

Über die Steiner'schen Mittelpunktscurven

(III. Mittheilung)

von

Karl Bobek in Prag.

(Vorgelegt in der Sitzung am 14. März 1889.)

Die Sätze von Steiner, welche ich in der zweiten Mittheilung bewiesen habe, lassen sich in gewisser Richtung für die Curven fünfter Ordnung erweitern und führen dadurch zur Beantwortung der Fragen, welche Steiner in §. 19 stellt, in welchem er die Curven fünfter Ordnung speciell behandelt. Die interessanteste Frage ist die, ob der Fall vorkommt, dass die innere Polare eines Punktes in zwei Kegelschnitte zerfällt, ob dies für einzelne Pole oder für die Punkte einer Curve stattfindet. Die Beantwortung dieser Frage führt auf die Bedingung, dass eine biquadratische Form ein vollständiges Quadrat wird, lässt sich daher nur auf vier Gleichungen zurückführen, deren gleichzeitiges Erfülltsein nothwendig ist. Diese vier Gleichungen stellen vier Curven 13ter Ordnung dar, und die Punkte der Ebene, welche auf allen vier Curven liegen, sind solche Pole, für die die innere Polare in zwei Kegelschnitte zerfällt. Die Form dieser vier Gleichungen lässt vermuthen, dass im Allgemeinen solche Punkte nicht auftreten. Würde aber eine ganze Curve als Ort solcher Pole vorhanden sein, so müsste sie ein Theil aller vier Curven sein.

§. 1. Die Enveloppe S_2^{45} und Ortscurve Q_2^{45}.

Nach den in der zweiten Mittheilung in §. 4 bewiesenen Sätzen wird für eine Curve 5ter Ordnung C^5 die Enveloppe der Doppelsehnen S_2 eine Curve 45ter Classe S_2^{45}, welche in den fünf Punkten a_∞ von C^5 je einen zweifachen Selbstberührungspunkt hat, dessen drei Zweige daselbst die Asymptote A_s von C^5 berühren. S_2^{45} hat auch G_∞ zu einer 30-fachen Tangente, sowie die 120 Doppeltangenten von C^5 zu Wendetangenten. S_2^{45} kann sonst keine Singularitäten besitzen, da eine Doppelsehne S_2 die C^5, ausser in den Punkten a, b; a', b', welche Endpunkte der beiden Sehnen sind, nur mehr in einem Punkte schneidet. Ihr Geschlecht ergibt sich daher gleich $43.22-15.19-5.2.3-120 = 361$. Da Q_2^{45} dasselbe Geschlecht besitzen muss, indem jeder Tangente von S_2^{45} ein einziger Punkt von Q_2^{45} entspricht und umgekehrt, so ergibt sich, dass für Q_2^{45} die Summe der Anzahl Doppelpunkte und Spitzen $= 43.22-361 = 585$. Da die Mitte der 120 Doppeltangenten Spitzen von Q_2^{45} sind und die fünf Punkte a_∞ je dreifache Punkte, so hat Q_2^{45} noch 450 Doppelpunkte.

Nach §. 1, 8. der zweiten Mittheilung hat C^5 135 Tangenten $\mathfrak{T}^0$, deren Berührungspunkte T^0 in der Mitte zwischen zwei Schnittpunkten liegen. Diese Punkte liegen auch auf Q_2^{45} und können Curven 27ter Ordnung durch dieselben gelegt werden, wie daselbst bemerkt wurde. Da Q_2^{45} in den fünf Punkten a_∞ dreifache Punkte hat und ein Zweig daselbst die Asymptote von C^5 berührt, so schneidet Q_2^{45} die C^5 ausser in diesen Punkten a_∞ und den 135 Punkten T^0 noch in 70 Punkten R^0 (II, §. 5, 3), durch welche Curven R^{14} der 14ten Ordnung gehen. Da die innere Polare J^4 eines solchen Punktes R^0 einen Doppelpunkt haben muss, weil R^0 auf C^5 liegt, und überdies die Doppelsehne S_2^0, welche R^0 zugehört, in vier Punkten schneidet, so zerfällt J^4 in die Doppelsehne S_2^0 und eine J^3.

Es gibt also auf C^5 70 Punkte R^0, deren zugehörige innere Polare in eine Doppelsehne S_2^0 und eine Curve dritter Ordnung J^3 zerfällt. Und da ein Punkt, dessen innere Polare in dieser Weise zerfällt, nothwendig auf C^5 liegen muss, so sind die 70 Punkte die **einzigen,** für welche ein solches Zerfallen stattfindet. (Frage von Steiner, §. 19, pag. 555.)

Die 70 Punkte R^0 liegen auf Curven R^{14} der 14ten Ordnung.

§. 2. Das System der inneren Polaren einer C^5.

1. Es sei die Gleichung der Curve fünfter Ordnung C^5 in der Form:

$$C^5 \equiv a_x^5 + b_x^4 x_3 + c_x^3 x_3^2 + d_x^2 x_3^3 + e_x x_3^4 + f x_3^5 = 0 \qquad \ldots 1)$$

angesetzt, wie sie in der ersten Mittheilung für die C^4 angenommen wurde, so dass $x_3(x-\xi) = x_1$, $x_3(y-\eta) = x_2$ ist, wobei (ξ, η) die nicht homogenen Coordinaten des Poles P und (x, y) die variablen Coordinaten bedeuten. Hiebei sind die Coëfficienten a, b, c, d, e, f von der Ordnung 0, 1, 2, 3, 4, 5, in (ξ, η).

Dann ist die Gleichung der inneren Polaren J^4 des Poles P

$$J^4 \equiv b_x^4 + d_x^2 x_3^2 + f x_3^4 = 0. \qquad \ldots 2)$$

Die innere Polare J^4 hat natürlich P zum Mittelpunkt, und die von P an J^4 gehenden Tangenten sind Doppeltangenten von J^4. Dieselben enthalten paarweise die acht Schnittpunkte der äusseren Polare $\mathfrak{P}^2$ des Punktes P für J^4, denn diese zerfällt in die G_∞, $x_3 = 0$, und einen Kegelschnitt $\mathfrak{P}^2$, dessen Gleichung

$$\mathfrak{P}^2 \equiv d_x^2 + 2 f x_3 = 0 \qquad \ldots 3)$$

aus 2) folgt. Es seien T_1, T_2, T_3, T_4 die vier durch P gehenden Doppeltangenten von J^4, dann stellt das Product $T_1 . T_2 . T_3 . T_4 = 0$ eine Curve vierter Ordnung dar, welche die J^4 in denselben Punkten schneidet, wie der doppelt gezählte Kegelschnitt $\mathfrak{P}^2$, also muss eine Identität von der Form

$$[\mathfrak{P}^2]^2 - \lambda J^4 = T_1 . T_2 . T_3 . T_4$$

bestehen, wobei λ von x_1, x_2, x_3 unabhängig ist. Da rechts ein x_3 nicht auftreten kann, indem alle vier Geraden durch den Punkt P, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ gehen, so ergibt sich leicht, dass $\lambda = 4f$ ist, und die Identität hat also die Form:

$$[d_x^2 + 2 f x_3^2]^2 - 4f [b_x^4 + d_x^2 x_3^2 + f x_3^4] \equiv T_1 . T_2 . T_3 . T_4 \qquad \ldots 4)$$

Es möge

$$A_x^4 \equiv A_0 x_1^4 + 4 A_1 x_1^3 x_2 + 6 A_2 x_1^2 x_2^2 + 4 A_3 x_1 x_3^2 + A_4 x_2^4 = 0 \quad \ldots 5)$$

die Gleichung der vier Doppeltangenten $T_1 . T_2 . T_3 . T_4$ sein, dann folgt aus der Identität 4), dass

$$[d_x^2]^2 - 4 f b_x^4 \equiv A_0 x_1^4 + 4 A_1 x_1^3 x_2 + 6 A_2 x_1^2 x_2^2 + 4 A_3 x_1 x_2^3 + A_4 x_2^4 \ldots 6)$$

ist, und dass also die Coëfficienten A_i die folgenden Werthe haben

$$\begin{aligned} A_0 &= d_0^2 - 4fb_0 \\ A_1 &= d_0 d_1 - 4fb_1 \\ A_2 &= \frac{1}{3}(d_0 d_2 + 2d_1^2) - 4fb_2 \\ A_3 &= d_0 d_2 - 4fb_3 \\ A_4 &= d_2^2 - 4fb_4 \end{aligned} \qquad 7)$$

2. Hat die innere Polare J^4 einen Doppelpunkt Q, der nicht im Pol P oder auf G_∞ liegt, so muss sie noch einen zweiten Q' haben, so dass die Strecke $\overline{QQ'}$ zum Mittelpunkt P hat. Der Ort solcher Punkte P, deren innere Polaren zwei Doppelpunkte haben, ist eine Curve P_2^x der x^{ten} Ordnung. Soll P selbst ein Doppelpunkt sein, so kann P nur auf C^5 oder G_∞ liegen. Liegt P im Endlichen, so kann J^4 auf G_∞ einen Doppelpunkt haben, und hat ihn stets, wenn die äussere Polare A^4 von P die G_∞ berührt, denn dann muss J^4 die G_∞ berühren, aber auch durch P eine Tangente desselben Punktes senden, da P Mittelpunkt von J^4 und G_∞ ein Theil der äusseren Polare von P in Bezug auf J^4 ist. Der Ort der Punkte P, deren innere Polaren auf G_∞ einen Doppelpunkt haben, ist also eine Curve P_1^6 der sechsten Ordnung, nämlich der Ort der Pole, deren äussere Polaren die G_∞ berühren. Ihre Gleichung ergibt sich leicht. Aus 1) folgt, dass

$$A^4 = b_x^4 + 2c_x^3 x_3 + 3d_x^2 x_3^2 + 4e_x x_3^3 + 5fx_3^4 = 0 \qquad \ldots 8)$$

die Gleichung der äusseren Polare von P ist. Soll sie nun die Gerade G_∞, $x_3 = 0$ berühren, so muss

$$b_x^4 = b_0 x_1^4 + 4b_1 x_1^3 x_2 + 6b_2 x_1^2 x_2^2 + 4b_3 x_1 x_2^3 + b_4 x_2^4 = 0 \quad \ldots 9)$$

eine Doppelwurzel haben. Setzt man daher

$$\begin{aligned} i &= 2(b_0 b_4 - 4b_1 b_3 + 3b_2^2) \\ j &= 6(b_0 b_2 b_4 + 2b_1 b_2 b_3 - b_2^3 - b_0 b_3^2 - b_1^2 b_4), \end{aligned} \qquad \ldots 10)$$

so ist

$$P_1^6 = i^3 - 6j^2 = 0 \qquad \ldots 11)$$

die Bedingung dafür, dass $b_x^4 = 0$ eine Doppelwurzel hat,[1] also ist $P_1^6 = 0$ die Gleichung des Ortes des Punktes $P(\xi\eta)$, dessen

[1] Vergl. Clebsch-Lindemann, Geometrie, S. 229 und 239 oder P. Gordan's Vorlesungen, herausgegeben von Dr. Kerschensteiner, II. Bd., S. 179 und 196.

innere Polare auf G_∞, $x_3 = 0$, einen Doppelpunkt hat. Da die b_i in $(\xi\eta)$ linear sind, so enthält sie P_1^6 in der sechsten Ordnung.

3. Die Curve P_2^x ergibt sich einfach durch ihre Gleichung, aus der Bedingung, dass $A_x^4 = 0$ aus 5) eine Doppelwurzel besitzen muss, indem zwei der durch 5) dargestellten Doppeltangenten T_1, T_2, T_3, T_4 in eine Gerade S fallen, die die zwei Doppelpunkte trägt.

Setzen wir nun analog:

$$\begin{aligned} I &= 2(A_0A_4 - 4A_1A_3 + 3A_2^2) \\ J &= 6(A_0A_2A_4 + 2A_1A_2A_3 - A_2^3 - A_0A_3^2 - A_1^2A_4) \end{aligned} \qquad \ldots 12)$$

so ist

$$P_2 = I^3 - 6J^2 = 0 \qquad \ldots 13)$$

die Bedingung dafür, dass $A_x^4 = 0$ eine Doppelwurzel erhält. Nun hat offenbar $A_x^4 = 0$ für $f = 0$ zwei Doppelwurzeln, indem es sich auf $(d_x^2)^2$ reducirt (6). Es muss also P_2 den Factor f^2 enthalten. Es stellt $f = 0$ eben die C^5 in $(\xi\eta)$ dar, und liegt P auf C^5, so hat J^4 in P einen Doppelpunkt. Da die A_i in $(\xi\eta)$ vom 6ten Grade sind, so ist P_2 vom 36ten Grade und nach Absonderung des Factors f^2 bleibt als die Ordnung des gesuchten Ortes P_2^x $x = 26$. Daher:

Der Ort des Punktes P, dessen innere Polare zwei Doppelpunkte hat, ist eine Curve P_2^{26} der 26ten Ordnung.

Wir wollen nun die Gleichung der P_2^{26} aufstellen. Führt man in 12) die Werthe der A_i aus 7) ein, setzt:

$$\Delta = d_0d_2 - d_1^2$$

$$\begin{aligned} D &= \frac{\partial i}{\partial b_0} d_0^2 + \frac{\partial i}{\partial b_1} d_0d_1 + \frac{\partial i}{\partial b_2}\left(\frac{2}{3} d_1^2 + \frac{1}{3} d_0d_2\right) + \frac{\partial i}{\partial b_3} d_1d_2 + \frac{\partial i}{\partial b_4} d_2^2 \\ &= 2[b_4d_0^2 - 4b_3d_0d_1 + 2b_2(2d_1^2 + d_0d_2) - 4b_1d_1d_2 + b_0d_2^2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E &= \frac{\partial j}{\partial b_0} d_0^2 + \frac{\partial j}{\partial b_1} d_0d_1 + \frac{\partial j}{\partial b_2}\left(\frac{2}{3} d_1^2 + \frac{1}{3} d_0d_2\right) + \frac{\partial j}{\partial b_3} d_1d_2 + \frac{\partial j}{\partial b_4} d_2^2 \ldots 14) \\ &= 6[(b_2b_4 - b_3^2)d_0^2 + 2(b_2b_3 - b_1b_4)d_0d_1 + \\ &\qquad (b_0b_4 + 2b_1b_4 - 3b_2^2)\left(\frac{2}{3} d_1^2 + \frac{1}{3} d_0d_2\right) + 2(b_1b_2 - b_0b_3)d_1d_2 \\ &\qquad + (b_0b_2 - b_1^2)d_2^2] \end{aligned}$$

und entwickelt I und J nach Potenzen von $4f$, so ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{2^3}{3}\Delta^2 - 4fD + 4^2f^2i \\
J &= \frac{2^4}{3^2}\Delta^3 - 4fD\Delta + 4^2f^2E - 4^3f^3j
\end{aligned}
\qquad \ldots 15)
$$

und daher

$$P_2 = I^3 - 6J^2 = f^2 . P_2^{26}.$$

wobei

$$P_2^{26} = \frac{2^7}{3}\Delta^2[3D^2 + 2^3\Delta(\Delta i - E)] + fQ \qquad \ldots 16)$$

und $P_2^{26} = 0$ ist die Curve 26ter Ordnung, deren Punkte innere Polaren mit zwei Doppelpunkten besitzen.

4. Liegt der Punkt P auf der Curve Δ^6, deren Gleichung

$$\Delta = d_0 d_2 - d_1^2 = 0 \qquad \ldots 17)$$

ist, so ist aus 3) ersichtlich, dass $\mathfrak{P}^2$ in zwei zu einander parallele Gerade zerfällt, d. h. die acht Berührungspunkte der vier Doppeltangenten T_1, T_2, T_3, T_4, die durch P gehen, liegen auf zwei zu einander parallelen Geraden, die zu beiden Seiten von P gleiche Abstände haben.

Die $5.6 = 30$ Schnittpunkte S^0 von Δ^6 mit C^5 sind solche Punkte, deren innere Polaren in S^0 einen Selbstberührungspunkt hat. Denn aus 2) folgt, dass ihre Gleichung

$$J^4 = b_x^4 + d_x^2 x_3^2 = 0$$

ist, da $f = 0$, und weil d_x^2 ein vollständiges Quadrat ist, ist der Punkt $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ ein Selbstberührungspunkt.

Umgekehrt, soll $J^4 = 0$ einen Selbstberührungspunkt haben, so muss $f = 0$ und d_x^2 ein vollständiges Quadrat sein. Es gibt mithin nur 30 Punkte S^0 auf C^5, deren innere Polaren Selbstberührungspunkte haben.

Für diese 30 Punkte S^0 wird A_x^4 die vierte Potenz eines linearen Ausdruckes, und die Relationen 15) zeigen auch, dass sowohl die Curve $I = 0$ als $J = 0$ durch diese 30 Punkte S^0 gehen, indem für sie $\Delta = 0$ und $f = 0$ ist.

Aus

$$I = \frac{2^3}{3}\Delta^2 - 4fD + 4^2f^2i = 0 \qquad \ldots 18)$$

ist ersichtlich, dass die Curve I^{12} in den Punkten S^0 die C^5 berührt, und dass also diese 30 S^0 doppelt gezählt alle Schnittpunkte von C^5 und I^{12} darstellen. Die Curve J^{18}, deren Gleichung nach 15)

$$J = \frac{2^4}{3^2}\Delta^3 - 4f\Delta D + 4^2f^2E - 4^3f^3j = 0 \qquad \ldots 19)$$

ist, hat in den Punkten S^0 Doppelpunkte. Die Tangenten der Zweige in denselben sind die Tangenten von $f = 0$ und $\Delta = 0$, wie aus 19) ersichtlich. Es schneidet daher J^{18} die C^5 in jedem Punkte S^0 in drei zusammenfallenden Punkten, und daher stellen die 30 S^0 dreimal gezählt alle Schnittpunkte von C^5 mit J^{18} dar.

Da in den S^0 die Curve I^{12} die C^5 berührt, so berührt sie auch einen der Zweige von J^{18}, schneidet also letztere in jedem der 30 Punkte S^0 in drei Punkten. Mithin schneiden einander I^{12} und J^{18} noch in

$$12.18 - 3.30 = 126$$

Punkten R_1, die nicht auf C^5 liegen.

Diesen 126 Punkten R_1 gehören innere Polaren zu, die zwei Rückkehrpunkte haben, denn da für dieselben $I = 0$ und $J = 0$ ist, so hat $A_x^4 = 0$ eine dreifache Wurzel, es fallen drei der Doppeltangenten T_1, T_2, T_3, T_4 in eine Gerade S zusammen, welche die beiden Spitzen trägt, und nur eine Doppeltangente bleibt als solche bestehen.

Die 126 Punkte R_1 sind für P_2^{26} Rückkehrpunkte. Denn es ist

$$f^2 . P_2^{26} = I^3 - 6J^2 \qquad \ldots 20)$$

und, da für einen Punkt R_1, f nicht verschwindet, so ist aus der Gleichungsform für P_2^{26} ersichtlich, dass der Punkt R_1 ein Rückkehrpunkt ist, und dass die Tangente von J^{18} in diesem Punkte Rückkehrtangente von P_2^{26} ist.

Da ferner aus 16) hervorgeht, dass P_2^{26} die C^5 in den 30 Punkten S^0 berührt, so folgt, dass I^{12} und J^{18} die P_2^{26} nur in den Punkten S^0 und R_1 schneiden.

Für I^{12} zählen die 30 S^0, sowie die 126 R_1 doppelt und es ist auch

$$2.30+2.126 = 12.26.$$

Für J^{18} zählen die 30 S^0 sowohl, als die 126 R_1 dreifach und es folgt:

$$3.30+3.126 = 18.26.$$

4. Da P_2^{26} die C^5 in 30 Punkten S^0 berührt, so schneidet sie die letztere noch in $5.26-2.30 = 70$ Punkten R^0, die offenbar auf der Curve 14ter Ordnung

$$R^{14} = 3D^2+2^3\Delta(\Delta i-E) = 0 \qquad \ldots 21)$$

liegen. Für diese 70 Punkte R^0 zerfällt die innere Polare J^4 in eine Doppelsehne S_2 und eine Curve dritter Ordnung J^3, welche die Tangente von C^5 zur Wendetangente hat.

Soll nämlich J^4 zerfallen, so muss nach 2) jedenfalls $f = 0$ sein, da wir von dem Zerfallen in G_∞, $x_3 = 0$, absehen, und es muss die Form vierten Grades b_x^4 mit der Form zweiten Grades d_x^2 einen Factor gemeinschaftlich haben.

Die Resultante der beiden Formen b_x^4 und d_x^2 ist nun

$$R = \begin{vmatrix} b_0 & 4b_1 & 6b_2 & 4b_3 & b_4 & \\ & b_0 & 4b_1 & 6b_2 & 4b_3 & b_4 \\ d_0 & 2d_1 & d_2 & & & \\ & d_0 & 2d_1 & d_2 & & \\ & & d_0 & 2d_1 & d_2 & \\ & & & d_0 & 2d_1 & d_2 \end{vmatrix} \qquad \ldots 22)$$

und nimmt einfach die Form an:

$$R = \frac{1}{3} R^{14} = D^2 + \frac{2^3}{3}\Delta(\Delta i - E),$$

woraus die obigen Behauptungen folgen. Diese R^{14} ist eine der Curven 14ter Ordnung, die in §. 1 angegeben wurden, welche die 70 Punkte R^0 ausschneiden.

5. Soll die innere Polare J^4 in zwei Kegelschnitte zerfallen, d. h. soll J^4 vier Doppelpunkte besitzen, die im Endlichen liegen, so muss offenbar A_x^4 ein vollständiges Quadrat sein und umgekehrt, ist $A_x^4 = (S_x . S'_x)^2$, so stellen $S_x = 0$ und $S'_x = 0$ die beiden durch P gehenden Geraden dar, welche jede zwei symmetrisch zu P liegende Doppelpunkte trägt. J^4 zerfällt dann in zwei Kegelschnitte, deren gemeinschaftlicher Mittelpunkt P ist, da $x_3 = 0$ ein Theil der Polare von P für J^4 ist.

Die Bedingungen dafür, dass A_x^4 ein vollständiges Quadrat ist, lauten:[1]

$$\begin{aligned} \rho A_0 &= A_0 A_2 - A_1^2 \\ \rho 2A_1 &= A_0 A_3 - A_1 A_2 \\ \rho 6A_2 &= A_0 A_4 + 2A_1 A_3 - 3A_2^2 \\ \rho . 2A_3 &= A_1 A_4 - A_2 A_3 \\ \rho A_4 &= A_2 A_4 - A_3^2, \end{aligned} \qquad \ldots 23)$$

wo ρ ein willkürlicher Factor ist.

Durch Elimination von ρ ergeben sich die folgenden Gleichungen, da A_0 nicht verschwindet:

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_1 &= 3A_0 A_1 A_2 - A_0^2 A_3 - 2A_1^3 = 0 \\ \mathrm{H}_2 &= 9A_0 A_2^2 - A_0^2 A_4 - 2A_0 A_1 A_3 - 6A_1^2 A_2 = 0 \\ \mathrm{H}_3 &= 3A_0 A_2 A_3 - 2A_1^2 A_3 - A_0 A_1 A_4 = 0 \\ \mathrm{H}_4 &= A_0 A_3^2 - A_1^2 A_4 = 0. \end{aligned} \qquad \ldots 24)$$

Führt man nun in 24) die Werthe für A_i aus 7) ein, so ergibt sich, dass jede den Factor f enthält, denn für $f = 0$ wird $A_x^4 = (d_x^2)^2$ ein vollständiges Quadrat. Setzt man daher

$$\mathrm{H_i} = H_i . f,$$

so ergibt sich:

---

[1] Dr. P. Gordan's Vorlesungen, II. Bd., S. 197.

$$
\begin{aligned}
H_1 = {} & 16f^2[3b_0b_1b_2-b_0^2b_3-2b_1^3]-4f[(3b_1b_2-2b_0b_3)d_0^2+(3b_0b_2-6b_1^2)d_0d_1+b_0b_1(2d_1^2+d_0d_2)-b_0^2d_1d_2] \\
& +[d_0d_1(2d_1^2-d_0d_2)b_0+d_0^2(d_0d_2-4d_1^2)b_1+3d_0^3d_1b_2-d_0^4b_3] \\
H_2 = {} & 16f^2[9b_0b_2^2-b_0^2b_4-2b_0b_1b_3-6b_1^2b_2]-4f[(9b_2^2-2b_0b_4-2b_1b_3)d_0^2-(2b_0b_3+12b_1b_2)d_0d_1 \\
& +(6b_0b_2-2b_1^2)(d_0d_2+2d_1^2)-2b_0b_1d_1d_2-b_0^2d_2^2]+[(4d_1^4+2d_0d_1^2d_2-d_0^2d_2^2)b_0-2d_0d_1(8d_1^2+5d_0d_2)b_1 \\
& +6d_0^2(d_1^2+d_0d_2)b_2-2d_0^3d_1b_3-d_0^4b_4] \\
H_3 = {} & 16f^2[3b_0b_2b_3-2b_1^2b_3-b_0b_1b_4]-4f[(3b_2b_3-b_1b_4)d_0^2-(4b_1b_3+b_0b_4)d_0d_1+b_0b_3(2d_1^2+d_0d_2) \\
& +(3b_0b_2-2b_1^2)d_1d_2-b_0b_1d_2^2]+[2d_1^3d_2b_0-d_0d_2(4d_1^2+d_0d_2)b_1+3d_0^2d_1d_2b_2+d_0^3d_2b_3-d_0^3d_1b_4] \\
H_4 = {} & 16f^2[b_0b_3^2-b_1^2b_4]-4f[b_3^2d_0^2-2b_1b_4d_0d_1-2b_0b_3d_1d_2-b_1^2d_2^2] \\
& +[d_1^2d_2^2b_0-2d_0d_1d_2^2b_1-2d_0^2d_1d_2b_3-d_0d_1^2b_4]
\end{aligned}
$$

und die Punkte $P(\xi\eta)$ der Ebene, welche gleichzeitig auf den vier Curven 13ter Ordnung

$$H_1 = 0 \qquad H_2 = 0 \qquad H_3 = 0 \qquad H_4 = 0$$

liegen, haben innere Polaren, die aus zwei Kegelschnitten bestehen.

Diese Punkte sind offenbar Doppelpunkte von P_2^{26}.

Es scheint, dass *i. A.* solche Punkte nicht auftreten. Speciell könnten die vier Curven identisch werden, dann würde diese Curve doppelt gezählt die P_2^{26} darstellen. Sie könnten auch alle eine Curve niedrigerer Ordnung enthalten, die dann doppelt zu P_2^{26} zählen würde. Findet dies nicht statt, so lässt sich eine obere Grenze für die Anzahl y solcher Punkte angeben. Da nämlich die vier Curven H_i sich in diesen y-Punkten schneiden, so schneidet die Schaar $\alpha H_2+\beta H_3+\gamma H_4 = 0$ auf $H_1 = 0$ eine lineare Schaar von Punktgruppen aus von der Zahl $Q = 13.13-y$ und da die Schaar die Beweglichkeit $q = 2$ hat, so ist Q wenigstens gleich 13, also kann y höchstens gleich $13.12 = 156$ sein.