

Zur Theorie der Kettenbrüche

von

Leopold Gegenbauer,

c. M. k. Akad.

Ich werde in den folgenden Zeilen einige Sätze über die Näherungsnenner und die Coëfficienten der Restfunctionen von Kettenbruchentwicklungen ableiten.

Entwickelt man die nach ganzen negativen Potenzen von x fortschreitende Function $f_1(x)$ in einen Kettenbruch, dessen Theilzähler sämtlich den Werth -1 haben, und bezeichnet mit $\varphi_x(x)$, $\psi_x(x)$, $f_x(x)$ beziehungsweise den x ten Näherungszähler, x ten Näherungsnenner und die x te Restfunction dieser Entwicklung, so besteht bekanntlich die Beziehung

$$f_{x+1}(x) = f_1(x) \psi_x(x) - \varphi_x(x), \quad \dots 1)$$

aus welcher folgt:

$$f_1(x) = f_{x+1}(x) \varphi_{x+1}(x) - f_{x+2}(x) \varphi_x(x).$$

Ist nun der Grad von $\psi_x(x)$ n_x und beginnt die Entwicklung von $f_1(x)$ nach steigenden Potenzen von x^{-1} mit $x^{-\mu}$, so ist der Grad von $\varphi_x(x)$ $n_x - \mu$, und es fängt demnach nach der letzten Gleichung die Entwicklung von $f_{x+1}(x)$ mit x^{-n_x+1} an, so dass also

$$f_{x+1}(x) = \frac{c_{x+1, n_x+1}}{x^{n_x+1}} + \frac{c_{x+1, n_x+1+1}}{x^{n_x+1+1}} + \frac{c_{x+1, n_x+1+2}}{x^{n_x+1+2}} + \dots$$

ist. Durch die Verbindung dieser Entwicklung mit der Gleichung 1) ergibt sich, dass die rationale Function $\frac{\varphi_\lambda(x)}{\psi_\lambda(x)}$ die Entwicklung von $f_1(x)$ bis zu den Gliedern von der Ordnung $-(n_{\lambda+1} + n_\lambda)$

(ausschliesslich) genau darstellt, und demnach lässt sich die angezogene Gleichung auch in folgender Form schreiben:

$$f_{z+1}(x) = \psi_z(x) \frac{\varphi_\lambda(x)}{\psi_\lambda(x)} - \varphi_z(x) + \psi_z(x)P(x),$$

wo $P(x)$ eine im Allgemeinen nach ganzen negativen Potenzen von x fortschreitende Function ist, in welcher kein Exponent dem absoluten Betrage nach unterhalb $n_\lambda + n_{\lambda+1}$ liegt.

Ist nun $\psi_\lambda(x)$ ein Näherungsnenner, dessen sämtliche Wurzeln x_μ ungleich sind, so ist nach der Lagrange'schen Interpolationsformel

$$\frac{\varphi_\lambda(x)}{\psi_\lambda(x)} = \sum_{\mu=1}^{\mu=n_\lambda} \frac{\varphi_\lambda(x_\mu)}{(x-x_\mu)\psi'_\lambda(x_\mu)}$$

und demnach verwandelt sich die letzte Gleichung in

$$f_{z+1}(x) = \sum_{\mu=1}^{\mu=n_\lambda} \frac{\varphi_\lambda(x_\mu)\psi_z(x)}{(x-x_\mu)\psi'_\lambda(x_\mu)} - \varphi_z(x) + \psi_z(x)P(x)$$

oder auch

$$f_{z+1}(x) = \sum_{\mu=1}^{\mu=n_\lambda} \frac{\varphi_\lambda(x_\mu)\psi_z(x_\mu)}{(x-x_\mu)\psi'_\lambda(x_\mu)} + G(x) + \psi_z(x)P(x), \quad \dots 2)$$

wo die ganze Function $G(x)$ durch die Gleichung

$$G(x) = -\varphi_z(x) + \sum_{\mu=1}^{\mu=n_\lambda} \frac{\psi_z(x) - \psi_z(x_\mu)}{(x-x_\mu)\psi'_\lambda(x_\mu)} \varphi_\lambda(x_\mu)$$

definiert ist.

Aus der Gleichung 2) folgt, dass in der Entwicklung der

Summe $\sum_{\mu=1}^{\mu=n_\lambda} \frac{\psi_z(x_\mu)\varphi_\lambda(x_\mu)}{(x-x_\mu)\psi'_\lambda(x_\mu)}$ keine Glieder mit negativen Ex-

ponenten auftreten können, deren absoluter Betrag unterhalb der kleineren der beiden ganzen Zahlen $n_\lambda + n_{\lambda+1} - n_z$ und n_{z+1} liegt.

Ist nun $\lambda > z$, so ist sicher $n_\lambda + n_{\lambda+1} - n_z \geq n_{z+1}$, und demnach ist:

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=n_\lambda} \frac{x_\mu^\sigma \psi_x(x_\mu) \varphi_\lambda(x_\mu)}{\psi'_\lambda(x_\mu)} = 0. \quad (\sigma=0, 1, 2, \dots, n_{x+1}-2; \lambda > x) \quad \dots 3)$$

Diese Gleichungen habe ich schon früher ¹ auf einem anderen Wege hergeleitet. Setzt man in die Gleichung 2) die aufgestellte Reihe für $f_{x+1}(x)$ ein, so ergeben sich, falls

$$n_\lambda + n_{\lambda+1} = n_x + n_{x+1} + \beta + 1$$

ist, die Relationen

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=n_\lambda} \frac{x_\mu^{n_x+1+\alpha-1} \psi_x(x_\mu) \varphi_\lambda(x_\mu)}{\psi'_\lambda(x_\mu)} = c_{x+1, n_{x+1}+\alpha} \quad (\alpha=0, 1, 2, \dots, \beta) \quad \dots 4)$$

Aus diesen zwei Gleichungssystemen erhellt, was übrigens auch in anderer Weise leicht zu zeigen ist, dass das Product $\psi_x(x) \varphi_\lambda(x)$ nach dem Modul $\psi_\lambda(x)$ einer ganzen Function

$$b_{n_\lambda-n_{x+1}} x^{n_\lambda-n_{x+1}} + b_{n_\lambda-n_{x+1}-1} x^{n_\lambda-n_{x+1}-1} + \dots + b_1 x + b_0$$

vom Grade $n_\lambda - n_{x+1}$ congruent ist.

Ist $f_1(x)$ gleich einer rationalen Function $\frac{f(x)}{g(x)}$, deren Nenner eine ganze Function vom Grade n mit nur ungleichen Wurzeln ist, und nimmt man in den eben auseinandergesetzten Entwicklungen für $\frac{\varphi_\lambda(x)}{\psi_\lambda(x)}$ den letzten Näherungsbruch der Kettenbruchentwicklung, also $\frac{f(x)}{g(x)}$ selbst, so ist die zugehörige Function $P(x)$ selbstverständlich gleich Null, und man erhält demnach in diesem Falle die Relationen:

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=n} \frac{x_\mu^\sigma \psi_x(x_\mu) f(x_\mu)}{g'(x_\mu)} = 0 \quad (\sigma=0, 1, 2, \dots, n_{x+1}-2)$$

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=n} \frac{x_\mu^{n_x+1+\alpha-1} \psi_x(x_\mu) f(x_\mu)}{g'(x_\mu)} = c_{x+1, n_{x+1}+\alpha} \quad (\alpha=0, 1, 2 \dots)$$

¹ „Über Kettenbrüche.“ Diese Sitzungsberichte 80. Bd., II. Abth., S. 763—775.

Ist endlich speciell $f(x) = g'(x)$, so wird bekanntlich die Kettenbruchentwicklung von $\frac{f(x)}{g(x)}$ regulär und demnach $n_x = z$, und daher ergeben sich in diesem Falle die Gleichungen

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=n} x_{\mu}^{\sigma} \psi_x(x_{\mu}) = 0 \quad (\sigma=0, 1, 2, \dots, x-1)$$

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=n} x_{\mu}^{x+\alpha} \psi_x(x_{\mu}) = c_{x+1, x+\alpha+1}. \quad (\alpha=0, 1, 2, \dots)$$

Nach einer von Herrn F. Brioschi¹ abgeleiteten Formel, von welcher ich unlängst² einen neuen einfachen Beweis mitgeteilt habe, ist

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=n_{\lambda}} \frac{x_{\mu}^{n_x+1+\alpha-1} \psi_x(x_{\mu}) \varphi_{\lambda}(x_{\mu})}{\psi'_{\lambda}(x_{\mu})} = \frac{(-1)^{\alpha}}{a_{n_{\lambda}}^{(\lambda)\alpha+1}} \left| \begin{array}{cccccc} b_{n_{\lambda}-n_x+1}, & a_{n_{\lambda}}^{(\lambda)}, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ b_{n_{\lambda}-n_x+1-1}, & a_{n_{\lambda}-1}^{(\lambda)}, & a_{n_{\lambda}}^{(\lambda)}, & 0, & 0, & 0 \\ b_{n_{\lambda}-n_x+1-2}, & a_{n_{\lambda}-2}^{(\lambda)}, & a_{n_{\lambda}-1}^{(\lambda)}, & a_{n_{\lambda}}^{(\lambda)}, & 0, & 0 \\ & & & & & \\ b_{n_{\lambda}-n_x+1-\alpha+1}, & a_{n_{\lambda}-\alpha+1}^{(\lambda)}, & a_{n_{\lambda}-\alpha+2}^{(\lambda)}, & a_{n_{\lambda}-\alpha+3}^{(\lambda)}, & a_{n_{\lambda}-1}^{(\lambda)}, & a_{n_{\lambda}}^{(\lambda)} \\ b_{n_{\lambda}-n_x+1-\alpha}, & a_{n_{\lambda}-\alpha}^{(\lambda)}, & a_{n_{\lambda}-\alpha+1}^{(\lambda)}, & a_{n_{\lambda}-\alpha+2}^{(\lambda)}, & a_{n_{\lambda}-2}^{(\lambda)}, & a_{n_{\lambda}-1}^{(\lambda)} \end{array} \right| \dots 5)$$

¹ „Sur deux formules relatives à la théorie de la décomposition des fractions rationnelles.“ Journal für die reine und angewandte Mathematik von Crelle, 50. Bd., S. 339—342.

² „Über Congruenzen.“ Diese Sitzungsberichte 35. Bd., II. Abth., S. 610—617.

wo die Grössen $a_x^{(\lambda)}$ durch die Gleichung:

$$\psi_\lambda(x) = a_{n_\lambda}^{(\lambda)} x^{n_\lambda} + a_{n_\lambda-1}^{(\lambda)} x^{n_\lambda-1} + \dots + a_1^{(\lambda)} x + a_0^{(\lambda)}$$

bestimmt sind, und daher hat man die Sätze:

Sind

$$\psi_\lambda(x) = a_{n_\lambda}^{(\lambda)} x^{n_\lambda} + a_{n_\lambda-1}^{(\lambda)} x^{n_\lambda-1} + \dots + a_1^{(\lambda)} x + a_0^{(\lambda)}$$

$$f_\lambda(x) = \frac{c_{\lambda, n_\lambda}}{x^{n_\lambda}} + \frac{c_{\lambda, n_\lambda+1}}{x^{n_\lambda+1}} + \frac{c_{\lambda, n_\lambda+2}}{x^{n_\lambda+1}} + \dots$$

und $\varphi_\lambda(x)$, beziehungsweise der λ te Näherungsnenner, die λ te Restfunction und der λ te Näherungszähler der Kettenbruchentwicklung einer nach ganzen negativen Potenzen von x fortschreitenden Function, so besteht die Relation

$$(-1)^\alpha a_{n_\lambda}^{(\lambda)\alpha+1} c_{x+1, n_x+1+\alpha} = \begin{vmatrix} b_{n_\lambda-n_x+1}, & a_{n_\lambda}^{(\lambda)}, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ b_{n_\lambda-n_x+1-1}, & a_{n_\lambda-1}^{(\lambda)}, & a_{n_\lambda}^{(\lambda)}, & 0, & 0, & 0 \\ b_{n_\lambda-n_x+1-2}, & a_{n_\lambda-2}^{(\lambda)}, & a_{n_\lambda-1}^{(\lambda)}, & a_{n_\lambda}^{(\lambda)}, & 0, & 0 \\ \\ b_{n_\lambda-n_x+1-\alpha+1}, & a_{n_\lambda-\alpha+1}^{(\lambda)}, & a_{n_\lambda-\alpha+2}^{(\lambda)}, & a_{n_\lambda-\alpha+3}^{(\lambda)}, & a_{n_\lambda-1}^{(\lambda)}, & a_{n_\lambda}^{(\lambda)} \\ b_{n_\lambda-n_x+1-\alpha}, & a_{n_\lambda-\alpha}^{(\lambda)}, & a_{n_\lambda-\alpha+1}^{(\lambda)}, & a_{n_\lambda-\alpha+2}^{(\lambda)}, & a_{n_\lambda-2}^{(\lambda)}, & a_{n_\lambda-1}^{(\lambda)} \end{vmatrix} \quad (\lambda > x)$$

wo, falls die erwähnte Function nicht rational ist, die ganze Zahl α der Bedingung

$$0 \leq \alpha \leq n_{\lambda+1} + n_{\lambda} - n_{\lambda+1} - n_{\lambda} - 1$$

genügen muss und die Grössen b_{μ} durch die Congruenz

$$\psi_{\lambda}(x) \varphi_{\lambda}(x) \equiv b_{n_{\lambda}-n_{\lambda}+1} x^{n_{\lambda}-n_{\lambda}+1} + b_{n_{\lambda}-n_{\lambda}+1-1} x^{n_{\lambda}-n_{\lambda}+1-1} + \dots + b_1 x + b_0 \pmod{\psi_{\lambda}(x)}$$

definiert sind.

Sind

$$\psi_{\lambda}(x) = a_{n_{\lambda}}^{(\lambda)} x^{n_{\lambda}} + a_{n_{\lambda}-1}^{(\lambda)} x^{n_{\lambda}-1} + \dots + a_1^{(\lambda)} x + a_0^{(\lambda)}$$

$$f_{\lambda}(x) = \frac{c_{\lambda, n_{\lambda}}}{x^{n_{\lambda}}} + \frac{c_{\lambda, n_{\lambda}+1}}{x^{n_{\lambda}+1}} + \frac{c_{\lambda, n_{\lambda}+2}}{x^{n_{\lambda}+2}} + \dots$$

und $\varphi_{\lambda}(x)$ beziehungsweise der λ te Nenner, die λ te Restfunction und der λ te Zähler der Kettenbruchentwicklung einer nach ganzen negativen Potenzen von x fortschreitenden Function, ist ferner

$$\chi(x) = g_{n_{\lambda}+1+\gamma-1} x^{n_{\lambda}+1+\gamma-1} + g_{n_{\lambda}+1+\gamma-2} x^{n_{\lambda}+1+\gamma-2} + \dots + g_1 x + g_0$$

irgend eine ganze Function von x , so ist

$$= \frac{(-1)^\gamma}{a_{n_\lambda}^{(\lambda)\gamma+1}} \begin{vmatrix} g_{n_x+1+\gamma-1} b_{n_\lambda-n_x+1} & a_{n_\lambda}^{(\lambda)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_{n_x+1+\gamma-1} b_{n_\lambda-n_x+1-1} + g_{n_x+1+\gamma-2} b_{n_\lambda-n_x+1} & a_{n_\lambda-1}^{(\lambda)} & a_{n_\lambda}^{(\lambda)} & 0 & 0 & 0 \\ g_{n_x+1+\gamma-1} b_{n_\lambda-n_x+1-2} + g_{n_x+1+\gamma-2} b_{n_\lambda-n_x+1-1} + g_{n_x+1+\gamma-3} b_{n_\lambda-n_x+1} & a_{n_\lambda-2}^{(\lambda)} & a_{n_\lambda-1}^{(\lambda)} & a_{n_\lambda}^{(\lambda)} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{n_x+1+\gamma-1} b_{n_\lambda-n_x+1-\gamma+1} + g_{n_x+1+\gamma-2} b_{n_\lambda-n_x+1-\gamma+2} + \dots + g_{n_x+1} b_{n_\lambda-n_x+1} & a_{n_\lambda-\gamma+1}^{(\lambda)} & a_{n_\lambda-\gamma+2}^{(\lambda)} & a_{n_\lambda-\gamma+3}^{(\lambda)} & \dots & a_{n_\lambda-1}^{(\lambda)} & a_{n_\lambda}^{(\lambda)} \\ g_{n_x+1+\gamma-1} b_{n_\lambda-n_x+1-\gamma} + g_{n_x+1+\gamma-2} b_{n_\lambda-n_x+1-\gamma+1} + \dots + g_{n_x+1-1} b_{n_\lambda-n_x+1} & a_{n_\lambda-\gamma}^{(\lambda)} & a_{n_\lambda-\gamma+1}^{(\lambda)} & a_{n_\lambda-\gamma+2}^{(\lambda)} & \dots & a_{n_\lambda-2}^{(\lambda)} & a_{n_\lambda-1}^{(\lambda)} \end{vmatrix}$$

wo die Grössen b_μ durch die Congruenz

$$\varphi_\lambda(x) \psi_\lambda(x) \equiv b_{n_\lambda-n_x+1} x^{n_\lambda-n_x+1} + b_{n_\lambda-n_x+1-1} x^{n_\lambda-n_x+1-1} + \dots + b_1 x + b_0 \pmod{\psi_\lambda(x)}$$

definiert sind und in der Summe auf der rechten Seite, falls die in einen Kettenbruch entwickelte Function nicht rational ist, γ nicht grösser als n_λ sein darf.

Sind

$$\psi_\lambda(x) = a_{n_\lambda}^{(\lambda)} x^{n_\lambda} + a_{n_\lambda-1}^{(\lambda)} x^{n_\lambda-1} + \dots + a_1 x + a_0^{(\lambda)}$$

$$f_\lambda(x) = \frac{c_{\lambda, n_\lambda}}{x^{n_\lambda}} + \frac{c_{\lambda, n_\lambda+1}}{x^{n_\lambda+1}} + \frac{c_{\lambda, n_\lambda+2}}{x^{n_\lambda+2}} + \dots$$

und $\varphi_\lambda(x)$ der λ te Näherungsnenner, die λ te Restfunction und der λ te Näherungszähler der Kettenbruchentwicklung einer nach ganzen negativen Potenzen von x fortschreitenden Function, so ist

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=n_\lambda} \frac{\psi_\rho(x_\mu) \psi_\lambda(x_\mu) \varphi_\lambda(x_\mu)}{\psi_\lambda'(x_\mu)} = 0 \quad (\lambda > \mu; n_{x+1}-1 > n_\rho)$$

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=n_{\lambda}} \frac{\psi_{\rho}(x_{\mu}) \psi_{\lambda}(x_{\mu}) \varphi_{\lambda}(x_{\mu})}{\psi'_{\lambda}(x_{\mu})} = \sum_{\nu=0}^{\nu=\delta} c_{x+1, n_{x+1}+\nu} a_{n_{\rho}^{(\rho)}+1-\delta+\nu} =$$

$$= \frac{(-1)^{\delta}}{a_{n_{\lambda}}^{(\lambda)\delta+1}} \begin{vmatrix} a_{n_{\rho}}^{(\rho)} b_{n_{\lambda}-1_{x+1}}, & a_{n_{\lambda}}^{(\lambda)}, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ a_{n_{\rho}}^{(\rho)} b_{n_{\lambda}-n_{x+1}-1} + a_{n_{\rho}-1}^{(\rho)} b_{n_{\lambda}-n_{x+1}}, & a_{n_{\lambda}-1}^{(\lambda)}, & a_{n_{\lambda}}^{(\lambda)}, & 0, & 0, & 0 \\ a_{n_{\rho}}^{(\rho)} b_{n_{\lambda}-n_{x+1}-2} + a_{n_{\rho}-1}^{(\rho)} b_{n_{\lambda}-n_{x+1}-1} + a_{n_{\rho}-2}^{(\rho)} b_{n_{\lambda}-n_{x+1}}, & a_{n_{\lambda}-2}^{(\lambda)}, & a_{n_{\lambda}-1}^{(\lambda)}, & a_{n_{\lambda}}^{(\lambda)}, & 0, & 0 \\ a_{n_{\rho}}^{(\rho)} b_{n_{\lambda}-1_{x+1}-\delta+1} + a_{n_{\rho}-1}^{(\rho)} b_{n_{\lambda}-n_{x+1}-\delta+2} + \dots + a_{n_{\rho}}^{(\rho)} b_{n_{\lambda}-n_{x+1}}, & a_{n_{\lambda}-\delta+1}^{(\lambda)}, & a_{n_{\lambda}-\delta+2}^{(\lambda)}, & a_{n_{\lambda}-\delta+3}^{(\lambda)}, & \dots, & a_{n_{\lambda}-1}^{(\lambda)}, a_{n_{\lambda}}^{(\lambda)} \\ a_{n_{\rho}}^{(\rho)} b_{n_{\lambda}-n_{x+1}-\delta} + a_{n_{\rho}-1}^{(\rho)} b_{n_{\lambda}-n_{x+1}-\delta+1} + \dots + a_{n_{\rho}-1}^{(\rho)} b_{n_{\lambda}-n_{x+1}}, & a_{n_{\lambda}-\delta}^{(\lambda)}, & a_{n_{\lambda}-\delta+1}^{(\lambda)}, & a_{n_{\lambda}-\delta+2}^{(\lambda)}, & \dots, & a_{n_{\lambda}-2}^{(\lambda)}, a_{n_{\lambda}-1}^{(\lambda)} \end{vmatrix}$$

wo die Grössen b_{μ} durch die Congruenz

$$\psi_x(x) \varphi_{\lambda}(x) \equiv b_{n_{\lambda}-n_{x+1}} x^{n_{\lambda}-n_{x+1}} + b_{n_{\lambda}-n_{x+1}-1} x^{n_{\lambda}-n_{x+1}-1} + \dots + b_1 x + b_0 \pmod{\psi_{\lambda}(x)}$$

definiert sind, $n_{\rho} = n_{x+1} + \delta - 1$ ist und im ersten Theile der Doppelgleichung, falls die in einen Kettenbruch entwickelte Function nicht rational ist, δ nicht grösser als n_{λ} sein darf.

Ist $\mathcal{F}(x)$ eine im reellen Intervalle $a \dots b$ reelle und positive Function, bezeichnet ferner

$$\psi_{\lambda}(x) = a_{\lambda}^{(\lambda)} x^{\lambda} + a_{\lambda-1}^{(\lambda)} x^{\lambda-1} + \dots + a_1^{(\lambda)} x + a_0^{(\lambda)}$$

$$f_{\lambda}(x) = \frac{c_{\lambda, \lambda}}{x^{\lambda}} + \frac{c_{\lambda, \lambda+1}}{x^{\lambda+1}} + \frac{c_{\lambda, \lambda+2}}{x^{\lambda+2}} +$$

$\varphi_\lambda(x)$ und $g_\lambda(x) = \alpha_\lambda x + \beta_\lambda$, beziehungsweise den λ ten Näherungsnenner, die λ te Restfunction, den λ ten Näherungszähler und den λ ten Theilnenner der Kettenbruchentwicklung des Integrales $\int_a^b \frac{\mathfrak{S}(z)}{x-z} dz$, und werden die Grössen b_μ durch die Congruenz

$$\psi_x(x) \varphi_\lambda(x) \equiv b_{\lambda-x-1} x^{\lambda-x-1} + b_{\lambda-x-2} x^{\lambda-x-2} + \dots + b_1 x + b_0 \pmod{\psi_\lambda(x)} \quad (b_{\lambda-x-1} = \alpha_{x+2} \alpha_{x+3} \dots \alpha_\lambda)$$

bestimmt, ist ferner

$$\chi(x) = g_{2\lambda-x-\tau-1} x^{2\lambda-x-\tau-1} + g_{2\lambda-x-\tau-2} x^{2\lambda-x-\tau-2} + \dots + g_1 x + g_0 \quad (\lambda > x)$$

eine ganze Function von x von nicht höherem als dem Grade $2\lambda-x-1$, und sind endlich

$$\chi_\mu(x) = a_{\mu, m_\mu} x^{m_\mu} + a_{\mu, m_\mu-1} x^{m_\mu-1} + \dots + a_{\mu, 1} x + a_{\mu, 0}$$

ganze Functionen von x , deren Grad die Zahl $\lambda-1$ nicht übersteigt, so bestehen die Gleichungen

$$\int_a^b \mathfrak{S}(x) \chi(x) \psi_x(x) dx = \frac{(-1)^{\tau+1}}{a_\lambda^{(\lambda) 2\lambda-2x-\tau}}$$

$g_{2\lambda-x-\tau-1} b_{\lambda-x-1}$	$a_\lambda^{(\lambda)}$	0,	0,	..., 0,	0
$g_{2\lambda-x-\tau-1} b_{\lambda-x-2} + g_{2\lambda-x-\tau-2} b_{\lambda-x-1}$	$a_{\lambda-1}^{(\lambda)}$	$a_\lambda^{(\lambda)}$,	0,	..., 0,	0
$g_{2\lambda-x-\tau-1} b_{\lambda-x-3} + g_{2\lambda-x-\tau-2} b_{\lambda-x-2} + g_{2\lambda-x-\tau-3} b_{\lambda-x-1}$	$a_{\lambda-2}^{(\lambda)}$	$a_{\lambda-1}^{(\lambda)}$,	$a_\lambda^{(\lambda)}$,	..., 0,	0
$g_{2\lambda-x-\tau-1} b_{\tau+x-\lambda+1} + g_{2\lambda-x-\tau-2} b_{\tau+x-\lambda+2} + \dots + g_{x+1} b_{\lambda-x-1}$	$a_{2x+\tau-\lambda+2}^{(\lambda)}$	$a_{2x+\tau-\lambda+3}^{(\lambda)}$	$a_{2x+\tau-\lambda+4}^{(\lambda)}$..., $a_{\lambda-1}^{(\lambda)}$,	$a_\lambda^{(\lambda)}$
$g_{2\lambda-x-\tau-1} b_{\tau+x-\lambda} + g_{2\lambda-x-\tau-2} b_{\tau+x-\lambda+1} + \dots + g_x b_{\lambda-x-1}$	$a_{2x+\tau-\lambda+1}^{(\lambda)}$	$a_{2x+\tau-\lambda+2}^{(\lambda)}$	$a_{2x+\tau-\lambda+3}^{(\lambda)}$..., $a_{\lambda-2}^{(\lambda)}$,	$a_{\lambda-1}^{(\lambda)}$

$$\begin{aligned}
 & \alpha=2\lambda-2z-\tau-1 \\
 & = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=2\lambda-2z-\tau-1} c_{\mu+1, x+1+\alpha} g_{x+\gamma}
 \end{aligned}$$

$$\int_a^b \mathfrak{S}(x) \psi_x^2(x) dx = \frac{1}{\alpha_{x+1}}$$

$$\int_a^b \mathfrak{S}(x) \chi(x) \frac{\psi_\lambda(x) - \psi_\lambda(y)}{x-y} dx = \frac{(-1)^{\tau+1}}{\alpha_\lambda^{(\lambda)2\lambda-\tau}} \sum_{x=0}^{x=\lambda-1} \frac{\alpha_{x+1}^{(x+1)}}{\alpha_x^{(x)}} \alpha_\lambda^{(\lambda)2x} \left| \frac{\psi_x(y), \psi_\lambda(y)}{\varphi_x(y), \varphi_\lambda(y)} \right|.$$

$$g_{2\lambda-x-\tau-1} b_{\lambda-x-1}$$

$$a_\lambda^{(\lambda)},$$

$$0,$$

$$0,$$

$$0,$$

$$g_{2\lambda-x-\tau-1} b_{\lambda-x-2} + g_{2\lambda-x-\tau-2} b_{\lambda-x-1}$$

$$a_{\lambda-1}^{(\lambda)},$$

$$0,$$

$$0,$$

$$0,$$

$$g_{2\lambda-x-\tau-1} b_{\lambda-x-3} + g_{2\lambda-x-\tau-2} b_{\lambda-x-2} + g_{2\lambda-x-\tau-3} b_{\lambda-x-1}$$

$$a_{\lambda-2}^{(\lambda)},$$

$$0,$$

$$a_\lambda^{(\lambda)},$$

$$0,$$

$$0,$$

$$g_{2\lambda-x-\tau-1} b_{\lambda+\tau-\lambda+1} + g_{2\lambda-x-\tau-2} b_{x+\tau-\lambda+2} + \dots + g_{x+1} b_{\lambda-x-1} b_{2x+\tau-\lambda+2} a_{2x+\tau-\lambda+2}^{(\lambda)} a_{2x+\tau-\lambda+1}^{(\lambda)} \dots a_{\lambda-1}^{(\lambda)} a_\lambda^{(\lambda)}$$

$$g_{2\lambda-x-\tau-1} b_{x+\tau-\lambda} + g_{2\lambda-x-\tau-2} b_{x+\tau-\lambda+1} + \dots + g_x b_{\lambda-x-1} a_{2x+\tau-\lambda+1}^{(\lambda)} a_{2x+\tau-\lambda+2}^{(\lambda)} \dots a_{\lambda-2}^{(\lambda)} a_{\lambda-1}^{(\lambda)}$$

$$\int_a^b \mathfrak{S}(x) \psi_x(x) \frac{\psi_\lambda(x) - \psi_\lambda(y)}{x-y} dy = \psi_x(y) \varphi_\lambda(y) - \varphi_x(y) \psi_\lambda(y)$$

$g_{2\lambda-x-\tau-1} b_{\lambda-x-1}$	$0,$	$0,$	$\dots,$	$0,$
$g_{2\lambda-x-\tau-1} b_{\lambda-x-2} + g_{2\lambda-x-\tau-2} b_{\lambda-x-1}$	$a_{\lambda}^{(\lambda)},$	$0,$	$\dots,$	$0,$
$g_{2\lambda-x-\tau-1} b_{\lambda-x-3} + g_{2\lambda-x-\tau-2} b_{\lambda-x-2} + g_{2\lambda-x-\tau-3} b_{\lambda-x-1}$	$a_{\lambda-1}^{(\lambda)},$	$0,$	$\dots,$	$0,$
$g_{2\lambda-x-\tau-1} b_{\tau+x-\lambda+1} + g_{2\lambda-x-\tau-2} b_{x+\tau-\lambda+2} + \dots + g_{x+1} b_{\lambda-x-1}$	$a_{\lambda-2}^{(\lambda)},$	$a_{2x+\tau-\lambda+2}^{(\lambda)},$	$a_{2x+\tau-\lambda+3}^{(\lambda)},$	$\dots,$
$g_{2\lambda-x-\tau-1} b_{\tau+x-\lambda} + g_{2\lambda-x-\tau-2} b_{x+\tau-\lambda+1} + \dots + g_x b_{\lambda-x-1}$	$a_{\lambda-1}^{(\lambda)},$	$a_{2x+\tau-\lambda+1}^{(\lambda)},$	$a_{2x+\tau-\lambda+2}^{(\lambda)},$	$\dots,$

$(\rho_1 = \lambda, \lambda-1, \dots, \lambda-r; \rho = 0, 1, 2, \dots, r-2, \lambda-x-1; \tau = 1, 2, \dots, r)$

$$= \sum_{x=\lambda-r}^{\lambda-1} |\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_x + \sigma \psi_{x-\sigma-1}(\xi_\tau)| \sum_{\gamma=2\lambda-2x-\tau-1}^{\lambda-1} c_{x+1, x+1+\gamma} g_{x+\gamma}$$

$$\int_a^b \frac{\mathcal{Q}(x) \psi_x(x) |\psi_{\rho_1}(\xi_\rho)| dx}{(x-\xi_1)(x-\xi_2) \dots (x-\xi_r)} = |\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_x - \sigma \psi_{x-\sigma-1}(\xi_\tau)| \cdot \frac{1}{\alpha_{x+1}} \quad (x=0, 1, 2, \dots, \lambda-r)$$

$(\rho_1 = \lambda, \lambda-1, \dots, \lambda-r; \rho = 0, 1, 2, \dots, r-2, \lambda-x-1; \tau = 1, 2, \dots, r)$

$$|c_{i,x}| = \frac{1}{((\sigma!)^2)} |\chi_{\mu}^{(x)}(g_x)| \cdot |\psi_{\mu}^{(x)}(g_x)| \cdot \left| \int_a^b x^{i+x} \mathcal{Q}(x) dx \right| \quad (\mu, i, x=0, 1, 2, \dots, \sigma)$$

wo y_0, y_1, \dots, y_τ bestimmte, innerhalb der Grenzen $a \dots b$ befindliche reelle Zahlen sind und

$$c_{i,x} = \frac{(-1)^{m_i-x}}{a_\lambda^{(\lambda)m_i-x+1}} \left| \begin{array}{cccccc} a_{i,m_i} b_{\lambda-x-1} & a_\lambda^{(\lambda)} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{i,m_i} b_{\lambda-x-2} + a_{i,m_i-1} b_{\lambda-x-1} & a_{\lambda-1}^{(\lambda)} & a_\lambda^{(\lambda)} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{i,m_i} b_{\lambda-x-3} + a_{i,m_i-1} b_{\lambda-x-2} + a_{i,m_i-2} b_{\lambda-x-1} & a_{\lambda-2}^{(\lambda)} & a_{\lambda-1}^{(\lambda)} & a_\lambda^{(\lambda)} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i,m_i} b_{\lambda-m_i} + a_{i,m_i-1} b_{\lambda-m_i+1} + \dots + a_{i,x+1} b_{\lambda-x-1} & a_{\lambda-m_i+x+1}^{(\lambda)} & a_{\lambda-m_i+x+2}^{(\lambda)} & a_{\lambda-m_i+x+3}^{(\lambda)} & \dots & a_{\lambda-1}^{(\lambda)} & a_\lambda^{(\lambda)} \\ a_{i,m_i} b_{\lambda-m_i-1} + a_{i,m_i-1} b_{\lambda-m_i} + \dots + a_{i,x} b_{\lambda-x-1} & a_{\lambda-m_i+x}^{(\lambda)} & a_{\lambda-m_i+x+1}^{(\lambda)} & a_{\lambda-m_i+x+2}^{(\lambda)} & \dots & a_{\lambda-2}^{(\lambda)} & a_{\lambda-1}^{(\lambda)} \end{array} \right|$$

ist.

Ist $\mathfrak{P}_\mu(x)$ eine im reellen Intervalle $a_\mu \dots b_\mu$ reelle und positive Function, bezeichnen ferner

$$\psi_{\mu,\lambda}(x) = a_{\mu,\lambda}^{(\lambda)} x^\lambda + a_{\mu,\lambda-1}^{(\lambda)} x^{\lambda-1} + \dots + a_{\mu,1} x + a_{\mu,0}$$

$$\varphi_{\mu,\lambda}(x) = b_{\mu,\lambda-1} x^{\lambda-1} + b_{\mu,\lambda-2} x^{\lambda-2} + \dots + b_{\mu,1} x + b_{\mu,0}$$

beziehungsweise den λ ten Nenner und λ ten Zähler der Kettenbruchentwicklung des Integrales

$$\int_{a_\mu}^{b_\mu} \frac{\mathfrak{P}_\mu(z)}{x-z} dz, \text{ und sind}$$

ganze Functionen von x von nicht höherem als dem Grade $2\lambda-1$, so ist

$$|c_{i,x}| = \frac{1}{((\sigma!)!)^2} |\chi_i^{(x)}(y_x)| \cdot |\mathcal{S}_i^{(x)}(y_x)| \cdot \left| \int_a^b x^{i+x} \mathcal{S}(x) dx \right| \quad (i, x=0, 1, 2; \dots, \sigma) \quad (\rho \geq \sigma)$$

wobei $y_0, y_1, \dots, y_\sigma$ bestimmte, innerhalb der Grenzen a, \dots, b befindliche reelle Zahlen sind und

$$c_{i,x} = \frac{(-1)^{m_i-\rho-x}}{a_\lambda^{(\lambda)m_i-\rho-x+1}}$$

$c_{i, m_i-\rho} b_{\lambda-x-1}$	$a_\lambda^{(\lambda)}$	0	0	$\dots, 0$	0
$c_{i, m_i-\rho} b_{\lambda-x-2} + c_{i, m_i-\rho-1} b_{\lambda-x-1}$	$a_{\lambda-1}^{(\lambda)}$	$a_\lambda^{(\lambda)}$	0	$\dots, 0$	0
$c_{i, m_i-\rho} b_{\lambda-x-3} + c_{i, m_i-\rho-1} b_{\lambda-x-2} + c_{i, m_i-\rho-2} b_{\lambda-x-1}$	$a_{\lambda-2}^{(\lambda)}$	$a_{\lambda-1}^{(\lambda)}$	$a_\lambda^{(\lambda)}$	$\dots, 0$	0
$c_{i, m_i-\rho} b_{\lambda-m_i+\rho} + c_{i, m_i-\rho-1} b_{\lambda-m_i+\rho+1} + \dots + c_{i, x+\rho+1} b_{\lambda-x-1}$	$a_{\lambda-m_i+\rho+x+1}^{(\lambda)}$	$a_{\lambda-m_i+\rho+x+2}^{(\lambda)}$	$a_{\lambda-m_i+\rho+x+3}^{(\lambda)}$	$\dots, a_{\lambda-1}^{(\lambda)}$	$a_\lambda^{(\lambda)}$
$c_{i, m_i-\rho} b_{\lambda-m_i+\rho-1} + c_{i, m_i-\rho-1} b_{\lambda-m_i+\rho} + \dots + c_{i, x+\rho} b_{\lambda-x-1}$	$a_{\lambda-m_i+\rho+x}^{(\lambda)}$	$a_{\lambda-m_i+\rho+x+1}^{(\lambda)}$	$a_{\lambda-m_i+\rho+x+2}^{(\lambda)}$	$\dots, a_{\lambda-2}^{(\lambda)}$	$a_\lambda^{(\lambda)}$

ist.

Ich will schliesslich noch folgendes Theorem beweisen:

Ist die Function $f(x)$ im reellen Intervalle a, \dots, b reell und positiv, bezeichnet ferner $\psi_\lambda(x)$ den λ ten Näherungsnenner der Kettenbruchentwicklung des Integrales $\int_a^b \frac{f(x)}{x-z} dz$, und lassen sich Functionen $\omega_\lambda(x)$ so bestimmen, dass

$$\omega_0(x) = 1, \quad \frac{-d\{\omega_1(x)f(x)\}}{dx} = f(x)\psi_1(x)$$

$$\frac{d\omega_\lambda(x)}{dx} = -\{(a_\lambda - 1)x + b_\lambda\}\omega_{\lambda-1}(x)$$

$$x \frac{d\omega_\lambda(x)}{dx} = (\lambda - 1)a_{\lambda+1}\omega_\lambda(x) - \omega_{\lambda-1}(x)$$

$$\omega_x(a) = \omega_x(b) = 0$$

ist, wo $a_\lambda x + b_\lambda$ der λ te Theilnenner der Kettenbruchentwicklung ist, so besteht für jede im Intervalle $a \dots b$ endliche und stetige Function $\chi(x)$ die Gleichung

$$\int_a^b \chi(x)f(x)\psi_\lambda(x) dx = \int_a^b \chi^{(\lambda)}(x)\omega_\lambda(x) dx.$$

Nach den gemachten Voraussetzungen hat man

$$\psi_\lambda(x) = (a_\lambda x + b_\lambda)\psi_{\lambda-1}(x) - \psi_{\lambda-2}(x),$$

und demnach besteht die Relation

$$\int_a^b \chi(x)f(x)\{\psi_\lambda(x) + \psi_{\lambda-2}(x) - (a_\lambda x + b_\lambda)\psi_{\lambda-1}(x)\} dx = 0.$$

Da nun die zu beweisende Gleichung für $\lambda = 0, 1$ offenbar besteht, wie man im zweiten Falle leicht durch partielle Integration nachweist, so ist die Giltigkeit des Satzes erwiesen, wenn gezeigt wird, dass

$$\begin{aligned} & \int_a^b \{\chi^{(\lambda)}(x)\omega_\lambda(x) + \\ & + \chi^{(\lambda-2)}(x)\omega_{\lambda-2}(x) - (a_\lambda x + b_\lambda)\chi^{(\lambda-1)}(x)\omega_{\lambda-1}(x) - \\ & - (\lambda-1)a_\lambda \chi^{(\lambda-2)}(x)\omega_{\lambda-1}(x)\} dx = 0 \end{aligned}$$

ist. Da nun der zu integrirende Ausdruck unter Benützung der vorausgesetzten Relationen in

$$\frac{d}{dx} \{\chi^{(\lambda-1)}(x)\omega_\lambda(x) - x\chi^{(\lambda-2)}(x)\omega_{\lambda-1}(x)\}$$

übergeht, so ist wegen $\omega_x(a) = \omega_x(b) = 0$ die letzte Gleichung wirklich erfüllt und demnach der ausgesprochene Satz erhärtet.

Specielle Fälle dieses Satzes sind die Relationen

$$\int_0^\infty e^{-x} \varphi(x) x^m T_n^m(x) dx = \frac{1}{\Pi(n)\Pi(m+n)} \int_0^\infty e^{-x} x^{m+n} \varphi^{(n)}(x) dx$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}} \varphi(x) C_n^\nu(x) dx &= \\ &= \frac{2^n \Pi(n)\Pi(n+\nu-1)}{\Pi(\nu-1)\Pi(n+2\nu-1)} \int_{-1}^{+1} \varphi^{(n)}(x) (1-x^2)^{\frac{n+2\nu-1}{2}} dx, \end{aligned}$$

wo die Functionen $T_n^m(x)$, $C_n^\nu(x)$ sich von den Näherungsnennern der regulären Kettenbruchentwicklung der Function

$$\int_0^\infty \frac{e^{-z} z^m}{x-z} dz, \quad \text{beziehungsweise} \quad x^{-1} F(1, 1/2, \nu+1, x^{-2}),$$

nur durch constante Factoren unterscheiden, und die in der zweiten Gleichung als specieller Fall enthaltene, von Jacobi in seiner im 15. Bande des Crelle'schen Journals enthaltenen Abhandlung „Formula transformationis integralium definitorum“ zuerst bewiesene und unlängst von Herrn L. Kronecker¹ neuerdings in höchst eleganter Weise abgeleitete Relation

$$\int_0^\pi f(\cos x) \cos nx dx = \frac{1}{1.3.5. \dots (2n-1)} \int_0^\pi f^{(n)}(\cos x) \sin^n x dx.$$

¹ „Beweis einer Jacobi'schen Integralformel.“ Sitzungsberichte der Berliner Akademie der Wissenschaften 1884, S. 539—540. In dieser Arbeit hat Herr Kronecker sich ebenfalls der oben angewandten Beweismethode mit Hilfe eines Inductionsschlusses bedient.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse](#)

Jahr/Year: 1889

Band/Volume: [98_2a](#)

Autor(en)/Author(s): Gegenbauer Leopold

Artikel/Article: [Zur Theorie der Kettenbrüche 673-687](#)