Zur Theorie der zweiten Variation.

(Fortsetzung)

von

Dr. G. v. Escherich,

c. M. k. Akad.

In einer früheren Abhandlung[1] habe ich die Bedingungen für die Transformation der zweiten Variation eines bestimmten Integrals

$$\int_a^b f(x, y, y' \ldots y^{(n)})\, dx,$$

in dem $y, y' \ldots y^{(n-1)}$ an den Grenzen a und b gegebene Werthe besitzen, in die Jacobi'sche Form erörtert. Die am Schlusse derselben aufgestellte Behauptung, dass die gefundenen Bedingungen auch für das Vorzeichen der zweiten Variation massgebend seien, bilden den Gegenstand der vorliegenden Arbeit. Hiebei ergab sich die Nothwendigkeit, den Begriff der Variation einer Function, wenn auch nicht so weit wie Weierstrass, so doch etwas weiter als gewöhnlich zu fassen und mit Scheefer[2] auch Veränderungen einer Curve in den Bereich der Betrachtung zu ziehen, die nicht mehr ein einziges reguläres Curvenstück bilden.

Die folgenden Untersuchungen sind vollkommen unabhängig von den auf die Transformation der zweiten Variation sich beziehenden Entwicklungen gehalten und nur einige, unter I zusammengestellte Sätze der früheren Abhandlung, welche über

---

[1] Diese Berichte, Bd. XCVII, Abth. II. a. Die Abhandlung wird mit A bezeichnet.

[2] Mathematische Annalen, Bd. 25 und 26.

die sich selbt adjungirte lineare Differentialgleichung der zweiten Variation handeln, fanden Verwendung.

Für den Hauptsatz, auf dem die ganzen Entwicklungen beruhen und der in der vorerwähnten Abhandlung[1] nur für den allgemeinen Fall bewiesen wurde, ist ein alle Fälle umfassender Beweis in N erbracht.

I.

Zunächst mögen einige Bezeichnungen und Sätze der früheren Abhandlung, die hier wiederholt benützt werden, im Zusammenhange vorgeführt werden.

Die zweite Variation des Integrals

$$J = \int_a^b f(x, y, y' \ldots y^{(n)})\, dx,$$

in dem $y, y' \ldots y^{(n-1)}$ an den Grenzen a und b feste Werthe annehmen sollen, wird, wenn man $y, y' \ldots y^{(n-1)}$ bezüglich die Änderungen $\eta, \eta' \ldots \eta^{(n-1)}$ ertheilt und

$$\Omega(\eta, \eta' \ldots \eta^{(n)}) = \left[\frac{\partial}{\partial y}\eta + \frac{\partial}{\partial y'}\eta' + \ldots + \frac{\partial}{\partial y^{(n)}}\right]^2 f$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} \eta^{(k)}\, \Omega'(\eta^{(k)})$$

gesetzt wird, durch

$$\delta^2 J = \frac{1}{4}\int_a^b \Omega(\eta, \eta' \ldots \eta^{(n)})\, dx$$

ausgedrückt. Dieses Integral lässt sich reduciren, so dass man

$$\delta^2 J = \frac{1}{4}\int_a^b \eta \left[\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{d^k \Omega'(\eta^{(k)})}{dx^k}\right] dx$$

erhält.

---

[1] S. 1438—1440.

Aus dieser Form der zweiten Variation ersieht man, dass sie enge mit der homogenen linearen Differentialgleichung der $2n^{\text{ten}}$ Ordnung

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{d^k \Omega'(z^{(k)})}{dx^k}$$
$$\equiv a_0 z^{(p)} + a_1 z^{(p-1)} + \ldots a_p z,$$

wo $p = 2n$ gesetzt wurde, zusammenhängt, welche die Eigenthümlichkeit besitzt, dass $\varphi(z)$ ein sich selbst adjungirter linearer homogener Differentialausdruck[1] ist.

Die Differenz

$$z\varphi(y) - y\varphi(z)$$

ist der Differentialquotient eines homogenen linearen Ausdruckes der $(2n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, und zwar ist, wenn man

$$z\varphi(y) - y\varphi(z) = \frac{d}{dx}\varphi(y,z)$$

setzt:

$$\varphi(y,z) = a_0 z y^{(p-1)} + \left[a_1 z - \frac{d(a_0 z)}{dx}\right] y^{(p-2)} +$$
$$+ \left[a_{p-\lambda} z - \frac{d}{dx}(a_{p-\lambda-1} z) + \ldots + (-1)^k \frac{d^k}{dx^k}(a_{p-k-\lambda} z) + \ldots\right] y^{(\lambda-1)}$$
$$+$$
$$+ \left[a_{p-1} z - \frac{d}{dx}(a_{p-2} z) + \ldots + (-1)^{p-1} \frac{d^{p-1}}{dx^{p-1}}(a_0 z)\right] y.$$

Es gibt unendlich viele Systeme von n linear unabhängigen particulären Integralen der Differentialgleichung $\varphi(z) = 0$, in denen jedes Paar von Integralen für y und z in $\varphi(y,z)$ gesetzt diesen Ausdruck zu Null machen.[2] Solche n Integrale bilden dann, wie ich mich der Kürze halber ausdrücken will, ein System von n conjugirten Integralen oder sind n conjugirte Integrale.

---

[1] Frobenius, Journal für Mathematik, Bd. 85.

[2] A. S. 1436.

Jedem Punkte x der Strecke ab sind n conjugirte Integrale zugeordnet, welche die dem Punkte conjugirten Integrale oder das dem Punkte conjugirte System von Integralen genannt werden mögen.

Zu jedem Punkte x lassen sich nämlich $2n$ linear unabhängige particuläre Integrale $u_0, u_1 \ldots u_{2n-1}$ und $\varphi(z) = 0$ construiren, von der Eigenschaft, dass $u_\lambda, u'_\lambda \ldots u_\lambda^{(2n-2-\lambda)}$ in x verschwinden. Daher verschwindet $\varphi(y, z)$, wie der Anblick lehrt, für $y = u_\lambda$ und $z = u_\mu$, sobald λ und μ kleiner als n sind, und $u_0, u_1 \ldots u_{n-1}$ bilden also ein System conjugirter Integrale.

Werden für $x = x_0$ diese $2n$ Integrale mit $U_0, U_1 \ldots U_{2n-1}$ und für $x = x_1$ mit $V_0, V_1 \quad V_{2n-1}$ bezeichnet, so sind dann $U_0, U_1 \ldots U_{n-1}$ die dem Punkte x_0 und $V_0, V_1 \ldots V_{n-1}$ die x_1 conjugirten Integrale oder das dem betreffenden Punkte conjugirte Integralsystem. Sind $y_0, y_1 \ldots y_{2n-1}$ die $2n$ Integrale eines Fundamentalsystems von $\varphi(x) = 0$, so werden diese durch eine lineare Substitution, deren Determinante A sei, in die Integrale $U_0, U_1 \ldots U_{2n-1}$ des dem Punkte x_0 angehörigen Fundamentalsystems übergeführt. Bezeichnet $(y_k^{(\lambda)})_0$ den Werth von $y^{(\lambda)}$ in x_0, so geht die Determinante

$$\Delta(x, x_0) = \begin{vmatrix} (y_0)_0 & (y_1)_0 & \ldots (y_{2n})_0 \\ & & \\ (y_0^{(n-1)})_0, & (y_1^{(n-1)})_0 \ldots & (y_{2n}^{(n-1)})_0 \\ y_0 & y_1 & y_{2n} \\ & & \\ y_0^{(n-1)} & y_1^{(n-1)} & y_{2n}^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

durch Multiplication mit A in die auf dieselbe Weise aus den Integralen $U_0, U_1 \ldots U_{2n-1}$ gebildete über. In dieser verschwinden aber sämmtliche Elemente der Determinante $\Sigma \pm (U_0)_0, (U'_0)_0 \ldots (U_{n-1}^{(n-1)})_0$, so dass sie in das Product aus $\Sigma \pm U_0, U'_1 \cdots U_{n-1}^{(n-1)}$ mit $\pm \left(\frac{1}{a_0}\right)^n$ zerfällt. Man ersieht hieraus:

In jedem nicht singulären Punkte der Differentialgleichung $\varphi(z) = 0$ sind $\Delta(x, x_0)$ und $\Sigma \pm U_0, U_1' \ldots U_{n-1}^{(n-1)}$ zugleich Null oder von Null verschieden.

Die Determinante der Functionen $z_0, z_1 \ldots z_m$:

$$\Sigma \pm z_0, z_1' \ldots z_m^{(m)}$$

wird im Folgenden, wie es Frobenius[1] thut, mit

$$\Delta(z_0, z_1 \ldots z_m)$$

bezeichnet werden.

II.

Bildet man aus den n linear unabhängigen Integralen $u_1, u_2 \ldots u_n$ der Gleichung $\varphi(z) = 0$ den Ausdruck

$$\psi(z) = w_1 \varphi(z, u_1) + w_2 \varphi(z, u_2) + \ldots + w_n \varphi(z, u_n)$$

und bestimmt die Grössen $w_1, w_2 \ldots w_n$ gemäss den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} u_1 w_1 + u_2 w_2 + \ldots + u_n w_n &= 0 \\ u_1' w_1 + u_2' w_2 + \ldots + u_n' w_n &= 0 \\ & \\ & \\ u_1^{(n-2)} w_1 + u_2^{(n-2)} w_2 + \ldots + u_n^{(n-2)} w_n &= 0 \\ u_1^{(n-1)} w_1 + u_2^{(n-1)} w_2 + \ldots + u_n^{(n-1)} w_n &= (-1)^{n-1} \end{aligned}\right\} \quad \alpha)$$

was immer möglich ist, da die Determinante dieses Gleichungssystems nicht identisch verschwinden kann — so schrumpft $\psi(z)$ zu einem nach z homogenen linearen Differentialausdruck der n^{ten} Ordnung zusammen, in dem a_0 der Coëfficient von $z^{(n)}$ ist.

Bilden nun die Integrale $u_1, u_2 \ldots u_{n-1}$ ein conjugirtes System, so verschwindet $\varphi(z, u_1), \varphi(z, u_2) \ldots \varphi(z, u_n)$, sobald man für z eines dieser Integrale setzt, und es bilden dann $z = u_1, u_2 \ldots u_n$ ein Fundamentalsystem particulärer Integrale der Gleichung $\psi(z) = 0$. Mittelst der früher angegebenen Bezeichnungen erhält man:

$$(-1)^{n-1} a_0 \frac{\Delta(z, u_1 \ldots u_n)}{\Delta(u_1, u_2 \ldots u_n)} = \psi(z) =$$
$$= w_1 \varphi(z, u_1) + w_2 \varphi(z, u_2) + \ldots + w_n \varphi(z, u_n).$$

---

[1] Journal für Mathematik, Bd. 77.

Aus dieser Gleichung folgt:

Sind $u_1, u_2 \ldots u_n$ die n Glieder eines Systems conjugirter Integrale von $\varphi(z) = 0$ und verschwinden die Ausdrücke

$$\varphi(v, u_1),\ \varphi(v, u_2) \ldots \varphi(v, u_n),$$

so ist v eine lineare Verbindung der $u_1, u_2 \ldots u_n$.

Ist zwar für v:

$$\varphi(v, u_1) = \ldots = \varphi(v, u_{k-1}) = \varphi(v, u_{k+1}) = \ldots = \varphi(v, u_n) = 0,$$

aber nicht $\varphi(v, u_k)$, so folgt aus der vorhergehenden Formel

$$(-1)^{n-1} a_0 \frac{\Delta(v, u_1 \ldots u_n)}{\Delta(u_1, u_2 \ldots u_n)} = w_k \varphi(v, u_k)$$

und hieraus, da aus dem Gleichungssysteme α)

$$w_k = (-1)^{n+k} \frac{\Delta(u_1 \ldots u_{k-1}, u_{k+1} \ldots u_n)}{\Delta(u_1, u_2 \ldots u_n)}$$

sich ergibt,

$$(-1)^{k-1} a_0 \frac{\Delta(v, u_1 \ldots u_n)}{\Delta(u_1, u_2 \ldots u_n)} = \varphi(v, u_k).$$

Wendet man hierauf die bekannte Relation

$$\frac{\Delta(v, u_1 \ldots u_n) \Delta(u_1 \ldots u_{k-1}, u_{k+1} \ldots u_n)}{\Delta(u_1, u_2 \ldots u_n)} =$$

$$= \frac{d}{dx} \frac{\Delta(v, u_1 \ldots u_{k-1}, u_{k+1} \ldots u_n)}{\Delta(u_1, u_2 \ldots u_n)}$$

an, so erhält man:

$$a_0 \frac{d}{dx} \frac{\Delta(v, u_1 \ldots u_{k-1}, u_{k+1} \ldots u_n)}{\Delta(u_1, u_2 \ldots u_n)} =$$

$$= (-1)^{k-1} \varphi(v, u_k) \frac{\Delta(u_1 \ldots u_{k-1}, u_{k+1} \ldots u_k)^2}{\Delta(u_1, u_2 \ldots u_n)^2}. \qquad 1)$$

Ist speciell v ein von $u_1, u_2 \ldots u_n$ linear unabhängiges Integral der Gleichung $\varphi(z) = 0$, so ist $\varphi(v, u_k)$ eine von Null verschiedene Constante.

III.

Sind die Integrale $u_1, u_2 \ldots u_n$ des dem Punkte x_0 conjugirten Systems so beschaffen, dass ihre Determinante sowohl in x_0, als auch in x_1 verschwindet, so besteht auch eine lineare Function derselben z_0, die sowohl in x_0 als auch x_1, sammt ihren $(n-1)$ ersten Derivirten Null ist. Hängt z_0 mit den Gliedern $u_1, u_2 \ldots u_n$ des Systems conjugirter Integrale linear zusammen, so verschwindet auch deren Determinante $\Delta(u_1, u_2 \ldots u_n)$ sowohl in x_0 als auch in x_1. Ist aber dies nicht der Fall, so können (nach II) nicht sämmtliche Grössen $\varphi(z_0, u_1), \varphi(z_0, u_2) . \;\; . \varphi(z_0, u_n)$ verschwinden, und es lassen sich daher lineare Verbindungen

$$z_\lambda = \alpha_{1\lambda} u_1 + \alpha_{2\lambda} u_2 + \ldots + \alpha_{n\lambda} u_n$$

herstellen, deren Determinante nicht Null ist und von denen $(n-1)$ mit z_0 ein conjugirtes System bilden. Sind $z_1, z_2 \ldots z_{n-1}$ diese Integrale von $\varphi(z)$, so bilden dieselben sowohl mit z_0, als auch mit z_n ein conjugirtes System, für welche beiden Systeme die Relation (II, 1) besteht:

$$a_0 \frac{d}{dx} \frac{\Delta(z_0, z_1 \ldots z_{n-1})}{\Delta(z_0, z_1 \ldots z_n)} = (-1)^{n-1} \varphi(z_0, z_n) \frac{\Delta(z_1, z_2 \ldots z_{n-1})^2}{\Delta(z_1, z_2 \ldots z_n)^2}. \quad 2)$$

Hierin kann $\varphi(z_0, z_n)$ nicht Null sein, da die Determinante des obigen Gleichungssystems $\Sigma \pm \alpha_{11}, \alpha_{22} \ldots \alpha_{nn}$ eine von Null verschiedene Constante φ ist.

Ist daher $\Delta(z_0, z_1 \ldots z_{n-1})$ in x_0 und x_1 von niederer Ordnung Null als $\Delta(z_1, z_2 \ldots z_n)$, so folgt aus dieser Gleichung, dass der Quotient

$$\frac{\Delta(z_0, z_1 \ldots z_{n-1})}{\Delta(z_1 z_2 \ldots z_n)}$$

innerhalb $x_0 x_1$ unendlich gross werden muss. Liegt nun auf der Strecke $x_0 x_1$ kein singulärer Punkt der Differentialgleichung $\varphi(z) = 0$, so kann dies nur dadurch eintreten, dass der Nenner $\Delta(z_1, z_2 \ldots z_n) = C\Delta(u_1, u_2 \ldots u_n)$ und somit $\Delta(u_1, u_2 \ldots u_n)$ innerhalb $x_0 x_1$ verschwindet.

IV.

Einige einfache Erwägungen zeigen bald, dass diese Voraussetzungen hier eintreffen.

Zunächst erkennt man leicht:

„Werden die von einander linear unabhängigen Functionen $U_{\lambda_1}, U_{\lambda_2} \dots U_{\lambda_n}$ in x bezüglich von der Ordnung $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$ Null und sind alle diese Ordnungszahlen ungleich, so wird die Determinante dieser Functionen $\Delta(U_{\lambda_1}, U_{\lambda_2} \dots U_{\lambda_n})$ daselbst von der Ordnung $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k - \frac{1}{2} n(n-1)$ Null."

Für $n=2$ ist die Behauptung richtig, und hieraus ergibt sich durch den Schluss von n auf $(n+1)$, dass sie für beliebiges n richtig ist. Ist nämlich λ_n die kleinste unter den Ordnungszahlen, so zeigt die Gleichung

$$\Delta(U_{\lambda_1}, U_{\lambda_2} \dots U_{\lambda_{n+1}}) = U_{\lambda_{n+1}}^{n+1} \Delta\left[\left(\frac{U_{\lambda_1}}{U_{\lambda_{n+1}}}\right)', \left(\frac{U_{\lambda_2}}{U_{\lambda_{n+1}}}\right)' \dots \left(\frac{U_{\lambda_n}}{U_{\lambda_{n+1}}}\right)'\right],$$

dass die Angabe für $(n+1)$ gilt, sobald sie für n als richtig angenommen wird.

Sind die Functionen $U_{\lambda_1}, U_{\lambda_2} \dots U_{\lambda_n}$ zwar linear unabhängig, werden aber in x zwei von gleicher Ordnung Null, so kann man die Determinante dieser Functionen $\Delta(U_{\lambda_1}, U_{\lambda_2} \dots U_{\lambda_n})$ durch lineare Verbindung dieser beiden Elemente, also Multiplication mit einem constanten, von Null verschiedenen Factor in eine andere verwandeln, in der an Stelle eines dieser beiden Elemente ein Element mit höherer Ordnungszahl in x getreten ist, das aber nicht identisch verschwinden kann.

Hieraus erhellt, dass man die Determinante, wenn nur ihre Functionen linear unabhängig sind, durch Multiplication mit einem constanten, von Null verschiedenen Factor stets in eine andere verwandeln kann, in der sämmtliche Elemente wieder linear unabhängig und in x von verschiedener Ordnung Null sind.

Zu diesem Behufe ordne man die Elemente der Determinante so, dass jedes nachfolgende in x nicht von höherer Ordnung Null als das vorangehende ist. Das Element höchster Ordnung, dem keines gleicher Ordnung mehr folgt, dem aber solche vorangehen, verwende man nun, um diese vorangehenden in Elemente mit höheren Ordnungszahlen zu verwandeln. Ordnet man die Elemente der so gewonnenen Determinante wieder in der angegebenen Weise, so behalten das zur Transformation benützte Element und die auf dasselbe folgenden ihre Stelle bei, und jedem dieser Elemente gehen nunmehr lauter Elemente höherer Ordnung voran. Diese Determinante behandle man ebenso wie die frühere und setze das Verfahren so lange fort, als nach der Umwandlung einem Elemente eines gleicher Ordnung vorangeht.

In Anwendung dieser Betrachtungen auf III, 2) denke man sich die Determinante $\Delta(z_1, z_2 \ldots z_{n-1})$ durch das besprochene Verfahren in eine andere verwandelt, deren sämmtliche Elemente $\bar{z}_1, \bar{z}_2 \ldots \bar{z}_{n-1}$ in x, wo x entweder x_0 oder x_1 bezeichnet, von verschiedener Ordnung Null werden. Sind hiebei $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_{n-1}$ die Ordnungszahlen bezüglich von $\bar{z}_1, \bar{z}_2 \ldots \bar{z}_{n-1}$, so wird die Ordnung des Nullwerdens der Determinante selbst in x ausgedrückt durch

$$\mu = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k - \frac{1}{2}(n-1)(n-2).$$

Durch dieselbe Verbindungsweise ihrer Elemente, durch welche $\Delta(z_1, z_2 \ldots z_{n-1})$ in $\Delta(\bar{z}_1, \bar{z}_2 \ldots \bar{z}_{n-1})$ übergeführt wurde, geht $\Delta(z_0, z_1 \ldots z_{n-1})$ in $\Delta(z_0, \bar{z}_1 \ldots \bar{z}_{n-1})$ über. Da z_0 in x mindestens von der Ordnung n Null wird, so ist die Ordnungszahl des Nullwerdens von $\Delta(z_0, \bar{z}_1 \ldots \bar{z}_{n-1})$ jedenfalls nicht kleiner als $\mu+1$. Schreibt man nun die Gleichung III, 2) in der Form

$$a_0[\Delta(z_0, \bar{z}_1 \ldots \bar{z}_{n-1})\Delta'(\bar{z}_1, \bar{z}_2 \ldots \bar{z}_n) - \Delta'(z_0, \bar{z}_1 \ldots \bar{z}_{n-1})\Delta(\bar{z}_1, \bar{z}_2 \ldots \bar{z}_n)] \\ = (-1)^{n-1}\varphi(z_0, z_n)\Delta(\bar{z}_1, \bar{z}_2 \quad \bar{z}_{n-1}),$$

so ersieht man sofort, dass, da $\varphi(z_0, z_n)$ nicht Null ist, die Ordnungszahl der $\Delta(z_1, z_2 \quad z_n)$ in x kleiner als $\mu+1$ sein muss.

Es verschwindet also der Quotient

$$\frac{\Delta(z_0, z_1 \ldots z_{n-1})}{\Delta(z_1, z_2 \quad z_n)}$$

sowohl in x_0, als auch in x_1, und man erhält somit den für die weiteren Untersuchungen grundlegenden Satz:

Verschwindet die Determinante des dem Punkte x_0 conjungirten Integralsystems ausser in x_0 auch in x_1, so besitzt die Determinante jedes anderen Systems conjungirter Integrale, wenn sie nicht sowohl in x_0

als auch in x_1 verschwindet, innerhalb $x_0\, x_1$ wenigstens einen Nullpunkt.

Anmerkung. Man erkennt auch sofort, dass zwischen je zwei Nullpunkten des Quotienten

$$\frac{\Delta(z_0, z_1 \ldots z_{n-1})}{\Delta(z_1, z_2 \quad z_n)}$$

ein, aber auch nur ein, Unendlichkeitspunkt desselben liegt.

Ferner folgt aus dem Vorhergehenden dass der Quotient

$$\frac{\Delta(\eta, U_0 \ldots U_{n-1})}{\Delta(U_0, U_1 \quad U_{n-1})}$$

in x_0, wenn daselbst $\eta, \eta' \quad \eta^{(n-1)}$ verschwinden und $\eta^{(n)}$ besteht und endlich ist, nicht unendlich sein kann.

V.

Es sollen nun zunächst gewisse specielle Variationen der durch die Differentialgleichung der ersten Variation des Integrals festgelegten Curve betrachtet werden. Diese Variationen, die wohl zuerst Herr Weierstrass[1] in seinen Vorlesungen bei dem Probleme der Variationsrechnung benützte, bilden nicht ein einziges reguläres Curvenstück, sondern bestehen aus zwei derartigen Stücken, deren jedes der Differentialgleichung $\varphi(z) = 0$ genügt. Dem allgemeinen Falle sollen vorbereitend die Fälle $n = 1$ und 2 vorangeschickt werden.

1. Ist

$$\int_a^b f(x, y, y')\, dx$$

das vorgelegte Integral und sind x_0 und x_1 zwei Werthe des x, welche der Bedingung $a \leqq x_0 < x_1 \leqq b$ genügen, so besteht, wenn weder das in x_0, noch das in x_1 verschwindende Integral von $\varphi(z) = 0$ für den Zwischenwerth $x = \xi (x_0 < \xi < x_1)$ Null wird, ein particuläres Integral u von $\varphi(z) = 0$, das in ξx_0 verschwindet und in ξ einen differentialen Werth λ annimmt, und ein zweites v, das hier denselben Werth besitzt und in x_1 verschwindet. Liegt nun auf der Strecke $x_0 x_1$ kein singulärer Punkt von $\varphi(z) = 0$,

[1] S. auch Scheeffer, Mathem. Annalen, Bd. 25 und 26.

so kann man den Ordinaten der Curve zwischen $x_0 \xi$ die Variation u und denen zwischen ξx_1 die Variation v ertheilen. Die so erhaltene, aus zwei regulären Stücken bestehende Curve darf man als eine Variation der zwischen $x_0 x_1$ gelegenen Ordinaten betrachten, für deren zugehörige zweite Variation des Integrals sich

$$\delta^2 J = \frac{1}{2}\left[\int_{x_0}^{x} \Omega(u)\, dx + \int_{x}^{x_1} \Omega(v)\, dx\right]$$

ergibt. Nun ist

$$2\Omega(\eta) = \eta\left[\frac{\partial\Omega}{\partial\eta} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\eta'}\right)\right] + \frac{d}{dx}\left(\eta\frac{\partial\Omega}{\partial\eta'}\right)$$

$$= \eta\,\varphi(\eta) + \frac{d}{dx}\left(\eta\frac{\partial\Omega}{\partial\eta'}\right)$$

daher

$$2\Omega(u) = \frac{d}{dx}\left(u\frac{\partial\Omega}{\partial u'}\right)$$

und

$$2\Omega(v) = \frac{d}{dx}\left(v\frac{\partial\Omega}{\partial v'}\right).$$

Somit

$$\delta^2 J = \frac{1}{4}\left(u\frac{\partial\Omega}{\partial u'} - v\frac{\partial\Omega}{\partial v'}\right)_\xi$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\right)_x (u'-v')\lambda$$

$$= \frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}(vu'-u'v)_\xi \qquad 1)$$

Nun ist aber

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}(vu'-u'v) = 4C,$$

wo C eine Constante bedeutet und daher

$$\delta^2 J = C$$

Um dies C zu bestimmen, zieht man aus der obigen Gleichung 1), wenn man $\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} = a_0$ setzt:

$$\frac{d}{dx}\frac{u}{v} = \frac{4C}{a_0 v^2} \qquad 2)$$

und

$$\frac{d}{dx}\frac{v}{u} = -\frac{4C}{a_0 u^2}. \tag{2'}$$

2. Sind u und v linear unabhängig, so muss C von Null verschieden sein, und sie können daher nicht in ein und demselben Punkte verschwinden; umgekehrt: sind sie nicht linear unabhängig, so haben sie lauter gemeinsame Nullpunkte und auch C ist Null.

Ist daher C nicht Null und der dem ξ zunächst gelegene Nullpunkt x von u oder v ein Nullpunkt von u, so kann v in x nicht verschwinden, und da es auch nicht innerhalb $x\xi$ Null wird, so ergibt die Gleichung 2)

$$1 = 4C\int_x^\xi \frac{dx}{a_0 v^2};$$

ist hingegen x ein Nullpunkt des v, so folgt aus 2'):

$$-1 = 4C\int_x^\xi \frac{dx}{a_0 u^2}.$$

Diese Formeln lehren, dass

1. a_0 nirgends innerhalb $x_0 x_1$ sein Zeichen ändern darf und

2. wenn die Integrale u und v, von denen das erstere in x_0, das letztere in x_1 Null ist, linear unabhängig sind, auch die hier betrachteten zweiten Variationen des Integrals nicht verschwinden können.

Eine nothwendige Bedingung, damit eine dieser Variationen verschwinde, ist daher, dass u und v linear von einander abhängig sind, dass also u auch in x_1 verschwinde. Ist diese Bedingung erfüllt, so ergeben die beiden aus u und v gebildeten regulären Curvenstücke ein einziges derartiges Curvenstück, und die zugehörige zweite Variation des Integrals:

$$\delta^2 J = \int_{x_0}^{x_1} ku\,\varphi(ku)\,dx,$$

wo k eine Constante bedeutet, ist Null.

3. Wenn u weder in x_1, noch innerhalb $x_0 x_1$ verschwindet, so kann auch v weder in x_0, noch in der Strecke $x_0 x_1$ verschwinden, und in diesem Falle wird C aus der Gleichung

$$1 = 4C\int_{x_0}^{\xi}\frac{dx}{a_0 u^2}$$

gewonnen. Es ergeben also in diesem Falle alle für das Punktepaar $x_0 x_1$ hier gebildeten Variationen der Curve nicht verschwindende und gleichbezeichnete zweite Variationen des Integrals. Dasselbe gilt aber für jedes Punktepaar der Strecke $x_0 x_1$, da unter der gemachten Voraussetzung nach (N) kein Integral von $\varphi(z) = 0$ zwei Nullpunkte in der Strecke $x_0 x_1$ besitzen kann. Man gelangt somit zur Einsicht:

„Hat das in x_0 verschwindende Integral von $\varphi(z) = 0$ weder in x_1, noch innerhalb $x_0 x_1$ einen Nullpunkt, so sind sämmtliche zweite Variationen des Integrals von der hier betrachteten Art gleichbezeichnet und von Null verschieden; verschwindet es in x_1, so haben zwar alle einerlei Vorzeichen, aber es bestehen dann auch verschwindende zweite Variationen des Integrals.“

Es bleibt nun noch der Fall zu untersuchen, dass u innerhalb $x_0 x_1$ etwa in x_0' verschwindet. Unbeschadet der Allgemeinheit der Untersuchung darf dann x_1 immer so nahe an x_0' angenommen werden, dass u nicht in x_1 verschwindet. Das Integral v von $\varphi(z) = 0$, das in x_1 Null ist und weder in x_0 noch x_0' verschwindet, muss dann nach IV innerhalb $x_0 x_1$ in x_1' verschwinden.

Liegt nun ξ zwischen x_0 und dem auf x_0 zunächst folgenden Nullpunkte von v, so ergibt sich die Constante C aus

$$1 = 4C\int_{x_0}^{\xi}\frac{dx}{a_0 v^2}$$

Ist jedoch ξ so gewählt, dass zwischen ξ und $x_0' > \xi$ kein Nullpunkt des v liegt, so ist die Constante C aus

$$-1 = 4C\int_{\xi}^{x_0'}\frac{dx}{a_0 v^2}$$

zu berechnen. Die beiden Variationen des Integrals, welche diesen Annahmen des ξ entsprechen, sind daher von Null verschieden, da C wegen der über x_1 gemachten Voraussetzung nicht Null sein kann und haben verschiedenerlei Vorzeichen. Also:

„Verschwindet das Integral von $\varphi(z)=0$, das in x_0 Null ist, innerhalb $x_0 x_1$, so gibt es unter den hier betrachteten zweiten Variationen des Integrals entgegengesetzt bezeichnete."

VI.

1. Es sei jetzt

$$J=\int_a^b f(x,y,y',y'')\,dx$$

das gegebene Integral, und wie im vorhergehenden Falle seien x_0 und x_1 zwei Stellen derart, dass $a\leqq x_0<x_1\leqq b$ ist. Nach I bestehen dann zwei linear unabhängige particuläre Integrale u und v der linearen Differentialgleichung der vierten Ordnung $\varphi(z)=0$, welche sammt ihren ersten Derivirten in x_0 verschwinden. Die analogen Integrale für x_1 werden mit u_1 und v_1 bezeichnet. Ist dann ξ eine Stelle zwischen x_0 und x_1, an der weder $(uv'-u'v)$ noch $(u_1v_1'-u_1'v_1)$ verschwindet, so kann man ein particuläres Integral η herstellen, das in x_0 sammt seiner ersten Derivirten verschwindet, in ξ den gegebenen differentialen Werth λ und dessen Derivirte daselbst den ebenfalls gegebenen differentialen x Werth λ' annimmt. Wird das analog für x_1 gebildete Integral mit η_1 bezeichnet, so hat man

$$\eta=\frac{u(v')-v(u')}{(uv'-u'v)}\lambda+\frac{v(u)-u(v)}{(uv'-u'v)}\lambda'$$

$$\eta_1=\frac{u_1(v_1')-v_1(u_1')}{(u_1v_1'-u_1'v_1)}\lambda+\frac{v_1(u_1)-u_1(v_1)}{(u_1v_1'-u_1'v_1)}\lambda',$$

wo die Klammern anzeigen sollen, dass die Werthe an der Stelle ξ zu nehmen sind.

Liegt auf der Strecke ab kein singulärer Punkt der Differentialgleichung $\varphi(z)=0$, so kann man den Ordinaten der aus der ersten Variation gefundenen Curve zwischen $x_0\xi$ die Variation η und denen zwischen ξx_1 die Variation η_1 ertheilen. Die beiden aus η und η_1 gebildeten regulären Curvenstücke können, weil an der Stelle x: $\eta=\eta_1$ und $\eta'=\eta_1'$ ist, als eine Variation des zwischen x_0 und x_1 gelegenen Curvenstückes betrachtet werden. Die zugehörige zweite Variation des Integrals ist dann gegeben durch:

$$2\delta^2 J=\int_{x_0}^{x}\Omega(\eta)\,dx+\int_{x}^{x_1}\Omega(\eta_1)\,dx.$$

Nun ist aber

$$
\begin{aligned}
2\Omega(\eta) &= \eta\Omega'(\eta)+\eta'\Omega'(\eta')+\eta''\Omega'(\eta'') \\
&= \frac{d}{dx}\left[\eta\Omega'(\eta')+\eta'\Omega'(\eta'')-\eta\frac{d\Omega'(\eta'')}{dx}\right] \\
&\quad+\eta\left[\Omega'(\eta)-\frac{d\Omega'(\eta')}{dx}+\frac{d^2\Omega'(\eta'')}{dx^2}\right] \\
&= \frac{d}{dx}\left[\eta\Omega'(\eta')+\eta'\Omega'(\eta'')-\eta\frac{d\Omega'(\eta'')}{dx}\right]+\eta\varphi(\eta) \\
&= \frac{d}{dx}\left[\eta\Omega'(\eta')+\eta'\Omega'(\eta'')-\eta\frac{d\Omega'(\eta'')}{dx}\right];
\end{aligned}
$$

und analog

$$2\Omega(\eta_1) = \frac{d}{dx}\left[\eta_1\Omega'(\eta_1)+\eta_1'\Omega'(\eta_1'')-\eta_1\frac{d\Omega'(\eta_1'')}{dx}\right].$$

Daher

$$
\begin{aligned}
4\delta^2 J &= \left(\eta\Omega'(\eta')+\eta'\Omega'(\eta'')-\eta\frac{d\Omega'(\eta'')}{dx}\right)_\xi \\
&\quad-\left(\eta_1\Omega'(\eta_1')+\eta_1'\Omega'(\eta_1'')-\eta_1\frac{d\Omega'(\eta_1'')}{dx}\right)_\xi.
\end{aligned}
$$

Setzt man nun

$$\Omega(\eta) = a_0\eta''^2+2a_{01}\eta''\eta'+a_{11}\eta'^2+2a_{20}\eta\eta''+2a_{12}\eta'\eta+a_{22}\eta^2,$$

so erhält man, da in ξ: $\eta=\eta_1=\lambda$ und $\eta'=\eta_1'=\lambda'$ ist:

$$
\begin{aligned}
2\delta^2 J &= -a_0(\eta'''-\eta_1''')\lambda+a_0(\eta''-\eta_1'')\lambda'-a_0'(\eta''-\eta_1'')\lambda \\
&= \{-a_0(\eta'''\eta_1-\eta_1'''\eta)+a_0(\eta''\eta_1'-\eta_1''\eta')-a_0'(\eta''\eta_1-\eta_1''\eta)\}_{x=\xi}.
\end{aligned}
$$

Für die obige Form des $\Omega(\eta)$ ist bekanntlich[1]

$$\varphi(z) = A_2 z-\frac{dA_1 z}{dx}+\frac{d^2 a_0 z''}{dx},$$

wenn A_1 und A_2 die Werthe

$$
\begin{aligned}
A_1 &= a_{11}-a_{01}'-2a_{10} \\
A_2 &= a_{22}-a_{12}'+a_{10}''
\end{aligned}
$$

[1] S. Hesse, Journal f. Mathematik, Bd. 54, S. 261.

bezeichnen. Für $\varphi(z,u)$ erhält man dann aus

$$u\varphi(z)-z\varphi(u)=\frac{d}{dx}\varphi(z,u)$$

den Ausdruck

$$-\varphi(z,u)=-\frac{d}{dx}a_0(uz''-u''z)+2a_0(u'z''-u''z')+A_1(uz'-u'z).$$
$$=-a_0(uz'''-u'''z)+a_0(u'z''-u''z')$$
$$-a_0'(uz''-u''z)+A_1(uz'-u'z).$$

Setzt man hierin $u=\eta_1$ und $z=\eta$, so wird $-\varphi(\eta,\eta_1)$, da η und η_1 particuläre Integrale von $\varphi(z)=o$ sind, eine Constante: 2C, und man erhält als deren Werth, wenn man $x=\xi$ nimmt, den oben für $\delta^2 J$ gefundenen Werth, so dass also

$$2\delta^2 J=-\varphi(\eta,\eta_1)=2\mathrm{C}$$

ist.

2. Um die Abhängigkeit des Zeichens dieser Constanten von dem des a_0 ins rechte Licht zu setzen, soll dieselbe, wie es mit der analogen Grösse im Falle $n=1$ geschah, durch ein Integral ausgedrückt werden. Zu diesem Behufe bestimme man die Constanten α und β in

$$\zeta_1=\alpha u_1+\beta v_1$$

derart, dass

$$\varphi(\eta,\zeta_1)=\alpha\varphi(\eta,u_1)+\beta\varphi(\eta,v_1)=0$$

wird, was immer möglich ist.

Ist nun $\varphi(\eta,u_1)$ und $\varphi(\eta,v_1)$ Null, so ist (nach II) η eine homogene lineare Function von u_1 und v_1 und umgekehrt. Verschwinden aber nicht beide Ausdrücke zugleich und ist etwa $\varphi(\eta,v_1)$ nicht Null, so ist, wenn man mit $\Delta(y_1,y_2)$ die Determinante der beiden Functionen y_1 und y_2: $y_1y_2'-y_1'y_2$ bezeichnet, nach II, 1:

$$\frac{d}{dx}\frac{\Delta(\eta,\zeta_1)}{\Delta(v_1,\zeta_1)}=\varphi(\eta,v_1)\frac{\zeta_1^2}{a_0(v_1\zeta_1'-v_1'\zeta_1)^2},\qquad 1)$$

woraus man durch Einsetzung des Werthes für ζ_1:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\Delta(\eta, u_1)}{\Delta(v_1, u_1)} + \frac{\beta}{\alpha}\frac{\Delta(\eta, v_1)}{\Delta(v_1, u_1)}\right] = \varphi(\eta, v_1)\frac{\zeta_1^2}{a_0(v_1\zeta_1' - v_1'\zeta_1)^2}$$

erhält. Da nun

$$\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{\varphi(\eta, u_1)}{\varphi(\eta, v_1)}$$

ist, so ergibt sich hieraus

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\Delta(\eta, v_1)}{\Delta(u_1, v_1)}\varphi(\eta, u_1) - \frac{\Delta(\eta, u_1)}{\Delta(u_1, v_1)}\varphi(\eta, v_1)\right] = \varphi(\eta, v_1)^2\frac{\zeta_1^2}{a(v_1\zeta_1' - v_1'\zeta_1)^2}$$

Aus der Gleichung 1) ersieht man, dass der Quotient $\frac{\Delta(\eta, \zeta_1)}{\Delta(v_1, \zeta_1)}$ zwischen zwei aufeinander folgenden Nullpunkten unendlich werden muss, und zwar, dass er, da aus der Gleichung für $\frac{d}{dx}\frac{\Delta(v_1, \zeta_1)}{\Delta(\eta, \zeta_1)}$ folgt, dass zwischen zwei aufeinander folgenden Unendlichkeitspunkten von $\frac{\Delta(\eta, \zeta_1)}{\Delta(v_1, \zeta_1)}$ immer ein Nullpunkt liegen muss, nur einmal unendlich wird. Daher muss es einen Nullpunkt x dieses Quotienten geben, zwischen dem und ξ kein Unendlichkeitspunkt desselben liegt. Integrirt man die obige Gleichung zwischen x und ξ und beachtet, dass in ξ: $\eta = \lambda$ und $\eta' = \lambda'$ ist, so findet man

$$\frac{\Delta(\lambda, v_1)}{\Delta(u_1, v_1)}\varphi(\eta, u_1) - \frac{\Delta(\lambda, u_1)}{\Delta(u_1, v_1)}\varphi(\eta, v_1) = \varphi(\eta, v_1)^2\int_x^\xi \frac{\zeta_1^2\, dx}{a_0(v_1\zeta_1' - v_1'\zeta_1)^2}.$$

Der Ausdruck links vom Gleichheitszeichen ist aber $\varphi(\eta, \eta_1)$, und man hat daher:

$$\varphi(\eta, \eta_1) = \varphi(\eta, v_1)^2\int_x^\xi \frac{\zeta_1^2}{a_0(v_1\zeta_1' - v_1'\zeta_1)^2}\, dx. \qquad 2)$$

3. Wenn also eine von den beiden Grössen $\varphi(\eta, u_1)$ und $\varphi(\eta, v_1)$ nicht verschwindet, so ist $\varphi(\eta, \eta_1)$ nicht Null; verchwinden aber beide, so ist auch $\varphi(\eta, \eta_1)$ Null. Man hat daher den Satz:

„$\varphi(\eta, \eta_1)$ ist dann und nur dann Null, wenn sowohl $\varphi(\eta, u_1)$ als auch $\varphi(\eta, v_1)$ verschwindet.“

Da aber in diesem Falle η eine homogene lineare Function von u_1 und v_1 ist, so verschwinden η und η' und somit auch $uv' - u'v$ in x_1. Daher:

„Verschwindet $\varphi(\eta, \eta_1)$, so muss $uv' - u'v$ in x_1 Null sein.“

Verschwindet nun die Determinante der dem Punkte x_0 conjugirten Integrale $\Delta(u, v) = uv' - u'v$ weder innerhalb $x_0 x_1$ noch in x_1, so besteht auf der Strecke $x_0 x_1$ nach IV kein Punkt, für den die Determinante des ihm conjugirten Integralsystems innerhalb $x_0 x_1$ oder in x_1 Null wird. Für jedes Punktepaar der Strecke wird das zugehörige $\varphi(\eta, \eta_1)$ durch einen Ausdruck wie in 2) bestimmt und man erkennt somit:

„Wenn die Determinante der dem Punkte x_0 conjugirten Integrale weder innerhalb $x_0 x_1$ noch in x_1 verschwindet, so sind sämmtliche für $x_0 x_1$ oder ein beliebiges Punktepaar von $x_0 x_1$ gebildeten zweiten Variationen des Integrals von Null verschieden und gleichbezeichnet.“

Ist die Determinante $\Delta(u, v)$ in x_1 Null, so verschwindet, wenn mit $(u)_1$ und $(v)_1$ die Werthe von u und v in x_1 bezeichnet werden, das Integral $\eta = u(v_1) - v(u_1)$ sammt η' sowohl in x_0 als auch in x_1. Die zweite Variation des Integrals, welche der Variation $k\eta$, wo k eine von Null verschiedene Constante bedeutet, von y entspricht, ist dann Null. Also:

„Ist die Determinante der dem Punkte x_0 conjugirten Integrale in x_1 Null, so bestehen verschwindende zweite Variationen des Integrals, jedoch haben alle hier betrachteten dasselbe Vorzeichen.“

Verschwindet $\Delta(u, v)$ innerhalb $x_0 x_1$ und ist x'_0 der nächste auf x_0 folgende Nullpunkt, so wähle man $x_1 > x'_0$ innerhalb der Integrationsgrenzen und so nahe an x'_0, dass weder $\Delta(u, v)$ noch die Determinante der dem Punkte x'_0 conjugirten Integrale in x_1 Null ist. In Folge dessen kann nach (IV) $\Delta(u_1, v_1)$ weder in x_0 noch x'_0 verschwinden und wird nur einmal innerhalb $x_0\, x'_0$ in x'_1 Null.

Da $\Delta(u, v)$ in x_0 und x'_0 verschwindet, so besteht ein particuläres Integral η von $\varphi(z) = 0$, das mit seiner ersten Ableitung sowohl in x_0 als auch in x'_0 Null ist. Wählt man nun für λ und λ' die Werthe, die bezüglich η und η' in ξ annehmen, so wird, wenn ξ zwischen x_0 und x'_0 liegt, $\varphi(\eta, \eta_1)$ durch das Integral dargestellt:

$$\varphi(\eta, \eta_1) = \varphi(\eta, v_1)^2 \int_{x_0}^{\xi} \frac{\zeta_1^2}{a_0\, \Delta(v_1, \zeta_1)^2}\, dx;$$

hingegen, wenn ξ zwischen $x'_1 x'_0$ liegt, durch

$$\varphi(\eta, \eta_1) = -\varphi(\eta, v_1)^2 \int_{\xi}^{x_0'} \frac{\zeta_1^2}{a_0 \Delta(v_1, \zeta_1)^2} dx,$$

da $\dfrac{\Delta(\eta, \zeta_1)}{\Delta(v_1, \zeta_1)}$ in ξ und innerhalb $\xi x_0'$ endlich und in x_0' Null ist.

Hieraus ergibt sich:

„Verschwindet die Determinante der dem Punkte x_0 conjugirten Integrale innerhalb $x_0 x_1$, so haben nicht alle zweiten Variationen des Integrals von der hier betrachteten Art einerlei Vorzeichen".

VII.

Es hat nun keine Schwierigkeiten, den allgemeinen Fall, wo im vorgelegten Integrale

$$J = \int_a^b f(x, y, y' \ldots y^{(n)}) dx$$

die Ableitungen der Function y bis zur n^{ten} Ordnung ansteigen, zu behandeln.

An jeder nicht singulären Stelle x bestehen n particuläre Integrale der linearen homogenen Differentialgleichung der $2n^{\text{ten}}$ Ordnung $\varphi(z) = 0$, welche sammt ihren $(n-1)$ ersten Derivirten daselbst verschwinden. Für die beiden Stellen x_0 und x_1, welche nur den Bedingungen $a \leqq x_0 < x_1 \leqq b$ zu genügen haben, seien bezüglich $U_0 U_1 \ldots U_{n-1}$ und $V_0 V_1 \ldots V_{n-1}$ die zugehörigen Systeme conjugirter Integrale, deren Determinanten bezüglich mit $\Delta(U_0 U_1 \ldots U_{n-1})$ und $\Delta(V_0 V_1 \ldots V_{n-1})$ bezeichnet werden mögen.

Ist nun ξ eine Stelle zwischen x_0 und x_1, an der weder

$$\Delta(U_0, U_1 \ldots U_{n-1}) \text{ noch } \Delta(V_0, V_1 \ldots V_{n-1})$$

verschwindet, so kann man zwei particuläre Integrale η und η_1 von $\varphi(z) = 0$ herstellen, von denen das erstere in x_0, das letztere in x_1 sammt seinen $(n-1)$ ersten Derivirten verschwindet, und für die in ξ:

$$\eta = \eta_1 = \lambda; \quad \eta' = \eta_1' = \lambda' \quad \ldots \quad \eta^{(n-1)} = \eta_1^{(n-1)} = \lambda^{(n-1)}$$

wird, wo $\lambda, \lambda' \ldots \lambda^{(n-1)}$ vorgegebene differentiale Werthe sind, die nicht alle Null sein dürfen. Diese beiden Integrale sind durch die Gleichungen

$$\begin{vmatrix} & U_0 & & U_{n-1} \\ \lambda, & (U_0) & & (U_{n-1}) \\ \lambda', & (U'_0) & & (U'_{n-1}) \\ & & & \\ & & & \\ \lambda^{(n-1)}, & (U_0^{(n-1)}) & . \quad . & (U_{n-1}^{(n-1)}) \end{vmatrix} = 0$$

und

$$\begin{vmatrix} \eta_1, & V_0 & & V_{n-1} \\ \lambda, & (V_0) & & (V_{n-1}) \\ \lambda', & (V'_0) & & (V'_{n-1}) \\ & & & \\ & & & \\ \lambda^{(n-1)}, & (V_0^{(n-1)}) & . \quad . & (V_{n-1}^{(n-1)}) \end{vmatrix} = 0$$

bestimmt, wo die Klammern den Werth der betreffenden Grössen an der angenommenen Stelle ξ bezeichnet. Liegt auf der Strecke ab, wie vorausgesetzt wird, kein singulärer Punkt der Differentialgleichung $\varphi(z) = 0$, so sind η und η_1 überall zwischen a und b differentiale Grössen, und man kann daher den Ordinaten der aus der ersten Variation des Integrals gefundenen Curve zwischen x_0 und ξ die Variation η und denen zwischen ξ und x_1 die Variation η_1 ertheilen. Die beiden so erhaltenen regulären Curvenstücke können wegen des Verhaltens von η und η_1 an der Stelle ξ als eine Variation des zwischen x_0 und x_1 enthaltenen Abschnittes der Curven betrachtet werden.

Die zugehörige zweite Variation des Integrales wird dann ausgedrückt durch:

$$2\delta^2 J = \int_{x_0}^{x} \Omega(\eta)\, dx + \int_{x}^{x_1} \Omega(\eta_1)\, dx$$

Diese Integrale lassen sich aber leicht auswerthen, denn es ist

$$2\Omega(\eta) = \sum_{k=0}^{n} \eta^{(k)} \Omega'(\eta^{(k)})$$

und

$$\eta^{(k)}\Omega'(\eta^{(k)}) = \frac{d}{dx}\left[\sum_{\mu=0}^{k-1}(-1)^{\mu}\eta^{(k-\mu-1)}\frac{d^{\mu}\Omega'(\eta^{(k)})}{dx^{\mu}}\right] + (-1)^{k}\eta\frac{d^{k}\Omega'(\eta^{(k)})}{dx^{k}}$$

daher

$$2\Omega(\eta) = \frac{d}{dx}\left[\sum_{k=0}^{n}\sum_{\mu=0}^{n-1}(-1)^{\mu}\eta^{(k-\mu-1)}\frac{d^{\mu}\Omega'(\eta^{(k)})}{dx^{\mu}}\right] + \eta\varphi(\eta)$$

$$= \frac{d}{dx}\left[\sum_{k=0}^{n}\sum_{\mu=0}^{n-1}(-1)^{\mu}\eta^{(k-\mu-1)}\frac{d^{\mu}\Omega'(\eta^{(k)})}{dx^{\mu}}\right].$$

Ebenso findet man

$$2\Omega(\eta_1) = \frac{d}{dx}\left[\sum_{\mu=0}^{n}\sum_{\mu=0}^{n-1}(-1)^{\mu}\eta_1^{(k-\mu-1)}\frac{d^{\mu}\Omega'(\eta_1^{(k)})}{dx^{\mu}}\right].$$

Folglich ist

$$4\delta^2 J = \sum_{k=0}^{n}\sum_{\mu=0}^{n-1}(-)^{\mu}\left[\eta^{(k-\mu-1)}\frac{d^{\mu}\Omega'(\eta^{(k)})}{dx^{\mu}} - \eta_1^{(k-\mu-1)}\frac{d^{\mu}\Omega'(\eta_1^{(k)})}{dx^{\mu}}\right]_{x=\xi}$$

Dieser Ausdruck steht aber in engem Zusammenhange mit der Formel

$$\eta_1\varphi(\eta) - \eta\varphi(\eta_1) = \frac{d}{dx}\varphi(\eta, \eta_1),$$

Denn es ist

$$\eta_1\varphi(\eta) - \eta\varphi(\eta_1) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\left[\eta_1\frac{d^{k}\Omega'(\eta^{(k)})}{dx^{k}} - \eta\frac{d^{k}\Omega'(\eta_1^{(k)})}{dx^{k}}\right]$$

und

$$\eta_1\frac{d^{k}\Omega_1'(\eta^{(k)})}{dx^{k}} =$$

$$\frac{d}{dx}\left[\eta_1\frac{d^{k-1}\Omega'(\eta^{k})}{dx^{k-1}} - \eta_1'\frac{d^{k-2}\Omega'(\eta^{(k)})}{dx^{k-2}} + \ldots + (-1)^{k-1}\eta_1^{(k-1)}\Omega'(\eta^{(k)})\right] +$$

$$+(-1)^{k}\eta_1^{(k)}\Omega'(\eta^{(k)}) = \frac{d}{dx}\left[\sum_{\mu=0}^{k-1}(-1)^{k-\mu-1}\eta_1^{(k-\mu-1)}\frac{d^{\mu}\Omega'(\eta^{(k)})}{dx^{\mu}}\right] +$$

$$+ (-1)^{k}\eta_1^{(k)}\Omega'(\eta^{(k)}).$$

Somit

$$\eta_1\varphi(\eta)-\eta\varphi(\eta_1) = -\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{n}\sum_{\mu=0}^{k-1}(-1)^\mu\Big[\eta_1^{(k-\mu-1)}\frac{d^\mu\Omega'(\eta^{(k)})}{dx^\mu}-$$

$$-\eta^{(k-\mu-1)}\frac{d^\mu\Omega'(\eta_1^{(k)})}{dx^\mu}\Big]+\sum_{k=0}^{n}[\eta_1^{(k)}\Omega'(\eta^{(k)})-\eta^{(k)}\Omega'(\eta_1^{(k)})=$$

$$=-\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{n}\sum_{\mu=0}^{k-1}(-1)^\mu\left[\eta_1^{(k-\mu-1)}\frac{d^\mu\Omega'(\eta^{(k)})}{dx^\mu}-\eta^{(k-\mu-1)}\frac{d^\mu\Omega'(\eta_1^{(k)})}{dx^\mu}\right],$$

und man erhält daher

$$\varphi(\eta,\eta_1)=-\sum_{k=0}^{n}\sum_{\mu=0}^{k-1}(-1)^\mu\left[\eta_1^{(k-\mu-1)}\frac{d^\mu\Omega'(\eta^{(k)})}{dx^\mu}--\eta^{(k-\mu-1)}\frac{d^\mu\Omega'(\eta_{(k)})}{dx^\mu}\right].$$

Berücksichtigt man nun, dass an der Stelle ξ:

$$\eta=\eta_1,\ \eta'=\eta_1'\ldots\ \eta^{(n-1)}=\eta_1^{(n-1)}$$

ist, so ersieht man, dass

$$4\delta^2 J=-\varphi(\eta,\eta_1)_{x=\xi}.$$

Es ist aber hier, da $\varphi(\eta)=\varphi(\eta_1)=0$ ist, $\varphi(\eta,\eta_1)$ eine Constante und man hat daher

$$4\delta^2 J=-\varphi(\eta,\eta_1)=\text{Const.}$$

Diese Constante lässt sich vermöge der Entwicklungen in (II) durch ein bestimmtes Integral darstellen.

VIII.

Zu diesem Behufe soll zunächst gezeigt werden, dass zu irgend zwei gegebenen particulären Integralen u und v von $\varphi(z)=0$ sich stets $(n-1)$ andere $z_1, z_2\ldots z_{n-1}$ auffinden lassen, dergestalt, dass sowohl

$$u,\ z_1,\ z_2\ldots z_{n-1}$$

als auch

$$v, z_1, z_2 \ldots z_{n-1}$$

ein System conjugirter Integrale bilden.

Sind $u_1, u_2 \ldots u_{n-1}$ conjugirte Integrale von $\varphi(z) = 0$, so vermag man die $n(n-1)$ Unbekannten α in

$$z_\lambda = \alpha_{\lambda, 0} u + \alpha_{\lambda, 1} u_1 + \ldots + \alpha_{\lambda, n-1} u_{n-1}$$

derart zu bestimmen, dass

$$\varphi(v, z_\lambda) = \alpha_{\lambda, 0}\, \varphi(v, u) + \alpha_{\lambda, 1}\, \varphi(v, u_1) + \ldots + \alpha_{\lambda, n-1} \varphi(v, u_{n-1}) = 0$$

wird. Ertheilt man hierin dem λ die Werthe $1, 2 \ldots (n-1)$, so kann man überdies, sobald $\varphi(v, u)$ nicht verschwindet, aber auch nur in diesem Falle die α der Bedingung gemäss bestimmen, dass $\Sigma \pm \alpha_{11} \ldots \alpha_{n-1, n-1}$ von Null verschieden ist. Die Integrale

$$u, z_1 \ldots z_{n-1}$$

sind dann linear unabhängig und bilden ein System conjugirter Integrale.

Es muss aber auch v linear unabhängig von $z_1, z_2 \ldots z_{n-1}$ sein, da sonst $\varphi(v, u)$ Null wären. Also bilden auch die Integrale

$$v, z_1 \ldots z_{n-1}$$

ein System conjugirter Integrale.

Diese Bemerkung soll nun bei der Werthbestimmung des irgend einem Punktepaare von $x_0 x_1$ zugehörigen $\varphi(\eta, \eta_1)$ und vornehmlich zur Erörterung der Frage benützt werden, ob und unter welchen Bedingungen $\varphi(\eta, \eta_1)$ verschwindet. Die Untersuchung wird an den für das Punktepaar $x_0 x_1$ gebildeten $\varphi(\eta, \eta_1)$ geführt werden.

Das Integral η_1 ist durch die Gleichung

$$\begin{vmatrix} \eta_1, & V_0 & & V_{n-1} \\ \lambda, & (V_0) & & (V_{n-1}) \\ & & & \\ & & & \\ \lambda^{n-1}, & (V_0^{n-1}) & \ldots & (V_{n-1}^{(n-1)}) \end{vmatrix} = 0$$

gegeben, woraus, wenn mit Δ_k die Determinante

$$(-1)^{k-1}\begin{vmatrix} \lambda, & (V_0) & \ldots (V_{k-1}), (V_{k+1}) \ldots & (V_{n-1}) \\ \lambda', & (V'_0) & \ldots (V'_{k-1}), (V'_{k+1}) \ldots & (V'_{n-1}) \\ & & & \\ \lambda^{(n-1)}, & (V_0^{(n-1)}) \ldots & (V_{k-1}^{(n-1)}) & \ldots (V_{n-1}^{(n-1)}) \end{vmatrix}$$

und $\Sigma \pm (V_0) \ldots (V_{n-1}^{(n-1)})$ mit Δ bezeichnet wird, sich für η_1 ergibt:

$$\eta_1 = \frac{\Delta_0}{\Delta} V_0 + \frac{\Delta_1}{\Delta} V_1 + \ldots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta} V_{n-1}.$$

Somit ist

$$\varphi(\eta, \eta_1) = \frac{\Delta_0}{\Delta} \varphi(\eta_1 V_0) + \frac{\Delta_1}{\Delta} \varphi(\eta_1 V_1) + \qquad + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta} \varphi(\eta_1 V_{n-1}).$$

Ist nun

$$\varphi(\eta, V_0) = \varphi(\eta, V_1) = \qquad = \varphi(\eta, V_{n-1}) = 0,$$

so ist auch $\varphi(\eta, \eta_1) = 0$; ist aber eine dieser Grössen, etwa $\varphi(\eta, V_k)$ nicht Null, so lassen sich nach der vorhergehenden Bemerkung aus den Integralen des conjugirten Systems $V_0, V_1 \ldots V_{n-1}$ $(n-1)$ lineare Verbindungen

$$z_1, z_2 \ldots z_{n-1}$$

herstellen, die sowohl mit η als V_k ein System conjugirter Integrale bilden.

Zwischen diesen Integralen $z_1, z_2 \ldots z_{n-1}$ und V_k darf also keine lineare Beziehung bestehen, und die Grössen α in:

$$\begin{aligned} z_1 &= \alpha_0^1 V_0 + \alpha_1^1 V_1 + \ldots + \alpha_{n-1}^1 V_{n-1} \\ z_1 &= \alpha_0^2 V_0 + \alpha_1^2 V_1 + \ldots + \alpha_{n-1}^2 V_{n-1} \\ & \\ z_{n-1} &= \alpha_0^{n-1} V_0 + \alpha_1^{n-1} V_1 + \ldots + \alpha_{n-1}^{n-1} V_{n-1} \end{aligned}$$

sind gemäss den Gleichungen

$$\varphi(\eta, z_1) = \alpha_0^1 \varphi(\eta, V_0) + \alpha_1^1 \varphi(\eta, V_1) + \quad + \alpha_{n-1}^1 \varphi(\eta, V_{n-1}) = 0$$
$$\varphi(\eta, z_2) = \alpha_0^2 \varphi(\eta, V_0) + \alpha_1^2 \varphi(\eta, V_1) + \quad . + \alpha_{n-1}^2 \varphi(\eta, V_{n-1}) = 0$$

$$\varphi(\eta, z_{n-1}) = \alpha_0^{n-1} \varphi(\eta, V_0) + \alpha_1^{n-1} \varphi(\eta, V_1) + . \quad . + \alpha_{n-1}^{n-1} \varphi(\eta, V_{n-1}) = 0$$

zu bestimmen.

Der Voraussetzung nach ist $\varphi(\eta, V_k)$ nicht Null, und man kann daher aus diesen Gleichungen

$$\frac{\varphi(\eta, V_0)}{\varphi(\eta, V_k)}, \frac{\varphi(\eta, V_1)}{\varphi(\eta, V_k)} \qquad \frac{\varphi(\eta, V_{n-1})}{\varphi(\eta, V_k)}$$

zu berechnen suchen. Dies ist in der That immer möglich, da die Determinante $A = \Sigma \pm \alpha_0'. \ . \alpha_{k-1}^k \alpha_{k-1}^{k+1}. \ . \alpha_{n-1}^{n-1}$, welche $\Delta(V_0, V_1 . \quad V_{n-1})$ in $(-1)^k \Delta(V_k, z_1 \ldots z_{n-1})$ überführt, nicht Null sein darf.

Man erhält auf diese Weise

$$\frac{\varphi(\eta, V_\lambda)}{\varphi(\eta, V_k)} = -\frac{A_\lambda}{A},$$

wenn man mit A_λ die Determinante bezeichnet, die aus A entsteht, indem man darin für den unteren Index $\lambda : k$ setzt.

Dieselben Verhältnisse treten aber auch in der Gleichung

$$a_0 \frac{d}{dx} \frac{\Delta(\eta, z_1 \ldots z_{n-1})}{\Delta(V_k, z_1 \ldots z_{n-1})} = \varphi(\eta, V_k) \frac{\Delta(z_1, z_2 . \quad . z_{n-1})^2}{\Delta(V_k, z_1 \quad . z_{n-1})^2} \quad (\alpha)$$

auf, welche nach II, 1 die $z_1, z_2 . \quad . z_{n-1}$ zwischen η und V_k vermitteln, denn es ist $\Delta(\eta, z_1 . \quad . z_{n-1})$ gleich dem Producte der beiden Matrizen

$$\begin{vmatrix} \eta, & V_0 & & V_{n-1} \\ \eta', & V_0' & & V_{n-1}' \\ & & & \\ \eta^{n-1}, & V_0^{(n-1)} & \ldots & V_{n-1}^{(n-1)} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_0^1, & \alpha_1^1 & . \alpha_{n-1}^1 \\ & & & \\ 0 & \alpha_0^{n-1}, & \alpha_1^{n-1} . & . \alpha_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}$$

also

$$\Delta(\eta, z_1 \ldots z_{n-1}) = \sum_{\lambda=0}^{n-1} (-1)^k \Delta(\eta, V_0 . \quad V_{\lambda-1}, V_{\lambda+1} . . \quad V_{n-1}) A_\lambda$$

und

$$\Delta(V_k, z_1 \ldots z_{n-1}) = (-1)^k A \Delta(V_0, V_1 \ldots V_{n-1})$$

folglich

$$\frac{\Delta(\eta, z_1 \ldots z_{n-1})}{\Delta(V_k, z_1 \ldots z_{n-1})} = \sum_{\lambda=0}^{n-1} \frac{A_\lambda}{A} \frac{\Delta(\eta, V_0 \ldots V_{\lambda-1}, V_{\lambda+1} \ldots V_{n-1})}{\Delta(V_0, V_1 \ldots V_{n-1})} =$$

$$= -\sum_{\lambda=0}^{n-1} \frac{\Delta(\eta, V_0 \ldots V_{\lambda-1} V_{\lambda+1} \ldots V_{n-1})}{\Delta(V_0, V_1 \ldots V_{n-1})} \frac{\varphi(\eta, V_\lambda)}{\varphi(\eta, V_k)}.$$

Dieser Werth in die obige Gleichung (α) eingesetzt, ergibt:

$$a_0 \frac{d}{dx} \sum_{\lambda=0}^{k-1} \frac{\Delta(\eta, V_0 \ldots V_{k-1}, V_{k+1} \ldots V_{n-1})}{\Delta(V_0, V_1 \ldots V_{n-1})} \frac{\varphi(\eta, V_\lambda)}{\varphi(\eta, V_k)} =$$

$$= -\varphi(\eta, V_k) \frac{\Delta(z_1, z_2 \ldots z_{n-1})^2}{\Delta(V_k, z_1 \ldots z_{n-1})^2}$$

oder

$$a_0 \frac{d}{dx} \sum_{\lambda=0}^{n-1} \varphi(\eta, V_\lambda) \frac{\Delta(\eta, V_0 \ldots V_{\lambda-1}, V_{\lambda+1} \ldots V_{n-1})}{\Delta(V_0, V_1 \ldots V_{n-1})} =$$

$$= -\varphi(\eta, V_\lambda)^2 \frac{\Delta(z_1, z_2 \ldots z_{n-1})^2}{\Delta(V_k, z_1 \ldots z_{n-1})^2}. \qquad 1)$$

Das Integral η verschwindet in x_0 sammt seinen $(n-1)$ ersten Derivirten, während von V_k eine Derivirte niederer als der n^{ten} Ordnung von Null verschieden sein muss, da sonst $\varphi(\eta, V_k)$ Null wäre. Der Quotient

$$\varphi(\eta, V_k) \frac{\Delta(\eta, z_1 \ldots z_{n-1})}{\Delta(V_k, z_1 \ldots z_{n-1})} =$$

$$= -\sum_{\lambda=0}^{n-1} \frac{\Delta(\eta, V_0 \ldots V_{\lambda-1}, V_{\lambda+1} \ldots V_{n-1})}{\Delta(V_0, V_1 \ldots V_{n-1})} \varphi(\eta, V_\lambda)$$

verschwindet daher nach IV in x_0 und wird, weil η in x_1 nicht mit sammt seinen $(n-1)$ ersten Derivirten Null sein kann, in x_1 unendlich. Befinden sich zwischen x_0 und x_1 Verschwindungspunkte desselben, so liegt immer zwischen zwei aufeinanderfolgenden ein, aber auch nur ein Unendlichkeitspunkt desselben. Denn die Gleichung

$$a_0 \frac{d}{dx} \frac{\Delta(V_k, z_1 \ldots z_{n-1})}{\Delta(\eta, z_1 \ldots z_{n-1})} = \varphi(\eta, V_k) \frac{\Delta(z_1, z_2 \ldots z_{n-1})^2}{\Delta(V_k, z_1 \ldots z_{n-1})^2}$$

lehrt, dass zwischen zwei Unendlichkeitspunkten von

$$\frac{\Delta(\eta\, z_1 \ldots z_{n-1})^2}{\Delta(V_k, z_1 \ldots z_{n-1})}$$

immer mindestens ein Nullpunkt dieses Quotienten liegen muss.

Es muss daher mindestens auf einer Seite des ξ ein Nullpunkt x des Quotienten sich befinden, der von ξ durch keinen Unendlichkeitspunkt desselben getrennt ist. Integrirt man daher die obige Gleichung 1) zwischen x und ξ und berücksichtigt, dass in ξ

$$\eta = \lambda,\ \eta' = \lambda' \ldots \eta^{(n-1)} = \lambda^{(n-1)}$$

ist, dass also daselbst $\Delta(V_0, V_1 \quad V_{n-1})$ den Werth Δ und $\Delta(\eta, V_0 \ldots V_{\lambda-1}, V_{\lambda+1} \ldots V_{n-1})$ den Werth Δ_λ besitzt, so erhält man:

$$\sum_{\lambda=0}^{n-1} \frac{\Delta_\lambda}{\Delta} \varphi(\eta, V_\lambda) = -\varphi(\eta, V_k)^2 \int_x^\xi \frac{\Delta(z_1, z_2 \ldots z_{n-1})^2}{a_0 \Delta(V_k, z_1 \ldots z_{n-1})^2} dx$$

und daher

$$\varphi(\eta, \eta_1) = -\varphi(\eta, V_k)^2 \int_x^\xi \frac{\Delta(z_1, z_2 \ldots z_{n-1})^2}{a_0 \Delta(V_k, z_1 \ldots z_{n-1})^2} \qquad 2)$$

IX.

Diese Gleichung lehrt, dass $\varphi(\eta, \eta_1)$ nicht verschwindet, sobald unter den Grössen $V_0, V_1 \quad V_{n-1}$ mindestens eine V_k vorhanden ist, für welche $\varphi(\eta, V_k)$ von Null verschieden ist. Befindet sich aber unter diesen n Grössen keine derartige, so ist η eine lineare homogene Function von $V_0, V_1 \ldots V_{n-1}$ und $\varphi(\eta, \eta_1)$ Null. Man ersieht hieraus:

„$\varphi(\eta, \eta_1)$ verschwindet dann und nur dann, wenn η eine homogene lineare Function von $V_0, V_1 \ldots V_{n-1}$ ist.“

Aus demselben Grunde muss aber dann auch η_1 eine lineare Verbindung der $U_0, U_1 \ldots U_{n-1}$ sein, und umgekehrt.

Das Integral η verschwindet in diesem Falle wie η_1 sammt seinen $(n-1)^{\text{ten}}$ Ableitungen in x_1 und in ξ ist

$$\eta = \eta_1 = \lambda,\ \eta = \eta_1' = \lambda' \ldots \eta^{(n-1)} = \eta_1^{(n-1)} = \lambda^{(n-1)};$$

es muss daher η mit η_1 zusammenfallen. Da ferner η eine homogene lineare Beziehung zwischen $U_0, U_1 \ldots U_{n-1}$ und $V_0, V_1 \ldots V_{n-1}$ herstellt, so verschwindet die Determinante $\Delta(U_0, U_1 \ldots U_{n-1})$ der Functionen $U_0, U_1 \ldots U_{n-1}$ in x_1 und $\Delta(V_0, V_1 \quad V_{n-1})$ in x_0.

Und umgekehrt: Verschwindet $\Delta(U_0, U_1 \ldots U_{n-1})$ in x_1, was zur Folge hat, dass $\Delta(V_0, V_1 \quad V_{n-1})$ in x_0 verschwindet, so besteht ein Integral η, das sowohl in x_0 als auch in x_1 sammt seinen $(n-1)^{\text{ten}}$ Derivirten verschwindet. Nimmt man nun die Werthe, die $\eta, \eta' \ldots \eta^{(n-1)}$ in einem Punkte ξ zwischen x_0 und x_1, in dem weder $\Delta(U_0, U_1 \ldots U_{n-1})$ noch $\Delta(V_0, V_1 \ldots V_{n-1})$ Null ist, besitzen, bezüglich für $\lambda, \lambda' \ldots \lambda^{(n-1)}$, so ist das zugehörige $\varphi(\eta, \eta_1) = 0$. Man erhält so den Satz;

„Unter den dem Punktepaare $x_0 x_1$ zugehörigen $\varphi(\eta, \eta_1)$ finden sich dann, aber auch nur dann, verschwindende vor, wenn die Determinante der dem Punkte x_0 conjugirten Integrale in x_1 Null ist."

Man findet auch leicht die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen, unter welchen die sämmtlichen, dem Punktepaare $x_0 x_1$ zugehörigen $\varphi(\eta, \eta_1)$ Null sind.

Da $\varphi(\eta, \eta_1) = 0$ sein soll, so muss η_1 eine lineare Verbindung der $U_0, U_1 \ldots U_{n-1}$ und η eine solche der $V_0, V_1 \ldots V_{n-1}$ sein. Für η_1 kann jede der Grössen $V_0, V_1 \ldots V_{n-1}$ und für η jedes $U_0, U_1 \ldots U_{n-1}$ genommen werden, daher muss aus den beiden Systemen $U_0, U_1 \ldots U_{n-1}$ und $V_0, V_1 \quad V_{n-1}$ jedes Integral eine lineare Function der Integrale des andern Systems sein.

Und umgekehrt ist dies der Fall, so ist jedes der für das Punktepaar $x_0 x_1$ gebildeten $\varphi(\eta, \eta_1)$ Null.

X.

Verschwindet die Determinante $\Delta(U_0, U_1 \quad U_{n-1})$ weder innerhalb $x_0 x_1$ noch in x_1, so kann auch $\Delta(V_0, V_1 \quad V_{n-1})$ weder in einem Punkte innerhalb $x_0 x_1$ noch in x_0 Null sein. Hieraus folgt, dass der Quotient in

$$\frac{\Delta(\eta, z_1 \ldots z_{n-1})}{\Delta(V_k, z_1 \ldots z_{n-1})},$$

der in x_0 Null ist, weder innerhalb $x_0 x_1$ noch in x_1 verschwinden kann, da, wie die Gleichung VIII, 1 zeigt, zwischen zwei seiner Nullpunkte immer ein Unendlichkeitspunkt liegt.

Man kann daher in diesem Falle als die untere Grenze des Integrals VIII, 2 $x = x_0$ nehmen und ersieht so, dass die sämmtlichen für die Punkte $x_0 x_1$ in der angegebenen Weise gebildeten $\varphi(\eta, \eta_1)$ von Null verschieden und gleichbezeichnet sind.

Nimmt man unter diesen Voraussetzungen über $\Delta(U_0, U_1 \ldots U_{n-1})$ statt x_0 irgend einen anderen Punkt des Intervalles $x_0 x_1$, so kann auch die Determinante der diesem Punkte conjugirten Integrale ausser in ihm weder innerhalb $x_0 x_1$ noch in x_1 verschwinden, da sonst nach IV auch $\Delta(U_0, U_1 \ldots U_{n-1})$ innerhalb $x_0 x_1$ einen Nullpunkt besitzen müsste. Man erhält daher den Satz:

Wenn die Determinante der dem Punkte x_0 conjugirten Integrale weder in x_1 noch innerhalb $x_0 x_1$ verschwindet, so ist für die hier betrachteten Variationen des von x_0 und x_1 begrenzten Curvenstückes keine zweite Variation des Integrals Null und alle haben das Vorzeichen von

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^{(n)} \partial y^{(n)}}$$

In diesem Falle kann man $\varphi(\eta, \eta_1)$, da es nicht verschwindet, und damit die zweite Variation des Integrals durch ein anderes bestimmtes Integral als VIII, 2 ausdrücken.

Man kann nämlich jetzt aus $V_0, V_1 \ldots V_{n-1}$ nach (VIII) lineare Verbindungen

$$z_1, z_2 \ldots z_{n-1}$$

herstellen, die sowohl mit η, als auch η_1 ein System conjugirter Integrale bilden. Dieselben vermitteln die Gleichung

$$\frac{d}{dx} \frac{\Delta(\eta, z_1 \ldots z_{n-1})}{\Delta(\eta_1, z_1 \ldots z_{n-1})} = -\varphi(\eta, \eta_1) \frac{\Delta(z_1, z_2 \ldots z_{n-1})^2}{a_0 \Delta(\eta_1, z_1 \ldots z_{n-1})^2},$$

in welcher der linksstehende Quotient in x_0 verschwindet und in keinem Punkte von $x_0 x_1$ unendlich wird. Integrirt man daher zwischen x_0 und ξ und beachtet, dass in ξ Zähler und Nenner gleich werden, so findet man:

$$1 = -\varphi(\eta, \eta_1)\int_{x_0}^{\xi} \frac{\Delta(z_1, z_2 \quad z_{n-1})^2}{a_0 \Delta(\eta_1, z_1 \quad z_{n-1})^2}\, dx.$$

XI.

Verschwindet $\Delta(U_0, U_1 \quad U_{n-1})$ zwar nicht innerhalb $x_0\, x_1$, aber in x_1, so sind nicht mehr alle für $x_0\, x_1$ gebildeten $\varphi(\eta, \eta_1)$ von Null verschieden. Die nicht verschwindenden werden sowohl durch das Integral VIII, 2, wenn man darin $x = x_0$ nimmt, als auch das in X dargestellt. Denn auch in diesem Falle ist jeder der Quotienten

$$\frac{\Delta(\eta, z_1 \ldots z_{n-1})}{\Delta(V_k, z_1 \quad z_{n-1})} \quad \text{und} \quad \frac{\Delta(\eta, z_1 \quad z_{n-1})}{\Delta(\eta_1, z_1 \quad z_{n-1})}$$

in x_0 Null und wird innerhalb $x_0\, x_1$ nirgends unendlich.

Es haben also die sämmtlichen für $x_0 x_1$ gebildeten $\varphi(\eta, \eta_1)$, die nicht Null sind, das Vorzeichen von $(-a_0)$.

Die Determinante der irgend einem anderen Punkte von $x_0\, x_1$ conjugirten Integrale kann in diesem Falle ausser in ihm weder in einem der Grenzpunkte noch irgend einem Punkte von $x_0\, x_1$ verschwinden; daher sind sämmtliche $\varphi(\eta, \eta_1)$ für irgend ein Punktepaar in $x_0\, x_1$ von Null verschieden und werden durch die Integrale VIII, 2 und X dargestellt.

Man erkennt somit:

Verschwindet die Determinante der x_0 conjugirten Integrale nicht innerhalb $x_0\, x_1$, aber in x_1, so gibt es zwar Variationen des Curvenstückes von der hier betrachteten Art, deren zugehörige zweite Variationen des Integrals Null sind; aber alle nicht verschwindenden haben das Zeichen von

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^{(n)}\, \partial y^{(n)}}.$$

XII.

Es erübrigt noch, den Fall zu betrachten, wo die Determinante der dem Punkte x_0 conjugirten Integrale innerhalb $x_0\, x_1$

verschwindet. Es sei x'_0 der nächste auf x_0 folgende Nullpunkt von $\Delta(U_0, U_1 \quad U_{n-1})$ und x_1 innerhalb ab so gewählt, dass weder diese Determinante noch die der conjugirten Integrale von x'_0 innerhalb $x'_0 x_1$ oder x_1 verschwindet. Dann kann auch die Determinante der dem Punkte x_1 conjugirten Integrale $V_0, V_1 \quad V_{n-1}$ weder in x_0 noch in x'_0 verschwinden, sondern besitzt innerhalb $x_0\, x'_0$ einen und nur einen Nullpunkt x'_1.

Wegen der über $\Delta(U_0, U_1 \quad U_{n-1})$ gemachten Voraussetzung kann keiner der für die Punkte $x_0\, x_1$ gebildeten Ausdrücke $\varphi(\eta, \eta_1)$ Null sein, und man wird daher $\varphi(\eta, \eta_1)$ stets aus einer der Gleichungen VIII, 2 oder X bei passender Wahl der unteren Integrationsgrenze bestimmen können.

Da aber $\Delta(U_0, U_1 \quad U_{n-1})$ in x'_0 verschwindet, so besteht ein particuläres Integral von $\varphi(z) = 0$, das sowohl in x_0, als auch x'_0 sammt seinen $(n-1)$ ersten Ableitungen Null ist. Wählt man der Reihe nach für die Grössen $\lambda, \lambda' \quad \lambda^{(n-1)}$, welche $\eta, \eta' \quad \eta^{(n-1)}$ in ξ annehmen sollen, die Werthe dieses Integrals und seiner $(n-1)$ ersten Ableitungen, so wird η dieses Integrale selbst, und die Quotienten in VIII, 1 und X:

$$\frac{\Delta(\eta, z_1 \ldots z_{n-1})}{\Delta(V_k, z_1 \quad z_{n-1})} \quad \text{und} \quad \frac{\Delta(\eta, z_1 \ldots z_{n-1})}{\Delta(\eta_1, z_1 \quad z_{n-1})}$$

verschwinden sowohl in x_0 als auch x'_0, weil daselbst der Zähler Null und der Nenner hievon verschieden ist, und werden nur in x'_1 und x_1 unendlich.

Liegt nun ξ innerhalb $x_0\, x'_1$, so erhält man

$$\varphi(\eta, \eta_1) = -\varphi(\eta, V_k)^2 \int_{x_0}^{\xi} \frac{\Delta(z_1, z_2 \ldots z_n)^2}{a_0\, \Delta(V_k, z_1 \quad z_n)^2}\, dx$$

$$1 = -\varphi(\eta, \eta_1) \int_{x_0}^{\xi} \frac{\Delta(z_1, z_2 \ldots z_n)^2}{a_0\, \Delta(\eta_1, z_1 \quad z_{n-1})^2}\, dx;$$

liegt aber ξ zwischen x'_1 und x'_0, so findet man

$$-\varphi(\eta, \eta_1) = -\varphi(\eta, V_k)^2 \int_{\xi}^{x'_0} \frac{\Delta(z_1, z_2 \ldots z_n)^2}{a_0\, \Delta(V_k, z_1 \quad z_n)^2}\, dx$$

und

$$-1 = -\varphi(\eta, \eta_1) \int_{\xi}^{x'_0} \frac{\Delta(z_1, z_2 \ldots z_n)^2}{a_0\, \Delta(\eta_1, z_1 \quad z_n)^2}\, dx.$$

Diese beiden Variationen von $x_0 x_1$ bewirken also entgegengesetzt bezeichnete zweite Variationen des Integrals, und man erkennt somit:

Verschwindet die Determinante der dem Punkte x_0 conjugirten Integrale innerhalb der Strecke $x_0 x_1$, so bestehen zweite Variationen des Integrals mit entgegengesetzten Vorzeichen.

XIII.

Aus den vorangehenden Untersuchungen ergibt sich:

„Die bisher betrachteten zweiten Variationen des Integrals sind dann und nur dann sämmtlich von Null verschieden und haben einerlei Vorzeichen, wenn die Determinante des Systems conjugirter Integrale, das der unteren Grenze des Integrals angehört, weder zwischen den Grenzen noch an der oberen Grenze verschwindet.“

Es soll nun gezeigt werden, dass unter diesen Bedingungen alle zweiten Variationen des Integrals von Null verschieden und gleichbezeichnet sind.

Das Integral η_1 von $\varphi(z) = 0$ sei in x_0 sammt seinen $(n-1)$ ersten Derivirten Null und nehme in ξ_1, wo $x_0 < \xi_1 < x_1$ ist, sammt diesen Derivirten bezüglich die gegebenen differentialen Werthe $\lambda_1, \lambda_1' \quad \lambda_1^{(n-1)}$ an; das Integral η_2 verschwinde ebenfalls in x_0 mit seinen $(n-1)$ ersten Ableitungen und in ξ_2, wo $\xi_1 < \xi_2 < x_1$ ist, erhalten $\eta_2, \eta_2' \quad \eta_2^{(n-1)}$ der Reihe nach die gegebenen differentialen Werthe $\lambda_2, \lambda_2' \quad \lambda_2^{(n-1)}$. Wegen der Voraussetzung, dass die Determinante des dem Punkte x_0 conjugirten Systems weder innerhalb $x_0 x_1$ noch in x_1 verschwindet, ist es immer möglich, das lineare Gleichungssystem aufzulösen, durch welches das Integral η_3 von der Beschaffenheit bestimmt wird, dass $\eta_3, \eta_3' \quad \eta_3^{(n-1)}$ in ξ_1 bezüglich $\eta_1, \eta_1' \quad \eta_1^{(n-1)}$ und in ξ_2 bezüglich $\eta_2, \eta_2' \quad \eta_2^{(n-1}$ gleich ist.

Es ist dann, wie aus VII hervorgeht,

$$\int_{x_0}^{\xi_1} \Omega(\eta_1)\, dx + \int_{\xi_1}^{\xi_2} \Omega(\eta_3)\, dx - \int_{x_0}^{\xi_2} \Omega(\eta_2)\, dx$$
$$= \varphi(\eta_1, \eta_3) + \varphi(\eta_{\eta 2}, \eta_2)$$
$$= \varphi(\eta_1 - \eta_2, \eta_3)$$

Durch ähnliche Überlegungen, wie sie in VIII angestellt wurden, erkennt man leicht, dass die Constante $\varphi(\eta_1-\eta_2, \eta_3)$ nicht Null sein kann und das Vorzeichen von $-a_0$ besitzt.

Setzt man $\eta_1-\eta_2=\eta$, so ist η ein Integral von $\varphi(z)=0$, das in x_0 sammt seinen $(n-1)$ ersten Ableitungen verschwindet.

Bezeichnet man mit Δ die Determinante $\Delta(U_0, U_1 \quad U_{n-1})$ und mit Δ_k diejenige, die aus dieser entsteht, wenn man darin für $U_k, U_k' \quad U_k^{(n-1)}$ bezüglich $\eta_3, \eta_3' \quad \eta_3^{(n-1)}$ setzt, so ist

$$\eta_1=\left(\frac{\Delta_0}{\Delta}\right)_{\xi_1}U_0+\left(\frac{\Delta_1}{\Delta}\right)_{\xi_1}U_1+\ldots+\left(\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta}\right)_{\xi_1}U_{n-1}$$

und

$$\eta_2=\left(\frac{\Delta_0}{\Delta}\right)_{\xi_2}U_0+\left(\frac{\Delta_1}{\Delta}\right)_{\xi_2}U_1+\ldots+\left(\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta}\right)_{\xi_2}U_{n-1}.$$

Es ist somit

$$\varphi(\eta, \eta_3)=\sum_{k=0}^{n-1}\left[\left(\frac{\Delta_k}{\Delta}\right)_{\xi_1}-\left(\frac{\Delta_k}{\Delta}\right)_{\xi_2}\right]\varphi(U_k, \eta_3).$$

Von den hier vorkommenden Grössen

$$\varphi(U_0, \eta_3),\ \varphi(U_1, \eta_3) \qquad \varphi(U_k, \eta_3)$$

können nicht alle verschwinden, da sonst η_3 in x_0 mit allen seinen $(n-1)$ ersten Derivirten verschwinden und daher η_1, η_2 und η_3 identisch sein müssten.

Ist nun $\varphi(\eta_3, U_k)$ nicht Null, so bilde man aus $n(n-1)$ Grössen α_k^λ, welche die n Gleichungen

$$\alpha_0^1\varphi(\eta_3, U_0)+\alpha_1^1\varphi(\eta_3, U_1)+\ldots+\alpha_{n-1}^1\varphi(\eta_3, U_{n-1})=0$$
$$\alpha_0^2\varphi(\eta_3, U_0)+\alpha_1^2\varphi(\eta_3, U_1)+\ldots+\alpha_{n-1}^2\varphi(\eta_3, U_{n-1})=0$$

$$\alpha_0^{n-1}\varphi(\eta_3, U_0)+\alpha_1^{n-1}\varphi(\eta_3, U_1)+\ldots+\alpha_{n-1}^{n-1}\varphi(\eta_3, U_{n-1})=0$$

befriedigen und deren Determinante $\Sigma\pm\alpha_0' \quad \alpha_{k-1}^k\,\alpha_{k+1}^{k+1} \quad \alpha_{n-1}^{n-1}$ nicht verschwindet, die $(n-1)$ Integrale

$$z_1 = \alpha_0^1 U_0 + \alpha_1^1 U_1 + \ldots + \alpha_{n-1}^1 U_{n-1}$$
$$z_2 = \alpha_0^2 U_0 + \alpha_1^2 U_1 + \ldots + \alpha_{n-1}^2 U_{n-1}$$

$$z_{n-1} = \alpha_0^{n-1} U_0 + \alpha_1^{n-1} U_1 + \ldots + \alpha_{n-1}^{n-1} U_{n-1}.$$

Diese Integrale bilden sowohl mit η_3 als auch mit U_k ein System conjugirter Integrale und ergeben daher nach II, 1 die Gleichung

$$a_0 \frac{d}{dx} \frac{\Delta(\eta_3, z_1 \ldots z_{n-1})}{\Delta(U_k, z_1 \quad z_{n-1})} = -\varphi(\eta_3, U_k) \frac{\Delta(z_1, z_2 \ldots z_{n-1})^2}{\Delta(U_k, z_1 \quad z_{n-1})^2}$$

Bezeichnet man mit A die nicht verschwindende Determinante $\Sigma \pm \alpha_0' \quad \alpha_{k-1}^k \alpha_{k+1}^{k+1} \quad \alpha_{n-1}^{n-1}$ und mit A_λ die Determinante, die aus dieser hervorgeht, wenn man darin für den unteren Index λ den Index k setzt, so ist

$$\frac{\varphi(\eta_3, U_\lambda)}{\varphi(\eta_3, U_k)} = -\frac{A_\lambda}{A},$$

$$\Delta(\eta_3, z_1 \quad z_{n-1}) = (-1)^k \sum_{\lambda=0}^{k} \Delta(\eta_3, U_0 \ldots U_{\lambda-1} U_{\lambda+1} \ldots U_{n-1}) A_\lambda$$

und

$$\Delta(V_k, z_1 \quad z_{n-1}) = (-1)^k A \Delta(U_0, U_1 \quad U_{n-1}).$$

Die obige Gleichung geht darnach in

$$a_0 \frac{d}{dx} \sum_{\lambda=0}^{n-1} \frac{\Delta(\eta_3, U_0 \ldots U_{\lambda-1}, U_{\lambda+1} \ldots U_{n-1})}{\Delta(U_0, U_1 \quad U_{n-1})} \frac{\varphi(\eta_3, U_\lambda)}{\varphi(\eta_3, U_k)} =$$
$$= -\varphi(\eta_3, U_k) \frac{\Delta(z_1, z_2 \ldots z_{n-1})^2}{\Delta(U_k, z_1 \quad z_{n-1})^2}$$

über, und man erhält hieraus, da die Determinante $\Delta(U_0, U_1 \quad U_{n-1})$ innerhalb $x_0\, x_1$ nirgends verschwindet, indem man zwischen ξ_1 und ξ_2 integrirt:

$$\sum_{\lambda\ 0}^{n-1} \left[\left(\frac{\Delta_\lambda}{\Delta}\right)_{\xi_2} - \left(\frac{\Delta_\lambda}{\Delta}\right)_{\xi_1} \right] \varphi(U_\lambda, \eta_3) = \varphi(\eta_3, U_k)^2 \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\Delta(z_1, z_2 \ldots z_{n-1})^2}{a_0 \Delta(U_k, z_1 \ldots z_{n-1})^2}\, dx$$

und daher

$$\varphi(\eta_1-\eta_2,\eta_3)=\varphi(\eta,\eta_3)=-\varphi(\eta_3,U_k)^2\int_{\xi_1}^{\xi_2}\frac{\Delta(z_1,z_2\ldots z_{n-1})^2}{a_0\,\Delta(U_k,z_1\ldots z_{n-1})^2}\,dx.$$

Also ist $\varphi(\eta,\eta_3)$ eine nicht verschwindende Grösse, die das Vorzeichen von $-a_0$ hat. Somit:

$$\int_{x_0}^{\xi_1}\Omega(\eta_1)\,dx+\int_{\xi_1}^{\xi_2}\Omega(\eta_3)\,dx \gtrless \int_{x_0}^{\xi_2}\Omega(\eta_2)\,dx,$$

je nachdem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^{(n)}\partial y^{(n)}}\lessgtr 0$$

ist.

XIV.

Man ertheile nun den Ordinaten einer beliebigen innerhalb $x_0\,x_1$ gelegenen Strecke ξ_1,ξ_2 eine beliebige Variation H, die aber innerhalb und an den Grenzen dieser Strecke sammt ihren $(2n-1)$ ersten Derivirten überall eindeutig ist. Nehmen $H, H' \quad H^{(n-1)}$ in ξ_1 der Reihe nach die Werthe $\lambda_1, \lambda_1' \quad \lambda_1^{(n-1)}$ und in ξ_2 bezüglich $\lambda_2, \lambda_2' \quad \lambda_2^{(n-1)}$ an, so lässt sich ein Integral η der Gleichung $\varphi(z)=0$ bestimmen, das sammt seinen $(n-1)$ ersten Devirten in ξ_1 und ξ_2 diese Werthe besitzt, da wegen der Voraussetzung, dass die Determinante $\Delta(U_0,U_1\ldots U_{n-1})$ weder in x_1 noch innerhalb $x_0\,x_1$ Null sei, auch die des hiebei aufzulösenden Gleichungssystems nicht verschwinden kann.

Setzt man nun

$$H-\eta=\zeta,$$

so wird

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2}\Omega(H)\,dx-\int_{\xi_1}^{\xi_2}\Omega(\eta)\,dx=\int_{\xi_1}^{\xi_2}[\Omega(\eta+\zeta)-\Omega(\eta)]\,dx=$$

$$=\int_{\xi_1}^{\xi_2}\Omega(\zeta)\,dx+\sum_{k=1}^{n}\int_{\xi_1}^{\xi_2}\Omega'(\eta^{(k)})\,\zeta^{(k)}\,dx.$$

Wendet man auf den Ausdruck unter dem zweiten Integralzeichen die Formel:[1]

[1] A. S. 2.

$$u^{(\mu)}v^{(\lambda)} = (uv^{(\lambda)})^{(\mu)} + \ldots + (-1)^{\nu}\binom{\mu}{\nu}(uv^{(\lambda+\nu)})^{(\mu-\nu)} + \ldots + (-1)^{\mu}uv^{(\lambda+\mu)}$$

an, so erhält man

$$\zeta^{(k)}\Omega'(\eta^{(k)}) = (-1)^k\zeta\frac{d^k\Omega'((k))}{dx^k} + (-1)^{k-1}\binom{k}{1}\frac{d}{dx}\left(\zeta\frac{d^{k-1}\Omega'(\eta^{(k)})}{dx^{k-1}}\right) + \\ + \ldots + \frac{d^k}{dx^k}(\zeta\Omega'(\eta^{(k)}),$$

und daher, wenn man berücksichtigt, dass $\zeta, \zeta' \quad \zeta^{(n-1)}$ in x_0 und x_1 verschwinden:

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2}\left[\sum_{k=1}^{n}\Omega'(\eta^{(k)})\zeta^{(k)}\right]dx = \int_{\xi_1}^{\xi_2}\left[\zeta\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{d^k\Omega'(\eta^{(k)})}{dx^k}\right]dx = \\ = \int_{\xi_2}^{\xi_1}\zeta\varphi(\eta)\,dx = 0,$$

da $\varphi(\eta) = 0$ ist. Somit ist

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2}\Omega(H)\,dx = \int_{\xi_1}^{\xi_2}\Omega(\eta)\,dx + \int_{\xi_2}^{\xi_1}\Omega(\zeta)\,dx.$$

Das zweite Integral bedeutet hiebei die II. Variation, die das vorgelegte erfährt, wenn man $y, y' \quad y^{(n-1)}$ im Intervalle $x_0\xi_1$ und $\xi_2 x_1$ unverändert lässt, hingegen auf der Strecke $\xi_1\xi_2$ bezüglich um $\zeta, \zeta' \quad \zeta^{(n-1)}$ ändert.

XV.

Ist daher ξ irgend eine Stelle zwischen ξ_1 und ξ_2, so hat man, wenn man mit $\overline{\eta}$ und $\overline{\zeta}$ die den früheren Grössen η und ζ in XIV entsprechenden bezeichnet, analog:

$$\int_{\xi_1}^{\xi}[\Omega(H) - \Omega(\overline{\eta})]\,dx = \int_{\xi_1}^{\xi}\Omega(\overline{\zeta})\,dx.$$

Daher ist:

$$\frac{d}{d\xi}\int_{\xi_1}^{\xi}[\Omega(H) - \Omega(\overline{\eta})]\,dx = \Omega(\overline{\zeta})_{x=\xi} \\ = a_0\,\overline{\zeta}^{(n)}\,\overline{\zeta}^{(n-1)},$$

da in ξ die $\bar{\zeta}, \bar{\zeta}' \quad \bar{\zeta}^{(n-1)}$ verschwinden. Je nachdem also $a_0 \gtrless 0$ ist, nimmt der Ausdruck

$$\int_{\xi_1}^{\xi} [\Omega(H) - \Omega(\bar{\eta})]\, dx$$

zu oder ab, wenn ξ von ξ_1 gegen ξ_2 wächst. Man hat also:

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} \Omega(H)\, dx \gtrless \int_{\xi_1}^{\xi_2} \Omega(\eta)\, dx,$$

je nachdem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^{(n)}\, \partial y^{(n)}} \lessgtr 0$$

ist. Aus dieser Bemerkung folgt:

Verschwindet $\Delta(U_0, U_1 \ldots U_{n-1})$ weder in x_1 noch innerhalb $x_0 x_1$, so bewirkt jede Variation des y, die sammt ihren $(2n-1)$ ersten Derivirten innerhalb und an den Grenzen von $x_0 x_1$ überall stetig ist, eine mit a_0 gleichbezeichnete zweite Variation des Integrals.

Macht nun die Variation H an den Stellen $\xi_1, \xi_2 \quad \xi_n$ endliche Unstetigkeitssprünge, so ist hienach, wenn $\Delta(U_0, U_1 \ldots U_{n-1})$ innerhalb $x_0 x_1$ nicht verschwindet und man mit η_k das Integral von $\varphi(z) = 0$ bezeichnet, für welches in ξ_k und ξ_{k+1}:

$$H = \eta,\ H' = \eta' \qquad H^{(n-1)} = \eta^{(n-1)}$$

ist, wenn ξ_0 und ξ_{n-1} bezüglich für x_0 und x_1 gesetzt werden,

$$\int_{x_0}^{x_1} \Omega(H)\, dx \gtrless \sum_{k=0}^{n} \int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} \Omega(\eta_k)\, dx,$$

je nachdem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^{(n)}\, \partial y^{(n)}} \lessgtr 0$$

ist.

Denn bezeichnet man mit $\bar{\eta}_k$ das Integral von $\varphi(z) = 0$, welches in x_0 sammt seinen $(n-1)$ ersten Derivirten verschwindet und wofür in ξ_k:

$$\bar{\eta}_k = \eta_k,\ \bar{\eta}_k' = \eta_k' \qquad \bar{\eta}_k^{(n-1)} = \eta_k^{(n-1)}$$

ist, so erhält man nach

$$\int_{x_0}^{\xi_1} \Omega(\eta_0)\,dx + \int_{\xi_1}^{\xi_2} \Omega(\eta_1)\,dx \gtrless \int_{x_0}^{\xi_2} \Omega(\overline{\eta}_2)\,dx$$

$$\int_{x_0}^{\xi_2} \Omega(\overline{\eta}_2)\,dx + \int_{\xi_2}^{\xi_3} \Omega(\eta_2)\,dx \gtrless \int_{x_0}^{\xi_3} \Omega(\overline{\eta}_3)\,dx$$

$$\int_{x_0}^{\xi_n} \Omega(\overline{\eta}_n)\,dx + \int_{\xi_n}^{x_1} \Omega(\eta_n)\,dx \gtrless 0,$$

je nachdem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^{(n)}\,\partial y^{(n)}} \lessgtr 0$$

ist. Daher ist

$$\sum_{k=0}^{n} \int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} \Omega(\eta_k)\,dx$$

und folglich auch

$$\int_{x_0}^{x_1} \Omega(H)\,dx \gtrless 0,$$

je nachdem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^{(n)}\,\partial y^{(n)}} \lessgtr 0$$

ist.

Diese Betrachtungen behalten offenbar auch ihre Giltigkeit, wenn $H^{(n)} \ldots H^{(2n-1)}$ zwar unendlich viele Unstetigkeitspunkte innerhalb $x_0 x_1$ besitzen, dieselben aber eine Punktmenge I. Gattung oder, wie man sich auch ausdrückt, eine discrete Mannigfaltigkeit bilden.

Das Ergebniss der gesammten Untersuchungen lässt sich sonach in den Satz zusammenfassen:

Ertheilt man im Integrale

$$\int_a^b f(x, y, y' \quad y^{(n)})\,dx,$$

wo $y, y' \quad y^{(n-1)}$ an den Grenzen a und b feste Werthe annehmen sollen, diesen Grössen Variationen $\eta, \eta' \ldots \eta^{(n-1)}$, die an und innerhalb der Grenzen überall stetig sind, während $\eta^{(n)} \quad \eta^{(2n-1)}$ daselbst eine discrete Mannigfaltigkeit von Unstetigkeitspunkten besitzen dürfen, so sind die sämmtlichen zugehörigen zweiten Variationen des Integrals dann und nur dann von Null verschieden und gleichbezeichnet, wenn die Determinante des einer Grenze conjugirten Integralsystems weder an der anderen Grenze noch innerhalb beider Grenzen verschwindet.

Wird diese Determinante innerhalb der Grenzen Null, so bestehen Variationen mit entgegengesetztem Vorzeichen; ist sie nicht innerhalb der Grenzen, aber an der oberen Grenze Null, so sind alle Variationen gleichbezeichnet, aber nicht mehr alle von Null verschieden.