, weil die Bedingungen, unter welchen die gefundenen Lösungen gelten, entweder gar nicht oder nur in unvollkommener Weise realisirt werden können. Die abgeleiteten Formeln gestatten aber eine Anwendung zur Berechnung von einigen Diffusionsversuchen, über welche ich später berichten werde. Dass ich die Probleme nicht sofort als solche der Diffusionslehre, sondern als Probleme der Theorie der Wärmeleitung formulirt habe, hat seinen Grund darin, dass die auf dem Gebiete der Wärmelehre zur Anwendung kommenden Begriffe genau präcisirt und allgemein bekannt sind.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1889

Band/Volume: 98_2a

Autor(en)/Author(s): Stefan Josef

Artikel/Article: Über einige Probleme der Theorie der Wärmeleitung 471-484