# Über die Wärmeausdehnung der Gase

von

C. Puschl.

(Vorgelegt in der Sitzung am 24. October 1889.)

## Zweiter Theil.

§. 1. Von der Thatsache des kritischen Punktes flüssiger oder gasförmiger Substanzen ausgehend, bin ich im ersten Theile dieser Abhandlung[1] zu dem Resultate gekommen, dass es für jedes Gas eine immer sehr hohe Temperatur geben müsse, für welche dessen Ausdehnungscoëfficient $a$ in seinem durch Druck bewirkten Maximum Null ist. Die Dichte des Gases ist dann bei constantem Drucke ein Minimum. Man hat für diesen Punkt die Bedingungen

$$a = \frac{da}{dp} = 0$$

und $\frac{d^2a}{dp^2} < 0$. Lässt man von da an die Temperatur abnehmen, so wird das Maximum von $a$ positiv und es gibt folglich dann jedesmal zwei Drucke, wobei $a = 0$ wird; bei dem kleineren nimmt $a$ durch Zusammendrückung zu und ist $\frac{da}{dp}$ positiv, bei dem grösseren dagegen nimmt $a$ durch Zusammendrückung ab und ist $\frac{da}{dp}$ negativ. Dieser zweite Fall soll hier näher erörtert und in seinen Consequenzen verfolgt werden.

Befindet sich ein Gas in dem bezeichneten Punkte und drückt man dasselbe dann unter der Bedingung, dass immer $a = 0$ und somit die Dichte in ihrem bezüglichen Minimum

[1] Diese Berichte, Bd. 98, Abth. II. a. (Juni-Heft 1889) S. 757.

bleibe, stärker zusammen, so muss der zu erfüllenden Gleichung

$$\frac{da}{dp}dp+\frac{da}{dp}dt=0$$

gemäss die Temperatur abnehmen. Hiebei wird $\frac{da}{dp}$, von seinem Nullwerthe sich entfernend, negativ und es muss betreffs der Veränderung desselben als einer Function des Druckes und der Temperatur

$$d\frac{da}{dp}=\frac{d^2a}{dp^2}dp+\frac{d^2a}{dpdt}dt$$

sein. Die zwei hier rechts des Gleichheitszeichens stehenden Differentialquotienten anbelangend, ist zu bemerken, dass die Grösse $a$, indem sie von ihrem Maximum an durch Compression mit wachsender Geschwindigkeit abnimmt, dabei, wie Amagat's Versuche beweisen, einen Wendepunkt erreicht, wo die Geschwindigkeit ihrer Abnahme am grössten, nämlich $\frac{da}{dp}$ ein negatives Minimum ist und der für kleinere Drucke negative Werth von $\frac{d^2a}{dp^2}$ für grössere Drucke positiv wird. Der Differentialquotient

$$\frac{d^2a}{dpdt}=-\frac{d^2c}{dt^2}$$

ist bei dem Maximum von $a$, weil dasselbe bei steigender Temperatur auf kleinere Drucke übergeht, negativ und behält dieses Vorzeichen, da nach früherer Darlegung $\frac{d^2c}{dt^2}$ für sehr starke Drucke bei allen Temperaturen positiv ist, auch für die der weiteren Compression entsprechenden Nullwerthe von $a$ bei.

Man ersieht hieraus, dass $\frac{da}{dp}$ bei der unter obiger Bedingung erfolgenden Zusammendrückung, wie bei einer solchen unter constanter Temperatur, einem Minimum zugeht, welches aber jetzt eintritt, wenn

$$\frac{d^2a}{dp^2}dp+\frac{d^2a}{dpdt}dt=0$$

wird; der Nullwerth von $\frac{d^2a}{dp^2}$ ist dann noch nicht erreicht. Sobald dieser Quotient bei weiterer Zusammendrückung, sein Vorzeichen wechselnd, positiv wird, nimmt $\frac{da}{dp}$ sowohl durch die Zunahme des Druckes, wie durch die Abnahme der Temperatur zu, nähert sich also rasch der Nulle und man muss nun verhältnissmässig bald zu einem Punkte kommen, wobei

$$a = \frac{da}{dp} = 0$$

und $\frac{d^2a}{dp^2} > 0$ ist. Hier ist der Ausdehnungscoëfficient durch Druck ein Minimum; die entsprechende Temperatur ist die niedrigste, wobei er Null werden kann, für niedrigere Temperaturen bleibt derselbe nämlich auch in seinem Minimum positiv.

Es wird demnach möglich sein, den Ausdehnungscoëfficienten eines Gases anstatt durch Erhöhung der Temperatur unter constantem Drucke, wobei eine enorme Höhe derselben erforderlich wäre, durch Verstärkung des Druckes bei constanter Temperatur auf Null zu bringen und negativ zu machen, nur darf in diesem Falle die obwaltende Temperatur nicht unterhalb einer gewissen Grenzé sein. Die Höhe dieser Grenztemperatur wird voraussichtlich von der Natur der bezüglichen Substanz, namentlich von der Höhe ihrer kritischen Temperatur abhängen und dürfte sich für jene Gase, wo letztere tief liegt, experimentell ermitteln lassen. Die Versuche Amagat's über das Verhalten stark comprimirter Gase werden in dieser Hinsicht vielleicht bald näheren Aufschluss bringen.

§. 2. Bei der Wichtigkeit der Sache dürfte es nicht überflüssig sein, das im Vorigen gewonnene Resultat, wonach der Ausdehnungscoëfficient eines Gases nach Überschreitung seines durch mässig starken Druck erreichbaren Maximums bei weit genug fortgesetzter Compression ein Minimum wird und dass dieses Minimum unterhalb einer gewissen Temperatur positiv, oberhalb derselben aber negativ ist, auch noch auf einem anderen Wege herzuleiten.

Nach Amagat nimmt bei allen von ihm untersuchten Flüssigkeiten der Werth von $\frac{da}{dt}$ durch Zusammendrückung fortwährend ab, das heisst, es ist für dieselben

$$\frac{d^2a}{dpdt} < 0$$

oder negativ. Bei einem hinreichend starken Drucke wird daher $\frac{da}{dt} = 0$, wobei $a$ je nach der Höhe der obwaltenden Temperatur für constanten Druck ein Maximum oder ein Minimum ist, und durch weitere Compression wird dieser Quotient negativ.

Aus der Bedingung $\frac{d^2a}{dpdt} < 0$ folgt, dass der für gewöhnlich negative Werth von $\frac{da}{dp}$ durch Erniedrigung der Temperatur zunimmt; er nähert sich also dabei der Nulle und scheint dieselbe durch hinreichendes Erkalten, wenn nicht früher Erstarrung eintritt, auch erreichen zu müssen. Dieser Fall ist bei Wasser verwirklicht; dasselbe hat nämlich nach Pagliani und Vicentini bei 63° ein Minimum der Zusammendrückbarkeit $c$, wobei $\frac{dc}{dt}$ und somit auch $\frac{da}{dp}$ verschwindet.[1] Es ist dann $a$ für constante Temperatur ein Maximum, welches zugleich mit jenem Minimum von $c$ für tiefere Wärmegrade sich auf grösseren Druck verschiebt. Bei dieser Flüssigkeit wird daher in niedriger Temperatur der Ausdehnungscoëfficient $a$ durch Compression zuerst, seinem Maximum zugehend, wachsen und gleichzeitig die Zusammendrückbarkeit $c$ sich der Unabhängigkeit von der Temperatur nähern; die Versuche Amagat's bestätigen beides.

Wird Wasser bei 63° vom gewöhnlichen Drucke angefangen immer stärker comprimirt, so nimmt $a$ zuerst unmerklich, aber sich mehr und mehr beschleunigend ab und erreicht einen

[1] Unter den von Pagliani und Palazzo (Wied. Beibl. Bd. 9, S. 149) in dieser Hinsicht von 0°—100° untersuchten Flüssigkeiten gibt es mehrere, bei denen die Zusammendrückbarkeit nach den dafür angegebenen Formeln schon wenige Grade unterhalb jenes Intervalles ein Minimum zu haben scheint.

Wendepunkt, wo die Geschwindigkeit seiner Abnahme am grössten, also $\frac{da}{dp}$ ein negatives Minimum und $\frac{d^2a}{dp^2} = 0$ ist. Bei Wasser entspricht diesem Punkte eine sehr starke Compression, während derselbe bei anderen Flüssigkeiten, wo $\frac{da}{dp}$ schon unter gewöhnlichen Umständen negativ ist, durch einen mässig starken Druck erreichbar oder gar schon bei dem gewöhnlichen Drucke überschritten ist.

Befindet sich das Wasser im genannten Punkte, ist also für selbes $\frac{d^2a}{dp^2} = 0$ und lässt man dann Druck und Temperatur so mit einander wechseln, dass diese Bedingung immer erfüllt bleibt, so nimmt vermöge der dabei geltenden Gleichung

$$d\frac{da}{dp} = \frac{d^2a}{dpdt}dt$$

der negative minimale Werth von $\frac{da}{dp}$ mit sinkender Temperatur zu und man kann daher durch Erniedrigung derselben bei entsprechender Veränderung des Druckes bewirken, dass

$$\frac{da}{dp} = \frac{d^2a}{dp^2} = 0$$

wird; dann befindet sich $a$ in einem Halt- und Wendepunkte, wo dessen Maximum mit einem Minimum zusammentrifft. Die bezügliche Temperatur ist die niedrigste, wobei $\frac{da}{dp} = 0$ werden kann, für niedrigere Temperaturen bleibt nämlich dieser Quotient bei jedem Drucke positiv. Ich werde diesen merkwürdigen Zustand einer Flüssigkeit, um ihn kurz bezeichnen zu können, ihren peripetischen Punkt nennen.

Der zum Maximum von $a$ gehörige Druck wird vom genannten Punkte aus mit steigender Temperatur kleiner. Er muss daher solcherweise endlich bei einer gewissen Temperatur, sich schon einem Wechsel seines Vorzeichens nähernd, dem Drucke des Dampfes der bezüglichen Flüssigkeit gleich werden; von diesem Punkte an fällt das Maximum von $a$ auf labile Zustände derselben.

Der zum Minimum von $a$ gehörige Druck wird vom peripetischen Punkte an mit steigender Temperatur grösser. Lässt man die Flüssigkeit von einem solchen Minimum durch Abnahme des Druckes sich ausdehnen, so wird $a$ entweder, wie bei Wasser unterhalb 63°, sein entsprechendes Maximum erreichen, oder es tritt schon vor dessen Erreichung, wie bei Wasser oberhalb 63° und bei anderen Flüssigkeiten schon für gewöhnliche Temperaturen, die Labilität ein.

Die Zusammendrückbarkeit $c$ betreffend, ersieht man aus dem Gesagten, dass dieselbe bei Temperaturen oberhalb der peripetischen zwei der Bedingung $\frac{dc}{dt} = 0$ entsprechende Minima hat; das eine, wo $a$ durch Druck ein Maximum ist, geht bei sinkender Temperatur, wie dasjenige des Wassers, auf grössere, das andere, wo $a$ durch Druck ein Minimum ist, auf kleinere Drucke über, bis beide im peripetischen Punkte zusammenfallen. Bei tieferen Temperaturen bleibt $\frac{dc}{dt}$ für die bezügliche Flüssigkeit unter jedem Drucke negativ.

Nach den Versuchen von Hirn über die Wärmeausdehnung einiger Flüssigkeiten [1] hat der durch Erwärmung zunehmende Quotient $\frac{dv}{dt}$ jedesmal bei einer gewissen Temperatur einen Wendepunkt, wo seine Zunahme am langsamsten ist. Für Äther tritt ein solcher Wendepunkt unter dem in jenen Versuchen angewendeten Drucke bei 25° ein; es muss dann bei einer etwas höheren Temperatur dieser Flüssigkeit auch $a$ einen Wendepunkt haben, wobei nämlich $\frac{da}{dt}$ ein Minimum und $\frac{d^2a}{dt^2} = 0$ ist. Drückt man dieselbe bei der Temperatur dieses letzteren Punktes immer stärker zusammen, so nehmen beide Differentialquotienten von $a$ thatsächlich ab und folglich ist bei dem Drucke, wo $\frac{da}{dt} = 0$ wird, $\frac{d^2a}{dt^2}$ negativ und $a$ für constanten Druck ein Maximum. Da für den

[1] Wüllner's Experimental-Physik, 4. Auflage, Bd. III, S. 84—85.

Äther hierbei nach Amagat's Versuchen der Werth von $a$ sein Minimum durch Compression noch nicht erreicht hat, so ist für dasselbe $\frac{da}{dt}$ schon negativ. Comprimirt man die Flüssigkeit bis auf diesen Zustand und lässt man dann mit der Temperatur zugleich den Druck so steigen, dass $a$ immer in seinem bezüglichen Minimum bleibt, so wird nach der Gleichung

$$d\frac{da}{dt} = \frac{d^2a}{dt^2}dt + \frac{d^2a}{dpdt}dp$$

der Quotient $\frac{da}{dt}$ immer stärker negativ, d. h. für eine bis zum Minimum von $a$ comprimirte Flüssigkeit nimmt diese Grösse durch Erwärmung ab und zwar desto stärker, je höher die entsprechende Temperatur wird.

Dass der Werth von $a$, wenn er durch Druck ein Minimum ist, durch Erwärmung abnimmt, lässt sich für relativ hohe Temperaturen auch direct nachweisen. Erwärmt man nämlich eine Flüssigkeit unter einem den kritischen ein wenig übersteigenden Druck, so erreicht $a$ bei einer Temperatur etwas unterhalb der kritischen einen Wendepunkt, wo dessen Zunahme am schnellsten ist; drückt man sie bei der Temperatur dieses Punktes zusammen, so kommt man, indem bei einer gewissen Compression $\frac{da}{dt} = 0$ wird, zu demjenigen Maximum von $a$, welches für eine unter ihrem kritischen Drucke stehende Flüssigkeit als unendlich gross auf die kritische Temperatur fällt, durch immer stärkeren Druck an Grösse abnehmend zuerst auf höhere, von einem gewissen Punkte an aber auf tiefere Temperaturen übergeht und schliesslich durch Coïncidenz mit dem bezüglichen, gleichzeitig von tieferen auf höhere Temperaturen übergehenden Minimum verschwindet. Da sonach für dieses Maximum $\frac{da}{dp}$ immer negativ bleibt, so ist im gedachten Falle, wenn man die Compression bis zum Minimum von $a$ fortsetzt, $\frac{da}{dt}$ für letzteres negativ. Dies gilt, wie man sieht, auch dann, wenn die Flüssigkeit bei ihrer kritischen Temperatur comprimirt wird, und für Temperaturen ober der kritischen gelangt man zu dem gleichen Resultate.

Aus dem Gesagten folgt, dass der minimale, der Bedingung $\frac{da}{dp} = 0$ entsprechende Werth von $a$, wenn er für eine Flüssigkeit bei irgend einer Temperatur noch positiv ist, bei Erwärmung unter der genannten Bedingung jedenfalls endlich sein Vorzeichen wechseln und also

$$a = \frac{da}{dp} = 0$$

werden muss, während $\frac{d^2a}{dp^2} > 0$ ist; die Flüssigkeit hat dann jenen Zustand erreicht, welchen wir in §. 1 für ein stark comprimirtes Gas, dessen Temperatur dabei nicht unterhalb einer gewissen Grenze sein kann, kennen gelernt haben. In der That ist bei dem dann obwaltenden Drucke zwischen Flüssigkeit und Gas kein Unterschied.

Es lässt sich zeigen, dass der Ausdehnungscoëfficient einer Flüssigkeit in seinem bei hinreichender Compression eintretenden Minimum bei den für Flüssigkeiten gewöhnlichen Versuchstemperaturen noch positiv ist. Man findet [1] nämlich, dass es, den Differentialquotienten

$$\frac{d(pv)}{dp} = h$$

gesetzt, für eine unter ihrem kritischen Drucke oder unter demjenigen ihres Dampfes erwärmte Flüssigkeit jedesmal eine relativ hohe Temperatur gibt, wobei

$$\frac{dh}{dt} = \frac{d(apv)}{dp} = 0$$

wird; dann ist die Grösse $h$ bei constantem Druck ein Maximum und das Product $apv$ bei constanter Temperatur ein Minimum. Denkt man sich eine Flüssigkeit bis zu der bezüglichen Temperatur erwärmt, so wird durch stärkeren Druck

$$\frac{d(apv)}{dp} = ah + pv\frac{da}{dp} > 0,$$

---

[1] Diese Berichte, Bd. XCVII, S. 142.

woraus unmittelbar folgt, dass $a$ bei derselben und daher auch bei allen niedrigeren Temperaturen in seinem Minimum positiv ist. Es erscheint sonach als unmöglich, den Ausdehnungscoëfficienten einer Flüssigkeit durch Compression derselben bei einer gewöhnlichen Temperatur auf Null zu bringen oder negativ zu machen. Die Temperatur, bei welcher $a$ durch Compression als Minimum Null wird, oder diejenige des untersten Dichtenminimums, ist wahrscheinlich für jede Substanz höher als die kritische und kann insofern als der Gasform angehörig betrachtet werden.

§. 3. Befindet sich ein Gas in seinem untersten Dichtenminimum und lässt man die Temperatur von diesem Punkte an weiter steigen, so wird das Minimum von $a$ negativ und es gibt dann für jede Temperatur zwei Drucke, wobei $a = 0$ und die Dichte für constanten Druck ein Minimum wird; bei dem kleineren dieser zwei Drucke wächst $a$ durch Ausdehnung und ist $\frac{da}{dp}$ negativ, bei dem grösseren wächst $a$ durch Compression und ist $\frac{da}{dp}$ positiv. Je höher die Temperatur steigt, desto mehr erweitert sich dieses Druckintervall beiderseits, und desto stärker negativ wird das in demselben eintretende Minimum von $a$.

Zwischen der dem Volumen $v$ eines Körpers innewohnenden Wärmemenge $w$ und ihrer ausdehnenden Kraft $r$ besteht [1] die Beziehung:

$$r + A\frac{dw}{dv} = \frac{aT}{c}, \tag{1}$$

wo $A$ das mechanische Äquivalent der Wärmeeinheit und $T$ die absolute Temperatur bedeutet; hieraus folgt für $a = 0$:

$$r + A\frac{dw}{dv} = 0. \tag{2}$$

Um es klar zu machen, auf welche Weise diese Bedingung in einem Gase zu Stande kommen kann, mag die folgende kurze Darlegung dienen.

Es ist eine bekannte Thatsache, dass die specifische Wärme einer Flüssigkeit in jedem Falle grösser ist als diejenige ihres

[1] Diese Berichte, Bd. XCVII, S. 1118.

 

Dampfes. Man wird hieraus schliessen dürfen, dass eine bestimmte Menge einer Flüssigkeit stets mehr Wärme enthält, als eine gleiche Menge ihres Dampfes bei derselben Temperatur, dass folglich die Grösse $w$ für Dämpfe und Gase durch Verminderung ihres Volumens und also durch Compression zunimmt. Es scheint, dass $w$ hiebei sich einem Maximum nähert, da das Wasser ein solches bei den Bedingungen des Halt- und Wendepunktes seiner Dichte [1] wirklich zeigt, während bei jenen festen Körpern, deren specifische Wärme durch Verdichtung abnimmt, das Maximum von $w$ schon überschritten sein dürfte. Nach dieser Anschauung wird der bei Gasen für gewöhnlich verschwindende Differentialquotient $\frac{dw}{dv}$ bei hinreichender Compression zuerst negativ, verschwindet aber bei einem sehr starken Druck wieder und wird dann durch weitere Compression positiv.

Bezüglich der Kraft $r$ ergibt sich (a. a. O.), dass sie bei einem Gase, welches man von einem gewöhnlichen Zustande an immer stärker zusammendrückt, zuerst wächst, hiedurch ein Maximum erreicht, dann abnimmt, bei einem sehr starken Druck verschwindet und bei weiterer Compression negativ wird.

Aus diesem Gange der zwei Grössen $r$ und $\frac{dw}{dv}$ erklärt es sich nach 1), dass der Ausdehnungscoëfficient $a$, wie es experimentell feststeht, bei der Compression eines gewöhnlichen Gases zunächst durch mässig starken Druck ein Maximum wird, und zugleich sieht man, dass derselbe bei seiner darauffolgenden Abnahme ein positives oder negatives Minimum werden kann.

Ist das von $a$ durch Compression erreichte Minimum negativ, und wird folglich dessen Werth bei zwei verschiedenen Drucken der Nulle gleich, so ist bei dem zum kleineren Drucke gehörigen Nullwerthe $r$ positiv und $\frac{dw}{dv}$ negativ, wogegen bei dem zum grösseren Druck gehörigen Nullwerthe $r$ negativ und $\frac{dw}{dv}$ positiv ist. Lässt man die dabei obwaltende Temperatur sinken, so wird das Intervall jener zwei Drucke immer kleiner, die beiden

---

[1] Diese Berichte, Bd. XCVIII, S. 174.

Nullwerthe von $a$ rücken einander und dem zwischen ihnen liegenden Minimum immer näher und endlich fallen diese drei Punkte zusammen; hiemit ist das unterste Dichtenminimum erreicht, für welches demnach

$$r = \frac{dw}{dv} = 0$$

sein muss. In diesem Punkte verschwindet also die Wärmekraft $r$ und die Wärmemenge $w$ ist ein Maximum.

Es scheint, dass die in einem Körper enthaltene Wärmemenge in dem besonderen Falle, wenn sie von seinem Volumen unabhängig oder $\frac{dw}{dv} = 0$ ist, einfach seiner absoluten Temperatur proportional sein muss. Die Gase in ihrem gewöhnlichen Zustande und das Wasser im Halt- und Wendepunkte seiner Dichte bestätigen diese an sich wahrscheinliche Annahme. Aus derselben folgt, wenn $s$ die specifische Wärme bei constantem Volumen bedeutet,

$$s = \frac{dw}{dt} = \frac{w}{T},$$

wonach für den Zustand des untersten Dichtenminimums

$$\frac{ds}{dv} = \frac{1}{T} \cdot \frac{dw}{dv} = 0$$

wird. Die Gleichung 1) gibt aber durch Differentiation für ein Dichtenminimum überhaupt

$$\frac{dr}{dt} + A\frac{ds}{dv} = \frac{T}{c} \quad \frac{da}{dt}, \tag{3}$$

wo $\frac{da}{dt}$ negativ ist, und somit erhält man für das unterste Dichtenminimum

$$\frac{dr}{dt} < 0,$$

d. h., die Kraft $r$ nimmt von diesem Punkte an bei constantem Druck mit steigender Temperatur ab und wird negativ. Hieraus folgt, dass der Nullwerth von $r$ für höhere Temperaturen auf kleinere und für niedrigere Temperaturen auf grössere Drucke übergeht.

Für das Wasser ist im Halt- und Wendepunkte seiner Dichte die Kraft $r = 0$ und zugleich für constanten Druck ein Minimum. Durch Erniedrigung der Temperatur nimmt $r$ von diesem Punkte an zu und muss daher vor Erreichung des absoluten Nullpunktes derselben, wo jene Kraft verschwindet, ein Maximum werden. Durch Erhöhung der Temperatur nimmt die Kraft $r$ vom genannten Minimum an ebenfalls zu und muss, weil sie nach dem Vorigen bei weit genug fortgesetzter Erwärmung jedenfalls endlich Null und dann negativ wird, wieder ein Maximum erreichen. Durch stärkeren Druck wird das Minimum von $r$ negativ, und die beiden Maxima nehmen an Grösse ab.

Das untere Maximum von $r$ wird durch Druck schliesslich bis zur absoluten Nulltemperatur verschoben. Dem entsprechend wird die Temperatur des Minimums durch Druck erhöht, während diejenige des oberen Maximums sich ebenfalls erniedrigt; letztere zwei Zustände müssen daher bei hinreichender Compression coïncidiren. Man kann folglich das Wasser so zusammendrücken, dass für dasselbe nicht nur $r$ selbst, sondern auch $\frac{dr}{dt}$ bei allen Temperaturen negativ bleibt, dass also dessen Wärme stets eine das Volumen zusammenziehende und als solche mit der Temperatur zunehmende Kraft ausübt. Gleiches wird unter hinreichendem Druck auch bei anderen Substanzen der Fall sein.

Im kritischen Punkte ist die Kraft $r$ durch Druck ein Maximum, also $\frac{dr}{dp} = 0$. Von hier aus geht dasselbe für stärkeren Druck auf höhere Temperaturen über, wobei $\frac{d^2r}{dpdt}$ positiv sein und folglich $\frac{dr}{dt}$ durch Compression wachsen muss. Da aber letzterer Quotient, wie sich soeben ergab, bei hinreichender Compression negativ wird und also $\frac{d^2r}{dpdt}$ bei einem gewissen Druck sein Vorzeichen wechselt, so muss der zu $\frac{dr}{dp} = 0$ gehörige Druck, indem er vom kritischen Punkte aus mit der Temperatur zunimmt, einen grössten Werth erreichen, für welchen

$$\frac{dr}{dp} = \frac{d^2r}{dpdt} = 0$$

ist. Für grössere Drucke bleibt sonach $\frac{dr}{dp}$ bei jeder Temperatur negativ, für kleinere gibt es jedesmal zwei Temperaturen, wobei jener Quotient Null wird; die obere geht mit Abnahme des Druckes immer höher, während die untere sich erniedrigend zuletzt auf den kritischen Punkt trifft.

Für gewöhnliche Gase hat $\frac{dr}{dt}$ einen positiven Werth, welcher nach dem Vorigen durch Compression bis zu einem Maximum wächst; umgekehrt nimmt derselbe durch Verdünnung ab, wird auf solche Weise endlich (wie bei hinreichender Verdichtung) Null und dann negativ. Bei dem Nullwerthe von $\frac{dr}{dt}$ ist $r$ ein Maximum, nimmt also durch Erwärmung ab und bei einem gewissen Punkte wird $r = 0$. Die Temperatur, wobei dieser Werth eintritt, erhöht sich mit dem Drucke; weil aber hiebei $\frac{dr}{dp}$ jedenfalls endlich sein Vorzeichen wechselt, muss es eine höchste Temperatur geben, wobei noch $r = 0$ werden kann. Für höhere Temperaturen bleibt $r$ bei jedem Druck negativ, für tiefere gibt es jedesmal zwei Drucke, wobei diese Kraft verschwindet; der eine wird durch Erniedrigung der Temperatur immer kleiner, während der andere an Grösse zunehmend bei einer hinreichend erniedrigten Temperatur auf das unterste Dichtenminimum trifft.

Denkt man sich eine Substanz auf den letztgenannten Zustand gebracht und lässt man dann die Temperatur sinken, so erreicht $r$ ein Maximum, welches durch Compression an Grösse abnimmt; man kann daher den Druck so steigern, dass $r$ als Maximum Null wird. Lässt man jetzt bei constantem Drucke die Temperatur weiter sinken, so wird $r$ negativ, und muss, weil es bei der absoluten Nulltemperatur verschwindet, ein Minimum erreichen; durch Verminderung des Druckes kann man nun bewirken, dass $r$ als Minimum Null wird. Dies ist der Zustand, wo die Dichte der Substanz einen Halt- und Wendepunkt hat.

§. 4. Nach dem Vorigen gibt es für jedes Gas eine Temperatur, wobei dessen Ausdehnungscoëfficient in seinem der Bedingung $\frac{da}{dp} = 0$ entsprechenden Minimum Null ist; für niedrigere Temperaturen ist dieses Minimum positiv, für höhere wird es negativ und nimmt in diesem Sinne fortwährend mit der Temperatur zu. Auf solche Weise muss endlich, wie hoch die dazu gehörige Temperatur auch immer sein mag, ein Zustand eintreten, wobei der Ausdehnungscoëfficient $a = -\infty$, die Zusammendrückbarkeit $c = \infty$ und der Elasticitätscoëfficient $e = 0$ ist. Dieser Zustand eines Gases mag dessen oberer kritischer Punkt heissen; in demselben ist der Ausdehnungscoëfficient ein negativ unendlich grosses Minimum, während er in dem schon bekannten kritischen Punkte ein positiv unendlich grosses Maximum ist.

Lässt man von dem bezeichneten Punkte aus unter der Bedingung, dass $a$ ein Minimum oder $\frac{da}{dp} = 0$ bleibe, die Temperatur sinken, so nimmt der dazu gehörige Druck zu. Da unter der gleichen Bedingung vom peripetischen Punkte aus der Druck im Gegentheile mit steigender Temperatur zunimmt, so muss derselbe bei einem gewissen Punkte einen grössten Werth haben; für diesen ist

$$\frac{da}{dp} = \frac{d^2a}{dpdt} = 0$$

und $\frac{d^3a}{dpdt^2} > 0$. Aus der Beziehung zwischen $a$ und $c$ folgt zugleich:

$$\frac{dc}{dt} = \frac{d^2c}{dt^2} = 0$$

und $\frac{d^3c}{dt^3} < 0$; die Zusammendrückbarkeit $c$ hat somit hier einen Halt- und Wendepunkt. Das Minimum derselben schreitet von diesem Punkte aus bei Abnahme des Druckes auf niedrigere Temperaturen fort, trifft hiebei endlich den peripetischen Punkt und geht von da an auf höhere Temperaturen über, bis es, sobald der abnehmende Druck dem Dampfdrucke der bezüglichen

Flüssigkeit gleich wird, durch Übergang auf labile Zustände verschwindet. Man sieht übrigens, dass das Minimum von $c$ umgekehrt bei Zunahme des Druckes fortwährend, nämlich nach der Formel

$$dc = \frac{dc}{dp} dp$$

an Grösse abnimmt, bis es im Halt- und Wendepunkte, wo der entsprechende Druck am grössten ist, einen kleinsten Werth erreicht.

Während das Minimum von $c$ den beschriebenen Verlauf nimmt, geht das Maximum vom Halt- und Wendepunkte aus bei Abnahme des Druckes auf immer höhere Temperaturen fort und nimmt dabei nach obiger Formel fortwährend und zwar mit immer mehr anwachsender Geschwindigkeit zu, bis es auf solche Weise zuletzt im oberen kritischen Punkte einen unendlich grossen Werth erlangt. Dieser Werth der Zusammendrückbarkeit $c$ ist also hier, wie im unteren kritischen Punkte, ein Maximum, während der gleichzeitige Nullwerth des Elasticitätscoëfficienten $e$ in beiden Punkten ein Minimum ist. Wie als Functionen der Temperatur, verhalten sich die Grössen $a$, $c$ und $e$ in den genannten zwei Punkten auch als Functionen des Druckes.

Vom unteren kritischen Punkte aus wird das Minimum von $e$ durch Erhöhung, vom oberen aus durch Erniedrigung der Temperatur positiv. Indem sonach $e$ zwischen den zwei kritischen Temperaturen bei jedem Druck positiv bleibt, ist die bezügliche Substanz innerhalb dieses Intervalles permanent gasförmig. Dagegen wird das Minimum von $e$ vom unteren kritischen Punkte aus durch Erniedrigung, vom oberen aus durch Erhöhung der Temperatur negativ, was mit einem stabilen Zustande unverträglich ist; die gasförmige Substanz wird daher bei den betreffenden Temperaturen, sobald durch Druck $e < 0$ werden müsste, oder schon bei einer gewissen Annäherung an diesen Fall, sich sprungweise condensiren, also eine bei gleicher Temperatur und Spannung dichtere Zustandsform annehmen, welche bei hoher Temperatur nur diejenige einer Flüssigkeit sein kann. Dies gilt, wie gesagt, für Temperaturen unterhalb des unteren und oberhalb des oberen kritischen Punktes, nur mit dem Unterschiede, dass die Wärmeausdehnung dort positiv und hier negativ ist. Demnach wird für Temperaturen oberhalb der oberen kritischen das Verhalten von Dampf und Flüssigkeit durch folgende Eigenthümlichkeiten gekennzeichnet sein:

1. Die Ausdehnungscoëfficienten von Dampf und Flüssigkeit sind negativ, sie sind so in der Nähe des kritischen Zustandes sehr gross und werden bei grösserer Entfernung von diesem Punkte kleiner.

2. Die Dichte und die Spannkraft des gesättigt bleibenden Dampfes nehmen mit steigender Temperatur ab, während die Dichte der entsprechenden Flüssigkeit mit ihrer Siedetemperatur zunimmt.

3. Die latente Wärme ist negativ, d. h. der Dampf verschluckt Wärme bei seiner Verflüssigung und die Flüssigkeit entlässt Wärme bei ihrer Verdampfung.

4. Die latente Wärme muss ihrem bekannten Connexe gemäss bei der Höhe der diesfalls obwaltenden Temperaturen im Allgemeinen ausserordentlich gross sein.

Hat $h$ die im §. 2 angegebene, das Verhalten zum Mariotte'schen Gesetze bezeichnende Bedeutung, so ist der Werth dieser Grösse wie im unteren, auch im oberen kritischen Punkte sowohl als Function des Druckes wie der Temperatur ein Minimum $= -\infty$. Lässt man von hier aus bei sinkender Temperatur den Druck so wachsen, dass $h$ als Function des letzteren immer ein Minimum und also $\frac{dh}{dp} = 0$ bleibt, so nimmt jene Grösse, auf endliche Werthe übergehend, algebraisch zu, nähert sich also der Nulle, und für eine hinreichend erniedrigte Temperatur wird

$$h = \frac{dh}{dp} = 0$$

sein; dann ist $pv$ ein Maximum und ein Minimum zugleich, welche mit steigender Temperatur auseinander gehen, indem jenes auf kleineren, dieses auf grösseren Druck fortrückt. Es gibt sonach für jedes Gas, seinen zwei kritischen Temperaturen entsprechend, auch zwei Halt- und Wendepunkte von $pv$; für den unteren ist $a$ positiv, für den oberen negativ. Bei Temperaturen unter- und oberhalb des Intervalles dieser zwei Punkte erreicht *pv* bei einem gewissen Drucke ein Maximum und bei einem stärkeren Drucke ein Minimum. Innerhalb des genannten Intervalles erreicht *pv* durch Compression kein Maximum und Minimum mehr, aber noch die entsprechenden Wendepunkte (Minima von *h*). Der Wasserstoff befindet sich für gewöhnlich in diesem Intervalle. Dass dieses Gas durch genügende Erhöhung seiner Temperatur endlich auf einen Zustand der Giltigkeit des Mariotte'schen Gesetzes gelangen müsste, habe ich in einem früheren Aufsatze [1] auf einem ganz anderen Wege erschlossen; aus dem Vorigen erhellt nun, dass im Falle der Erreichung eines solchen Zustandes der Ausdehnungscoëfficient schon negativ wäre.

Die Temperatur des oberen Halt- und Wendepunktes von *pv* ist die niedrigste, für welche bei Wasserstoff durch Erwärmung mit entsprechend starker Compression die Giltigkeit des Mariotte'schen Gesetzes erzielt werden könnte, und vielleicht sind die Bedingungen dazu wirklich herstellbar. Wie dem aber auch sein mag, das bezügliche Minimum von *h* wird von diesem Punkte aus, wo es Null ist, bei wachsendem Druck als positiv noch weiterhin auf tiefere Temperaturen herabgehen und man darf erwarten, dass es an dem genannten Gase auch schon bei gewöhnlicher Temperatur durch Compressionsversuche nachweisbar sein wird. [2] Man wird dasselbe dann als ein frühes Prognostikon des erst mit überaus hoher Temperatur erreichbaren oberen kritischen Zustandes, und somit auch einer eventuellen Verflüssigung des Gases durch Hitze, ansehen dürfen.

Als eine bemerkenswerthe Consequenz der obigen Sätze hebe ich hier die folgende hervor. Man denke sich ein Gas von so hoher Temperatur, dass es selbstleuchtend sei, und dass zu-

---

[1] Diese Berichte, Bd. XCVII, S. 142.

[2] Nach den von Natterer (diese Berichte, Bd. XII, S. 204) mit Wasserstoff ausgeführten Versuchen würde dieses (mit demjenigen bei mässiger Compression nicht zu verwechselnde) Minimum von *h* auf einen Druck von etwa 1600 Atmosphären fallen, und bei diesem Druck müsste folglich der Ausdehnungscoëfficient des Gases bereits negativ sein; die bis 3000 Atmosphären reichenden und für verschiedene Wärmegrade angestellten Versuche Amagat's würden demnach von einem gewissen, jedenfalls hohen Druck an für Wasserstoff schon eine negative Wärmeausdehnung ergeben müssen, worüber die Entscheidung bevorsteht.

gleich *a* für dasselbe einen stark negativen Werth habe. Das Gas befinde sich unter einem hohen Druck; wenn dieser an einer Stelle plötzlich nachlässt, so wird der hervorbrechende Gasstrahl, weil *a* negativ ist, sich erhitzen, und zwar möglicherweise so stark, dass ein Theil desselben sich condensirt und einen Wolkenstreifen bildet, welcher weisses Licht ausstrahlt und ein continuirliches Spectrum gibt, während der gasförmig bleibende Rest in seinem Spectrum nur die bezüglichen hellen Linien zeigt. Behufs Deutung der sogenannten Protuberanzen, welche aus der Photosphäre der Sonne mit enormer Geschwindigkeit in deren Gashülle aufsteigen und dabei trotz ihrer Expansion auffallend intensiv leuchtend bleiben, dürfte diese Bemerkung vielleicht zu beachten sein.

§. 5. Die eruptiven Protuberanzen der Sonne beweisen gleichzeitig zweierlei: Erstens deren flüssigen Zustand und zweitens eine enorme Höhe ihrer Temperatur. Nach dem Vorigen ist beides vereinbar. Ich nehme daher an, die sichtbare Photosphäre und das Innere der Sonne sei eine Flüssigkeit, deren Temperatur überall die obere kritische weit übersteige. Der Ausdehnungscoëfficient der Photosphäre ist dann als negativ zu erwarten. Dieselbe ist von einer sich sehr weit erstreckenden Gashülle umgeben, deren Ausdehnungscoëfficient ebenfalls in den unteren Schichten wegen ihrer hohen Temperatur und in den oberen wegen ihrer geringen Dichte negativ sein wird. Die unteren Schichten der Gashülle sind mit einem Dampfgemische erfüllt, welches an der Oberfläche der Photosphäre gesättigt ist, und letztere befindet sich in ihrem entsprechenden Siedepunkte, dessen Höhe vom obwaltenden Drucke und von der chemischen Natur der verdampfenden Flüssigkeit abhängt. Auf eine tiefere Temperatur als diejenige ihres Siedepunktes kann die photosphärische Flüssigkeit, wie man sieht, nicht herabgehen; wird ihr, wie es durch ihre Ausstrahlung thatsächlich geschieht, an der Oberfläche Wärme entzogen, so geht eben eine äussere Schicht derselben von entsprechender Dicke in Dampf über, nach der Massgabe nämlich, als die hiebei frei werdende Wärme durch Ausstrahlung in den Weltraum fortgeführt wird.[1] Dies erklärt in

[1] Die Zuleitung von Wärme aus dem Inneren der Sonne dürfte nur einen kleinen Theil ihrer wirklichen Wärmeausgabe liefern. Obige Vor-

einfachster Weise die (relative) Unveränderlichkeit der Temperatur der Sonne, und ein gleicher Vorgang wird es sein, welcher die Leuchtkraft der Fixsterne auf ihrer im Allgemeinen constanten Höhe erhält.

Die Temperatur der Sonnenphotosphäre ist allem Anscheine nach in der Gegend ihres Äquators (wahrscheinlich infolge einer Abhängigkeit der chemischen Mischung ihrer oberen Schichten von der heliographischen Breite) höher als in der Nähe der Pole. In diesem Falle wird die kältere und daher leichtere polare Flüssigkeit in den oberen Schichten der Photosphäre beiderseits dem Äquator zuströmen, wogegen in tieferen Schichten wärmere und daher dichtere Flüssigkeit vom Äquator her den Polen zufliesst. Indem jene obere Strömung in niedere Breiten eine kleinere Rotationsgeschwindigkeit mitbringt, muss sie daselbst die Geschwindigkeit der oberflächlichen Schichten vermindern, deren Rotationsdauer demnach eine längere sein wird als diejenige der oberen Schichten am Äquator und an den Polen. In der That lehren die Beobachtungen der wahrscheinlich auf der Oberfläche der Photosphäre schwimmenden Flecke, dass die Dauer ihrer Rotation mit dem Abstande vom Äquator zunimmt.

Der vorausgesetzten Wärmevertheilung gemäss geht in den unteren Schichten der Atmosphäre der Sonne eine Strömung wärmerer und daher dichterer Gase von der Gegend des Äquators her den Polen zu, wogegen die kälteren und daher leichteren Polargase, in höhere Regionen aufsteigend,[1] durch eine obere Strömung dem Äquator zugeführt werden. Indem jene untere atmosphärische Strömung in höhere Breiten eine grössere Rotationsgeschwindigkeit mitbringt, muss sie daselbst die Geschwindigkeit der unteren Schichten vergrössern, deren Rotationsdauer demnach eine kürzere sein wird als diejenige der unteren atmosphärischen Schichten am Äquator und an den Polen. Die spectroskopischen Beobachtungen von Crew lehren in der That, dass

---

stellung stimmt mit den Hypothesen von R. Mayer und W. Siemens darin überein, dass sie die Quelle der constanten Strahlung der Sonne auf ihre Oberfläche verlegt.

[1] Die auf Photographien der Corona der verfinsterten Sonne sichtbaren Polarstrahlen sind vielleicht aus dieser aufsteigenden Strömung erklärbar.

die Dauer der Rotation in der die Fraunhofer'schen Linien erzeugenden Schicht der Sonnenatmosphäre mit zunehmender Entfernung vom Äquator sich bedeutend verkürzt. Diese untere atmosphärische Strömung dürfte auch der Grund sein, dass die Flecke nicht, wie man erwarten sollte, allgemein auch in Breite, und zwar dem Äquator zu fortschreiten, sondern nach Spörer dies nur in den niedersten Breiten thun, wo dieselbe wahrscheinlich nicht genügend stark ist, um, wie in höheren Breiten, die nach dem Äquator gerichtete Bewegung der oberflächlichen photosphärischen Schicht, in welcher die Flecke schwimmen, durch Reibung aufzuhalten oder umzukehren.

Indem die Photosphäre eine Mischung zahlreicher Flüssigkeiten von ungleicher Dichte ist, scheint es möglich, dass in ihrem Inneren unter localen Bedingungen eine Flüssigkeit von geringer Dichte sich in gewisser Menge aus der allgemeinen dichteren Mischung befreit und emporsteigt. Auf der Oberfläche der Photosphäre angelangt und auf derselben schwimmend, wird sie die aus der Tiefe mitgebrachte höhere Temperatur an ihrer Aussenseite durch Ausstrahlung schnell verlieren, hier sohin bis zu ihrem Siedepunkte erkalten und, wenn dieser niedriger ist als der Siedepunkt der umgebenden Photosphäre, als ein dunkler Fleck erscheinen, dessen Form seiner Natur gemäss veränderlich und dessen Existenz immer nur von beschränkter Dauer sein wird.

Da ein Fleck eine niedrigere Temperatur hat als die übrige Oberfläche, so werden die atmosphärischen Gase ober demselben, weil abgekühlt und daher verdünnt, in die Höhe steigen, während aus seiner Umgebung von allen Seiten her Gase herbeistürzen und so eine Circulation unterhalten wird, welche fortwährend Theile der Chromosphäre als gewöhnliche Protuberanzen[1] in die Höhe führt und Theile der Photosphäre durch Reibung dem Flecke zutreibt. Die Beobachter bestätigen vielfach die hier angegebene Strömungsrichtung. Wegen der ober einem Flecke herrschenden Abkühlung und entsprechenden Verdünnung der atmosphärischen Gase wird derselbe in Folge der Strahlenbrechung in einem tieferen Niveau zu liegen scheinen als die angrenzende Photosphäre und namentlich als die sogenannten Lichtbrücken.

---

[1] Die eruptiven Protuberanzen sind wahrscheinlich durch locale Siedverzüge in der Photosphäre bedingt.

Die heftigen Bewegungen in der Atmosphäre der Sonne müssen auf ihrer Oberfläche Wellen von riesiger Höhe und Breite erzeugen, welche in diesem ungeheueren Ocean mit entsprechend grosser Geschwindigkeit fortschreiten. Die Wellenberge, über die dichtesten Schichten der Atmosphäre emporragend, werden als hellere, die Wellenthäler, mit dichten Dämpfen erfüllt, werden als dunklere Punkte erscheinen; dies ist die Ursache der sogenannten Granulation der Sonne. Eine Fackel ist dann nichts Anderes als eine Gruppe besonders hoher Wellenberge und es erklärt sich, dass jeder Fleck, indem er ein Sturmcentrum bildet, von einem Fackelkranze umgeben ist.

Der Umlauf eines Planeten gibt die Zeit an, während welcher die Sonne eine Axendrehung vollendete, als der Durchmesser ihres Äquators sich bis zu dessen Bahn erstreckte. Dies gestattet einen Schluss auf die Art ihrer successiven Verdichtung. Wenn bei der Contraction der Sonne von der Bahn des Neptun bis zu jener der Erde alle Theile ihres Volumens sich in einem gleichen Verhältnisse verdichtet hätten, so würde dabei die Dauer ihrer Rotation in demselben Verhältnisse und also ungefähr auf $^1/_{30}$ der Umlaufszeit des Neptun sich verringert haben, sie ist aber auf $^1/_{164}$ der letzteren herabgegangen. Man muss daher annehmen, dass bei der bezeichneten Contraction die inneren ohne Zweifel zugleich wärmeren Schichten der Sonne in einem viel stärkeren Verhältnisse als die äusseren, auf solche Weise eine centrale Verdichtung von überwiegender Masse und hoher Temperatur bildend, sich zusammenzogen. Ebenso verhielt es sich bei der weiteren Contraction bis zur Bahn des Mercur. Ganz anders nachher. Hätte die Sonne seit der Zeit, als ihr Durchmesser dem der Mercursbahn gleich war, bis zur Gegenwart sich in einem für alle Theile ihres Volumens gleichen Verhältnisse verdichtet, so müsste die Dauer ihrer Rotation ungefähr $^1/_{83}$ der Umlaufszeit des Mercur und somit nur etwas über einen Tag betragen; in Wirklichkeit beträgt sie ungefähr 25 Tage.[1] Hieraus folgt, dass

[1] Die Umdrehung der Sonne müsste sich schon in nicht ganz drei Stunden vollenden, wenn ihre Contraction innerhalb der Mercursbahn nach dem gleichen Gesetze vor sich gegangen wäre, wie von der Bahn des Neptun bis zu jener des Mercur.

seit jener Zeit die inneren Schichten der Sonne sich in einem viel geringeren Verhältnisse als die äusseren oder vielleicht gar nicht verdichtet haben.

Ähnlich wie die Zusammenziehung der Sonne zwischen den Bahnen von Neptun und Mercur vollzog sich diejenige des Saturn zwischen der Bahn seines äussersten Mondes und dem inneren Rande seines innersten (dunklen) Ringes; es musste sich bis dahin in seiner Mitte, indem die inneren Schichten sich viel stärker als die äusseren zusammenzogen, schon eine verhältnissmässig sehr starke Verdichtung gebildet haben. In weiterer Folge trat jedoch in diesem Verlaufe eine völlige Umkehr ein. Der innere Halbmesser des genannten Ringes erscheint in mittlerer Entfernung unter einem Winkel von 10·5″; nach dem dritten Keppler'schen Gesetze, dem die Ringtheilchen zweifelsohne freibeweglich gehorchen, müssen daher die innersten derselben in 5·6 Stunden einen Umlauf vollenden. [1] Von gleicher Dauer war die Rotation des Planeten, als letztere sich von ihm ablösten, während seine gegenwärtige Rotationszeit 10·48 Stunden beträgt; sie ist also trotz der inzwischen fortgeschrittenen Contraction nicht kürzer, sondern viel länger geworden, und es muss daher für Saturn einen Zeitpunkt gegeben haben, wo die Dauer seiner Rotation am kürzesten war. Meine Theorie erklärt dieses merkwürdige Ergebniss ungezwungen.

Zu jener Zeit, als Saturn noch den Raum bis zu seinem nächsten Ringe erfüllte, hatte er in seinen centralen, stark verdichteten und den grössten Theil seiner Masse in sich schliessenden Schichten noch eine ausserordentlich hohe Temperatur; man darf daher annehmen, dass ihre Wärmeausdehnung negativ war. Diese Schichten mussten hienach, indem ihre Temperatur schliesslich jedenfalls durch Wärmeabgabe sich erniedrigte, sich mehr und mehr ausdehnen, während die übrigen, nur einen kleinen Theil der ganzen Masse, aber den weitaus grössten Theil des

---

[1] Der scheinbare innere Halbmesser des inneren hellen Ringes beträgt 13·0″ und in dieser Distanz vom Mittelpunkte des Saturn dauert ein Umlauf der bezüglichen Ringtheilchen 7·6 Stunden. Auch als ein Ganzes betrachtet rotirt, sonach der dunkle Ring in viel kürzerer Zeit als der Planet selbst.

Gesammtvolumens ausmachenden Schichten sich in gewöhnlicher Weise zusammenzogen, und folglich konnte die Dauer der Umdrehung durch Ausdehnung der centralen Verdichtung sich verlängern, während das Gesammtvolumen an Grösse abnahm. Wahrscheinlich hat dieser grosse Planet in seinem Inneren auch jetzt noch eine sehr hohe Temperatur; geht seine Erkaltung in der angegebenen Weise noch fort, so wird er auch ferner im Ganzen an Dichte zunehmen, während seine Rotationszeit sich verlängert und seine Abplattung sich vermindert, derselbe wird also für die Zukunft den im Erkalten schon viel weiter fortgeschrittenen Planeten Mars und Erde immer ähnlicher werden. Gleiches darf man wohl auch bei Jupiter annehmen.

Den Mars begleiten zwei Monde, von denen der innere (Phobos), vom Mittelpunkte des Planeten um 1·385 seines Durchmessers abstehend, in 7·65 Stunden einen Umlauf macht. Dies war die Rotationszeit des Mars, als sein Durchmesser sich bis zur Phobosbahn erstreckte; gegenwärtig ist sie 24·62 Stunden. Ich nehme diesfalls wieder an, dass während seiner vorausgegangenen Zusammenziehung sich in demselben schon eine centrale Verdichtung von hoher Temperatur und weit überwiegender Masse entwickelt hatte, deren Wärmeausdehnung stark negativ war und welche folglich später, indem ihre Temperatur allmälig sank, sich entsprechend ausdehnte, wodurch eine Zunahme der Rotationsdauer resultirte, während die an Volumen weit überwiegenden äusseren Schichten sich zusammenzogen und in Folge dessen das Gesammtvolumen abnahm. Auch bei diesem Planeten musste demnach die Dauer der Rotation in einem gewissen Zeitpunkte ein Minimum sein; dass die schliessliche Verlängerung derselben sich bei Mars grösser ergibt als bei Saturn, kann daher kommen, dass der bezügliche Process bei dem schon stark erkalteten Mars so gut wie vollendet, bei Saturn aber im besten Fortschreiten begriffen und von seinem Abschlusse noch weit entfernt ist.

Die tiefsten, unter einem sehr hohen Drucke stehenden Schichten der Erde haben ohne Zweifel auch eine sehr hohe Temperatur; sie mögen daher eine negative Wärmeausdehnung haben und sich folglich bei fortschreitendem Erkalten ausdehnen, während die übrigen Schichten sich in gewöhnlicher Weise zusammenziehen. Bliebe dabei das Gesammtvolumen unverändert, so müsste wegen der geänderten Massenvertheilung die Rotationsdauer nothwendig zunehmen, und in einem obschon geringeren Grade kann letzteres auch dann der Fall sein, wenn das Volumen im Ganzen sich vermindert. Ich halte es daher für möglich, dass die Rotationsdauer der Erde in einem entlegenen Zeitpunkte ein Minimum hatte und seither durch deren Erkalten langsam zunimmt, eine säculare Verlängerung des astronomischen Zeitmasses bedingend. Es wäre dann eben ein gleicher Process, wie Saturn und Mars so demonstrant kennen lehren, an der Erde in ihrem gegenwärtigen Zustande noch nicht ganz abgelaufen.

Wenn die tiefsten Schichten eines in seinem Inneren langsam erkaltenden Weltkörpers wegen hoher Temperatur und starken Druckes noch eine negative Wärmeausdehnung haben, während die äusseren Schichten sich in gewöhnlicher Weise verhalten, so wird es auch vorkommen können, dass die Ausdehnung der ersteren überwiegt und das Gesammtvolumen in einem wenn auch geringen Grade sich vergrössert. Vermöge der Langsamkeit eines solchen Vorganges kann dabei die freie Oberfläche des Körpers durch schnelles Erkalten sich in eine zusammenhängende harte Kruste verwandeln, welche dann von Zeit zu Zeit an den Stellen der kleinsten Widerstände durchbrochen oder zersprengt wird. Die Krater, Spalten und Risse auf der Oberfläche des Mondes mögen auf solche Weise entstanden sein. Nach dieser Anschauung musste der Mond in einer früheren Epoche ein Minimum der Umdrehungszeit haben, von wo an dieselbe durch Erkaltung und Ausdehnung seiner Centralschichten langsam zunahm; sie mochte dabei endlich seiner Umlaufszeit gleich werden, bei welcher Dauer sie dann der Einfluss der Erdschwere annehmbarer Weise unveränderlich festzuhalten im Stande war.

Für die vorerwähnten drei Planeten und den Mond musste einst die Dauer ihrer Rotation am kürzesten und die Concentration ihrer Masse am stärksten sein. Auch für die Sonne muss es einen solchen Zeitpunkt gegeben haben, wenn es richtig ist, dass dieselbe nach obiger Annahme an ihrer Oberfläche fortwährend verdampft und hiedurch unter Wärmeentbindung wenigstens theilweise wieder in den Gaszustand zurückkehrt, aus dem sie früher durch Verflüssigung ihrer Masse unter Wärmebindung hervorging. Von einer vollkommenen Rückkehr in irgend einen vorausgegangenen Zustand kann bei dem seither unausgesetzt fortgeschrittenen Wärmeverluste natürlich auch hier nicht die Rede sein, immerhin aber wird bei einem Weltkörper von der Masse und der Temperatur der Sonne die unter Wärmeabgabe erfolgende Expansion aus der flüssigen in die ursprüngliche Gasform sehr weit gehen und eine ungemessene Zeit hindurch andauern können, bis endlich wieder eine Umkehr eintritt.

Eine mächtig entwickelte (daher für die brechbarsten Strahlen wenig durchlässige) Atmosphäre kann sonach bei einem (dann roth erscheinenden) Fixsterne ein Zeichen sein, dass er in seinem Verdampfungsprocesse schon viel weiter als unsere Sonne fortgeschritten ist. Zugleich sieht man, dass mit der Zunahme des Druckes seiner Atmosphäre die Temperatur der flüssigen Oberfläche eines solchen Sternes sich erniedrigt.