Zur Theorie der Netze und Configurationen

von

Konrad Zindler in Graz.

I.

Möbius beweist im barycentrischen Calcül §. 205 mit Hilfe seiner analytischen Geometrie folgenden Satz: „Sind *A, B, C, D* vier in einer Ebene gegebene Punkte, von denen keine drei in einer Geraden liegen, und ist *P* irgend ein fünfter gegebener Punkt der Ebene, so kann man durch fortgesetzte Verbindung der vier ersteren durch gerade Linien zu einem Punkte gelangen, der mit dem fünften *P* entweder zusammenfällt oder von ihm um einen Abstand entfernt ist, der kleiner ist, als jeder gegebene". Nicht wesentlich verschieden davon ist folgende Formulirung: „Wenn eine beliebig kleine feste Strecke ρ vorgegeben ist, ferner ein beliebig grosses endliches Stück einer Ebene, und in derselben vier Punkte, von denen keine drei in einer Geraden liegen, so lässt sich bloss durch fortgesetzte geradlinige Verbindung der vier Punkte und der sich jeweilig ergebenden neuen Durchschnittspunkte ein Netz von Geraden und deren Schnittpunkten construiren, welches jenes beliebig gewählte endliche Stück der Ebene so dicht überdeckt, dass nirgends in demselben ein Kreis mit dem Radius ρ gezogen werden kann, in welchem nicht mindestens ein Schnittpunkt des Netzes liegen würde". Dieser Satz ist an sich beachtenswerth und wird von Möbius auch zu wichtigen Folgerungen in der Theorie der Collineation verwendet; es wird daher nicht ohne Interesse sein, einen einfachen und elementaren synthetischen Beweis desselben mitzutheilen:

Der Gedankengang des Beweises ist folgender: Zunächst wird bewiesen: „Von drei gegebenen Punkten einer Geraden ausgehend, kann man bloss durch lineale Construction auf jeder Seite der Geraden zu einem vierten Punkte der Geraden gelangen, welcher von einem der drei gegebenen weiter als ein beliebig weit gegebener Punkt entfernt ist.“ ...I)

Mit Hilfe dieses Satzes lässt sich beweisen: „Wenn irgendwo auf einer Geraden drei Punkte und eine beliebige Strecke MN gegeben sind, so lässt sich, von den drei Punkten ausgehend, bloss durch lineale Construction ein vierter Punkt der Geraden finden, welcher innerhalb MN liegt.“ ...II)

Hierauf wird bewiesen werden: „Wenn in einer Ebene vier Punkte gegeben sind, von denen keine drei in einer Geraden liegen, so lässt sich durch fortgesetzte Verbindung der vier Punkte durch Gerade in jedem der gegebenen Punkte als Scheitel ein beliebig dichtes Strahlenbüschel construiren, d. h. ein solches, in welchem die Winkel, welche je zwei aufeinander folgende Strahlen bilden, alle kleiner sind, als ein beliebig klein vorgegebener Winkel.“ ...III)

Dieser Satz führt dann unmittelbar auf den Möbius'schen.

Beweis des Satzes I:

Es seien A, B, C die gegebenen Punkte, und zwar C derjenige, welcher durch die beiden anderen vom unendlich fernen Punkte der Geraden getrennt ist; O sei der Halbirungspunkt der Strecke AB, die Richtung OC die positive. Dann kann bekanntlich der von C durch A und B getrennte vierte harmonische Punkt D_1 rein lineal construirt werden; und zwar sei

$$\frac{AC}{CB} = \alpha,$$

dann ist

$$\frac{AB}{BD_1} = \alpha - 1;$$

wenn in gleicher Weise D_2 zu den Punkten A, B, D_1 der vierte von B getrennte harmonische Punkt ist, ferner D_3 (von D_1 getrennt) zu A, D_1, D_2, allgemein D_n (von D_{n-2} getrennt) zu A, D_{n-2}, D_{n-1}; so ist

$$\frac{AD_1}{D_1D_2} = \alpha - 2,$$
$$\vdots$$
$$\frac{AD_{n-1}}{D_{n-1}D_n} = \alpha - n.$$

Man denke sich nun dieses Verfahren bis zu einem Punkte D_{n_1} fortgesetzt, so dass $0 < \alpha - n_1 \leqq 1$; dann werden alle Punkte $D_1, D_2, \ldots D_{n_1}$ von O aus in der positiven Richtung der Geraden liegen; wenn jedoch $\alpha - n_1$ zum ersten Mal $\leqq 1$ geworden ist, unterbreche man dieses Verfahren und beginne eine zweite Gruppe von Operationen, indem man den von A durch D_{n_1-1} und D_{n_1} getrennten vierten harmonischen Punkt D_{n_1+1} aufsucht, ferner $D_{n_1+2}, D_{n_1+3}, \ldots D_{n_2}$ als vierte von A getrennte harmonische Punkte beziehungsweise zu A, D_{n_1+1}, D_{n_1}; A, D_{n_1+2}, D_{n_1}; $\ldots A, D_{n_2-1}, D_{n_1}$. Und zwar sei $\alpha - n_1 = \beta$, also $0 < \beta \leqq 1$: dann ist

$$\frac{A D_{n_1-1}}{D_{n_1-1} D_{n_1}} = \beta$$

$$\frac{A D_{n_1+1}}{D_{n_1+1} D_{n_1}} = 2\beta$$

$$\frac{A D_{n_1+2}}{D_{n_1+2} D_{n_1}} = 2^2\beta$$

$$\frac{A D_{n_2}}{D_{n_2} D_{n_1}} = 2^{n_2-n_1}\beta$$

(Hankel, Proj. Geom. 1. Abschn., §. 1.)

Man setze nun diese Gruppe von Operationen so lange fort, bis es zum ersten Mal eintritt, dass das Verhältniss $\frac{A D_{n_2}}{D_{n_2} D_{n_1}} > 1$ ist; dadurch sei n_2 definirt.

Die Punkte $D_{n_1+1}, D_{n_1+2}, \ldots D_{n_2}$ liegen alle innerhalb der Strecke $D_{n_1-1} D_{n_1}$. Mit dem Werthe $2^{n_2-n_1}\beta = \alpha_1$, mit A, D_{n_2}, D_{n_1} verfahre man nun ganz so, wie früher mit α, A, C, B:

Man construire so lange die in der Richtung OC über D_{n_1} hinausliegenden vierten harmonischen Punkte, bis $0 < \alpha_1 - n_3 = \beta_1 \leqq 1$, wodurch n_3 definirt ist, und die Punkte $D_{n_2+1}, D_{n_2+2}, \ldots D_{n_3}$ erhalten werden; hierauf suche man durch eine vierte Gruppe von Operationen die Punkte $D_{n_3+1}, D_{n_3+2}, \ldots D_{n_4}$ geradeso aus A, D_{n_3-1}, D_{n_3}, wie früher in der zweiten Gruppe von Operationen $D_{n_1+1}, D_{n_1+2}, \ldots D_{n_2}$ aus A, D_{n_1-1}, D_{n_1}, u. s. f. Durch die 1., 3., 5., … $2\nu+1$. Gruppe solcher Operationen gelangt man immer zu Punkten, die alle in der Richtung OC über die bereits vorhandenen hinausliegen, durch die 2., 4., 6., 2ν. Gruppe zu Punkten, welche innerhalb der letzten beiden in der vorangehenden Gruppe erhaltenen liegen. Es ist leicht zu sehen, dass im ungünstigsten Falle, wenn nämlich α, welches durch die drei vorgegebenen Punkte bestimmt ist, eine ganze Zahl ist, der Schlusspunkt jeder Gruppe mit ungerader Ordnungszahl doppelt so weit von A absteht, wie der Schlusspunkt der vorhergehenden Gruppe mit ungerader Ordnungszahl (in diesem Falle besteht jede Gruppe von Operationen mit Ausnahme der ersten aus einer einzigen Construction); sonst mehr als doppelt so weit. Wie weit also auch auf dem Halbstrahl OC ein Punkt P vorgegeben sein mag, man wird immer durch eine endliche Anzahl von Constructionen vierter harmonischer Punkte zu einem Punkte P' ebenfalls auf der positiven Seite der Geraden gelangen können, welcher von A weiter absteht, als P. Da man dasselbe Verfahren auf der anderen Seite der Geraden einschlagen kann, so folgt daraus der Satz I.

Beweis des Satzes II:

Zufolge I kann die Strecke $MN = d$ stets innerhalb zweier Punkte E, F liegend betrachtet werden, welche aus den drei gegebenen durch lineale Construction erhalten werden können.

Denkt man sich EF in 2^ν gleiche Theile getheilt, wobei ν durch

$$\frac{EF}{2^{\nu-1}} > d \geqq \frac{EF}{2^\nu}$$

bestimmt ist, so fällt mindestens ein Theilungspunkt auf die Strecke MN (einschliesslich der Grenzen). Liegt der Halbirungspunkt Q von EF innerhalb MN, so kann man zu E, F und einem zufolge I hinreichend weit wählbaren Punkte einen vierten harmonischen Punkt G beliebig nahe an Q und folglich innerhalb MN finden. Liegt aber Q ausserhalb MN, so sei M der von Q entferntere Endpunkt der Strecke MN. Dann kann man innerhalb MQ einen solchen Punkt G finden, der also entweder innerhalb MN oder innerhalb NQ liegt. Im letzteren Falle hat man dadurch MN in eine Strecke eingeschlossen, welche kleiner als $\frac{EF}{2}$ ist und deren Endpunkte ebenfalls aus den drei ursprünglich gegebenen Punkten rein lineal erhalten werden können.

Denkt man sich daher diese Strecke in nur $2^{\nu-1}$ gleiche Theile getheilt, so wird trotzdem jetzt umsomehr mindestens ein Theilungspunkt auf MN fallen. Dieses Verfahren setze man fort; es wird spätestens nach ν—1-maliger Anwendung eintreten müssen, dass der Halbirungspunkt der kleinsten Strecke, welche MN einschliesst, und deren Endpunkte aus den drei gegebenen durch Construction vierter harmonischer Punkte erhaltbar sind, innerhalb oder auf die Grenzpunkte von MN fällt, ein Fall, der bereits erledigt ist. Es gilt daher der Satz II.

Es braucht kaum bemerkt zu werden, dass die Theilungspunkte, welche allerdings mit dem Lineal allein nicht construirt werden könnten, zur Construction eines innerhalb MN liegenden Punktes nicht nothwendig sind, sondern nur dem Existenzbeweise dienen.

Beweis des Satzes III:

Auf jede Gerade g eines aus den vier gegebenen Punkten hervorgehenden Netzes sind die Sätze I und II anwendbar, auch wenn die weitere Beschränkung hinzutritt, dass zur Construction nur Verbindungsgerade benützt werden dürfen; denn wenn A, B, C irgend drei Schnittpunkte des Netzes auf der Geraden g sind, so geht durch jeden derselben ausser g mindestens noch eine zweite Gerade des Netzes, und wenn man den von C getrennten vierten harmonischen Punkt mittelst eines vollständigen Vierseits construiren soll, so kann man die durch C gehende Gerade als Diagonale, die durch A und B gehenden als zwei Seiten des Vierseits wählen, wodurch dieses bereits vollkommen bestimmt ist, und daher bei der Construction eines vierten harmonischen Punktes keine Gerade gezogen zu werden braucht, die nicht Verbindungsgerade schon vorhandener Schnittpunkte des Netzes wäre. Es folgt also aus II: „Wenn irgend eine Strecke d beliebig klein vorgegeben ist, ferner auf irgend einer Geraden g eines aus den vier gegebenen Punkten hervorgehenden Netzes eine Strecke ST beliebig gross, so kann durch Fortsetzung des Netzes unter den bekannten Bedingungen die Strecke ST so dicht mit Schnittpunkten des Netzes besetzt werden, dass nirgends in derselben sich die Strecke d hineinlegen lässt, ohne dass mindestens ein Schnittpunkt innerhalb d fiele.“ ...II′)

Es sei nun R ein beliebiger Schnittpunkt des Netzes, so wähle man eine durch R gehende Gerade a und zwei nicht durch R gehende Gerade b und c des Netzes so, dass im Dreieck ABC, welches sie bilden, R auf der endlichen Strecke BC liegt. Zufolge II′ können die Seiten AB und AC des Dreieckes beliebig dicht mit Schnittpunkten des Netzes besetzt werden, durch deren Verbindung mit R man wegen der festen endlichen Entfernung des Punktes R von b und c in R ein ebenfalls beliebig dichtes Strahlenbüschel erhalten kann, womit III bewiesen ist.

Der Satz III in Verbindung mit II liefert den Möbius'schen Satz:

Denn ist ρ die beliebig klein vorgegebene Entfernung, innerhalb welcher vom fünften gegebenen Punkte P aus (Möbius, a. a. O. §. 205) mindestens ein Schnittpunkt des Netzes liegen soll, so kann man zunächst in einem Schnittpunkte R des Netzes ein Strahlenbüschel so dicht construiren, dass mindestens ein Strahl s desselben in den von den beiden Tangenten begrenzten Winkelraum fällt, welche von R an den in P mit ρ geschlagenen Kreis gezogen werden können. Auf s können nun vermöge II Schnittpunkte gefunden werden, welche in die vom Kreise auf s abgeschnittene Sehne, somit innerhalb des Kreises fallen, womit der Möbius'sche Satz über Netze in der Ebene bewiesen ist.

Es hat keine Schwierigkeit, diesen synthetischen Beweis zu erweitern auf den analogen Satz über „Netze im Raume" (Möbius, Baryc. Calcül, §. 214): „Sind A, B, C, D, E fünf gegebene Punkte, von denen keine vier in einer Ebene liegen, und ist P ein gegebener sechster, so kann man durch fortgesetzte Verbindung der fünf ersteren mit Ebenen einen Punkt finden, der mit dem sechsten entweder zusammenfällt oder von ihm um einen Abstand entfernt liegt, der kleiner ist, als jeder gegebene." Das Wesentliche dieses Satzes lässt sich auch so formuliren: „Wenn eine beliebig kleine Strecke ρ vorgegeben ist, ferner fünf Punkte im Raume, von denen keine vier in einer Ebene liegen, und ein beliebig grosses endliches Stück des Raumes abgegrenzt ist, so lässt sich von den fünf Punkten ausgehend durch fortgesetzte Verbindung je dreier Punkte durch Ebenen ein Netz von Ebenen und deren Schnittgeraden und Schnittpunkten so dicht construiren, dass nirgends im beliebig gewählten endlichen Stücke des Raumes eine Kugel vom Radius ρ hineingelegt werden kann, innerhalb welcher nicht mindestens ein Schnittpunkt des Netzes läge." Von der Richtigkeit dieses Satzes kann man sich auf Grund des entsprechenden Satzes über ebene Netze z. B. folgendermassen überzeugen: Irgend eine Ebene E, welche durch drei der fünf gegebenen Punkte gelegt wird, wird von der Verbindungsgeraden der beiden übrigen Punkte (welche auch Schnittgerade von im Netze zulässigen Ebenen ist) in einem Punkte geschnitten, welcher in Verbindung mit den drei ersteren Punkten ausreicht, in einem endlichen Stücke der Ebene E ein beliebig dichtes Netz N zu construiren. Man nehme nun einen ausserhalb E liegenden Punkt S hinzu und denke sich jedesmal, wenn in der Ebene E zwischen zwei Punkten M und M' eine Verbindungsgerade gezogen wurde, diese Construction ersetzt durch Legung einer Ebene durch M, M' und S. Man erhält dadurch im Strahlenbündel S ein Netz, welches die Ebene E im Netze N schneidet und welches von fünf gegebenen Punkten aus bloss durch Verbindung je dreier Punkte mit Ebenen hervorgegangen ist. Jedem Strahlenbüschel S' in der Ebene E entspricht ein Ebenenbüschel mit der Achse SS'. Da aber diese Achse gegen die Ebene E einen bestimmten endlichen Neigungswinkel hat, so kann das Ebenenbüschel zugleich mit dem Strahlenbüschel ebenfalls beliebig dicht gemacht werden. Es gilt also der Satz: „In einem aus fünf Punkten hervorgehenden räumlichen Netze kann in jeder Schnittgeraden des Netzes als Achse durch entsprechende Fortsetzung desselben unter den bekannten Bedingungen ein beliebig dichtes Ebenenbüschel construirt werden." Es kann also so dicht construirt werden, dass, wo auch im abgegrenzten Raume sich eine Kugel mit dem Radius ρ befinden möge, die Kugel von mindestens einer Ebene α des Büschels in einem Kreise k geschnitten wird. In der Ebene α kann nun vermöge des Satzes über ebene Netze ein Netz construirt werden, von welchem Schnittpunkte innerhalb k, daher auch innerhalb der Kugel liegen. Da dieses Netz aber auch als Schnitt eines den Bedingungen genügenden räumlichen Netzes erhalten werden kann, so ist hiemit der Satz über Netze im Raume bewiesen.

Bei Construction der Netze sind unendlich ferne Punkte als gleichwerthig mit endlichen zu betrachten, sonst könnte z. B., wenn die vier Ausgangspunkte eines ebenen Netzes die Eckpunkte eines Parallelogrammes bilden, kein Netz construirt werden, ein Fall, der aber auch von Möbius nicht ausgenommen wird.

II.

Reye definirt (Acta math. I, p. 94) eine ebene Configuration als ein System von n Punkten und n Geraden in solcher Lage, dass jede der n Geraden i von den n Punkten enthält und durch jeden der n Punkte i von den n Geraden gehen. Kantor („Über die Conf. (3, 3) mit den Indices etc." Wiener Sitzungsber. math.-naturw. Cl., Bd. 84, II. Abth.) erweitert den Begriff der ebenen Configuration dahin, dass jedes System von p Punkten und g Geraden so genannt wird, welches die Eigenschaft hat, dass durch jeden der p Punkte γ von den g Geraden gehen und auf jeder der g Geraden π von den p Punkten liegen.

In der Geometrie vielfach auftretende Systeme von Punkten und Geraden (z. B. das aus sechs Punkten oder Tangenten eines ebenen Kegelschnittes hervorgehende, oder Systeme, die sich aus dem aus vier Punkten einer Ebene hervorgehenden Netze herausheben lassen) geben Veranlassung zu noch einer Erweiterung des Begriffes einer ebenen Configuration, indem man die Bedingung aufgibt, dass die Zahlen π und γ für alle Geraden und Punkte des Systems dieselben sein müssen. Wenn man ferner den Fall, dass durch einen Punkt nicht mehr als zwei Gerade gehen oder dass auf einer Geraden nicht mehr als zwei Punkte eines Systems liegen, als trivial betrachtet und keine solchen Geraden und Punkte in eine Configuration aufnimmt, erhält man die Definition: Ein System von g Geraden und p Punkten in einer Ebene soll dann eine ebene Configuration heissen, wenn durch jeden der p Punkte mehr als zwei der g Geraden gehen und auf jeder der g Geraden mehr als zwei der p Punkte liegen.[1]

---

[1] Danach kann man so entscheiden, ob in einem gegebenen Systeme von Punkten und Geraden eine Configuration enthalten ist oder nicht: Man

Die Punkte und Geraden lassen sich nun nach der Anzahl der Geraden und Punkte, welche mit ihnen incident sind, eintheilen: Eine Configuration möge $p = p_1 + p_2 + \ldots + p_k$ Punkte und $g = g_1 + g_2 + \ldots + g_l$ Gerade enthalten, und zwar mögen vorkommen:

p_1 Punkte, durch deren jeden γ_1 von den g Geraden gehen

p_2 γ_2

p_k γ_k

ferner:

g_1 Gerade, auf deren jeder π_1 von den p Punkten liegen

g_2 π_2

$\vdots$

g_l π_l

wobei alle Zahlen $\gamma_\varkappa$ unter einander verschieden sind, ebenso die π_λ.

Sind die Zahlen π und γ für die ganze Configuration dieselben, ist also $k = l = 1$, so soll die Configuration gleichmässig heissen, andernfalls ungleichmässig.

Die allgemeine Bedingung, welche die Zahlen $p\, g\, \pi\, \gamma$ für gleichmässige Configurationen erfüllen müssen (Kantor a. a. O.), ist auf folgende Weise leicht einzusehen: Würde man $p \cdot \gamma$ als die Anzahl der Geraden der Configuration ansetzen, so hätte man dabei jede π-mal gezählt, nämlich bei jedem der π Punkte, die auf ihr liegen. Es ist also $p \cdot \gamma = g \cdot \pi$. Ganz analog lässt sich für die Zahlen $p_\varkappa$, g_λ, $\gamma_\varkappa$, π_λ einer ungleichmässigen Configuration eine allgemeine Bedingung ableiten: Würde man nämlich versuchen, die Anzahl der Geraden der Configuration dadurch abzuzählen, dass man die Zahlen addirt, welche angeben, wie viele

lasse aus dem Systeme alle Punkte und Gerade fort, welche mit nicht mehr als zwei beziehungsweise Geraden und Punkten incident sind. Mit dem übrig bleibenden Systeme verfahre man ebenso u. s. w., so lange als möglich. Das System enthält eine Configuration oder nicht, je nachdem am Schlusse überhaupt noch etwas übrig bleibt oder nicht.

durch jeden einzelnen Punkt gehen, also $\sum_{\varkappa=1}^{k} p_\varkappa . \gamma_\varkappa$ als die Anzahl der Geraden ansetzen, so hätte man dabei jede Gerade der ersten Gruppe π_1-mal gezählt, nämlich jedesmal, wenn einer der π_1 Punkte genommen wurde, durch welche sie geht; g_2 Gerade wären π_2-mal gezählt worden u. s. w. Also gilt für die ungleichmässigen Configurationen:

$$\sum_{\varkappa=1}^{k} p_\varkappa . \gamma_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{l} g_\lambda . \pi_\lambda .$$

Beispiel: Wenn auf einer Geraden G_1 vier Punkte $ABCD$ liegen, auf einer anderen G_1' vier Punkte $A'\,B'\,C'\,D'$, so dass das Doppelverhältniss $(A, B, C, D) = (A', B', C', D')$, so liegen bekanntlich die sechs Schnittpunkte P_2, welche man erhält, wenn man irgend zwei Paare entsprechender Punkte kreuzweise verbindet, z. B. A mit B' und A' mit B auf einer Geraden G_3. Man erhält eine aus den $p_1 = 8$ ursprünglichen Punkten P_1, den $p_2 = 6$ Punkten P_2, den $g_1 = 2$ Geraden G_1, den $g_2 = 12$ Verbindungsgeraden G_2 und der Geraden G_3 bestehende Configuration, deren zugehörige γ und π folgende Tabelle darstellt. In den Zerlegungen der γ und π bedeuten die oberen Zeiger die Gruppen der Geraden, beziehungsweise Punkte, aus welchen die betreffenden Geraden oder Punkte genommen sind. So bedeutet z. B. die Gleichung $\gamma_1 = \gamma_1^1 + \gamma_1^2 = 1+3$, dass die γ_1 Geraden, welche durch jeden Punkt P_1 gehen, sich aus den Gruppen der G_1 und G_2 zusammensetzen, und zwar kommen vor eine Gerade G_1 und drei Gerade G_2; $\pi_1 = 4 = \pi_1^1$ bedeutet, dass sämmtliche π_1 Punkte, welche auf einer G_1 liegen, der Gruppe der P_1 angehören.

$p_1 = 8$	$\gamma_1 = 4 = \gamma_1^1 + \gamma_1^2 = 1+3$	$g_1 = 2$	$\pi_1 = 4 = \pi_1^1$
$p_2 = 6$	$\gamma_2 = 3 = \gamma_2^2 + \gamma_2^3 = 2+1$	$g_2 = 12$	$\pi_2 = 3 = \pi_2^1 + \pi_2^2 = 2+1$
		$g_3 = 1$	$\pi_2 = 6 = \pi_3^2$

Es bestätigt sich:

$$p_1\gamma_1 + p_2\gamma_2 = g_1\pi_1 + g_2\pi_2 + g_3\pi_3 = 50.$$

Es ist klar, dass bei allen derartigen Configurationen eine Zahl $\gamma_\varkappa^\lambda$ zugleich mit $\pi_\lambda^\varkappa$ von Null verschieden oder gleich Null sein muss. Es ist also die Anzahl α der Zahlen $\gamma_\varkappa^\lambda$, welche von Null verschieden sind, gleich der der Zahlen $\pi_\lambda^\varkappa$, welche von Null verschieden sind (hier beiderseits $\alpha = 4$). Hebt man irgend zwei solche Zahlen $\gamma_\varkappa^\lambda$ und $\pi_\lambda^\varkappa$ heraus, sowie die zugehörigen $p_\varkappa$ und g_λ, so gehen durch jeden $P_\varkappa$ $\gamma_\varkappa^\lambda$ Gerade G_λ, und auf jeder G_λ liegen $\pi_\lambda^\varkappa$ Punkte $P_\varkappa$. Die Zahlen $p_\varkappa g_\lambda \gamma_\varkappa^\lambda \pi_\lambda^\varkappa$ müssen also die Relation $p_\varkappa \gamma_\varkappa^\lambda = g_\lambda \pi_\lambda^\varkappa$ erfüllen. Durch Addition dieser α Gleichungen erhält man die schon unabhängig hievon gefundene Gleichung

$$\sum_{\varkappa=1}^{k} p_\varkappa \gamma_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{l} g_\lambda \pi_\lambda .$$

Am Beispiel macht man die Beobachtung, dass für sämmtliche $p_\varkappa$ Punkte einer Gruppe die zugehörige Zahl $\gamma_\varkappa$ eine für alle Punkte $P_\varkappa$ der Gruppe constante Zerlegung in die Zahlen $\gamma_\varkappa^\lambda$ zulässt; ebenso sind die Zerlegungen der $\pi_\lambda^\varkappa$ für alle g_λ Geraden G_λ dieselben. Dass dies keine nothwendige Eigenschaft der ungleichmässigen Configurationen ist, soll zunächst ein Beispiel klar machen:

Ein einem ebenen Kegelschnitte eingeschriebenes vollständiges Viereck mit den sechs Seiten G_1, das vollständige Vierseit mit den sechs Eckpunkten P_1, dessen vier Seiten Tangenten in den vier Eckpunkten des vollständigen Vierecks sind, bilden mit demjenigen Polardreieck, welches zugleich Diagonaldreieck des vollständigen Vierecks und Diagonaldreiseit des vollständigen Vierseits ist, eine aus 13 Punkten und 13 Geraden bestehende Configuration (cf. z. B. Reye, Geom. d. Lage I, 3. Aufl., S. 92):

$p_1 = 6$	$\gamma_1 = 3$	$g_1 = 6$	$\pi_1 = 3$
$p_2 = 7$	$\gamma_2 = 4$	$g_2 = 7$	$\pi_2 = 4$

Die sieben Punkte P_2, durch deren jeden vier Gerade gehen, zerfallen aber hier in zwei Untergruppen von Punkten P_{21} und P_{22}, für welche die Zerlegungen der Zahl γ_2 verschieden sind; nämlich für die vier Eckpunkte des vollständigen Vierecks gilt: $\gamma_2 = \gamma_{21}' + \gamma_{21}^2 = 3+1$, für die Eckpunkte des Polardreiecks jedoch: $\gamma_2 = \gamma_{22}' + \gamma_{22}^2 = 2+2$. Um also zu erkennen, der wie-vielten Zerlegung innerhalb einer Gruppe eine Zahl $\gamma_\varkappa^\lambda$ angehört, wurde ihr ein zweiter unterer Index zugefügt. Die Tabelle für diese Configuration gestaltet sich jetzt so:

$$p_1 = 6 \quad \gamma_1 = 3 = \gamma_1^2 \qquad g_1 = 6 \quad \pi_1 = 3 = \pi_1^2$$
$$p_2 = 7 = p_{21} + p_{22} = 4+3 \qquad g_2 = 7 = g_{21} + g_{22} = 4+3.$$
$$\gamma_2 \begin{cases} = \gamma'_{21} + \gamma^2_{21} = 3+1 \\ = \gamma'_{22} + \gamma^2_{22} = 2+2 \end{cases} \qquad \pi_2 \begin{cases} = \pi'_{21} + \pi^2_{21} = 3+1 \\ = \pi'_{22} + \pi^2_{22} = 2+2. \end{cases}$$

Nun kann man aber, ebenso wie gefragt wurde, welchen Gruppen die Geraden angehören, die durch irgend einen Punkt gehen, und die Antwort durch die ersten oberen Zeiger in der Zerlegung des zum betreffenden Punkte gehörigen γ ausgedrückt wurde, auch fragen, der wie vielten Untergruppe innerhalb einer Gruppe von Geraden die Geraden angehören, welche durch einen Punkt gehen und dies durch zweite obere Zeiger ausdrücken. Analog im dualen Falle. So gehören hier von den $\gamma_1^2 = 3$ Geraden G_2, welche durch jeden Punkt P_1 gehen, zwei der Gruppe der G_{21}, welche die $g_{21} = 4$ Seiten des vollständigen Vierseits enthält, eine der Gruppe der G_{22}, welche die $g_{22} = 3$ Seiten des Polardreiecks enthält, an, was durch die Gleichung $\gamma_1^2 = \gamma_1^{21} + \gamma_1^{22} = 2+1$ ausgedrückt werden soll. Diese Zerlegung ist für alle sechs Punkte P_1 dieselbe, ebenso bei den übrigen Anzahlen $\gamma^\lambda_{\varkappa_1 \varkappa_2}$ und $\pi^\varkappa_{\lambda_1 \lambda_2}$ dieser Configuration. Es bietet sich also kein Anlass, irgend eine Untergruppe noch in weitere Gruppen zu zerspalten, sondern zur Vervollständigung der Tabelle ist nur noch hinzuzufügen:

$$\gamma_1^2 = \gamma_1^{21} + \gamma_1^{22} = 2+1, \qquad \pi_1^2 = \pi_1^{21} + \pi_1^{22} = 2+1$$
$$\gamma^2_{21} = \gamma^{21}_{21} \qquad \pi^2_{21} = \pi^{21}_{21}$$
$$\gamma^2_{22} = \gamma^{22}_{22} \qquad \pi^2_{22} = \pi^{22}_{22}.$$

Die fehlenden zweiten unteren Zeiger kann man sich durch Einser ersetzt denken. Eine solche Configuration, bei welcher die Zerlegung eines $\gamma_\varkappa$ oder π_λ im Allgemeinen nicht für alle Punkte $P_\varkappa$ und Geraden G_λ derselben Gruppe constant ist, dagegen die Zerlegung jedes $\gamma^\lambda_{\varkappa_1 \varkappa_2}$ und $\pi^\varkappa_{\lambda_1 \lambda_2}$ für alle Punkte, beziehungsweise Geraden, derselben Untergruppe oder „Gruppe zweiter Ordnung" dieselbe ist, soll „ungleichmässig von der zweiten

Stufe“ heissen, gegenüber den früheren „von der ersten Stufe ungleichmässigen“ Configurationen. Bei jeder ungleichmässigen Configuration entspricht eine ganze solche Tabelle den vier Zahlen $p g \gamma \pi$ einer gleichmässigen Configuration als Analogon.

Allgemein: Das im letzten Beispiel beschriebene Verfahren denke man sich bei irgend einer Configuration so lange fortgesetzt, bis man auf constante Zerlegungen stösst. Es besteht darin, dass man die einer Gruppe $r-1$. Ordnung angehörigen Punkte nach der Art und Weise, wie sich die Geraden, welche durch sie gehen, auf die Geradengruppen $r-1$. Ordnung vertheilen, in Gruppen r^{ter} Ordnung theilt, und ebenso die Geraden einer Gruppe $r-1$. Ordnung in Gruppen r^{ter} Ordnung theilt, wobei alle Geraden in eine Gruppe r^{ter} Ordnung zusammengefasst werden, bei welchen die Zusammensetzung der auf ihnen liegenden Punkte aus den Gruppen $r-1$. Ordnung dieselbe ist.

Hierauf verfährt man mit den eben gewonnenen Gruppen r^{ter} Ordnung ebenso u. s. w., so lange, bis einmal der Fall eintritt, welcher bei aus einer endlichen Anzahl von Punkten und Geraden bestehenden Configurationen eintreten muss, dass in keiner Gruppe der eben gebildeten Ordnung weitere Unterschiede in Bezug auf die Anzahleigenschaften der Zusammensetzung der mit einem Elemente der betreffenden Gruppe incidenten andersartigen Elemente auftritt. Die hiebei auftretenden Anzahlen lassen sich in der Symbolik so ausdrücken: Es sei p die Zahl sämmtlicher Punkte und g die sämmtlicher Geraden einer Configuration. Es seien k_1 Punktgruppen erster Ordnung vorhanden und $p_{\varkappa_1}$ die Zahl in der $\varkappa_1^{\text{ten}}$, so dass $p = \sum_{\varkappa_1=1}^{k_1} p_{\varkappa_1}$, analog $g = \sum_{\lambda_1=1}^{l_1} g_{\lambda_1}$; zu jeder Zahl $p_{\varkappa_1}$ gehört eine Zahl $\gamma_{\varkappa_1}$, welche angibt, wie viele Gerade durch jeden Punkt der $\varkappa_1^{\text{ten}}$ Gruppe gehen; analog liegen π_{λ_1} Punkte auf jeder der g_{λ_1} Geraden G_{λ_1}. Die $\gamma_{\varkappa_1}$ Geraden, welche durch jeden $P_{\varkappa_1}$ gehen, werden im Allgemeinen verschiedenen Geradengruppen angehören.

Für jeden $P_{\varkappa_1}$ wird sich demnach $\gamma_{\varkappa_1}$ in eine Summe von Posten $\gamma_{\varkappa_1}^{\lambda_1}$ zerlegen lassen, wobei ein solcher Posten $\gamma_{\varkappa_1}^{\lambda_1}$ bloss die Zahl der Geraden aus der λ_1^{ten} Gruppe erster Ordnung angibt, welche durch den betreffenden $P_{\varkappa_1}$ gehen. Diese Zerlegungen können aber innerhalb derselben Gruppe erster Ordnung für verschiedene Punkte verschieden sein, was Anlass gibt, jede oder einige Gruppen erster Ordnung in Gruppen zweiter Ordnung zu theilen. Die Zahl der in einer solchen vorkommenden Punkte werde mit $p_{\varkappa_1 \varkappa_2}$ bezeichnet, so dass $p_{\varkappa_1} = \sum_{\varkappa_2=1}^{k_2} p_{\varkappa_1 \varkappa_2}$ und $p = \sum_{\varkappa_1=1}^{k_1} \sum_{\varkappa_2=1}^{k_2} p_{\varkappa_1 \varkappa_2}$, wobei aber k_2 selbst für verschiedene $\varkappa_1$ variabel ist, indem es die Zahl der in der $\varkappa_1$ten Gruppe erster Ordnung vorhandenen Gruppen zweiter Ordnung angibt. Für jede Gruppe von $p_{\varkappa_1 \varkappa_2}$ Punkten $P_{\varkappa_1 \varkappa_2}$ besteht nun eine einzige Zerlegung $\gamma_{\varkappa_1} = \sum_{\lambda_1=1}^{l_1} \gamma_{\varkappa_1 \varkappa_2}^{\lambda_1}$, wobei natürlich nicht alle formal in dieser Summe enthaltenen Posten von Null verschieden zu sein brauchen.

Analog $g_{\lambda_1} = \sum_{\lambda_2=1}^{l_2} g_{\lambda_1 \lambda_2}$ und $g = \sum_{\lambda_1=1}^{l_1} \sum_{\lambda_2=1}^{l_2} g_{\lambda_1 \lambda_2}$

Ebenso gehört zu jeder einzelnen Zahl $g_{\lambda_1 \lambda_2}$ eine für alle Geraden der betreffenden Gruppe zweiter Ordnung gemeinschaftliche Zerlegung $\pi_{\lambda_1} = \sum_{\varkappa_1=1}^{k_1} \pi_{\lambda_1 \lambda_2}^{\varkappa_1}$. Beim nächsten Schritte untersuche man nun, in welcher Weise sich jeder Posten $\gamma_{\varkappa_1 \varkappa_2}^{\lambda_1}$ in jeder Zerlegung aus Posten $\gamma_{\varkappa_1 \varkappa_2}^{\lambda_1 \lambda_2}$ zusammensetzt, was Anlass zur Eintheilung der Gruppen zweiter Ordnung in Gruppen dritter Ordnung gibt. Man hat $p = \sum_{\varkappa_1=1}^{k_1} \sum_{\varkappa_2=1}^{k_2} \sum_{\varkappa_3=1}^{k_3} p_{\varkappa_1 \varkappa_2 \varkappa_3}$, $g = \sum_{\lambda_1=1}^{l_1} \sum_{\lambda_2=1}^{l_2} \sum_{\lambda_3=1}^{l_3} g_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}$; zu jeder Zahl $p_{\varkappa_1 \varkappa_2 \varkappa_3}$ gehört eine Gleichung $\gamma_{\varkappa_1} = \sum_{\lambda_1=1}^{l_1} \sum_{\lambda_2=1}^{l_2} \gamma_{\varkappa_1 \varkappa_2 \varkappa_3}^{\lambda_1 \lambda_2}$, wobei λ_2 die Werthe von 1 bis zu demjenigen l_2 durchläuft, welches die Zahl der in der $\lambda_1$ten Geradengruppe erster Ordnung vorkommenden Geradengruppen zweiter Ordnung angibt, und welches für verschiedene λ_1 verschieden sein kann. Analog $\pi_{\lambda_1} = \sum_{\varkappa_1=1}^{k_1} \sum_{\varkappa_2=1}^{k_2} \pi_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}^{\varkappa_1 \varkappa_2}$ u. s. w.

Ist man bis zur Zerlegung in Gruppen n^{ter} Ordnung inclusive fortgeschritten, so hat man die Gleichungen

$$p = \sum_{\varkappa_1=1}^{k_1} \sum_{\varkappa_2=1}^{k_2} \quad \sum_{\varkappa_n=1}^{k_n} p_{\varkappa_1 \varkappa_2 \ldots}$$

$$g = \sum_{\lambda_1=1}^{l_1} \sum_{\lambda_2=1}^{l_2} \quad \sum_{\lambda_n=1}^{l_n} g_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n}$$

$$\gamma_{\varkappa_1} = \sum_{\lambda_1=1}^{l_1} \sum_{\lambda_2=1}^{l_2} \quad \sum_{\lambda_{n-1}=1}^{l_{n-1}} \gamma^{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_{n-1}}_{\varkappa_1 \varkappa_2 \ldots \varkappa_n}$$

$$\pi_{\lambda_1} = \sum_{\varkappa_1=1}^{k_1} \sum_{\varkappa_2=1}^{k_2} \quad \sum_{\varkappa_{n-1}=1}^{k_{n-1}} \pi^{\varkappa_1 \varkappa_2 \ldots \varkappa_{n-1}}_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n}$$

Es trete nun hier der Fall ein, dass in jeder Punktgruppe n^{ter} Ordnung für alle Punkte derselben die Geraden, welche durch sie gehen, sich in gleicher Weise aus den Geradengruppen n^{ter} Ordnung zusammensetzen und dass zugleich ebenso in jeder Geradengruppe n^{ter} Ordnung für alle Geraden derselben die Punkte, welche auf ihnen liegen, sich in gleicher Weise aus den Punktgruppen n^{ter} Ordnung zusammensetzen, so dass kein Anlass zur Bildung von Gruppen $n+1$. Ordnung vorliegt. Dann existirt innerhalb jeder Gruppe n^{ter} Ordnung nur eine einzige Zerlegung der γ mit $n-1$ oberen Zeigern in γ mit n oberen Zeigern oder der π mit $n-1$ oberen Zeigern in solche mit n. Es kommen nur noch die Gleichungen hinzu:

$$\gamma_{\varkappa_1} = \sum_{\lambda_1=1}^{l_1} \sum_{\lambda_2=1}^{l_2} \quad \sum_{\lambda_{n-1}=1}^{l_{n-1}} \sum_{\lambda_n=1}^{l_n} \gamma^{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_{n-1} \lambda_n}_{\varkappa_1 \varkappa_2 \ldots\ldots\ldots \varkappa_n}$$

$$\pi_{\lambda_1} = \sum_{\varkappa_1=1}^{k_1} \sum_{\varkappa_2=1}^{k_2} \quad \sum_{\varkappa_{n}-1=1}^{k_{n-1}} \sum_{\varkappa_n=1}^{k_n} \pi^{\varkappa_1 \varkappa_2 \ldots \varkappa_{n-1} \varkappa_n}_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots\ldots\ldots \lambda_n}.$$

Tritt eine solche Constanz der Zerlegungen innerhalb der eben gebildeten Gruppen bei der Zahl n ein, so soll eine solche Configuration „ungleichmässig von der n^{ten} Stufe“ heissen.

In der Relation $\sum_{\varkappa_1=1}^{k_1} p_{\varkappa_1}\gamma_{\varkappa_1} = \sum_{\lambda_1=1}^{l_1} g_{\lambda_1}\pi_{\lambda_1}$, welche für alle ungleichmässigen Configurationen gilt, lässt sich, falls die Ungleichmässigkeit von der ersten Stufe ist, $\gamma_{\varkappa_1}$ durch $\Sigma\gamma_{\varkappa_1}^{\lambda_1}$, ebenso π_{λ_1} durch $\Sigma\pi_{\lambda_1}^{\varkappa_1}$ ersetzen; falls aber die Ungleichmässigkeit zweiter Stufe ist, lassen sich die einzelnen Posten weiter zerlegen, indem man links $p_{\varkappa_1} = \sum_{\varkappa_2=1}^{k_2} p_{\varkappa_1\varkappa_2}$ und $\gamma_{\varkappa_1} = \sum_{\lambda_1=1}^{l_1}\sum_{\lambda_2=1}^{l_2} \gamma_{\varkappa_1\varkappa_2}^{\lambda_1\lambda_2}$ einführt, analog rechts und die Multiplicationen ausführt. Ist die Ungleichmässigkeit n^{ter} Stufe, so kann man successiv fortschreitend die ursprüngliche Relation als Summe von Producten darstellen, in welchen nur die Zahlen $p_{\varkappa_1\ldots\varkappa_n}$, $\gamma_{\varkappa_1\ldots\varkappa_n}^{\lambda_1\ldots\lambda_n}$, $g_{\lambda_1\ldots\lambda_n}$, $\pi_{\lambda_1\ldots\lambda_n}^{\varkappa_1\ldots\varkappa_n}$ vorkommen. Dass aber die so transformirte Gleichung sich in mehrere zerfällen lässt, indem man die entsprechenden Producte $p_{\varkappa_1\ldots\varkappa_n}.\gamma_{\varkappa_1\ldots\varkappa_n}^{\lambda_1\ldots\lambda_n}$ und $g_{\lambda_1\ldots\lambda_n}.\pi_{\lambda_1\ldots\lambda_n}^{\varkappa_1\ldots\varkappa_n}$ einzeln einander gleich setzt, lässt sich auf geometrischem Wege einsehen: Es ist klar, dass irgend eine Zahl $\gamma_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_n}^{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n}$, wobei man sich unter $\varkappa_1 .\ .\varkappa_n$, $\lambda_1 .\ .\lambda_n$ irgend welche beliebige, aber bestimmte numerische Annahmen denken möge, zugleich mit der entsprechenden Zahl $\pi_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n}^{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_n}$ von Null verschieden oder gleich Null ist. Denn $\gamma_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_n}^{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n}$ ist von Null verschieden, bedeutet: Wenn man die $\varkappa_1^{\text{te}}$ Punktgruppe erster Ordnung ins Auge fasst und innerhalb dieser die $\varkappa_2^{\text{te}}$ zweiter Ordnung, und innerhalb dieser die $\varkappa_n^{\text{te}}$ n^{ter} Ordnung, so gehen durch jeden Punkt dieser letzteren Gerade, welche der λ_1^{ten} Geradengruppe erster Ordnung angehören und innerhalb dieser der λ_2^{ten} Gruppe zweiter Ordnung, und innerhalb dieser der λ_n^{ten} Gruppe n^{ter} Ordnung; dann liegen aber offenbar auch umgekehrt auf jeder Geraden der Gruppe der $G_{\lambda_1\ldots\lambda_n}$ Punkte aus der Gruppe der $P_{\varkappa_1\ldots\varkappa_n}$. Fasst man nun zwei solche Zahlen $\gamma_{\varkappa_1\ldots\varkappa_n}^{\lambda_1\ldots\lambda_n}$ und $\pi_{\lambda_1\ldots\lambda_n}^{\varkappa_1\ldots\varkappa_n}$ heraus und dazu die Zahlen $g_{\lambda_1\ldots\lambda_n}$ und $p_{\varkappa_1\ldots\varkappa_n}$, so erfüllen solche vier Zahlen immer die Relation $p_{\varkappa_1\ldots\varkappa_n}.\gamma_{\varkappa_1\ldots\varkappa_n}^{\lambda_1\ldots\lambda_n} = g_{\lambda_1\ldots\lambda_n}.\pi_{\lambda_1\ldots\lambda_n}^{\varkappa_1\ldots\varkappa_n}$, weil in diesem Falle eine Anzahl von Punkten und Geraden vorliegt, so dass durch jeden der Punkte eine bestimmte Anzahl der Geraden geht und auf jeder der Geraden eine bestimmte Anzahl der Punkte liegt. Durch Addition sämmtlicher solcher Gleichungen erhält man die ursprüngliche $\sum_{\varkappa_1=1}^{k_1} p_{\varkappa_1}\gamma_{\varkappa_1} = \sum_{\lambda_1=1}^{l_1} g_{\lambda_1}\pi_{\lambda_1}$.

Die aus sechs Punkten eines Kegelschnittes hervorgehende Paskal'sche Configuration, welche im Ganzen aus 146 Punkten und 110 Geraden besteht, ist, falls sie vollständig bekannt ist, von der dritten Stufe der Ungleichmässigkeit, wie aus folgender nach dem Bisherigen verständlichen Tabelle T ersichtlich ist. Es heisse P_1 einer der 6 Ausgangspunkte, G_1 eine der 15 Verbindungslinien derselben, P_2 einer der 45 Schnittpunkte der letzteren, G_{21} eine der 60 Paskal'schen Linien, G_{22} eine der 20 Salmon-Caylay'schen Geraden, P_3 einer der 20 Steiner'schen Punkte, P_{411} einer der 60 Kirkmann'schen Punkte, G_3 eine der 15 Plücker'schen Geraden und P_{412} einer derjenigen 15 Punkte, durch deren jeden vier Gerade G_{22} gehen (Salmon-Fiedler, Analyt. Geom. d. Kegelschn. 3. Aufl., Art. 286 f). Dann müssen natürlich auch auf jeder G_{22} drei solche Punkte P_{412} liegen

Tabelle T.

$p_1=6 \quad \gamma_1=5=\gamma_1^1$ $p_2=45 \quad \gamma_2=6=\gamma_2^1+\gamma_2^2=2+4$ $p_3=20 \quad \gamma_3=7=\gamma_3^2+\gamma_3^3=4+3$ $p_4=75 \quad \gamma_4=4=\gamma_4^2$	$g_1=15,\ \pi_1=8=\pi_1^1+\pi_1^2=2+6$ $g_2=80=g_{21}+g_{22}=60+20$ $\pi_2=7=\pi_{21}^2+\pi_{21}^3+\pi_{21}^4$ $=3+1+3$ $\pi_2=7=\pi_{22}^3+\pi_{22}^4=1+6$ $g_3=15,\ \pi_3=4=\pi_3^3$
$\gamma_2^2=\gamma_2^{21}$ $\gamma_3^2=\gamma_3^{21}+\gamma_3^{22}=3+1$ $p_4=p_{411}+p_{412}=60+15$ $\gamma_4^2=\gamma_{411}^{21}+\gamma_{411}^{22}=3+1$ $\gamma_4^2=\gamma_{412}^{22}$	
	$\pi_{21}^4=\pi_{21}^{411}$ $\pi_{22}^4=\pi_{22}^{411}+\pi_{22}^{412}=3+3$

Zur Erläuterung: Die fehlenden zweiten und dritten oberen und unteren Zeiger kann man sich überall durch Einser ersetzt denken; es ist aber nicht nothwendig, Gruppen, innerhalb deren keine Gruppen höherer Ordnung mehr unterschieden werden, oder mit anderen Worten, welche als Ganzes zugleich eine Gruppe nächst höherer Ordnung bilden, mit weiteren Indices zu versehen. Im ersten Abschnitte der Tabelle wurde die Bildung der Gruppen erster und zweiter Ordnung der Kürze halber zusammengezogen. Letztere kommen nur rechts, und zwar nur in der Gruppe der G_2 vor. Demgemäss treten im nächsten Abschnitte der Tabelle nur links, und zwar nur bei γ mit oberem Zeiger zwei, Zerfällungen auf, wesshalb auch nur links Gruppen dritter Ordnung auftreten können und der Raum rechts leer gelassen ist. Endlich kann ein dritter Abschnitt der Tabelle nur rechts vorkommen und braucht sich nur mit den π_λ^4 zu befassen. Es ist erfüllt

$$\sum_{\varkappa_1=1}^{4} p_{\varkappa_1}\ \gamma_{\varkappa_1} = \sum_{\lambda_1=1}^{3} g_{\lambda_1}\ \pi_{\lambda_1} = 740.$$

Man kann die Charakteristik jeder Configuration äusserlich so umformen, als ob sie einer Configuration von erster Stufe der Ungleichmässigkeit angehören würde, wenn man die Bedingung fallen lässt, dass die Zahlen $\gamma_{\varkappa_1}$ alle unter einander, und ebenso die Zahlen π_{λ_1} verschieden sein sollen. Numerirt man nämlich sämmtliche Punktgruppen n^{ter} Ordnung einfach fortlaufend von 1 bis r ohne Rücksicht darauf, wie sie sich zu Punktgruppen n—1. Ordnung zusammensetzen, und ebenso alle Geradengruppen n^{ter} Ordnung von 1 bis s, und seien p_ρ und g_σ die Zahl der in einer Gruppe vorhandenen Elemente, so hat man

$$p = \sum_{\rho=1}^{r} p_\rho, \quad g = \sum_{\sigma=1}^{s} g_\sigma; \quad \gamma_\rho = \sum_{\sigma=1}^{s} \gamma_\rho^\sigma, \quad \pi_\sigma = \sum_{\rho=1}^{r} \pi_\sigma^\rho.$$

Beispielsweise erhält die Charakteristik der Paskal'schen Configuration folgende Form T', wenn nun P_1, G_1, P_2, P_3 dieselbe Bedeutung beibehalten, aber eine Paskal'sche Gerade mit G_2, eine Salmon-Caylay'sche mit G_3, eine Plücker'sche mit G_4, ein Kirkmann'scher Punkt mit P_4 und einer der früheren Punkte P_{412} mit P_5 bezeichnet wird.

$p_1 = 6$	$\gamma_1 = 5 = \gamma_1'$	$g_1 = 15$	$\pi_1 = 8 = \pi_1' + \pi_1^2$ $= 2+6$
$p_2 = 45$	$\gamma_2 = 6 = \gamma_2' + \gamma_2^2$ $= 2+4$	$g_2 = 60$	$\pi_2 = 7 = \pi_2^2 + \pi_2^3 + \pi_2^4$ $= 3+1+3$
$p_3 = 20$	$\gamma_3 = 7 = \gamma_3^2 + \gamma_3^3 + \gamma_3^4$ $= 3+1+3$	$g_3 = 20$	$\pi_3 = 7 = \pi_3^3 + \pi_3^4 + \pi_3^5$ $= 1+3+3$
$p_4 = 60$	$\gamma_4 = \gamma_4^2 + \gamma_4^3 = 3+1$	$g_4 = 15$	$\pi_4 = 4 = \pi_4^3$
$p_5 = 15$	$\gamma_5 = 4 = \gamma_5^3$		

Diese Form lässt noch leichter erkennen, aus welchen neun Relationen $p_\rho \cdot \gamma_\rho^\sigma = g_\sigma \cdot \pi_\sigma^\rho$ sich die Relation $\sum_{\rho=1}^{5} p_\rho\ \gamma_\rho = \sum_{\sigma=1}^{4} g_\sigma \pi_\sigma$ durch Addition zusammensetzen lässt. Von diesen neun Gleichungen entsprechen aber nur vier, nämlich $p_2 \gamma_2^2 = g_2 \pi_2^2$, $p_3 \gamma_3^4 = g_4 \pi_4^3$, $p_4 \gamma_4^2 = g_2 \pi_2^4$, $p_5 \gamma_5^3 = g_3 \pi_3^5$ eigentlichen gleichmässigen Configurationen, die sich aus der Paskal'schen herausheben lassen; die fünf Systeme von Geraden und Punkten, auf welche sich die übrigen Gleichungen beziehen, sind, an und für sich betrachtet, trivial, weil nicht beide Zahlen π und $\gamma \geqq 3$ sind. Ist auch die Form T' in mancher Beziehung übersichtlicher, so führt doch, wenn eine Configuration in allgemeinster Weise dadurch gegeben ist, dass von jedem Individuum der p Punkte $P_1, P_2, \ldots P_p$ einzeln angegeben ist, welche Individuen $G_1, G_2,$ G_g mit ihm incident sind und umgekehrt, der systematische Weg, der aus lauter eindeutigen Processen der Abzählung besteht, stets auf eine Charakteristik der Form T. Man kann die eine Form aus der anderen ableiten.

Es gibt Configurationen von beliebig hoher Stufe der Ungleichmässigkeit. Man kann sich auf folgende Weise eine Configuration von mindestens n^{ter} Stufe der Ungleichmässigkeit verschaffen: Auf jeder von zwei Geraden G und G' nehme man eine gleiche Anzahl (aber mindestens drei) Punkte an, die man beiderseits in irgend einer Ordnung numerire. Durch jeden dieser Punkte lege man irgend eine Anzahl Gerade, und zwar durch die gleich vielten beiderseits gleich viel. Je eine solche Annahme von Punkten oder Geraden heisse ein Schritt. Auf den durch den zweiten Schritt gewonnenen Geraden nehme man im dritten Schritt wieder Punkte und durch die letzteren im vierten wieder Gerade an, und zwar wieder, was die Anzahleigenschaften betrifft, beiderseits in gleicher Weise u. s. f. immer so, dass keine der neu angenommenen Elemente mit noch anderen als den durch den nächstvorhergehenden Schritt erhaltenen incident sind, damit die durch die früheren Schritte festgesetzten Anzahlen später nicht gestört werden; und immer so, dass die verwendeten Anzahlen $\geqq 2$ sind. Beliebig spät, beim n^{ten} Schritt, kann man nun die Annahme so treffen, dass die Neuwahl von Punkten oder Geraden in den beiden aus G und G' hervorgegangenen Systemen, was die Anzahleigenschaften betrifft, nicht mehr in gleicher Weise geschieht. Die so gewonnenen Systeme S und S' sind noch keine Configurationen, weil sie, nach dem Eingangs in der Anmerkung beschriebenen Processe behandelt, wieder vollständig verschwinden würden. Würden sie aber in irgend einer Configuration vorkommen, so wäre dieselbe mindestens von der n^{ten} Stufe der Ungleichmässigkeit, denn die Geraden G und G' gehören in dieselbe Gruppe 1., 2., $n-1$. Ordnung und erst in verschiedene Gruppen n^{ter} Ordnung. Zunächst kann man jedes einzelne der beiden Systeme so zu einer Configuration ergänzen, dass die durch die unmittelbare willkürliche Festlegung gewonnenen Anzahlen nicht alterirt werden. Der letzte Schritt habe z. B. in Legung von Geraden bestanden, die zu je einer gewissen, für verschiedene Punkte im Allgemeinen verschiedenen Zahl α durch einen Punkt M gingen. Man braucht nur eine Configuration, in welcher ein Punkt vorkommt, durch welchen α Gerade gehen, so zu legen, dass der betreffende Punkt mit M coïncidirt. Dasselbe thue man mit allen übrigen, durch den vorletzten Schritt erhaltenen Punkten M. Solche Configurationen mit beliebigen Zahlen α stehen zur Verfügung, z. B. die von Kantor in den Sitzungsber. d. Wiener Akad. Bd. 80, II. Abth., mitgetheilten, oder es lassen sich leicht aus dem aus vier Punkten einer Ebene hervorgehenden Netze solche herausheben, z. B. durch Fortsetzung einer bekannten Construction am vollständigen Vierseit (Hankel, Proj. Geom. I., §. 3). Um das früher Erreichte nicht zu stören, hat man hiebei innerhalb der unendlichen Mannigfaltigkeit von Lagen einer solchen Configuration nur eine endliche Anzahl von Incidenzrelationen zu vermeiden. Man hat jetzt nur noch die beiden aus S und S' hervorgegangenen Configurationen C und C' zu einer einzigen zu vereinigen. Man kann aber überhaupt zwei beliebige Configurationen zu einer einzigen [1] vereinigen, in welcher sie unverändert als Bestandtheile auftreten, indem man einfach eine Gerade der einen Configuration mit einem Punkte der anderen zur Incidenz bringt. Hier wähle man aus C und C' einen solchen Punkt und eine solche Gerade, welche nicht bereits in S und S' enthalten waren.

Da man auf einer Geraden, die in einem aus vier Punkten einer Ebene hervorgehenden Netze enthalten ist, durch Fortsetzung des Netzes beliebig viele Punkte erhalten kann und durch einen Punkt beliebig viele Gerade, so hätte man die Geraden G und G', sowie alle durch die folgenden Schritte erhaltenen Elemente, was die Anzahleigenschaften betrifft, auch aus den in einem Netze vorfindlichen auswählen können. Nur die Verbindung von C und C' hätte in anderer leicht ersichtlicher Weise geschehen müssen. Daraus folgt: Aus dem aus vier Punkten einer Ebene hervorgehenden Netze lassen sich Configurationen von beliebig hoher Stufe der Ungleichmässigkeit herausheben. Überhaupt sieht man, dass alle rein lineal construirbaren Configurationen (collineare nicht als verschieden betrachtet) sich aus dem aus vier Punkten einer Ebene hervorgehenden Netze herausheben lassen, also z. B. auch die von Kantor a. a. O. mitgetheilten und die aus sechs Punkten eines ebenen Kegelschnittes hervorgehende.

[1] Ein System von Punkten und Geraden in einer Ebene bilde eine einzige Configuration, soll heissen: Man kann von jedem Configurationspunkte der Ebene zu jedem anderen gelangen, indem man nur auf Geraden der Configuration fortschreitet und von einer solchen Geraden zu einer anderen nur in einem Configurationspunkte übergeht.