Ueber das Wesen und die Wirkungen der Centrifugalkraft.

Von

Freiherr A. v. BURG.

Vortrag, gehalten am 1. März 1871.

Hochverehrte Versammlung!

Wenn ich es wage die Geduld und Aufmerksamkeit der hochansehnlichen Versammlung, und insbesondere der verehrten Damen heute für einen vielleicht etwas trocken scheinenden mathematischen Gegenstand in Anspruch zu nehmen, so ermuthigt mich dabei der Gedanke, dass der bekannte Wahrspruch: „variatio delectat" oder „Abwechslung gewährt Vergnügen" auch in diesem so intelligenten Zuhörerkreis seine volle Geltung und Billigung finden dürfte.

In das Bereich der Naturwissenschaften, deren Verbreitung Zweck und Aufgabe unseres Vereines ist, gehören vorzüglich auch Physik und Mechanik, welche sich mit den in der Natur auftretenden Kräften und den Gesetzen beschäftigen, nach welchen dieselben wirken.

Unter diesen Kräften spielt aber die sogenannte Centrifugalkraft, mit welcher ich Sie nun näher bekannt zu machen die Ehre haben werde, eine wichtige Rolle.

Ich glaube dabei auf Ihre Nachsicht rechnen zu dürfen, wenn ich mir erlaube, als Einleitung und zum besseren Verständnisse des Gegenstandes einige Definitionen und Grundbegriffe der Physik und Mechanik, besonders der Dynamik oder Bewegungslehre vorauszuschicken oder in Erinnerung zu bringen.

1. Bekanntlich nennt man Alles das, was sich unsern Sinnen als Raum erfüllend darstellt, Stoff oder Materie und verbindet damit zugleich den Begriff des Undurchdringlichen. Ein begrenzter Theil davon heisst physischer Körper, so wie ein unendlich kleines Theilchen eines Körpers materieller Punkt.

2. Die Quantität oder Menge des Stoffes, welche ein Körper besitzt, wird dessen Masse genannt; es ist bekannt, dass Körper von derselben Grösse oder von gleichem Volumen verschiedene Massen besitzen können; so enthält z. B. eine eiserne Kugel beiläufig achtmal so viel Masse als eine hölzerne von ganz gleicher Grösse, oder es ist, wie man sich ausdrückt, die eiserne Kugel achtmal dichter als die hölzerne.*)

---

*) Bei der Bewegung der Körper ist es oft hinreichend, statt des ganzen Körpers nur einen bestimmten Punkt desselben in Betracht zu ziehen. Soll z. B. die Bahn einer abgeschossenen Kugel bestimmt werden, so berücksichtigt man bei der Entwickelung nur ihren Mittel- oder Schwerpunkt und denkt sich die gesammte Masse der Kugel in diesem Punkte vereinigt oder gleichsam verdichtet. Sagt man daher, dass die Kugel eine Parabel beschreibe, oder dass unsere Erde, so wie die Planeten überhaupt, um die Sonne in Ellipsen herumlaufen, so versteht man darunter

3. So wie es in der reinen Mathematik gewisse Grundsätze gibt, welche sich nicht erweisen lassen, sondern von unserem Verstande als wahr und evident anerkannt werden müssen und Axiome genannt werden (wie z. B. wenn zwei Grössen einer dritten gleich sind, so sind diese unter sich gleich, oder: zwischen zwei Punkten gibt es nur eine einzige gerade Linie u. s. w.), eben so liegen der Mechanik und besonders der Dynamik ebenfalls mehrere Principien oder Fundamentalgesetze zu Grunde, welche sich keineswegs durch blosse Vernunftgründe ableiten lassen, sondern nur aus der Erfahrung, verbunden mit sorgfältigen, scharfsinnigen Beobachtungen von Thatsachen geschöpft werden konnten.

4. Das erste und wichtigste dieser, wohl schon von Galilei und Kepler geahnte, aber doch erst von Newton entdeckte und klar ausgesprochene Gesetz ist unter dem Namen des Gesetzes oder Principes der Trägheit der Körper bekannt und besteht darin, dass ein Körper den Zustand der Ruhe oder Bewegung, in welchem er sich eben befindet, nicht selbstthätig ändern, sondern nur durch eine äussere Ursache aus der Ruhe in Bewegung, oder aus der Bewegung in Ruhe versetzt werden kann. Da man eine solche äussere Ursache

---

gewöhnlich nur den Schwer- oder Mittelpunkt, welcher diese Linie beschreibt.

Von Manchen wird dieser Punkt, in welchem man sich die ganze Masse eines Körpers vereinigt vorstellt, ebenfalls materieller Punkt genannt.

Kraft nennt, so lässt sich das Gesetz der Trägheit oder besser des Beharrungsvermögens der Körper (als charakteristische Eigenschaft aller Materie) präciser in folgender Weise ausdrücken:

Der Zustand eines Körpers kann nur durch eine Kraft verändert werden; dabei muss man unter dem Worte Zustand eines Körpers die Ruhe, wenn er ruht, und dessen Richtung und Geschwindigkeit verstehen, wenn er sich bewegt.

Wenn daher bei einem Körper keine Veränderung dieser Art wahrgenommen wird, so ist auch keine Kraft vorhanden, welche auf denselben einwirkt, oder es wirken auf denselben gleichzeitige mehrere Kräfte, welche sich das Gleichgewicht halten oder gegenseitig aufheben.

5. Bewegt sich ein Körper in gerader Linie und mit gleichbleibender Geschwindigkeit (gleichförmige Bewegung), so geschieht dies in Folge einer früheren Kraft, welche zu wirken aufgehört hat, sie mag dabei durch längere Zeit, oder wie es z. B. bei einer Stosskraft der Fall ist, gleichsam nur während eines Augenblickes gewirkt haben.

6. Sehen wir dagegen einen Körper in einer krummen Linie oder mit ungleichförmiger Geschwindigkeit sich bewegen, so müssen wir dieses der stetigen Einwirkung einer Kraft zuschreiben, welche in dem Körper jeden Augenblick seine Richtung oder seine Geschwindigkeit oder auch beides zugleich ändert.

Dieses so wichtige Naturgesetz wurde in früherer Zeit einem eigenen, den Körpern innewohnenden Widerstreben zugeschrieben, ein Irrthum, welcher grossentheils durch die sonderbare Benennung dieser Eigenschaft der Körper entstand, indem man dieselbe: Kraft der Trägheit (vis inertiae) nannte.

7. Die Mechanik unterscheidet vorzüglich zwei Gattungen von Kräften, nämlich momentan wirkende oder Stosskräfte, welche in einem ruhenden Körper, wie bereits erwähnt, geradlinige, gleichförmige Bewegungen erzeugen, und constante Kräfte, welche auf einen in Bewegung befindlichen Körper fortwährend mit gleicher Stärke oder Intensität einwirken, und wie es z. B. bei frei fallenden Körpern der Fall, gleichförmig beschleunigte (oder wenn die Kraft der bereits vorhandenen Bewegung entgegenwirkt, gleichförmig verzögerte) Bewegungen hervorbringen.

8. Da uns das eigentliche Wesen der Kräfte selbst gänzlich unbekannt ist, so beurtheilen wir diese nur nach ihren Wirkungen, und zwar die erstere nach den Geschwindigkeiten, welche sie unter gleichen Umständen in Körpern von derselben Masse, sowie die letzteren oder constanten Kräfte (zufolge eines allgemein angenommenen Axioms) nach den Geschwindigkeiten, welche sie in Körpern von gleichen Massen in einerlei Zeit, am gewöhnlichsten nach der ersten Secunde hervorbringen (auch kann man die in dieser Zeit zurückgelegten Wege zu Grunde legen); da bei den dadurch entstehenden Bewegungen die Geschwindigkeiten genau so, wie die

Zeiten zunehmen, so nennt man die nach der 1. Secunde erlangte Geschwindigkeit des Körpers die Beschleunigung desselben und in dieser Beziehung die constante Kraft, welche dieselbe erzeugt, auch beschleunigende Kraft. So ist für uns die Schwerkraft eine solche Kraft, durch deren Einwirkung alle an der Erdoberfläche frei fallenden Körper (dabei von jedem Widerstande abgesehen) eine Beschleunigung von nahe 31 Fuss erhalten, d. h. die nach der 1. Secunde erlangte Geschwindigkeit ist so gross, dass, wenn in diesem Augenblicke die Schwerkraft zu wirken aufhörte, der Körper mit dieser Geschwindigkeit von 31 Fuss gleichförmig fortgehen oder fallen würde. Nach der zweiten Secunde beträgt die erlangte Endgeschwindigkeit $2 \times 31 = 62$, nach der zehnten Secunde $10 \times 31 = 310$ Fuss u. s. w.

9. Das zweite, ebenfalls von Newton entdeckte und von ihm als Axiom aufgestelltes Naturgesetz ist jenes der Wechselwirkung der Körper. Wirken nämlich zwei Körper auf einander, so sind Druck und Gegendruck einander gleich, und ihre Richtung steht senkrecht auf der Berührungsfläche, oder allgemein: wird ein materieller Punkt A von einem zweiten B in was immer für einer Entfernung vom ersteren gelegen mit einer gewissen Kraft angezogen oder abgestossen, so wird auch dieser zweite materielle Punkt B von dem ersteren A in ganz gleicher Weise und mit derselben Stärke angezogen oder abgestossen. Diese beiden Kräfte, von denen der einen (gleichgiltig welcher von beiden) eine Action, der anderen die Reaction beigelegt

wird, sind nämlich einander gleich und wirken nach der Geraden AB in entgegengesetzter Richtung.*)

Bei den Beobachtungen der Himmelskörper gelangte man zu dem merkwürdigen Resultate, dass alle ihre Bewegungen durch Kräfte hervorgebracht werden können, von denen je zwei einander gleich und in jener

*) Newton sagt: „dass zwei Körper, welche auf einander einwirken, sei dieses durch Stoss, Druck, Anziehung, Abstossung u. s. w., gegenseitig eine Action aufeinander ausüben, welche vermöge der hiebei stattfindenden Relativität, beide eben so gut eine Wirkung (actio) als eine Gegenwirkung (reactio) auf einander ausüben, und dass zuvor bestimmt werden müsse, welcher von beiden eine Wirkung ausübe, um zu wissen, dass alsdann dem anderen die Gegenwirkung zukomme."

Wollte ich z. B. bei einer Wage, in deren einer Schale ein Gewicht von 1 Pfund liegt, durch meine Muskelkraft das Gleichgewicht herstellen, so müsste ich die leere Schale mit einer Kraft von 1 Pfund abwärts drücken, wobei ich einen ganz gleichen Gegendruck von 1 Pfund nach aufwärts erfahre oder empfinde. Wollte ich dagegen diese Schale, während die andere schwebende Schale mit 1 Pfund belastet wird, am Aufwärtssteigen hindern, so müsste ich ebenfalls wieder mit einer Kraft von 1 Pfund abwärts drücken; allein im ersteren Falle übe ich eine Action und im letzteren eine Reaction aus, und es sind diese offenbar in beiden Fällen einander gleich und entgegengesetzt.

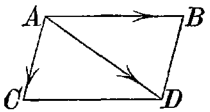
Ein ähnliches Beispiel bietet auch die Anziehung zwischen einem Magnete und einem Stücke Eisen, wobei es in Bezug auf den Effect ganz gleichgiltig ist, ob man die Wirkung (actio) dem Magnete oder dem Eisen beilegt.

geraden Linie, welche zwei dieser Körper mit einander verbindet, nach entgegengesetzter Richtung wirken.

10. Das letzte Natur- oder Bewegungsgesetz endlich, welches ich hier noch anführen muss, ist das Gesetz der Unabhängigkeit der gleichzeitig auf einen Körper wirkenden Kräfte.

Wirken nämlich auf einen Körper oder materiellen Punkt gleichzeitig mehrere Kräfte, wovon jede in demselben eine gewisse Bewegung erzeugt, so ist die nach einer bestimmten Zeit in demselben hervorgebrachte Ortsveränderung genau dieselbe, als ob diese Kräfte durch eine eben so lange Zeit, jedoch eine nach der andern, jede von der andern unabhängig gewirkt hätten. Dasselbe Gesetz gilt auch, wenn Kräfte auf einen bereits in Bewegung befindlichen Körper oder materiellen Punkt wirken. *)

*) Werden z. B. als einfachsten Fall auf einen materiellen Punkt A gleichzeitig zwei geradlinige Bewegungen nach AB und AC übertragen, was u. A. dadurch geschehen kann, dass sich der Punkt A in der auf einem Lineal gezogenen Geraden AB bewegt, während dasselbe gleichzeitig mit sich parallel bleibend nach der Richtung AC fortrückt; so findet man den Ort, in welchem sich dieser Punkt am Ende einer beliebigen Zeit t befindet, dadurch, dass man zuerst nach dem einen Bewegungsgesetz den Weg AC bestimmt, welchen der Punkt A oder das Lineal in dieser Zeit zurücklegt dessen Lage sofort nach dieser Zeit die mit AB gezogene



11. Indem ich nun auf mein eigentliches Thema übergehe, will ich zuerst zeigen, dass eine krummlinige Bewegung überhaupt entsteht, wenn auf einen in Bewegung befindlichen materiellen Punkt eine Kraft unter irgend einem Winkel durch längere Zeit einwirkt.

Dazu nehme ich an, dass auf den materiellen Punkt A, welcher (als einfachster Fall) bereits durch eine frühere Kraft eine Bewegung nach der Richtung $A\,T$ erhalten haben soll, welche Bewegung daher (nach 5) eine gleichförmige ist, eine in O befindliche Kraft wirke, die denselben fortwährend gegen diesen Punkt

---

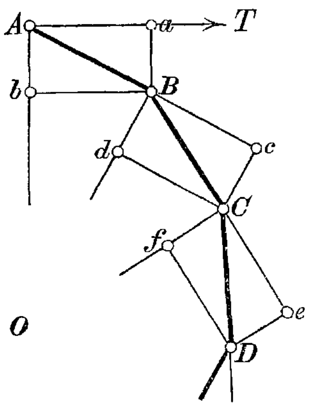
Parallele CD darstellt. Hierauf sucht man nach dem zweiten Bewegungsgesetze den Weg $A\,B$, welchen der bewegliche Punkt in dieser Zeit t zurücklegt, und trägt diese Länge auf der Geraden CD von C bis D auf, so ist dieser Punkt D sofort der Ort, in welchem sich der materielle Punkt am Ende der Zeit t befindet.

Lässt man den beweglichen Punkt A die beiden Bewegungen anstatt gleichzeitig eine nach der andern, z. B. zuerst jene $A\,B$ und hierauf die zweite auf der mit $A\,C$ durch B gezogenen Parallelen $B\,D = A\,C$, oder auch umgekehrt jene $A\,C$ zuerst, und hierauf die zweite $C\,D = A\,B$ ausführen, so erhält man wieder in beiden Fällen den Punkt D als Ort, wo sich der materielle Punkt nach Verlauf der Zeit t befindet.

Es lässt sich leicht zeigen, dass der wirkliche Weg, welchen der bewegliche Punkt A während der Zeit t zurücklegt, die Diagonale $A\,D$ des Parallelogrammes $A\,B\,D\,C$ ist.

Aus diesem Grunde wird das hier angeführte Gesetz auch das Parallelogramm-Gesetz genannt.

anzieht. Besitzt der materielle Punkt in der Richtung $A\ T$ eine solche Geschwindigkeit, dass derselbe in einer gewissen Zeit, sagen wir in 1 Secunde den Weg $A\ a$, und die anziehende Kraft in O eine solche Stärke, dass sie (wenn sie allein wirksam wäre) diesen Punkt in der nämlichen Zeit durch den Weg $A\ b$ ziehen würde, so beschreibt der bewegliche Punkt durch das Zusammenwirken beider Bewegungen in derselben Zeit von 1 Secunde nach dem Satze in 10 die Diagonale $A\ B$ des Parallelogramms $A\ a\ B\ b$.



Würde nach dieser Zeit die anziehende Kraft zu wirken aufhören, so würde der materielle Punkt vermöge seiner Trägheit (4.) in der Richtung $A\ B$ gleichförmig fortgehen und in der folgenden Secunde den Weg $B\ c = A\ B$ zurücklegen. Da jedoch die Anziehungskraft (welche gleich geblieben, oder auch während der 2. Secunde einen andern Werth haben kann) den beweglichen Punkt z. B. um das Stück $B\ d$ (wenn sie allein wirksam wäre) bewegen würde; so ist wieder (10.) die Diagonale $B\ C$ der Weg des Punktes während der 2. Secunde.

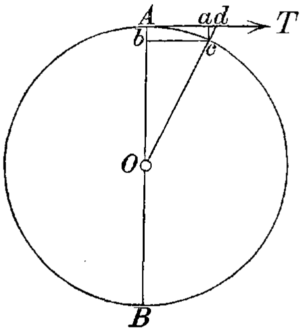
Auf gleiche Weise würde ohne weitere Einwirkung der Anziehungskraft in O der materielle Punkt in der 3. Secunde den Weg $Ce = BC$ zurücklegen, während er in der That wieder in dieser Zeit die Diagonale CD beschreibt, wenn Cf der Weg ist, welchen der Punkt in Folge der Anziehungskraft in dieser Zeit zurücklegen würde u. s. w.

Aus dieser Entwickelung folgt nun zweierlei: einmal, dass auf diese Weise der materielle Punkt eine gebrochene Linie oder ein Polygon beschreiben würde, und dann auch, dass die Seiten dieses Polygons 2-, 3-, 10-, 100mal kleiner werden, wenn man statt der ganz willkürlich angenommenen Zeit von 1 Secunde, dafür $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_{10}$, $^1/_{100}$ Secunde zu Grunde legt. Bei der Annahme von unendlich kleinen Zeittheilchen, was eigentlich erst dem nicht absatzweise, sondern continuirlichen Fortwirken der Anziehungskraft genauer entspricht, werden auch diese Diagonalen oder Polygonseiten unendlich klein und bilden dann nach geometrischer Anschauung eine continuirliche krumme Linie.

Die Form dieser krummen Linie hängt natürlich sowohl von der Entfernung des Punktes A vom Anziehungspunkte O, von der Grösse des Winkels OAT, von der Geschwindigkeit Aa der gleichförmigen Bewegung des materiellen Punktes, ferner von der Grösse der Beschleunigungen Ab, Bd, sowie auch endlich davon ab, ob diese einander gleich oder von einander verschieden sind, d. h. ob die anziehende Kraft constant oder veränderlich ist.

Man nennt die Bewegung eines Körpers oder materiellen Punktes, welcher ursprünglich eine gewisse Richtung und Geschwindigkeit erhalten hat, und dann durch eine Kraft gegen einen ausserhalb dieser Richtung gelegenen Punkt hingezogen wird, eine Centralbewegung; die Kraft, welche diese Anziehung bewirkt, heisst Central- oder auch Centripetalkraft; der feste Punkt, gegen welchen der Körper gezogen wird, Mittelpunkt der Anziehung, so wie die gerade Linie, welche diesen Punkt mit jenem Punkt verbindet, in welchem sich der materielle Punkt in seiner Bahn eben befindet, Leitstrahl oder radius vector.

12. Es wurde vorhin angedeutet, von was die Form oder Gattung der krummen Linie (ob Kreis, Ellipse, Parabel u. s. w.) abhängt, welche der materielle Punkt als Bahnlinie beschreibt. Hier wollen wir nun den einfachsten Fall behandeln und die Bedingungen aufsuchen, unter welchen diese Bahn ein Kreis sein wird.



Es werde zu diesem Ende in der Nebenfigur mit dem Halbmesser OA aus O ein Kreis beschrieben und im Punkte A die Tangente AT (welche also auf dem Halbmesser AO senkrecht steht) gezogen. Es werde ferner angenommen, dass der materielle Punkt nach der Richtung der Tangente $A\,T$ bereits eine gleichförmige Bewegung besitze und sich im Mittelpunkte O eine Kraft befinde, welche den materiellen Punkt von A angefangen fortwährend mit gleicher Stärke nach diesem Punkte O hinzieht.

Ist $A\,d$ der Weg, welchen der bewegliche Punkt vermöge seiner Trägheit gleichförmig gegen $A\,T$ in einer beliebigen Zeit t zurücklegen würde, so muss die in O wirksame ablenkende Kraft, soll der materielle Punkt den Kreisbogen $A\,c$ beschreiben, denselben in dieser Zeit t um das Stück $d\,c$ gegen den Mittelpunkt des Kreises ziehen.

Zieht man $a\,c$ mit $A\,O$, $b\,c$ mit $A\,T$ parallel und nimmt die Zeit t als unendlich klein an, so werden auch $A\,d$, $A\,a = b\,c$ und der Bogen $A\,c$, welcher dann mit seiner Sehne verwechselt, also als eine gerade Linie angesehen werden kann, ebenfalls unendlich klein und man kann $a\,c = A\,b$ statt $d\,c$ nehmen (weil ihre Differenz unendlich klein, 2. Ordnung ist).

Nach einem bekannten geometrischen Satz ist das auf den Durchmesser $A\,B$ gezogene Perpendikel $b\,c$ die mittlere geom. Proportionale zwischen den beiden Abschnitten $A\,b$ und $B\,b$, d. i. $A\,b : b\,c = b\,c : B\,b$, woraus die Gleichung folgt:

$$A\,b = \frac{\overline{b\,c}^2}{B\,b} = \frac{\overline{b\,c}^2}{A\,B - A\,b}$$

oder da unter der Annahme einer unendlich kleinen Zeit auch $A\,b$ unendlich klein ist und gegen den Durchmesser $A\,B$ verschwindet, auch

$$A\,b = \frac{\overline{b\,c}^2}{A\,B}$$

Ist nun v die Geschwindigkeit, welche der materielle Punkt in der Richtung $A\,T$ erhalten hat, so ist nach den Gesetzen der gleichförmigen Bewegung $A\,d$ oder auch (vorige Bemerkung) $A\,a = b\,c = v\,t$, folglich nimmt die vorige Gleichung, wenn man zugleich den Halbmesser des Kreises mit r bezeichnet, also $A\,B = 2\,r$ setzt, die Form an:

$$A\,b = \frac{v^2\,t^2}{2\,r} = c\,d \qquad (\alpha)$$

es muss also die in O wirksame, als constant angenommenen Anziehungs- oder (8.) Beschleunigungskraft eine solche Intensität besitzen, dass sie den materiellen Punkt in der unendlich kleinen Zeit t durch den Weg $A\,b = c\,d$ bewegen kann. Um aber die Grösse dieser Kraft, die wir mit F bezeichnen wollen, selbst kennen zu lernen, sei M die Masse und P das Gewicht des beweglichen materiellen Punktes. So wie bei unserer Kreisbewegung die Masse M durch die constante Kraft F, so wird beim freien Fall dieselbe Masse durch die Schwerkraft oder durch die constante Kraft P gezogen, wobei der Fallraum während der Zeit t nach bekannten Gesetzen durch $s = \frac{g\,t^2}{2}$ ausgedrückt wird, wenn $g =$ 31 Fuss $=$ 9·81 Met. die bekannte Beschleunigung der Schwere bezeichnet. (8.)

Da sich nun aber constante Kräfte, welche in gleichen Massen einwirken, so wie die in gleichen Zeiten zurückgelegten Wege oder ihre Beschleunigungen (8.) verhalten, so folgt die Proportion $F : P = c\,d : \frac{g\,t^2}{2}$ oder für $c\,d$ den Werth aus der obigen Gleichung (α) gesetzt:

$F : P = \frac{v^2}{r}\,\frac{t^2}{2} : g\,\frac{t^2}{2}$ oder mit $\frac{t^2}{2}$ abgekürzt, auch $F : P = \frac{v^2}{r} : g$ (β), woraus sofort für die gesuchte Anziehungs- oder Centripetalkraft F der Ausdruck folgt:

$$F = \frac{P\,v^2}{r\,g} \quad (1)$$

Aus dieser Formel erhält man die Kraft F in denselben Gewichtstheilen (Pfunden, Lothen, Kilogrammen u. s. w.), in welchen man das Gewicht P des Körpers oder materiellen Punktes ausdrückt; setzt man für g den Weg von 31 Fuss oder 9·81 Meter, so muss man auch die Geschwindigkeit v beziehungsweise in Fuss- oder Metermaass ausdrücken.

Man kann das Gewicht P eines Körpers von der Masse M auch durch $M\,g$ ausdrücken, wenn g wieder die Beschleunigung der Schwere (8.) bezeichnet.*)

---

*) Nach mechanischen Gesetzen erzeugt eine constante Kraft k, wenn sie in einen Körper von der Masse m durch einige Zeit wirkt, die Beschleunigung $p = \frac{k}{m}$.

Lässt man nun einen Körper vom Gewichte P und der Masse M frei fallen, so ist P die einwirkende Kraft und g die hervorgebrachte Beschleunigung, also hat man

Setzt man diesen Werth Mg statt P in dieser Formel und kürzt mit g ab, so wird auch:

$$F = \frac{Mv^2}{r} \quad (2)$$

in welcher Form keineswegs mehr das Gewicht P, sondern blos die träge Masse M des Körpers oder materiellen Punktes erscheint, zum Beweise, dass die Kraft F blos von der Masse und nicht von dem Gewichte eines Körpers, der also auch gewichtslos sein könnte, abhängt.

Aus der vorigen Proportion (β) folgt, dass, so wie g die Beschleunigung von P ist, so auch $\frac{v^2}{r}$ jene für F sein muss; sie wird deswegen die Centripetalbeschleunigung genannt; wird diese mit p bezeichnet, so ist also $p = \frac{v^2}{r}$. (n.)

Da sich die Bedingungen, welche im 1. Augenblicke der Einwirkung der Kraft F auf den materiellen Punkt in A vorhanden waren, nämlich das Ziehen der Kraft F in der in (1) oder (2) ausgedrückten Stärke nach dem Punkte O senkrecht auf die Richtung der ursprünglichen Geschwindigkeit des materiellen Punktes, wodurch also die Geschwindigkeit nicht verändert wird, in allen folgenden Zeittheilchen wiederholen, oder die nämlichen bleiben, so bleibt auch die Krümmung der Bahnlinie fortwährend dieselbe,

---

in dem vorigen Ausdrucke p mit g, k mit P und m mit M zu vertauschen; dadurch erhält man $g = \frac{P}{M}$ oder $P = Mg$.

eine Eigenschaft, welche unter allen krummen Linien nur dem Kreis zukommt.

Es beschreibt daher der materielle Punkt von der Masse M in der That mit der gleichbleibenden Geschwindigkeit v den Kreis vom Halbmesser r, wenn eine im Mittelpunkte O befindliche constante Kraft F von der in (2) ausgedrückten Grösse unter den genannten Bedingungen auf den materiellen Punkt wirkt.

13. Eine solche Kreisbewegung kann unter Anderm dadurch hervorgebracht werden, dass man das eine Ende eines ausgespannten Fadens an einen festen Punkt O, das andere z. B. an eine Kugel befestigt und dieser rechtwinklig zur Richtung des Fadens eine gewisse Geschwindigkeit ertheilt.*)

Durch den Faden wird die Kugel verhindert, die ihr ertheilte Geschwindigkeitsrichtung zu verfolgen und sich von dem Punkte O zu entfernen, also gezwungen sich um diesen festen Punkt als Mittelpunkt eines Kreises vom Halbmesser der Fadenlänge gleichförmig herum zu bewegen.

Hat z. B. die Kugel ein Gewicht von 31 Loth, der Faden eine Länge von 3 Fuss, und beträgt die der Kugel mitgetheilte Geschwindigkeit 6 Fuss per Secunde, so findet man die Kraft F, welche auf die Kugel anziehend wirken muss, aus der vorigen Formel (1), wenn

*) Dabei soll aber die Wirkung der Schwere ausgeschlossen sein, was man dadurch erreichen kann, dass man der Kugel ihre kreisförmige Bahnlinie auf einem glatten Tische (wobei nur noch der Reibungswiderstand eintritt) durchlaufen lässt.

man in derselben $P = 31$, $v = 6$ und $r = 3$, so wie (8.) $g = 31$ setzt. Mit diesen Werthen erhält man:

$$F = \frac{31.6^2}{3.31} = 12 \text{ Loth.}$$

Der Faden muss also bei diesem Umschwunge beständig eine Kraft oder einen Zug von 12 Loth auf die Kugel gegen den festen Punkt O hin ausüben.

14. Nach dem oben (in 9.) angeführten Gesetze der Wechselwirkung ist aber auch umgekehrt der von der Kugel auf den Faden ausgeübte Zug nach aussen, welcher zugleich auch auf den Punkt O übertragen wird, genau eben so gross, und dieser Zug oder diese Kraft ist es eben, welche man Centrifugalkraft (auch Flieh- oder Schwungkraft) nennt.

Im vorliegenden Beispiele wird der Faden durch die Centrifugalkraft F gerade so gespannt, als wäre derselbe an einem Punkte befestigt und an dem Faden ein Gewicht von 12 Loth aufgehängt; könnte er dieses Gewicht nicht tragen, so würde er auch sofort durch diese Centrifugalkraft abgerissen werden.

Würde der Faden während dieser Kreisbewegung abgeschnitten oder von dem festen Punkte O losgemacht, so würde die Bewegungsrichtung der Kugel, die in jedem Augenblicke mit einer Tangente des Kreises zusammenfällt, nicht mehr abgeändert, sondern geradlinig, nämlich nach der Richtung jener Tangente, welche dem Punkte des Kreises entspricht, an welchem er sich eben befindet, mit der Geschwindigkeit v fortgeschleudert, wie dies in der That auch bei der Schleuder der Fall ist.

Wie man sieht ist die sogenannte Centrifugalkraft nichts anders als die Reaction einer bewegten trägen Masse gegen eine Abänderung ihrer Richtung, wodurch diese Kraft eigentlich erst hervorgerufen wird.

Bringt man die gezwungene Bewegung der Kugel anstatt durch den Faden mittelst einer kreisförmig gebogenen glatten Röhre oder eines Canales hervor, so ist F der Druck, mit welchem die äussere Wand des Canales die Kugel in normaler Richtung nach einwärts presst und eben so gross ist auch der Druck, mit welchem diese Wand von der Kugel nach auswärts gedrückt wird.

Hätte der Canal eine andere als die Kreiskrümmung, so würde die Centrifugalkraft, also auch die Pressung von und gegen die Wand nicht mehr in allen Punkten der Bahn dieselbe sein, sondern auch schon nach der Grösse des Krümmungshalbmessers r (der obigen Formel 1) wechseln, und zwar wenn alles übrige gleich bliebe, in demselben Verhältnisse ab- oder zunehmen, in welchem dieser Halbmesser grösser oder kleiner wird.

So findet man z. B. dass, wenn der Körper oder materielle Punkt eine Ellipse beschreiben soll, die Stärke der Centripetalkraft, je nachdem diese im Mittelpunkte oder in einem der beiden Brennpunkte ihren Sitz hat, beziehungsweise im einfachen geraden, oder im quadratisch umgekehrten Verhältnisse mit der Entfernung des materiellen Punktes von dem Anziehungspunkte stehen müsse.

Dieselbe Grösse besitzt dann auch die entsprechende Centrifugalkraft.

15. Was nun den Einfluss der Centrifugalkraft auf die täglich vor unsern Augen stattfindenden Bewegungen betrifft, so möchte ich zuerst auf das von dem unsterblichen Newton entdeckte Gravitations- oder Gesetz der allgemeinen Schwere aufmerksam machen.

So wie nämlich alle Körper auf unserer Erde von dieser angezogen werden, was wir die irdische Schwere nennen, eben so ziehen sich zufolge dieses entdeckten Gesetzes auch die sämmtlichen Himmelskörper gegenseitig und zwar im geraden Verhältnisse ihrer Massenproducte und im umgekehrten quadratischen Verhältnisse ihrer gegenseitigen Entfernungen an. So wird der Mond von der Erde, diese selbst wieder von der Sonne u. s. w. angezogen, oder es gravitiren alle Himmelskörper oder Planeten gegen einander.*)

---

*) Der vom Schicksale verfolgte grosse Astronom Kepler (geboren in Würtemberg 1571), berühmt durch die Entdeckung der drei bekannten, nach ihm benannten Gesetze der Planetenbewegungen, bemühte sich vergebens die Ursache dieser Bewegungen zu ergründen. Erst dem grossen erhabenen Geist eines Newton (geboren zu Woolsthorpe in Lincolnshire 1642) war es vorbehalten, den Schleier, welcher bis dahin das grosse Geheimniss der Naturkräfte verhüllte, in Etwas zu lüften und einen Blick, wie es vor ihm noch keinem menschlichen Geiste gelungen, in die

Nach diesem Gesetze wird z. B. von der Schwerkraft unserer Erde der Mond, welcher bei seinem Umlaufe um die Erde nahezu einen Kreis beschreibt, dessen Mittelpunkt mit dem Erdmittelpunkt zusammenfällt und dessen Halbmesser beinahe 60mal so gross als der Erdhalbmesser ist, mit einer $60 \,.\, 60 = 3600$mal geringeren Kraft angezogen als die Körper an der Erdoberfläche; dadurch wird aber auch dessen Fallbeschleunigung (8.) in demselben Verhältnisse kleiner, also statt 31 Fuss oder 9·81 Meter nur $\frac{31}{3600}$ Fuss oder nahe $^1/_{10}$ Zoll, oder in Metermaass $\frac{9{\cdot}81}{3600} = 0{\cdot}0027$ Meter oder nahe 2·7 Millimeter.

Bestimmt man nun für diese Kreisbewegung des Mondes die Centripetal- oder Centrifugalkraft, so muss man in der obigen Formel (2) $r = 382.000.000$ Meter, welches in runder Zahl der Halbmesser der Mondbahn ist, und $v = 1020$ Meter setzen, welches die Geschwindigkeit oder der Weg des Mondes per Secunde ist, weil er seine Bahn in 27 Tagen, 7 Stunden, 43 Minuten, 11 Secunden gleichförmig durchläuft.

---

geheime Werkstätte der Natur zu werfen. Newton soll dieses so wichtige Naturgesetz schon im Jahre 1666 entdeckt haben, um welche Zeit er sich von Cambridge (er bezog die dortige Universität im Jahre 1660 und wurde an dieser im J. 1669 zum Professor der Mathematik ernannt), wo die Pest ausgebrochen war, auf sein Landgütchen nach Woolsthorpe zurückzog und durch den Fall eines Apfels von einem Baume veranlasst worden sein, über die Gesetze der wechselseitigen Anziehungen näher nachzudenken.

Mit diesen Werthen erhält man aus der genannten Formel (2), wenn M die Masse des Mondes bezeichnet, für die Centripetal- und eben so grosse Centrifugalkraft:

$$F = 0{\cdot}0027 \text{ M.}$$

sowie die nach dem Mittelpunkte des Kreises gerichtete Centripetalbeschleunigung (n in 12) $p = 0{\cdot}0027$ Meter oder 2·7 Millimeter.

Da diese letztere Zahl genau mit der obigen aus dem Gravitationsgesetz gefundenen übereinstimmt, so folgt, dass die irdische Schwere genau der Centripetalkraft entspricht, welche den Mond in seiner Bahn um die Erde erhält; dazu bedurfte es nur noch einer anfänglichen Stosskraft, welche dem Monde in einer tangentionellen Richtung eine Geschwindigkeit von $v =$ 1020 Meter ertheilte.

Da die durch diesen Mondumlauf hervorgerufene Centrifugalkraft ebenfalls den vorigen Werth $F =$ 0·0027 M. besitzt, so würde, wenn man sich die Anziehungskraft der Erde als nicht verhanden denkt, und dafür annimmt, dass der Mond durch einen unzerreissbaren Faden mit dem festgedachten Mittelpunkte der Erde verbunden sei, der Faden mit derselben Stärke F gespannt werden.

16. Ein nicht minder interessantes Beispiel über den Einfluss der Centrifugalkraft bietet die Rotation unserer Erde um ihre Achse.

Da durch diese Achsendrehung für jeden materiellen Punkt der Erdoberfläche eine Centrifugalkraft hervorgerufen wird, die der Schwerkraft unterm Aequator direct, unter den Parallelkreisen schief entgegenwirkt, so muss dadurch auch das Gewicht der Körper mehr oder weniger vermindert werden. Bezeichnet man mit R und r die Halbmesser des Aequators und irgend eines Parallelkreises, so findet man aus den obigen Formeln (1) oder (2), da alle Punkte die gleiche Umlaufszeit besitzen, dass sich die Centrifugalkräfte der in diesen Kreisen liegenden materiellen Punkte von gleichen Gewichten oder Massen, wie diese Halbmesser R und r verhalten, diese daher unterm Aequator am grössten, also auch hier die Gewichtsabnahme am bedeutendsten ist.

Man findet durch eine einfache Rechnung, dass die Beschleunigung des freien Falles der Körper (wornach wie in (8) bemerkt, die Intensität der Schwere beurtheilt wird) am Aequator um ungefähr 34 Millimeter kleiner ist, als sie sein würde, wenn sich die Erde nicht um ihre Achse drehte. Diese Zahl nimmt natürlich mit den zunehmenden Breitegraden ab und wird bei 90 Grad oder unter den Polen gleich Null.

Eine zweite Folge dieser Achsendrehung und der dadurch entstehenden Centrifugalkraft ist die, dass die in den Parallelkreisen aus den Centrifugalkräften entstehenden horizontalen gegen den Aequator hingerichteten Seitenkräfte, die leicht beweglichen Wassertheilchen der Meeresoberfläche gegen den Aequator hingedrängt werden, und sich dort zur Herstellung des Gleichgewichtes so weit erheben, dass an jeder Stelle die Richtung der Mittelkraft aus der Schwer- und Centrifugalkraft gegen diese Wasserfläche rechtwinklig gerichtet ist; dadurch hat die Erde eine von der Kugelgestalt in etwas abweichende Form, nämlich ein an den Polen abgeplattetes Rotations-Ellipsoid angenommen, wobei der Halbmesser des Aequators nahe um 20.000 Meter grösser als die Entfernung der Pole vom Erdmittelpunkte ist.*)

17. Bei dem obigen Beispiele (13), in welchem eine 31 Loth schwere Kugel an einen 3 Fuss langen Faden mit einer Geschwindigkeit von 6 Fuss im Kreise herumgeschwungen wurde, hatte der Faden blos die Spanung von 12 Loth auszuhalten; allein da, wie die Formel (1) oder (2) zeigt, die Centrifugalkraft im quadratischen Verhältnisse der Geschwindigkeit zunimmt, so wird bei einer 2-, 3- .... 10mal grösseren Geschwindigkeit diese Kraft, wenn alles Uebrige gleich bleibt, 4-, 9- .... 100mal grösser, folglich der Faden beziehungsweise mit 48, 108

---

*) Da die Schwerkraft unterm Aequator durch die Centrifugalkraft nahezu um den 289. Theil vermindert wird, und diese Kraft, wie aus den Formeln (1) und (2) erhellt, im quadratischen Verhältnisse mit der Umlaufsgeschwindigkeit zunimmt, so würde, wenn sich die Erde 17mal schneller als gegenwärtig um ihre Achse drehen würde, die Centrifugalkraft 17 . 17 = 289mal so gross, also die ganze Schwerkraft aufgehoben werden, so dass die Körper dann unterm Aequator gar kein Gewicht mehr hätten. Ballet- oder Grotesktänzer würden dann allerdings ungeheure Sprünge machen können, aber dabei nicht mehr zur Erde fallen, sondern in der Luft schweben bleiben.

.... 1200 Loth (= $37\frac{1}{2}$ Pfd.) gespannt, so dass er im letzten Falle, selbst wenn seine Tragkraft bis 37 Pfund ginge, bei diesem raschen Umschwung der Kugel dennoch abreissen müsste.

Man sieht hieraus, dass es selbst für den stärksten Faden eine Umlaufsgeschwindigkeit geben muss, bei welcher derselbe durch die hervorgerufene Centrifugalkraft abgerissen wird.

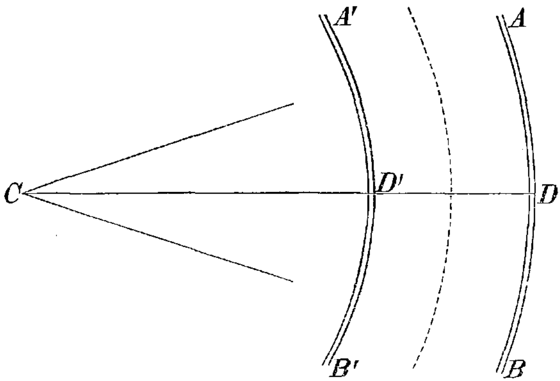
Man begreift nun auch, wie es möglich ist, dass sich bei sehr schnell umlaufenden gusseisernen Schwungrädern, sowie bei Mühl- oder Schleifsteinen, durch die Centrifugalkraft, wenn sie grösser als die Cohäsionskraft wird, einzelne Theile losgerissen und mit grosser Gewalt fortgeschleudert werden können, wobei nicht selten auch das Leben der Arbeiter gefährdet sein kann.

Durch dieselbe Kraft werden bei Wasserrädern das sich anhängende (oder das zuviel in die Zellen geleitete) Wasser; bei auf kothigen Strassen laufenden Wagenrädern, Erdklumpen in tangentialer Richtung weggeschleudert.

Fuhrwerke, welche schnell um eine Ecke, d. i. in starker Krümmung (in zu kurzer „Reih") fahren, können, besonders bei hochliegendem Schwerpunkte, leicht umstürzen.

Um solchen Unfällen bei Eisenbahn-Krümmungen vorzubeugen, legt man den äusseren Schienenstrang höher als den inneren und zwar nach bestimmten Regeln um so höher, je kleiner der Krümmungshalbmesser (d. i. je schärfer die Krümmung) und je grösser die Geschwindigkeit ist, mit welcher die Krümmung durchfahren werden soll. In der Regel wird, namentlich auch um ein Entgleisen zu verhüthen, in solchen Krümmungen die Fahrgeschwindigkeit gemässigt.

Um diesen Vorgang zu erläutern, wollen wir annehmen, es sei auf einer Eisenbahn eine Krümmung, für welche $C\,D$ und $C\,D'$ der untenstehenden Figur die Krümmungshalbmesser des äussern und innern Schienen-



stranges $A\,B$ und $A'\,B'$ sein mögen, mit einem Eisenbahnwaggone zu durchfahren.

In Fig. 1 liegen beide Schienenstränge in einerlei Niveau oder gleich hoch, in Fig. 2 dagegen ist der äussere erhöht.

Stellt nun in beiden Fällen die Länge $O\,a$ der durch den Schwerpunkt O des Wagens gehenden hori-

Fig. 1.

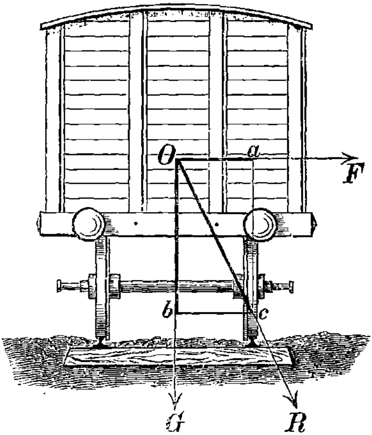
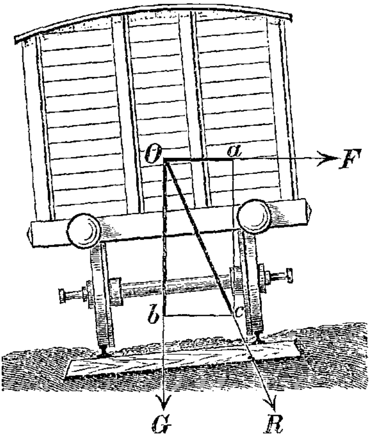


Fig. 2.



zontalen Linie, die in dieser Richtung nach aussen wirkende Centrifugalkraft F (diese Kraft wirkt nämlich auf einen Körper gerade so, als ob dessen gesammte Masse im Schwerpunkte concentrirt wäre), so wie $O\,b$ das durch denselben Punkt O in verticaler Richtung wirkende Gewicht G des beladenen Waggons vor, so setzen sich diese beiden Kräfte F und G nach dem Parallelogrammgesetze (10) in der Art zusammen, dass in beiden Fällen die Diagonale $O\,c$ die Grösse und Richtung der Resultirenden R vorstellt.

Wie nun aus den Figuren zu ersehen, fällt in Fig. 1 die Richtung dieser Mittelkraft R ausserhalb, dagegen in Fig. 2 innerhalb der durch die Schienenstränge gebildeten Basis des Wagens, folglich muss nach der Stabilitätslehre der Waggon im ersten Falle nach aussen hin umstürzen, während er im zweiten Falle seine sichere Lage beibehält. Auch lehrt schon der blosse Augenschein, dass der äussere Schienenstrang zur Sicherung der Stabilität um so höher gelegt werden muss, je grösser die Centrifugalkraft F gegen das Gewicht G d. i. je grösser in der Zeichnung die Linie $O\,a$ gegen jene $O\,b$ ist, und je höher der Schwerpunkt O liegt. Dass aber $O\,a$ um so grösser wird, je grösser die Fahrgeschwindigkeit v und je kleiner der Krümmungshalbmesser r wird, folgt aus den bereits oft citirten Formeln (1) oder (2) im Absatze 12.

In ganz gleicher Weise neigen sich auch instinctmässig Menschen und Thiere, wenn sie in einem Kreise schnell herumlaufen, nach einwärts, was man in recht auffallender Weise bei den Kunstreitern beobachten kann; hiebei ist also der Instinct wieder einmal der Wissenschaft, welche erst später die Ursache dieser Erscheinung ergründete und in ein System brachte, vorausgeeilt.

18. So sehr uns aber auch die Centrifugalkraft in gewissen Fällen hinderlich, ja sogar gefährlich werden kann, so sehr kann sie uns auch, wenn sie der menschliche Scharfsinn zu bezähmen und zu benützen versteht, erspriessliche Dienste leisten. Ich will hiefür nur einige der bekanntesten Beispiele anführen.

Schon seit mehreren Jahren trocknet man gewisse Zeuge und Stoffe, welche einer Appretur unterworfen werden müssen, in den sogenannten Hydroextracteuren dadurch, dass man diese nassen Stoffe in cylindrische, siebartig durchlöcherte Trommeln einlegt und diese dann mit grosser Schnelligkeit um ihre verticale Axe herumlaufen lässt; dabei reissen sich durch die erzeugte Centrifugalkraft die Wassertheilchen von dem Stoffe los und entweichen durch die Oeffnungen der Cylinderwand und zwar so rasch, dass die Stoffe in wenigen Minuten eben so weit getrocknet werden, als dies sonst durch Aufhängen derselben in der Luft kaum in eben so vielen Stunden möglich ist.

In der neuesten Zeit bilden ähnliche Apparate, in diesem Falle Centrifugen oder Schleudern genannt, in den Runkelrüben-Zuckerfabriken ein sehr schätzbares Hilfsmittel, einmal um statt des Pressens aus dem Rübenbrei den Saft zu gewinnen, und dann vorzüglich, um von den Zuckerkrystallen den Syrup abzuscheiden.

In gleicher Weise werden nun auch solche Centrifugen zum Trocknen der gewaschenen mineralischen Kleinkohle, so wie zu ähnlichen Zwecken in Bleichereien, Färbereien, Stärkefabrikationen u. s. w. benützt.

Die Centrifugal-Ventilatoren für Gruben und Schmiedessen, die Centrifugal-Pumpen zum Ent- und Bewässern u. s. w. leisten der Industrie und der Landwirthschaft die wesentlichsten Dienste.

Bekanntlich werden bei Dampfmaschinen (öfters auch bei Wasserrädern) Centrifugal-Regulatoren angewendet, um den Gang der Maschine möglichst gleichförmig zu erhalten.

Das Brummen bei den sogenannten Brummkreiseln, womit die Kinder zu spielen pflegen, ist ebenfalls eine Folge der Centrifugalkraft. Die in der hohlen Kugel enthaltene Luft wird nämlich bei der schnellen Rotation des Kreisels aus der vorhandenen Seitenöffnung ausgetrieben, wobei das brummende Geräusch entsteht; dieses Brummen hört auf, sobald die Luft grösstentheils ausgetrieben ist, fängt aber wieder an, sowie in Folge der abnehmenden Rotationsgeschwindigkeit, die äussere Luft wieder in den Kreisel eindringt.

Endlich hat man die Centrifugalkraft auch zu einer allerdings etwas halsbrecherischen Volksbelustigung benützt, und wenn ich nicht irre in England zuerst eine Art Rutsch- oder Rollbahn hergestellt, auf welcher kleine Rollwagen im Innern eines in einer Verticalebene liegenden kreisförmigen Bogens mit grosser Schnelligkeit herumlaufen.

So wie ein Glas Wasser in das Innere eines Reifen gestellt und in einen verticalen Kreis herumgeschwungen, auch in der Lage des höchsten Punktes, wo die Mündung des Glases geradezu nach abwärts gerichtet ist, weder selbst herabfällt, noch ein Tropfen Wasser ausfliesst, wenn nur die durch den Umschwung hervorgerufene, in diesem Momente nach aufwärts gerichtete Centrifugalkraft grösser als die abwärts gerichtete Schwerkraft ist; eben so bleiben auch die in dem genannten Rollwagen sitzenden Personen, selbst in dem Momente, als der Wagen die höchste Stelle der Kreisbahn erreicht, also die Personen sonst Kopfüber herabstürzen müssten, durch die Wirkung der Centrifugalkraft, wenn diese nämlich gross genug ist, ungefährdet.

So Manches wäre noch anzuführen über das Giroscop, über freie Achsen u. s. w., jedoch erlaubt dies die bereits schon zu weit vorgeschrittene Stunde nicht mehr.

Ich schliesse daher meinen vielleicht schon zu langen Vortrag mit dem Wunsche: es möge die hochverehrte Versammlung in ihrer Ueberzeugung von der hohen Wichtigkeit der Naturwissenschaften für die allgemeine Bildung auch durch diesen Vortrag in Etwas bestärkt worden sein.

Zeitschrift/Journal: Schriften des Vereins zur Verbreitung naturwissenschaftlicher Kenntnisse Wien

Jahr/Year: 1871

Band/Volume: 11

Autor(en)/Author(s): Burg Adam Freiherr von

Artikel/Article: Ueber das Wesen und die Wirkungen der Centrifugalkraft. 501-533