

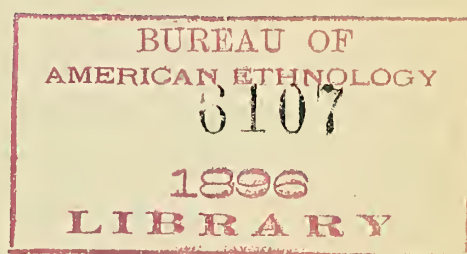
Sitzungsberichte

der

Gesellschaft zur Beförderung der gesammten
Naturwissenschaften

zu

Marburg.



J a h r g a n g 1894.

Marburg.

Universitäts-Buchdruckerei (R. Friedrich).

1895.

Sitzungsberichte

der Gesellschaft zur Beförderung der gesammten Naturwissenschaften

zu

M a r b u r g.

Nro. 1

Januar.

1894.

In der wissenschaftlichen Sitzung vom 17. Januar 1894 stellte Herr Professor Dr. Uhthoff der Gesellschaft einen 10jährigen Knaben vor, der blindgeboren war (Cataract reducta congenita mit ringförmigen hintern Synechien der Iris) und im 7. Lebensjahr hier in der Klinik von ihm mit Erfolg operiert wurde. Die Beobachtungsreihen über das Sehenlernen dieses Knaben sind von Vortragendem zu jener Zeit eingehend in den »Beiträgen zur Psychologie und Physiologie der Sinnesorgane«, Festschrift zu H. von Helmholtz 70. Geburtstag, Hamburg, Leop. Voss 1891) veröffentlicht worden. Der Knabe ist zur Zeit zum Zweck einer kleinen Nachoperation auf dem linken Auge wieder in die Klinik aufgenommen, welche das Sehen auf diesem Auge noch etwas verbessert hat, so dass Pat. sich jetzt unter den möglichst günstigsten optischen Bedingungen befindet, soweit sie eben für ihn auf operativem Wege herstellbar waren. — Uhthoff weist nun darauf hin, wie es grosses Interesse hatte, diesen kleinen Patienten nach Jahren wiederzusehen und sein Sehen nach den verschiedenen Richtungen wieder zu untersuchen und mit den Verhältnissen vor den damaligen Operationen, sowie gleich nach denselben zu vergleichen. Die Demonstrationen bei dem Knaben von Seiten des Vortragenden beziehen sich jetzt wieder auf I) das Erkennen von Objekten, Personen, Tieren u. s. w. in ähnlicher Weise, wie früher die Versuche angestellt wurden. Es ergaben sich hier manche bemerkens-

werte Einzelheiten, so konnte man z. B. auch jetzt in einzelnen Fällen nachweisen, dass er ein ihm nach dem Gefühl bekanntes Objekt durch das Gesicht noch nicht erkannte, weil er es offenbar in den letzten Jahren noch nicht gesehen hatte. Aenderungen der Demonstrationsbedingungen, wie Halten des Gegenstandes in farbiges Licht u. s. w. verwirren ihn noch sehr. — II) auf das Erkennen seines Spiegelbildes. Es bestehen für ihn zuweilen noch gewisse Schwierigkeiten, wenn er ganz unverhofft einem ganz grossen Spiegel gegenübergebracht wird, auch irrt er sich im ersten Moment einmal noch bei einem lebensgrossen farbigen Bildniss von einem Knaben unter Glas, welches er anfangs für sein Spiegelbild hält. — III) auf das Erkennen von bildlichen Darstellungen von Personen, Tieren und Objekten. Es wird ihm noch relativ schwer u. s. w. — IV) auf das Erkennen von Farben. Hiermit geht es ganz prompt. — V) das Verhalten des Gesichtsfeldes und Verwertung excentrischer Netzhautindrücke. — VI) das Zählen des Patienten. — VII) Versuche über das binoculare Sehen, Schätzung von Entfernungen u. s. w. Trotz der Schwachsichtigkeit und des früheren Schielens (operativ beseitigt) besteht jetzt binoculäres Sehen u. s. w. — VIII) Versuche über die Augenbewegungen. Dieselben haben sich gut und zweckmässig entwickelt, Pat. kann prompt fixiren, seine Augen willkürlich auf Geheiss nach einer bestimmten Richtung drehen, auch konvergiren. Der Nystagmus hat abgenommen, besteht aber noch namentlich, wenn Patient seine Augen nicht braucht u. s. w. — IX) Das psychische Verhalten hat sich sehr geändert, und ebenso hat sich auch das Interesse am Sehen mehr eingestellt, was anfangs wenig der Fall war.

Der Knabe hat die letzten Jahre seit den Operationen unter sehr ärmlichen Lebensbedingungen verbracht und hat seine geistige Ausbildung sehr wenig Förderung durch Unterricht gefunden.

In derselben Sitzung vom 17. Januar 1894 berichtete Herr Professor E. Hess über ein an den Vorsitzenden der Gesellschaft von Herrn E. v. Fedorow in St. Petersburg gerichtetes Schreiben, in welchem derselbe um Aufnahme einiger Erklärungen zu den »die Elemente der Gestaltenlehre von E. v. Fedorow betreffenden Bemerkungen des Herrn E. Hess« (diese Sitzungsberichte vom 8. November 1893, No. 6, S. 48—52) ersucht.

Die Gesellschaft beschloss, da es nach den Statuten nicht estattet sei, solche Entgegnungen von ausserhalb der Gesellschaft Stehenden in deren Namen in ihre Schriften aufzunehmen, es als zulässig zu erklären, dass Herr Professor Hess in seinem Namen die Erklärungen des Herrn Fedorow in den Sitzungsberichten möglichst wörtlich ¹⁾ zum Abdruck brächte, zugleich mit der Befugnis, seinerseits die von ihm als nötig erachtete Entgegnung hinzuzufügen, dass ferner hiermit eine weitere Erörterung der Angelegenheit in den Schriften der Gesellschaft für ausgeschlossen zu erklären sei.

Herr v. Fedorow hat, nachdem ihm dieser Beschluss mitgeteilt war, in einem Schreiben an den Vorsitzenden der Gesellschaft seine Notiz zurückverlangt und die Angelegenheit als erschöpft erklärt.

1) D. h. mit einigen in stilistischer Beziehung notwendigen Aenderungen. Ausserdem sollte Herrn Fedorow ein Druckabzug zur Correctur zugehen.

Von eingegangenen Schriften waren aufgelegt:

- Mitteilungen aus dem naturw. Verein in Greifswald. Jahrg. 25.
Berlin 1894.
- Berichte der naturforschenden Gesellschaft zu Freiburg i. B.
Bd. 8. Freiburg 1894.
- Sitzungsbericht der physikal.-medizinischen Gesellschaft zu Würzburg.
Jahrg. 1893. Würzburg 1893.
- Verhandlungen der K. K. geologischen Reichsanstalt 1893,
No. 11—18. 1894 No. 1—9. Wien 1894.
- Leopoldina. Heft XXIX No. 24, Heft XXX No. 1—20.
- Abhandlungen der Senckenbergischen naturforschenden Gesellschaft.
Bd. 18. Heft 2 u. 3.
- Bericht über die Senckenbergische naturf. Ges. in Frankfurt a. M.
1894. Frankfurt a. M. 1894.
- Verhandlungen des naturhistorisch-medicinischen Vereins zu
Heidelberg. N. F. Bd. 5. Heft 2. Heidelberg 1894.
- Bericht der St. Gallischen naturwissenschaftlichen Gesellschaft.
1891/92. St. Gallen 1893.
- Nieuwe Verhandelingen van het Bataafsch Genootschap to
Rotterdam. 2. R. D. 4 Heft 1. Rotterdam 1893.
- Fauna, Verein Luxemburger Naturfreunde. Jahrgang 3. —
Mittheilungen aus den Vereins-Sitzungen No. 1—7. Luxemburg 1894.
- Atti della R. Accad. dei Lincei. Anno 290 Ser. V. 291. — Rendiconti
Vol. II, fasc. 12, Vol. III fasc. 1—12, 1—9. Roma 1894.
- Rendiconto dell' Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche.
Ser. 2 Vol. VII fasc. 8—12. Napoli 1893. Vol. VIII fasc. 1—10.
Napoli 1894. Atti Ser. 2 Vol. 6. Napoli 1894.
- Vanstandsobservationer. V Hefte. Christiania 1893.
- Norske Nordhavs-Expedition. XXII Zoologi. Christiania 1893.
- Atti e Rendiconti della Accademia Medico-Chirurgica di Perugia.
Vol. II fasc. 3 u. 4. Vol. III fasc. 2, 3, 4. Vol. IV fasc. 1.
Vol. V fasc. 4. Vol. VI fasc. 1. Perugia 1890/94.
- Ertesitő 1893 XVIII 1, 1, 2, 1 u. 2 u. 3. XIX 1. 2. Kolozsvárt
1893/94.
- Proceedings of the Academy of natural Sciences of Philadelphia
1893. Part II u. III. Philadelphia 1893.
- Procedings of the American Philosophical Society. Vol. XXXI
No. 141 142. Philadelphia 1893/94.

Sitzungsberichte

der Gesellschaft zur Beförderung der gesammten
Naturwissenschaften

zu

M a r b u r g.

N^{ro.} 2

December.

1894.

In der ausserordentlichen Sitzung am 21. December 1894
berichtet Herr Professor Dr. Barth über:

Eine bisher noch nicht beschriebene Form von Hörstörung.

Bei den Functionsprüfungen des Ohres pflegt man jetzt zu untersuchen: das Verhalten der Hörfähigkeit zur Sprache und zu Tönen. Von letzteren wieder kommt dabei in Frage die Intensität eines Tones und die Tonhöhe. Ausserdem wird geprüft das Hörvermögen bei Luft- und Knochenleitung und das Verhalten dieser heiden zu einander. Wie viele Mängel nun auch diesen Prüfungsmethoden anhaften, so viel steht fest, dass mit ihrer Hilfe die mancherlei Lücken, welche die übrigen Untersuchungsmethoden in Bezug auf die Beurtheilung der verschiedenen Erkrankungen des Ohres lassen, wenigstens bis zu einem gewissen Grade ausgefüllt werden können.

Vor kurzem beobachtete ich nun in kurzer Zeit hintereinander zwei Fälle, welche sich nicht ohne Weiteres in die eben skizirten Formen der Hörprüfung einreihen lassen. Ich will zunächst die hauptsächlichste Erscheinung erwähnen: Nahm man eine Stimmgabel, näherte sie dem Ohre und entfernte sie schnell wieder, so wurde nichts von dem Ton wahrgenommen, hielt man sie länger vor das Ohr, so wurde sie noch recht gut gehört.

Eine Prüfung des eigenthümlichen Verhaltens war aus Mangel an einem geeigneten Instrument nur bei Luftleitung möglich, und auch hier musste ich mich mit dem eben geschilderten recht groben Verfahren begnügen. Die Intensität spielt bei dieser Erscheinung keine Rolle. Es war sogar auffallend, dass nach kräftigem Anschlagen und kurzer Einwirkung der Stimmgabel der Ton nicht gehört wurde, er sofort zur Wahrnehmung kam, wenn man dann die Stimmgabel, die doch nun schon merklich abgeklungen sein mussten, länger vor das Ohr hielt. So wurde also in unseren Fällen die Verminderung der Intensität durch die längere Dauer der Schalleinwirkung mehr als ausgeglichen. — Auch mit der Prüfung der Tonhöhen scheint mir die erwähnte auffällige Erscheinung nicht ohne weiteres in Zusammenhang zu bringen zu sein. Das Verhalten der Hörfähigkeit war für verschiedene Töne nicht gleich. Ich habe mit drei Tönen: c , c^2 und c^5 untersucht. In dem einen Falle bestand in der Hörschärfe eine Differenz zwischen beiden Ohren¹⁾. Bei diesem war die

¹⁾ Ich halte es für gut, die Krankengeschichte hier unten ausserhalb des Textes anzuführen:

Fall I, untersucht am 14./3. 94. Martin D., 48 J. a., Bahnbeamter. Vor zwei Jahren im heissen Sommer beim Eisenbahnwagenschieben fühlte sich Pat. plötzlich nicht wohl. Er war angeblich 10 Minuten lang schwindlig, benommen und fühlte einen Druck im Kopf. Von einer erlittenen Verletzung weiss er nichts anzugeben, dagegen bemerkte er wenige Minuten später, dass Blut aus Mund, Nase und rechtem Ohr floss. Die Blutung soll nur kurze Zeit gedauert haben. Es schloss sich aber eine geringe noch gegen 14 Tagen währende Absonderung aus dem rechten Ohr an. Gleich nach dem Unfall wurde bemerkt, dass die Hörfähigkeit auf dem rechten Ohr schlechter geworden sei; ausserdem bestand in demselben Klingen und Sausen. — Beide Trommelfelle sind schwach getrübt, wenig eingezogen. Auch rechts keine deutliche Stelle einer früheren Perforation zu sehen. Flüstern (3,8) wird rechts 0,3, links 2,0 Meter weiter verstanden. Der Kranke hörte bei offenem Munde besser, u. a. rechts 0,7, links 2,5 Meter weit. Für c^5 besteht eine Herabsetzung mittleren Grades, doch wird es links etwas besser gehört, als rechts. c wird beiderseits beinahe bis zu Ende gehört, dabei rechts nur sehr wenig schlechter, als links. Rinne ist beiderseits für c und c^2 ausgesprochen +. Von der Stirn aus kann nicht angegeben werden, nach welcher Seite der

fragliche Erscheinung auf dem schlechter hörenden (für Sprachverständnis) Ohre mehr ausgesprochen, als auf dem besseren, und für c und c^2 nachzuweisen, nur für c stärker. Im anderen Fall, wo die Hörfähigkeit auf beiden Seiten gleich schlecht war, bestand die Erscheinung nur für c und auffallender Weise nur für ein Ohr.

Ton herüberklingt. Wenn man eine Stimmgabel (c, c^2) mässig laut klingend dem Ohr nähert und sie schnell wieder entfernt, so wird der Ton auf beiden Seiten nicht wahrgenommen, während er trotz viel schwächeren Klingens bei längerem Hinhalten gehört wird. Diese Erscheinung ist rechts stärker, wie links, und für c deutlicher, wie für c^2 . Bei Katheterismus zeigen sich die Tuben frei. Die Hörfähigkeit ist danach auf beiden Seiten etwas besser, doch wird auch jetzt bei offenem Munde nachweisbar noch immer besser gehört, als wenn er geschlossen wird. Bei der Prüfung des Sprachverständnisses fällt es auf, dass die Worte nur langsam, wohl auch das vorletzte nachgesprochen werden. Die Sprache klingt dabei etwas stotternd. P. hat aber nie gestottert, liest auch Gedrucktes glatt vor. Es besteht chronischer Rachenkatarrh und mässige Hypertrophie der unteren Muscheln. Die Patellarreflexe sind abgeschwächt. Stehen bei geschlossenen Augen unsicher. Bei Rückwärtsgehen und nach oben Sehen kein Wanken. P. kann noch ganz gut telegraphieren, wenn er ungestört ist; sowie aber in seiner Nähe gesprochen wird, ist es damit aus. Auch das Rechnen geht in der letzten Zeit schlechter. Bei anhaltendem Lesen und Schreiben leicht Augenschmerzen. Seit kurzem viel Durst und häufig Uriniren. Der Urin soll bei wiederholter Untersuchung von Seiten des Bahnarztes stets gesund befunden sein. Zur Zeit schwacher Acetongeruch aus dem Munde. Im Urin kein Zucker, aber deutliche Eiweisreaction.

Fall II, untersucht am 21. 6. 94. Dem Johannes N., 54 J. a., Zimmermann, ist am 31. März d. J. ein Balken auf den Kopf gefallen, Ausser einer kurzdauernden Bewusstlosigkeit und einer Bisswunde an der Zunge wurden zunächst keine Zeichen einer Verletzung bemerkt. Seit dem Unfall bestehen aber Kopfschmerzen und Schwindel, besonders beim Bücken. Ausserdem hat sich eine seit wenigstens 24 Jahren bestehende Schwerhörigkeit wesentlich verstärkt. Subjective Geräusche (Rauschen) waren erst links, jetzt rechts stärker. Angeblich auch schlechtes Sehen. Seit zwei Tagen in der linken Hand ein Gefühl von Todtsein. Pat. ist in seinem ganzen Wesen theilnahmlos, träge in Bewegungen und Antworten. Druck der linken Hand äusserst schwach. Beim Herausstrecken der Zunge wird die rechte Seite der Oberlippe etwas mehr gehoben, als

Suchen wir für die eigenthümliche Erscheinung eine Erklärung, so finden wir diese nach meiner Ansicht nur in der bekannten physiologischen Thatsache, dass auch für ein normales Ohr schon eine Anzahl von Schwingungen nöthig ist, um einen akustischen Reiz auszulösen, eine noch grössere Zahl, um einen bestimmten Ton gut zur Wahrnehmung zu bringen. Nehmen wir an, dass bei der Art der Untersuchung die Stimmgabelschwingungen ungefähr $\frac{1}{3}$ Secunde auf das Ohr eingewirkt haben, so würden für c ca. 40, für c^2 aber ca. 160 Schwingungen überhaupt noch nicht zur Wahrnehmung gekommen sein, während für ein normales Ohr schon 8—10 Schwingungen genügen. Wir haben also eine recht auffallende Herabsetzung der Reaction auf die Anzahl der Schwingungen, welche das Ohr treffen. Hiermit leuchtet auch das Verhalten der hohen und der tieferen Tönen ein. Je höher ein Ton ist, umso mehr Schwingungen macht er in der Zeiteinheit, um so mehr wird er in der hier besprochenen Form der Hörstörung reizen, d. i. um so weniger wird letztere zum Ausdruck kommen. Unsere beiden Fälle verhielten sich

die linke. Die Zunge weicht etwas nach links ab. Bei Aufforderung die Augen zu schliessen bleibt das linke etwas offen. Er behauptet auch, es nicht schliessen zu können, trotzdem gelingt es dann aber. Stehen bei geschlossenen Augen, ebenso beim nach oben Sehen und Rückwärtsgehen sicher. Wenn er einen Gegenstand von der Erde aufheben soll, bückt er sich erst langsam, greift schnell zu und richtet sich dann langsam wieder auf. Auch hierbei sind keine Zeichen von Schwindelercheinungen zu bemerken. Tastgefühl im Gesicht und an den Händen wesentlich herabgesetzt. Die Trommelfelle sind beide ziemlich gleichmässig getrübt. Vollständige Anchylose des Hammers auf beiden Seiten. Beiderseits wird mässig laute Sprache nahe vor dem Ohr verstanden. c^5 ist in mittlerem Grade, c^2 und c weniger herabgesetzt. Rinne ist für c und c^2 ausgesprochen +. Die Knochenleitung ist sehr herabgesetzt. Wenn man rechts c nach stärkstem Anschlag nur ganz kurze Zeit vor das Ohr hält, wird es nicht wahrgenommen, während es bei schwächerem Klingen und längerem Hinhalten gehört wird. Die gleiche Erscheinung besteht links nicht, für c^2 und c^5 auch rechts nicht. Am Schädel ist ein besonderer Eindruck oder eine druckempfindliche Stelle nicht zu finden. Die Augen sind nach Untersuchung durch Herrn Prof. Uthoff normal.

dem entsprechend: im einen Fall waren die Erscheinungen für c^2 geringer als für c , im andern für c^2 überhaupt nicht mehr nachzuweisen. Die Versuche mit c^5 waren ganz aussichtslos, denn erstens übersteigt die Zahl der Schwingungen schon 1000 für die Zeit, wo c 40 zählt; ausserdem lässt sich aber die Einwirkung der Schallwellen von hohen Tönen für das Ohr durch Entfernung nicht so leicht ausschliessen, wie bei den tieferen Tönen.

Bei den Erklärungsversuchen liegt es nahe, auch an die von mir früher so genannte sensorische Schwerhörigkeit zu denken umsomehr, als beide Kranke auch cerebral nicht ganz intact waren; sie boten beide Erscheinungen von verlangsamter Thätigkeit ihres gesammten Nervenapparates, der eine sogar deutliche Erscheinungen von sensorischer Schwerhörigkeit, d. h. also, die Worte, die bei der Prüfung des Sprachverständnisses vorgesagt waren, wurden nicht nur langsam, sondern erst nach erheblicher Pause, wohl auch erst, wenn bereits ein weiteres Wort vorgesagt war, nachgesprochen. Nun wissen ja leider auch von der sensorischen Schwerhörigkeit die Ohrenärzte bisher recht wenig. Mir drängt sich aber die Ansicht auf, als sprächen gerade die Erscheinungen, welche ich zu Gunsten der ersten Erklärung anführte, zugleich gegen eine directe Abhängigkeit der fraglichen Hörstörung von den Associationsvorgängen. Ob ein indirecter Zusammenhang besteht, müssen erst weitere Beobachtungen lehren.

Habe ich eben auf weitere Beobachtungen verwiesen, so muss ich das noch mehr, wenn ein berechtigter Versuch gemacht werden soll die Stelle anzugeben, an welche der Sitz der besprochenen Hörstörung zu verlegen sei: theoretisch lassen sich Gründe für eine Behinderung in der Schallleitung anführen. In unseren Fällen konnte bei einem vollständige Anchylose des Hammers nachgewiesen werden. Nach den Resultaten der Hörprüfung musste man aber mit grösster Wahrscheinlichkeit in beiden Fällen die Diagnose auf nervöse Hörstörung stellen. Ich möchte den Sitz der Störung an die Stelle im inneren Ohr verlegen, wo die Schallbewegung in Nervenreiz umgewandelt wird.

Aber auch eine Ansicht, dass der Sitz der Störung noch weiter centralwärts zu suchen sei, lässt sich vorläufig nicht widerlegen.

Wenn ich nun dem Findling einen Namen geben soll, so möchte ich mich dabei nur an die bis jetzt bekannten Erscheinungen halten. Die Schwerhörigkeit, welche bisher durch Hörprüfungen festgestellt wurde, bezieht sich ausschliesslich, wie schon vorher erwähnt, auf Herabsetzung in der Wahrnehmung der Intensität eines Schalles. In unserem Falle haben wir es aber nicht mit der Amplitude, sondern mit der Schwingungszahl zu thun. Es liesse sich demnach im Gegensatz zu Intensität Extensität setzen und so die Bezeichnung Intensitäts- und Extensitätsschwerhörigkeit (oder für Eingeweihte vielleicht nur abgekürzt I.- und E.-Schwerhörigkeit) einführen.

Leider sind meine beiden Beobachtungen sehr lückenhaft, sodass ich eine ganze Reihe von Fragen, die sich mir selbst aufdrängen, nicht zu beantworten vermag. Die Beobachtungen sind lückenhaft, weil beide Patienten von auswärts waren und nur einmal untersucht werden konnten. Sie liessen sich auch nicht gut eingehend anstellen, weil die Untersuchungsobjecte nicht nur wenig gebildete, sondern auch noch cerebral nicht ganz intacte Individuen waren. Und endlich fehlt es uns in unserem Instrumentarium noch vollständig an geeigneten Aparaten zu einer sorgfältigen Untersuchung einer solchen Hörstörung, so dass ich schon die wenigen Resultate meiner ganz groben Untersuchungsmethode für mittheilenswerth halte, umso mehr als die Angaben um so einwandsfreier sind, als sie von Leuten stammen, die durch eine gewisse Sachkenntnis nicht im Voraus eingenommen sein können, ein Fehler, der sich bei den anderen Hörprüfungsmethoden oft schwer ausschliessen lässt.

Ich bin überzeugt, dass die Extensitäts-Schwerhörigkeit viel häufiger vorkommt, als es bis jetzt scheinen möchte. Besonders wäre bei solchen Patienten darauf zu achten, wo die Hörfähigkeit für Töne und Sprache zu Ungunsten der letzteren in einem auffallenden Missverhältnis steht. Nur muss man im Stande sein, auch Grade nachzuweisen, die geringer sind, als in den

beiden von mir mitgetheilten Fällen. Ich hoffe, dass ausser dem wissenschaftlichen Interesse, welches die Erscheinung bietet, ihre eingehendere Beobachtung auch dazu beitragen wird, über manchen Erkrankungsfall, der uns jetzt noch nicht ganz klarliegend erscheint, mehr Licht zu verbreiten.

In derselben Sitzung (vom 21. December 1894) hielt Herr Professor E. Hess einen Vortrag:

Ueber die Correlationen der regulären Gruppen.

Man hat bisher vorzugsweise und fast ausschliesslich die Collineationen der regulären Gruppen in Betracht gezogen, d. h. einmal die (um Axen von bestimmter Zähligkeit erfolgenden) Drehungen, andererseits die einfachen und dreifachen Spiegelungen (Spiegelungen und Drehspiegelungen), durch welche bez. die Figuren und Körper der Gruppen eines regulären sog. Dieders (einer regulären Doppelpyramide), eines regulären Tetraeders, Oktaeders (Hexaeders) und Ikosaeders (Pentagondodekaeders) mit sich selbst zur Deckung gebracht werden.

Die Gesamtheit solcher zusammengehörigen Collineationen, welche analytisch durch lineare Substitutionen (zwischen Punkt- und Punkt-Coordinaten oder zwischen Ebenen- und Ebenen-Coordinaten) dargestellt werden, bildet in dem bekannten besonderen Sinne eine Gruppe, d. h. die Gesamtheit dieser Substitutionen hat die Eigenschaft, dass die aus irgend zwei nach einander ausgeführten Substitutionen zusammengesetzte Substitution derselben Gesamtheit angehört. Dabei bilden die sog. eigentlichen Collineationen, welche (einschliesslich der Identität) Drehungen bedeuten, für sich eine Untergruppe der Hauptgruppe, während die sog. uneigentlichen Collineationen d. h. die Spiegelungen für sich keine Gruppe bilden, da zwei Spiegelungen im Allgemeinen eine Drehung ergeben. Ferner bilden die Drehungen von bestimmter Zähligkeit um eine Axe

für sich eine besondere Gruppe. Unter den Drehungen sind diejenigen von der Amplitude 180° , die sog. U m w e n d u n g e n ¹⁾ besonders wichtig, während unter den Drehspiegelungen die sog. Inversion (Spiegelung am Mittelpunkt) hervorzuheben ist, welche aber der Tetraedergruppe und denjenigen Diedergruppen, für welche die die Zähligkeit der Hauptaxe bestimmende Zahl ungerade ist, nicht zukommt.

Sehr anschaulich lassen sich diese Beziehungen auf einer zu den betreffenden Raumfiguren concentrischen Kugelfläche darstellen und verfolgen, indem die durch die Symmetrieebenen dieser Körper auf der Kugelfläche bestimmten Hauptkreise ein gleichflächiges sphärisches, die Kugel ein oder mehrere Mal bedeckendes Netz erzeugen ²⁾, aus welchem sich in sehr einfacher Weise die durch die Drehungen und Spiegelungen der Gruppe bewirkten Lagenänderungen eines Punktes der Kugelfläche ergeben. Diese sphärischen Figuren können auch durch Centralprojection aus bestimmten einfachen ebenen Figuren erhalten werden, so z. B. für die Oktaeder-Hexaeder-Gruppe aus der (speciell regulären) Figur eines vollständigen ebenen Vierecks, für die Ikosaeder-Pentagondodekaeder-Gruppe aus derjenigen eines sog. zehnfach-Briançon'schen Sechsecks. Die Zahl der Collineationen, welche die sphärische Figur in sich überführen, ist die doppelte derjenigen für die ebene Figur, da die Substitutionen der letzteren bei gleichzeitigem Vorzeichenwechsel ungeändert bleiben.

Der Zweck dieser Mittheilung ist, etwas genauer auf die Eigenschaften der bisher wenig berücksichtigten dualistischen Umformungen oder Correlationen der regulären Gruppen einzugehen und auf die anschauliche Darstellung dieser Beziehungen, welche durch die auf der Kugelfläche auftretenden Kerncurven dieser Correlationen erreicht wird, hinzuweisen.

1) Vgl. H. Wiener, Leipziger Berichte, XLII.

2) Vgl. E. Hess, Einleitung in die Lehre von der Kugelteilung. Leipzig, B. G. Teubner 1883.

untersucht und festgestellt werden. Die Kernflächen der sämtlichen Polarcorrelationen und der allgemeinen Correlationen der regulären Gruppen sind nun durchweg concentrische Rotationskegel, welche die concentrische Kugel (vom Radius 1) in kleinen (speciell auch grossen) Kugelnkreisen und deren Gegenkreisen schneiden. Für diese sphärischen Kerncurven, welche für die einzelnen Gruppen bemerkenswerte regelmässige Einteilungen der Kugelfläche bedingen, gelten folgende allgemeine Beziehungen:

a) Die sphärischen Kerncurven derjenigen (eentlichen) Polarcorrelationen, welche Drehungen um eine zweizählige Axe (Umwendungen) entsprechen, sind kleine Kugelnkreise (und deren Gegenkreise), deren sphärische Radien $\frac{\pi}{4}$ betragen und für welche der Mittelpunkt und der Gegenpunkt die Schnittpunkte der zweizähligen Axe mit der Kugel sind.

b) Einer einfachen Spiegelung entspricht eine uneigentliche Polarcorrelation, deren sphärische Kerncurve ein solcher kleiner Kugelnkreis vom sphärischen Radius $\frac{\pi}{4}$ (und dessen Gegenkreis) ist, dessen Mittelpunkt und Gegenpunkt die Schnittpunkte der Normalen zur Spiegelebene mit der Kugelfläche sind.

c) Allgemein entspricht einer Drehung um eine Axe von der Amplitude $\frac{2\pi}{n}$ eine allgemeine (eigentliche) Correlation, deren beide sphärische Kerncurven concentrische kleine Kugelnkreise (und deren Gegenkreise) sind, welche also eine doppelte Berührung in den beiden imaginären Kreispunkten der unendlich fernen Schnittlinie der parallelen Ebenen haben. Die Mittelpunkte sind die Schnittpunkte der Axe mit der Kugelfläche; die beiden sphärischen Radien ε_1 und ε_2 ergänzen sich zu $\frac{\pi}{2}$, wobei

$$\operatorname{tg} \varepsilon_1 = \operatorname{cotg} \varepsilon_2 = \sqrt{-\cos \frac{2\pi}{n}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

ist. Die beiden Kerncurven sind reell für $\frac{1}{2} < \frac{2\pi}{n} < \frac{3}{2}$, ima-

ginär für $-\frac{1}{2} < \frac{2x}{n} < \frac{1}{2}$; in den Uebergangsfällen $\frac{2x}{n} = \frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$ (oder $-\frac{1}{2}$) reduciren sie sich auf den unendlich kleinen Kugelkreis (und den Gegenkreis) und den Hauptkreis, welcher den Aequator zu den Mittelpunkten bildet. Für $\frac{2x}{n} = 1$ resultirt der specielle Fall a) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{\pi}{4}$, für $\frac{2x}{n} = 0$ der unendlich ferne imaginäre Kugelkreis.

d) Einer Drehspiegelung, d. h. einer Drehung um eine Axe von der Amplitude $\frac{2x\pi}{n}$ verbunden mit einer Spiegelung an der zugehörigen Aequatorebene, entspricht eine allgemeine (uneigentliche) Correlation, deren beide sphärische Kerncurven concentrische kleine Kugelkreise und deren Gegenkreise sind. Die Mittelpunkte derselben sind wiederum die Endpunkte der Axe, und die beiden sphärischen Radien ε_1' und ε_2' ergänzen sich zu $\frac{\pi}{2}$, wobei:

$$\operatorname{tg} \varepsilon_1' = \cotg \varepsilon_2' = \sqrt{\cos \frac{2x\pi}{n}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

ist. Die beiden Kerncurven sind also umgekehrt wie unter c) imaginär für $\frac{1}{2} < \frac{2x}{n} < \frac{3}{2}$, dagegen reell für $-\frac{1}{2} < \frac{2x}{n} < \frac{1}{2}$. Die Uebergangsfälle $\frac{2x}{n} = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ oder $-\frac{1}{2}$ ergeben dasselbe Resultat wie unter c), während für $\frac{2x}{n} = 0$ der oben erwähnte, der einfachen Spiegelung entsprechende Fall b) resultirt. Für $\frac{2x}{n} = 1$ ergibt sich wiederum der unendlich ferne imaginäre Kugelkreis; der zugehörige Fall der (uneigentlichen) Polarcorrelation ist der der Inversion entsprechende. Bei dieser Polarcorrelation entspricht jedem Hauptkreis der Kugel der Gegenpunkt des Punktes, welcher ihm bei der eigentlichen Polarcorrelation (2) oder (2α) entsprach; jedem Punkte der Kugel entspricht zwar in beiden Fällen derselbe Hauptkreis (dieselbe Ebene), aber das eine Mal die eine, das andere Mal die entgegengesetzte

Richtung (oder Seite) des Hauptkreises; diese Unterscheidung drückt sich für die umgeschriebenen (gleichflächigen) Polyeder in der Vertauschung der beiden parallelen (an Punkt und Gegenpunkt construirten) Berührungsebenen aus.

II. Anwendung auf die einzelnen regulären Gruppen.

Die in I. hervorgehobenen Eigenschaften, deren analytische Herleitung äusserst einfach ist, sollen nunmehr auf die Correlationen der einzelnen regulären Gruppen angewendet werden. Wir wollen die entsprechenden Collineationen und Correlationen jeder Gruppe nebeneinander stellen und für die Oktaeder-Hexaeder-Gruppe (und die in ihr als Untergruppe enthaltene Tetraeder-Gruppe) die Substitutionen nebst ihrer geometrischen Bedeutung vollständig angeben, während für die Ikosaeder-Pentagondodekaeder-Gruppe und die Dieder-Gruppen eine übersichtliche Zusammenstellung genügen möge.

A) Oktaeder-Hexaeder-Gruppe nebst Untergruppen.

Die 48 Substitutionen dieser Gruppe, welche Collineationen bedeuten, werden bekanntlich durch die 6 Permutationen der Coordinaten eines Punktes (einer Ebene) in Verbindung mit den 8 Vorzeichencombinationen erhalten ¹⁾; sie sollen analog, wie es bereits oben unter (1) und (1 α) geschehen ist, durch das Symbol $[\pm k_1, \pm k_2, \pm k_3]$ oder $[\pm \overline{k_1}, \pm \overline{k_2}, \pm \overline{k_3}]$ bezeichnet werden, wobei k_1, k_2, k_3 die Zahlen 1, 2, 3 entsprechend x, y, z (oder u, v, w) in irgend einer Reihenfolge bedeuten. Ebenso sollen die 48 Correlationen dieser Gruppe analog wie unter (2) und (2 α) durch das Symbol $[\pm \overline{k_1}, \pm \overline{k_2}, \pm \overline{k_3}]$ oder $[\pm k_1, \pm k_2, \pm k_3]$ bezeichnet werden.

In den beiden folgenden Tabellen (6 a) und (6 b) sind zunächst die 24 eigentlichen und 24 uneigentlichen Collineationen dieser Gruppe zusammengestellt. Die 3 vierzähligen Axen

1) E. Hess, Kugelteilung § 64.

$A_1'OA_1$, $A_2'OA_2$, $A_3'OA_3$, die 6 zweizähligen Axen $B_1'OB_1$, $\dots B_6'OB_6$ und die 4 dreizähligen Axen $C_1'OC_1$, $\dots C_4'OC_4$ sind durch die rechtwinkligen Coordinaten eines ihrer Endpunkte, die directen Symmetrieebenen $a_1, \dots a_3$, $b_1, \dots b_6$ und die 4 nicht direct symmetrischen Mittelebenen $c_1, \dots c_4$ durch ihre Coordinaten charakterisirt. In dem jeder Substitution vorgeschriebenen Symbol $(\begin{smallmatrix} + \\ + \end{smallmatrix})$, $(\begin{smallmatrix} = \\ = \end{smallmatrix})$, $(\begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix})$, $(\begin{smallmatrix} - \\ + \end{smallmatrix})$ bezieht sich das obere Vorzeichen auf die Permutation, das untere auf die Vorzeichencombination.

a) Eigentliche Collineationen (Drehungen).

- | | | |
|---|---|-------|
| 1) $(\begin{smallmatrix} + \\ + \end{smallmatrix})$ [1 2 3] Identität | } | (6 a) |
| 2) $(\begin{smallmatrix} + \\ + \end{smallmatrix})$ [1 -2 -3] Umwendung um die 4-zählige Axe $A_1'OA_1$ (1 0 0) | | |
| 3) $(\begin{smallmatrix} + \\ + \end{smallmatrix})$ [-1 2 -3] „ „ „ „ „ $A_2'OA_2$ (0 1 0) | | |
| 4) $(\begin{smallmatrix} + \\ + \end{smallmatrix})$ [-1 -2 3] „ „ „ „ „ $A_3'OA_3$ (0 0 1) | | |
| 5) $(\begin{smallmatrix} + \\ + \end{smallmatrix})$ $S=[2\ 3\ 1]$ } 3 zähl. Dreh. um die 3-zähl. Axe $C_1'OC_1$ (1 1 1) | | |
| 6) $(\begin{smallmatrix} + \\ + \end{smallmatrix})$ $S^2=[3\ 1\ 2]$ } von der Amplitude $\frac{2\pi}{3}$ und $\frac{4\pi}{3}$ oder $-\frac{2\pi}{3}$ | | |
| 7) $(\begin{smallmatrix} + \\ + \end{smallmatrix})$ $S=[-2\ 3\ -1]$ } | | |
| 8) $(\begin{smallmatrix} + \\ + \end{smallmatrix})$ $S^2=[-3\ -1\ 2]$ } „ „ „ „ „ $C_2'OC_2$ (-1 1 1) | | |
| 9) $(\begin{smallmatrix} + \\ + \end{smallmatrix})$ $S=[-2\ -3\ 1]$ } | | |
| 10) $(\begin{smallmatrix} + \\ + \end{smallmatrix})$ $S^2=[3\ -1\ -2]$ } „ „ „ „ „ $C_3'OC_3$ (1 -1 1) | | |
| 11) $(\begin{smallmatrix} + \\ + \end{smallmatrix})$ $S=[2\ -3\ -1]$ } | | |
| 12) $(\begin{smallmatrix} + \\ + \end{smallmatrix})$ $S^2=[-3\ 1\ -2]$ } „ „ „ „ „ $C_4'OC_4$ (1 1 -1) | | |
| 13) $(\begin{smallmatrix} = \\ = \end{smallmatrix})$ [-1 3 2] Umwendung um die 2-zählige Axe $B_1'OB_1$ (0 1 1) | | |
| 14) $(\begin{smallmatrix} = \\ = \end{smallmatrix})$ [-1 -3 -2] „ „ „ „ „ $B_4'OB_4$ (0 1 -1) | | |
| 15) $(\begin{smallmatrix} = \\ = \end{smallmatrix})$ [-3 2 1] „ „ „ „ „ $B_2'OB_2$ (1 0 1) | | |
| 16) $(\begin{smallmatrix} = \\ = \end{smallmatrix})$ [-3 -2 -1] „ „ „ „ „ $B_5'OB_5$ (1 0 -1) | | |
| 17) $(\begin{smallmatrix} = \\ = \end{smallmatrix})$ [2 1 -3] „ „ „ „ „ $B_3'OB_3$ (1 1 0) | | |
| 18) $(\begin{smallmatrix} = \\ = \end{smallmatrix})$ [-2 -1 -3] „ „ „ „ „ $B_6'OB_6$ (1 -1 0) | | |
| 19) $(\begin{smallmatrix} = \\ = \end{smallmatrix})$ $S=[1\ 3\ -2]$ } $S^2=[1\ -2\ -3]$ } 4 zähl. Dreh. um die 4-zähl. Axe $A_1'OA_1$ von der Amplitude | | |
| 20) $(\begin{smallmatrix} = \\ = \end{smallmatrix})$ $S^3=[1\ -3\ 2]$ } vgl. 2) } $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$ oder $-\frac{\pi}{2}$ | | |
| 21) $(\begin{smallmatrix} = \\ = \end{smallmatrix})$ $S=[-3\ 2\ 1]$ } $S^2=[-1\ 2\ -3]$ } 4 zähl. Dreh. um die 4-zähl. Axe $A_2'OA_2$ | | |
| 22) $(\begin{smallmatrix} = \\ = \end{smallmatrix})$ $S^3=[3\ 2\ -1]$ } vgl. 3) } | | |
| 23) $(\begin{smallmatrix} = \\ = \end{smallmatrix})$ $S=[-2\ 1\ 3]$ } $S^2=[-1\ -2\ 3]$ } 4 zähl. Dreh. um die 4-zähl. Axe $A_3'OA_3$ | | |
| 24) $(\begin{smallmatrix} = \\ = \end{smallmatrix})$ $S^3=[2\ -1\ 3]$ } vgl. 4) } | | |

25) (+) $[-1 -2 -3]$	Inversion oder Spiegelung am Mittelpunkt O (0 0 0)		
26) (+) $[-1 2 3]$	Spiegelung an Symmetrie-Ebene a_1 (1 0 0)		
27) (+) $[1 -2 3]$	"	"	a_2 (0 1 0)
28) (+) $[1 2 -3]$	"	"	a_3 (0 0 1)
29) (+) $S = [-2 -3 -1]$	$S^2 = [3 1 2]$ (vgl. 6)	$S^3 = [-1 -2 -3]$	6-zählige Drehung von $\frac{\pi}{3}$
30) (+) $S^5 = [-3 -1 -2]$	$S^4 = [2 3 1]$	5	Drehspiegel. Dreh. von $-\frac{\pi}{3}$
31) (+) $S = [2 -3 1]$	$S^2 = [-3 -1 2]$	8	$S^3 = [-1 -2 -3]$
32) (+) $S^5 = [3 1 -2]$	$S^4 = [-2 3 -1]$	7	vgl. 25)
33) (+) $S = [2 3 -1]$	$S^2 = [3 -1 -2]$	10	$S^3 = [-1 -2 -3]$
34) (+) $S^5 = [-3 1 2]$	$S^4 = [-2 -3 1]$	9	vgl. 25)
35) (+) $S = [-2 3 1]$	$S^2 = [3 -1 -2]$	12	$S^3 = [-1 -2 -3]$
36) (+) $S^5 = [3 -1 2]$	$S^4 = [2 -3 -1]$	11	vgl. 25)
37) (+) $[1 -3 -2]$	Spiegelung an Symmetrie-Ebene b_1 (0 1 1)		
38) (+) $[1 3 2]$	"	"	b_4 (0 1 -1)
39) (+) $[3 -2 -1]$	"	"	b_2 (1 0 1)
40) (+) $[3 2 1]$	"	"	b_5 (1 0 -1)
41) (+) $[-2 -1 3]$	"	"	b_3 (1 1 0)
42) (+) $[2 1 3]$	"	"	b_6 (1 -1 0)
43) (+) $S = [-1 -3 2]$	$S^2 = [1 -2 -3]$	4-zählige Drehung von $\frac{\pi}{2}$	um Axe A_1
44) (+) $S^3 = [-1 3 -2]$	vgl. 2)	Drehspiegel. Dreh. von $-\frac{\pi}{2}$	und Spiegelung an Ebene a_1
45) (+) $S = [3 -2 -1]$	$S^2 = [-1 2 -3]$	"	um Axe A_2
46) (+) $S^3 = [-3 -2 1]$	vgl. 3)	"	um Axe A_2
47) (+) $S = [2 -1 -3]$	$S^2 = [-1 -2 3]$	"	um Axe A_3
48) (+) $S^3 = [-2 1 -3]$	vgl. 4)	"	um Axe A_3

Von den Untergruppen der durch die 48 Collineationen gebildeten Gruppe, welcher als zugehöriges allgemeinstes gleich-eckiges (gleichflächiges) Polyeder das $(6 + 8 + 12)$ -flächige 2. 24-Eck (das $(6 + 8 + 12)$ -eckige 2. 24-Flach oder Hexakisoktaeder) entspricht, seien die folgenden hervorgehoben:

1) Die Untergruppe der 24 eigentlichen Collineationen $(\frac{+}{+})$ und $(\frac{+}{-})$ 1)...24), welcher als allgemeinstes gleicheckiges (gleichflächiges) Polyeder das durchaus unsymmetrische $(6 + 8 + 24)$ -flächige 24-Eck (das $(6 + 8 + 24)$ -eckige 24-Flach oder Pentagontositraeder) als gyroidische Hemigonie (Hemiedrie) des 2. 24-Ecks (Hexakisoktaeders) entspricht.

2) Die Untergruppe der 24 Collineationen, welche aus den 12 eigentlichen Collineationen $(\frac{+}{+})$ 1)...12) und den 12 uneigentlichen Collineationen $(\frac{+}{-})$ 25)...36) besteht. Das zugehörige allgemeinste gleicheckige (gleichflächige) Polyeder ist das $(6 + 8 + 12)$ -flächige 2. 12-Eck (das $(6 + 8 + 12)$ -eckige 2. 12-Flach oder Diakisdodekaeder) als gegenpunktige Hemigonie (parallel-flächige Hemiedrie) des 2. 24 Ecks (Hexakisoktaeders); diese Polyeder haben nur die drei Symmetrie-Ebenen a_1, a_2, a_3 .

3) Die Untergruppe der 24 Collineationen, welche aus den 12 eigentlichen Collineationen $(\frac{+}{+})$ 1)...12) und den 12 uneigentlichen Collineationen $(\frac{-}{+})$ 37)...48) besteht. Diese Untergruppe ist die Gruppe des regulären Tetraeders, welcher als allgemeinstes gleicheckiges (gleichflächiges) Polyeder das $(4 + 4 + 6)$ -flächige 2. 12-Eck (das $(4 + 4 + 6)$ -eckige 2. 12-Flach oder Hexakistetraeder) als tetragonische Hemigonie (tetraedrische Hemiedrie) des 2. 24-Ecks (Hexakisoktaeders) entspricht. Den Polyedern dieser Gruppe kommen nur die 6 Symmetrie-Ebenen $b_1 \dots b_6$ zu; dagegen ist, wie bei der ersten Untergruppe, die Inversion nicht vorhanden, d. h. es existirt zu keinem Punkte der Gegenpunkt, zu keiner Ebene die Gegenebene.

4) Die 12 eigentlichen Collineationen $(\frac{+}{+})$ 1)...12) bilden eine weitere Untergruppe (als »Durchschnitt« der drei Untergruppen

1), 2), 3), welcher als allgemeinstes gleicheckiges (gleichflächiges) Polyeder das unsymmetrische $(\overline{4+4+12})$ -flächige 12-Eck (das $(\overline{4+4+12})$ -eckige 12-Flach oder tetraedrische Pentagondodekaeder als gyroidische Hemigonie (Hemiedrie) der drei unter 1), 2), 3) aufgeführten Polyeder oder als gyroidische Tetartogonie (Tetartoedrie) des 2. 24-Ecks (Hexakisoktaeders) entspricht.

Die 48 Collineationen der Oktaeder-Hexaeder-Gruppe können auch, wie bereits hervorgehoben wurde, aus den 24 Collineationen erhalten werden, durch welche die Figur eines vollständigen ebenen Vierecks in sich übergeführt wird, wenn man die ebene Figur von einem Centrum aus auf eine Kugelfläche projicirt. Man kann hierbei einfach von der speciellen regulären ebenen Figur ausgehen, bei welcher die Endpunkte $\mathfrak{C}_1 \dots \mathfrak{C}_4$ des Vierecks denjenigen eines Quadrates von der Seite 1 entsprechen, und die Eckpunkte $\mathfrak{C}_1 \dots \mathfrak{C}_4$, die Seitenpaare $\mathfrak{b}_1 \dots \mathfrak{b}_6$, die Diagonalepunkte $\mathfrak{A}_1 \dots \mathfrak{A}_3$, die Diagonalen $\mathfrak{a}_1 \dots \mathfrak{a}_3$ und die Schnittpunktpaare $\mathfrak{B}_1 \dots \mathfrak{B}_6$ der Seiten mit den Diagonalen von einem Punkte O, welcher auf der im Mittelpunkte des Quadrates errichteten Normalen der Ebene im Abstände 1 liegt, aus auf die Kugelfläche vom Radius 1 projiciren. Durch die passende Wahl des rechtwinkligen räumlichen Coordinatensystems lässt sich dann leicht erreichen, dass die rechtwinkligen Coordinaten eines auf die Kugel projicirten Punktes P (und des Gegenpunktes P') genau (bez. bis auf das Vorzeichen) mit den homogenen Coordinaten (in Bezug auf das Diagonaldreieck $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_3$) des entsprechenden Punktes \mathfrak{P} der Ebene übereinstimmen. Die Transformationsformeln für die sphärische Figur sind dann — abgesehen vom doppelten Vorzeichen — denjenigen für die ebene Figur entsprechend, sodass die Zahl der räumlichen Collineationen die doppelte derjenigen der ebenen wird¹⁾:

1) Vgl. hierüber eine demnächst erscheinende Abhandlung des Verf. »Beiträge zur Theorie der räumlichen Configurationen«. Zweite Abhandlung in den Nova Acta der Ksl. Leop.-Carol. Deutsch. Akademie der Naturf.

Stellt man die 24 ebenen Collineationen durch dieselben Symbole wie in Tabelle (6 a) dar, so entspricht jeder ebenen Collineation eine eigentliche räumliche, durch dasselbe Symbol dargestellte und eine uneigentliche, bei welcher die in der Klammer stehenden Ziffern durchweg das entgegengesetzte Zeichen erhalten.

Die geometrische Bedeutung der 24 ebenen Collineationen ist (im Anschluss an die Tabelle (6 a)) die folgende:

1) die Identität; 2)...4) 3 centrische Involutionen mit Centrum \mathfrak{A}_i und Homologiegeraden a_i ($i = 1, 2, 3$); 5)...12) $4 \cdot 2 = 8$ 3-zählige Collineationen, deren Doppelpunkte und Doppellinien z. B. für 5) und 6) folgende homogene Coordinaten haben:

$$\left. \begin{array}{l} \mathfrak{C}_1 \dots 111 \dots c_1 \\ 1 \alpha \alpha^2 \\ 1 \alpha^2 \alpha \end{array} \right\} \dots \dots \dots (7),$$

wo α, α^2 imaginäre Cubikwurzeln der Einheit sind; 13)...18) 6 centrische Involutionen mit Centrum \mathfrak{B}_k und Homologiegeraden b_k ($k = 1, 2 \dots 6$); 19)...24) $3 \cdot 2 = 6$ 4-zählige Collineationen, deren Doppelpunkte und Doppellinien z. B. für 19) und 20) folgende homogene Coordinaten haben:

$$\left. \begin{array}{l} \mathfrak{A}_1 \dots 100 \dots a_1 \\ 01i \\ 01-i \end{array} \right\} \dots \dots \dots (8).$$

Was nun die Correlationen der Oktaeder-Hexaeder-Gruppe anlangt, so ergibt sich die geometrische Bedeutung derselben aus den unter I. entwickelten Eigenschaften. In der Tabelle (9 a) sind zunächst die 24 eigentlichen Correlationen durch die zugehörigen sphärischen Kerncurven charakterisirt, wobei die Anordnung der Substitutionen genau derjenigen für die eigentlichen Collineationen in Tabelle (6 a) entspricht. Bei der symbolischen Bezeichnung ist immer nur die erste der beiden Substitutionen $[\pm k_1, \pm k_2, \pm k_3]$ und $[\pm k_1, \pm k_2, \pm k_3]$ aufgeführt, und die sphärischen Kerncurven, insofern sie kleine Kugelsphären sind, sind kurz durch \mathfrak{K} bezeichnet.

[illegible]

b) Uneigentliche Correlationen (vgl. Tabelle (6 b)).

Die uneigentlichen Correlationen der Oktaeder-Hexaeder-Gruppe resultieren einfach durch Combination der 24 eigentlichen Correlationen mit der Inversion (vgl. (6 b) unter 25)); sie können daher einfach als die inversen der eigentlichen Correlationen bezeichnet werden. Die sämtlichen Kerncurven der Polarcorrelationen und der allgemeinen Correlationen werden bez. dieselben, wie für die eigentlichen Correlationen; nur entspricht jetzt jedem Hauptkreis der Kugel der Gegenpunkt des Punktes und jedem Punkte der Hauptkreis von entgegengesetzter Richtung (oder Seite), wie derjenige, welcher ihm bei der eigentlichen Correlation entsprach. Wenn die in Tabelle (6 b) unter 25)...48) aufgeführten Substitutionen, welche die uneigentlichen Collineationen darstellen, mit einem oberen oder unteren Horizontalstriche versehen werden, so erhält man die Substitutionen, welche die uneigentlichen Correlationen bedeuten, und die geometrische Bedeutung derselben ist mit Berücksichtigung der Inversion aus der Tabelle (9 a) zu entnehmen.

Von der durch die 48 Collineationen und die 48 Correlationen gebildeten Hauptgruppe ist die Gruppe der 48 Collineationen eine sog. ausgezeichnete (invariante) Untergruppe, während die 48 Correlationen für sich keine Gruppe bilden. Ebenso tritt zu den oben unter 1)...4) betrachteten Untergruppen der Collineationen bez. die gleiche Zahl von Correlationen hinzu, wodurch die vollständigen Untergruppen 1] bis 4] resultieren. Die vollständige Tetraedergruppe 3] z. B. enthält die 12 eigentlichen Collineationen 1)...12) (in (6 a)) und die 12 uneigentlichen Collineationen 37)...48) (in (6 b)), ebenso die 12 eigentlichen Correlationen 1)...12) (in (9 a)) und die 12 uneigentlichen Correlationen 37)...48) (welche bez. die inversen der eigentlichen Correlationen 13)...24) in (9 a) sind); die 12 uneigentlichen Correlationen der Tetraedergruppe sind also nicht (ebenso wie bei den vollständigen Untergruppen 1] und 4]) die inversen der eigentlichen Correlationen. Es hängt dies einfach damit zusammen, dass die auf den zweizähligen Axen $A_1'O A_1$ senkrechten

Mittelebenen keine Spiegelebenen und die auf den 6 Spiegelebenen b_1, \dots, b_6 senkrechten Axen keine zweizählige Axen für die Körper der Tetraedergruppe sind.

Durch jede Correlation einer Gruppe wird überhaupt ein derselben angehöriges gleichseitiges, der Kugel eingeschriebenes Polyeder in das reciproke gleichflächige, der Kugel umgeschriebene, übergeführt und umgekehrt.

Die 48 Correlationen der Oktaeder-Hexaedergruppe lassen sich ebenfalls auf die oben angegebene Art aus den 24 Correlationen erhalten, durch welche die Figur eines vollständigen (speciell regulären) ebenen Vierecks in die reciproke übergeführt wird. Die Kerncurven für die Polarcorrelationen und allgemeinen Correlationen der ebenen Figur sind hierbei (im Anschluss an Tabelle (9a)) folgende¹⁾ und durch die danebenstehenden Gleichungen in homogenen Punkt-(Linien-)Coordinationen x, y, z (u, v, w) dargestellt: für

1) Vgl. des Verf. demnächst erscheinende Abhandlung.

1)	der imaginäre Kreis	$x^2 + y^2 + z^2 = 0$	oder	$u^2 + v^2 + w^2 = 0$		
2)	die gleichseitige Hyperbel	$x^2 - y^2 - z^2 = 0$	"	$u^2 - v^2 - w^2 = 0$		
3)	"	$-x^2 + y^2 - z^2 = 0$	"	$-u^2 + v^2 - w^2 = 0$		
4)	der Kreis	$x^2 + y^2 - z^2 = 0$	"	$u^2 + v^2 - w^2 = 0$		
5)	K_1 ... gleichs. Hyperbel	$2(yz + zx + xy) \equiv u^2 + v^2 + w^2 - 2(vw + wu + uw) = 0$	berühren sich doppelt in	$1 \alpha \alpha^2$		
6)	K_2 ... Parabel	$x^2 + y^2 + z^2 - 2(yz + zx + xy) \equiv 2(vw + wu + uw) = 0$		$1 \alpha^2 \alpha$		
7)	K_1 ... gleichs. Hyperbel	$2(-yz + zx + xy) \equiv u^2 + v^2 + w^2 + 2(-vw + wu + uw) = 0$	"	$-1 \alpha \alpha^2$		
8)	K_2 ... Parabel	$x^2 + y^2 + z^2 + 2(-yz + zx + xy) \equiv 2(-vw + wu + uw) = 0$	"	$-1 \alpha^2 \alpha$		
9)	K_1 ... gleichs. Hyperbel	$2(yz - zx + xy) \equiv u^2 + v^2 + w^2 + 2(vw - wu + uw) = 0$	"	$\alpha - 1 \alpha^2$		
10)	K_2 ... Parabel	$x^2 + y^2 + z^2 + 2(yz - zx + xy) \equiv 2(vw - wu + uw) = 0$	"	$\alpha^2 - 1 \alpha$		
11)	K_1 ... gleichs. Hyperbel	$2(yz + zx - xy) \equiv u^2 + v^2 + w^2 + 2(vw + wu - uw) = 0$	"	$\alpha \alpha^2 - 1$		
12)	K_2 ... Parabel	$x^2 + y^2 + z^2 + 2(yz + zx - xy) \equiv 2(vw + wu - uw) = 0$	"	$\alpha^2 \alpha - 1$		
13)	die Parabel... ..	$x^2 - 2y = 0$ oder $u^2 - 2v = 0$				
14)	"	$\dots x^2 + 2y = 0$	"	$u^2 + 2v = 0$		
15)	"	$\dots y^2 - 2x = 0$	"	$v^2 - 2u = 0$		
16)	"	$\dots y^2 + 2x = 0$	"	$v^2 + 2u = 0$		
17)	die gleichseitige Hyperbel	$2xy - z^2 = 0$ oder $2uv - w^2 = 0$				
18)	"	$\dots 2xy + z^2 = 0$	"	$2uv + w^2 = 0$		
19)	die Doppelgerade	$x^2 = 0$	\mathfrak{A}_1			
20)	der Doppelpunkt	$u^2 = 0$	\mathfrak{A}_1			
21)	die Doppelgerade	$y^2 = 0$	\mathfrak{A}_2			
22)	der Doppelpunkt	$v^2 = 0$	\mathfrak{A}_2			
23)	die doppelt zählende unendlich ferne Gerade	$z^2 = 0$	\mathfrak{A}_3			
24)	der Doppelpunkt	$w^2 = 0$	\mathfrak{A}_3			

Die Centralprojectionen dieser ebenen Curven auf die Kugelfläche sind durchweg kleine Kugelkreise (speciell Null- und Hauptkreise) und deren Gegenkreise. Durch diese sphärischen Kerncurven sind bemerkenswerthe Einteilungen der Kugelfläche und Beziehungen zu bestimmten Polyedern der Gruppe bedingt.

So sind die sechs kleinen Kugelkreise vom sphärischen Radius $\frac{\pi}{4}$ und mit den Mittelpunkten $A_1 \dots A_3$ und $A_1' \dots A_3'$ (2)–(4) in Tabelle (9a)), von denen jeder Kreis von vier anderen in Punkten B berührt wird, den hexaedrischen Seitenflächen, die acht Kugelkreise \mathfrak{R}_1 vom sph. Radius $\frac{\pi}{2} - \eta$ mit den Mittelpunkten $C_1 \dots C_4$ und $C_1' \dots C_4'$ (5)–(12) in Tabelle (9a)), von denen jeder Kreis von drei anderen in den Punkten B berührt wird, den oktaedrischen Seitenflächen des der Kugel eingeschriebenen Kubooktaeders umgeschrieben. Die acht Kreise \mathfrak{R}_2 vom sph. Radius η mit den Mittelpunkten C_i und C_i' (5)–(12) in Tabelle (9a)), von denen jeder Kreis von drei anderen in den Punkten A berührt wird, sind den Seitenflächen des der Kugel eingeschriebenen Oktaeders umgeschrieben und endlich die 12 Kreise \mathfrak{R} vom sph. Radius $\frac{\pi}{4}$ mit den Mittelpunkten $B_1 \dots B_6$ u. $B_1' \dots B_6'$, von denen jeder Kreis von zwei anderen in den Punkten A berührt wird, sind die über den Kanten dieses Oktaeders als Durchmesser in den Ebenen des der Kugel in den Punkten B umgeschriebenen Rhombendodekaeders beschriebenen Kreise.

Diese sphärischen Figuren sind zwar etwas complicirter, als die sphärischen Netze, welche durch die Symmetrieebenen (a und b) auf der Kugelfläche erzeugt werden und in einfacher Weise zur Veranschaulichung der Collineationen dienen; doch können sie ebenfalls mit grossem Vorthail zur Versinnlichung der Correlationen benutzt werden.

B) Ikosaeder-Pentagondodekaeder-Gruppe.

Für diese Gruppe möge es genügen, die eigentlichen und uneigentlichen Collineationen und die diesen entsprechenden

Correlationen übersichtlich zusammenzustellen und kurz zu charakterisieren. Die Tabellen (11 a) und (12 a') enthalten zunächst die 60 eigentlichen Collineationen und die 60 eigentlichen Correlationen, welche letztere wiederum durch die sphärischen Kerncurven charakterisirt sind.

a) Eigentliche Collineationen.

- 1) Die Identität.
- 2)... 16) 15 Umwendungen um je eine der 15 zweizähligen Axen B'OB (Kantenaxen).
- 17)... 40) $6 \cdot 4 = 24$ fünfzählige Drehungen um die 6 fünfzähligen Axen G'OG (Eckenaxen des Ikosaeders oder Flächenaxen des Pentagondodekaeders) und zwar:

$\left\{ \begin{array}{l} \text{a) Drehungen von der Amplitude } \frac{2\pi}{5} \\ \text{d) } \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \frac{8\pi}{5} \text{ od. } -\frac{2\pi}{5} \end{array} \right\}$	}	(11 a)
$\left\{ \begin{array}{l} \text{b) } \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \frac{4\pi}{5} \\ \text{c) } \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \frac{6\pi}{5} \text{ od. } -\frac{4\pi}{5} \end{array} \right\}$		
- 41)... 60) $10 \cdot 2 = 20$ dreizählige Drehungen um die 10 dreizähligen Axen C'OC (Flächenaxen des Ikosaeders oder Eckenaxen des Pentagondodekaeders) und zwar:

$\left\{ \begin{array}{l} \text{a) Drehungen von der Amplitude } \frac{2\pi}{3} \\ \text{b) } \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \frac{4\pi}{3} \text{ od. } -\frac{2\pi}{3} \end{array} \right\}$	}	
---	---	--

a') Eigentliche Correlationen.

- 1) Die Polarcorrelation in Bezug auf den unendlich fernen imaginären Kugelkreis \mathfrak{K}_∞ .
- 2)... 16) 15 Polarcorrelationen. Sphärische Kerncurven:

\mathfrak{K} mit sphärischem Radius $\frac{\pi}{4}$ u. Mittelpunkten $B_1 \dots B_{15}$ ($B_1' \dots B_{15}'$).
- 17)... 40) $6 \cdot 4 = 24$ zehnzählige allgemeine Correlationen. Die geraden Potenzen S^2, S^4, S^6, S^8 einer Substitution S ergeben die 5-zähligen Drehungen (vgl. 11)... 24) in (11 a)). Sphärische Kerncurven: Je zwei concentrische Kreise \mathfrak{K}_1 und \mathfrak{K}_2 mit Mittelpunkten G (und G') und sph. Radien ε_1 und ε_2 :

(12a')

$$\begin{aligned}
 & \text{a), d) } \mathfrak{R}_1 \text{ und } \mathfrak{R}_2 \text{ imaginär, } \operatorname{tg} \varepsilon_1 = \operatorname{cotg} \varepsilon_2 = \sqrt{-\cos \frac{2\pi}{5}}; \text{ b), c) } \mathfrak{R}_1 \text{ und } \mathfrak{R}_2 \text{ reell, } \operatorname{tg} \varepsilon_1 = \\
 & \operatorname{cotg} \varepsilon_2 = \sqrt{-\cos \frac{4\pi}{5}} = \sqrt{\cos \frac{\pi}{5}}.
 \end{aligned}
 \tag{12a'}$$

41)...60) 10.2=20 sechszählige allgemeine Correlationen. Die geraden Potenzen S^2, S^4 einer Substitution ergeben die 3-zähligen Drehungen (vgl. 41)...60) in (11a)), S^3 die Polarcorrelation 1). Sphärische Kerncurven: Je zwei concentrische Kreise \mathfrak{R}_1 und \mathfrak{R}_2 mit Mittelpunkten C (und C') und sph. Radien ε_1 und ε_2 : a), b) \mathfrak{R}_1 und \mathfrak{R}_2 reell, $\operatorname{tg} \varepsilon_1 = \operatorname{cotg} \varepsilon_2 = \sqrt{-\cos \frac{2\pi}{3}} = \sqrt{\cos \frac{\pi}{3}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$. $\varepsilon_2 = \eta$.

Die Substitutionen selbst ergeben sich einfach aus den Coordinatenwerten¹⁾ für die Eckpunkte (Flächen) des allgemeinsten gleichseitigen (gleichflächigen) Polyeders dieser Gruppe, nämlich des der Kugel eingeschriebenen (umgeschriebenen) (12+20+30)-flächigen 2.60-Ecks (des (12+20+30)-eckigen 2.60-Flachs oder Diakishexekontaeders).

Die Tabelle (11b) enthält die uneigentlichen Colli-
neationen; die uneigentlichen Correlationen sind wieder-
um die inversen der eigentlichen, d. h. durch Combination
dieser mit der Inversion zu erhalten, wobei die sphärischen
Kerncurven bez. dieselben, wie für die eigentlichen Correlationen
(12a') sind.

b) Uneigentliche Collineationen.

61) Die Inversion oder Spiegelung am Mittelpunkte O.

62) ...76) 15 Spiegelungen an je einer der 15 Symmetrie-
Ebenen b.

77)...100) 6.4=24 zehnzählige Drehspiegelungen,

d. h. Drehungen von der Amplitude a) $\frac{\pi}{5}$, d) $-\frac{\pi}{5}$;

b) $\frac{3\pi}{5}$, c) $-\frac{3\pi}{5}$ um je eine der fünfzähligen Axen

G'OG und Spiegelung an der dazu senkrechten (nicht

(11 b)

¹⁾ Vergl. E. Hess, Einleitung in die Lehre von der Kugelteilung.
§ 75.

direkt-symmetrischen) Mittelebene g . (Die geraden Potenzen S^2, S^4, S^6, S^8 sind wiederum die 5-zähligen Drehungen 17)...40) in (11a)).

101)...120) $10 \cdot 2 = 20$ sechszählige Drehspiegelungen, d. h. Drehungen von der Amplitude a) $\frac{\pi}{3}$, b) $-\frac{\pi}{3}$ um je eine der drei-zähligen Axen C'OC und Spiegelung an der dazu senkrechten (nicht direkt-symmetrischen) Mittelebene c . (Die geraden Potenzen S^2, S^4 sind wiederum die 3-zähligen Drehungen 41)...60) in (11a), S^3 ist die Inversion 61)).

(11 b)

Die 120 Collineationen und die 120 Correlationen bilden zusammen die vollständige Hauptgruppe, von welcher die Gruppe der 120 Collineationen eine ausgezeichnete (invariante) Untergruppe ist. Ferner bilden die 60 eigentlichen Collineationen zusammen mit den 60 eigentlichen Correlationen eine vollständige Untergruppe, welcher als allgemeinstes gleicheckiges (gleichflächiges) Polyeder das gänzlich unsymmetrische $(12 + 20 + 60)$ -flächige 60-Eck (das $(12 + 20 + 60)$ -eckige 60-Flach oder Pentagonhexekontaeder) und zwar als gyrodische Hemigonie (Hemiedrie) des 2.60-Ecks (des 2.60-Flachs) entspricht. Auch hier bilden die 60 eigentlichen Collineationen für sich eine ausgezeichnete Untergruppe.

Man kann auch analog, wie es unter A) geschehen ist, die 120 Collineationen und die 120 Correlationen der Ikosaeder-Pentagondodekaeder-Gruppe bez. aus den 60 Collineationen und den 60 Correlationen, durch welche die ebene (speziell reguläre) Figur eines sog. zehnfach Brianchon'schen Sechsecks in sich oder in die reciproke Figur übergeht, durch das angegebene Verfahren der Centralprojection auf die Kugel erhalten.

Die sphärischen Kerncurven der Correlationen bedingen ebenfalls bestimmte regelmässige Eintheilungen der Kugelfläche, welche zu gewissen besonderen Polyedern der Gruppe in einfacher Beziehung stehen.

C) Dieder-(Doppelpyramiden-)Gruppe.

Auch für diese Gruppe möge eine übersichtliche Zusammenstellung und kurze Charakterisirung der eigentlichen und un-

eigentlichen Collineationen und der diesen entsprechenden Correlationen genügen.

Der allgemeinsten Gruppe entspricht als zugehöriges gleich-eckiges Polyeder ein prismatisches $(2 + \overline{p + p})$ -flächiges $2 \cdot 2p$ -Eck, dessen Endflächen gleicheckige $(\overline{p + p})$ -kantige $2 \cdot p$ -Ecke sind (welche auch speciell in reguläre übergehen können), und als zugehöriges gleichflächiges Polyeder ein $(2 + \overline{p + p})$ -eckiges $2 \cdot 2p$ -Flach, d. h. eine gerade Doppelpyramide, deren ebener Rand ein gleichkantiges $(\overline{p + p})$ -eckiges $2p$ -Kant ist (welches auch speciell regulär werden kann). Hier sind nun die beiden Fälle zu unterscheiden, dass die die Zähligkeit der Hauptaxe bestimmende Zahl p gerade oder ungerade ist, indem im ersteren Falle die Inversion vorhanden ist und die uneigentlichen Correlationen die inversen der eigentlichen sind, im zweiten Falle dagegen nicht.

1) $p = 2p_1$, wobei $p_1 = 2q_1 + 1$ oder $= 2q_1$ sein kann.

a) Eigentliche Collineationen.

- | | |
|---|---------|
| 1) Die Identität. | } (13a) |
| 2) Die Umwendung um die Hauptaxe A'OA. | |
| 3) ... $\overline{2p_1 + 2}$ $2p_1$ -Umwendungen um die $2p_1$ -Neben-(Quer-) Axen B'OB. | |
| $\overline{2p_1 + 3}$... $\overline{4p_1}$ $2p_1 - 2$ $2p_1$ -zählige Drehungen, um die Hauptaxe von der Amplitude $\frac{\pi}{p_1}$ und $-\frac{\pi}{p_1}$, $\frac{2\pi}{p_1}$ und $-\frac{2\pi}{p_1}$, $\frac{p_1-1}{p_1} \pi$ und $-\frac{p_1-1}{p_1} \pi$. | |

b) Uneigentliche Collineationen.

- | | |
|--|---------|
| $\overline{4p_1 + 1}$ Die Inversion. | } (13b) |
| $\overline{4p_1 + 2}$ Die Spiegelung an der Symmetrie-Ebene α (senkrecht zu A'OA). | |
| $\overline{4p_1 + 3}$... $\overline{6p_1 + 2}$ $2p_1$ -Spiegelungen an den $2p_1$ -Symmetrie-Ebenen $b_1, b_2, \dots, b_{2p_1}$ (welche bez. auf den Nebenaxen $B'_{p_1+1}OB_{p_1+1}, B'_{p_1+2}OB_{p_1+2}, \dots, B'_{p_1}OB_{p_1}$ senkrecht stehen. | |
| $\overline{6p_1 + 3}$... $\overline{8p_1}$ $2p_1 - 2$ $2p_1$ -zählige Drehspiegelungen dh. Drehungen um die Hauptaxe von der Amplitude $\frac{\pi}{p_1}$ und $-\frac{\pi}{p_1}$, $\frac{2\pi}{p_1}$ und $-\frac{2\pi}{p_1}$, $\frac{p_1-1}{p_1} \pi$ und $-\frac{p_1-1}{p_1} \pi$ und Spiegelung an der Ebene α . | |

a') Eigentliche Correlationen.

- 1) Die Polarcorrelation in Bezug auf \mathfrak{R}_∞ .
 - 2) Die Polarcorrelation in Bezug auf \mathfrak{R} mit sph. Radius $\frac{\pi}{4}$ und Mittelpunkt A (und A').
 - 3) ... $\overline{2p_1 + 2}$) $2p_1$ -Polarcorrelationen. Sphärische Kerncurven: \mathfrak{R} mit sph. Radius $\frac{\pi}{4}$ und Mittelpunkten $B_1 \dots B_{2p_1}$ ($B_1' \dots B_{2p_1}'$).
 - $\overline{2p_1 + 3}$) ... $\overline{4p_1}$) $2p_1 - 2$ $2p_1$ -zählige allgemeine Correlationen. Sphärische Kerncurven: Je zwei concentrische Kreise \mathfrak{R}_1 und \mathfrak{R}_2 mit Mittelpunkt A (A') und sph. Radius ε_1 und ε_2 , wobei $\operatorname{tg} \varepsilon_1 = \operatorname{cotg} \varepsilon_2 = \sqrt{-\cos \frac{x\pi}{p_1}}$ ist, $x = 1, 2, \dots p_1 - 1$.
- (14a')
- α) Falls $p_1 = 2q_1 + 1$ ist, sind \mathfrak{R}_1 und \mathfrak{R}_2 imaginär für $x = 1, 2, \dots q_1$, reell für $x = q_1 + 1, q_1 + 2, \dots 2q_1$;
 - β) Falls $p_1 = 2q_1$ ist, sind \mathfrak{R}_1 und \mathfrak{R}_2 imaginär für $x = 1, 2, \dots q_1 - 1$, reell für $x = q_1 + 1, q_1 + 2, \dots 2q_1 - 1$, während für $x = q_1$ die beiden Kreise in den Nullkreis (und Gegenkreis) und den Hauptkreis (den Aequator zu A (A')) übergehen.

b') Uneigentliche Correlationen . . (14b')

Dieselben sind die inversen der eigentlichen Correlationen, (14a), die sphärischen Kerncurven also bez. dieselben. Insbesondere sind für die den $2p_1 - 2$ $2p_1$ -zähligen Drehspiegelungen $\overline{6p_1 + 3}$) ... $\overline{8p_1}$) in (13b) entsprechenden allgemeinen $2p_1$ -zähligen Correlationen die Kerncurven je zwei concentrische Kreise mit Mittelpunkten A (A') und sph. Radien $\operatorname{tg} \varepsilon_1' = \operatorname{cotg} \varepsilon_2' = \sqrt{\cos \frac{x\pi}{p_1}}$, $x = 1, 2, \dots p_1 - 1$, d. h. dieselben Kreise wie unter $\overline{2p_1 + 3}$) ... $\overline{4p_1}$) in (14a), indem sich die Bedingungen dafür, dass die sphärischen Radien imaginär oder reell sind, bez. vertauschen.

2) $p = 2q + 1$, wobei $q = 2q_1 + 1$ oder $= 2q_1$ sein kann.

a) Eigentliche Collineationen.

- 1) Die Identität.
- 2) ... $\overline{2q+2}$: $2q+1$ -Umwendungen um die $2q+1$ -Neben-(Quer-)Axen B'OB.
- $\overline{2q+3}$... $\overline{4q+2}$: $2q \cdot \overline{2q+1}$ -zählige Drehungen um die Hauptaxe A'OA v. d. Amplitude $\frac{2\pi}{2q+1}, -\frac{2\pi}{2q+1}, \frac{4\pi}{2q+1}, -\frac{4\pi}{2q+1}, \dots, \frac{2q\pi}{2q+1}, -\frac{2q\pi}{2q+1}$.
- (15a)

b) Uneigentliche Collineationen.

- $4q+3$) Die Spiegelung an der Symmetrie-Ebene (dem Aequator) α .
- $\overline{4q+4}$... $\overline{6q+4}$: $2q+1$ -Spiegelungen an den $2q+1$ -Symmetrie-Ebenen $b_1, b_2 \dots b_{2q+1}$, welche durch die Hauptaxe und je eine Nebenaxe gehen, aber nicht auf einer anderen Nebenaxe senkrecht stehen.
- $\overline{6q+5}$... $\overline{8q+4}$: $2q \cdot \overline{2q+1}$ -zählige Drehspiegelungen, d. h. Drehungen um die Hauptaxe von der Amplitude $\frac{2\pi}{2q+1}, -\frac{2\pi}{2q+1}, \dots, \frac{2q\pi}{2q+1}, -\frac{2q\pi}{2q+1}$ und Spiegelung an der Aequator-Ebene α .
- (15b)

a') Eigentliche Correlationen.

- 1) Polarcorrelation in Bezug auf \mathfrak{R}_∞ .
- 2) ... $\overline{2q+2}$: $2q+1$ -Polarcorrelationen in Bezug auf \mathfrak{R} mit sph. Radius $\frac{\pi}{4}$ und Mittelpunkten $B_1, B_2 \dots B_{2q+1}$ ($B_1', B_2' \dots B_{2q+1}'$).
- $\overline{2q+3}$... $\overline{4q+2}$: $2q \cdot \overline{2(2q+1)}$ -zählige allgemeine Correlationen. Sphärische Kerncurven: Je zwei concentrische Kreise \mathfrak{R}_1 und \mathfrak{R}_2 mit Mittelpunkt A (A') und sph. Radius ε_1 und ε_2 , wobei $\operatorname{tg} \varepsilon_1 = \operatorname{cotg} \varepsilon_2 = \sqrt{-\cos \frac{2x\pi}{2q+1}}$ ist.
- α) Falls $q = 2q_1 + 1$, also $p \equiv 3 \pmod{4}$ ist, sind \mathfrak{R}_1 und \mathfrak{R}_2 imaginär für $x = 1, 2, \dots, q_1$, reell für $x = q_1 + 1, q_1 + 2, \dots, 2q_1, 2q_1 + 1$;
- β) Falls $q = 2q_1$, also $p \equiv 1 \pmod{4}$ ist, sind \mathfrak{R}_1 und \mathfrak{R}_2 imaginär für $x = 1, 2, \dots, q_1$, reell für $x = q_1 + 1, q_1 + 2, \dots, 2q_1$.
- (16a')

b') Uneigentliche Correlationen.

$\overline{4q+3}$) Die Polarcorrelation in Bezug auf \mathfrak{R} mit sph.

Radius $\frac{\pi}{4}$ und Mittelpunkt A (A').

$\overline{4q+4} \dots \overline{6q+4}$) $2q+1$ -Polarcorrelationen. Sphärische

Kerncurven: \mathfrak{R} mit sph. Radius $\frac{\pi}{4}$ und Mittel-

punkten $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2 \dots \mathfrak{B}_{2q+1}$ ($\mathfrak{B}'_1, \mathfrak{B}'_2, \dots \mathfrak{B}'_{2q+1}$) den

Endpunkten der auf den Symmetrie-Ebenen $b_1, b_2 \dots$

b_{2q+1} senkrecht stehenden Durchmesser (welche keine zweizähligen Axen sind.)

$\overline{6q+5} \dots \overline{8q+4}$): $2q \cdot 2(2q+1)$ -zählige allgemeine Cor-

relationen. Sphärische Kerncurven: Je zwei

concentrische Kreise \mathfrak{R}_1 und \mathfrak{R}_2 mit Mittelpunkt A (A')

und sph. Radius ε_1 und ε_2 , wobei $\operatorname{tg} \varepsilon_1 = \cotg \varepsilon_2 =$

$\sqrt{\cos \frac{2\pi}{2q+1}}$ ist. (Vgl. (16a)).

α) Falls $q=2q_1$, also $p \equiv 3 \pmod{4}$ ist, sind \mathfrak{R}_1 und \mathfrak{R}_2 reell für $x=1, 2, \dots q_1$,

imaginär für $x=q_1+1, q_1+2, \dots 2q_1, 2q_1+1$;

β) Falls $q=2q_1$, also $p \equiv 1 \pmod{4}$ ist, sind \mathfrak{R}_1 und \mathfrak{R}_2 reell für $x=1, 2, \dots q_1$,

imaginär für $x=q_1+1, q_1+2, \dots 2q_1$.

(16b')

Die Substitutionen selbst folgen auch hier einfach aus den Coordinatenwerten ¹⁾ für die Eckpunkte (Flächen) des allgemeinsten gleicheckigen (gleichflächigen) Polyeders der betreffenden Gruppe.

Die $2 \cdot 2p$ Collineationen und die $2 \cdot 2p$ Correlationen bilden in den beiden Fällen 1) ((13) und (14)) und 2) ((15) und (16)) zusammen die vollständige Hauptgruppe, von welcher die Gruppe der $2 \cdot 2p$ Collineationen eine ausgezeichnete (invariante) Untergruppe ist. Ferner bilden in beiden Fällen die $2p$ eigentlichen Collineationen zusammen mit den $2p$ eigentlichen Correlationen eine vollständige Untergruppe, welcher als allgemeinstes gleicheckiges (gleichflächiges) Polyeder das unsymmetrische sog. sägerandige $(2+2p)$ -flächige $2p$ -Eck (das sägerandige $(2+2p)$ -eckige $2p$ -Flach oder hauptaxige Trapezoid-

1) Vgl. E. Hess, Einleitung in die Lehre von der Kugelteilung. § 62.

$2p$ -Flach) und zwar als gyroedrische (trapezoedrische) Hemigonie (Hemiedrie) entspricht. Diese sägerandigen Polyeder können speciell in symmetrische sog. kronrandige übergehen.¹⁾ Auch hier bilden die $2p$ eigentlichen Collineationen für sich eine ausgezeichnete Untergruppe.

Eine besondere Untergruppe existiert endlich noch im Falle 1) für $p = 2p_1$, und zwar ist die Zahl der Collineationen und der Correlationen die Hälfte derjenigen in (13 a), (13 b), (14 a) und (14 b). Die zugehörigen gleicheckigen und gleichflächigen Polyeder sind bestimmte Hemigonien (Hemiedrien) der allgemeinen Polyeder, nämlich das sog. unterbrochen-kronrandige $(2 + 2p_1)$ -flächige $2 \cdot 2p_1$ -Eck (das kronrandige $(2 + 2p_1)$ -eckige $2 \cdot 2p_1$ -Flach oder Skalenoeder).²⁾ Für die beiden auch hier zu unterscheidenden Fälle $p_1 = 2q_1 + 1$ und $p_1 = 2q_1$ ist im ersteren Falle die Inversion vorhanden, und die un-eigentlichen Correlationen sind die inversen der eigentlichen, im letzteren Falle dagegen nicht. Die in beiden Fällen auftretenden Collineationen und Correlationen können leicht aus den obigen Tabellen (13 a), (13 b) ffg. entnommen werden.

Schliesslich sei noch bemerkt, dass auch die Collineationen und Correlationen der Dieder-Gruppe, analog wie es unter A) und B) geschehen ist, aus denjenigen einer einfachen ebenen Figur, welche durch ein reguläres Strahlsystem d. h. durch p sich in einem Punkte schneidende und gleiche Winkel mit einander bildende Strahlen bestimmt ist, durch das angegebene Verfahren der Centralprojection auf die Kugel erhalten werden können, und dass die durch die sphärischen Kerncurven der Correlationen bedingten regelmässigen Eintheilungen der Kugel-fläche auch hier zu gewissen besonderen Polyedern der Gruppe einfache Beziehungen darbieten.

1) A. a. O. § 60.

2) A. a. O. § 61.

Von eingegangenen Schriften waren aufgelegt.

- Transactions of the American Philosophical Society. Vol. XVII No. 3 Vol. XVIII No. 1. Philadelphia 1893.
- Occasional Papers of the California Academy of Sciences IV. San Francisco 1893.
- Proceedings of the California Academy of Sciences. II Ser. Vol. III Part 2. San Francisco 1893.
- Transactions of the Wisconsin Academy. Vol. IX Part 1 u. 2. Madison. Wis. 1893.
- Boston Society of Natural History: Occasional Papers IV. Vol. I Part 1. — Proceedings Vol. XXVI Part 1. — Memoirs Vol. IV. No. XI.
- U. S. Geological Survey. 11. Report Part I Geology. Part II Irrigation. Washington 1891.
- Annual Report of the Bureau of Ethnology. 1886—87, 1887—88. Washington 1892.
- Smithsonian Miscellaneous Collections. Vol. XXXIV, Vol. XXXVI. Washington 1893. Annual Report 1891. — Contributions to Knowledge 1884. Washington 1893.
- Bibliography of Salishan and of Chinookan Languages. Washington 1893.
- Report of the U. S. Naval Observatory. June 1893.
- Proceedings of the Nova Scotian Institute of Sciences. Vol. I Part 2. Halifax 1892.
- The American Naturalist. Vol. XXVIII No. 325—336. Philadelphia 1894.
- Bulletin of Museum of comparative Zoology. Vol. XXV No. 4—10 und Annual Report 1892—93. Cambridge 1893—94.
- Memoirs and Proceedings of the Manchester Literary u. Philosophical Society. Vol. 8 No. 1—3. Manchester 1893—94.
- Johns Hopkins University Circulars. Vol. XIII No. 109, 111—114. Baltimore 1894.
- Ferdinand von Müller, Second Systematic Census of Australian Plants. Part I. Melbourne 1889.
- Transactions of the Academy of Science. Vol. VI No. 2—7. St. Louis 1893.
13. Jahresbericht des botanischen Vereins in Landshut. Landshut 1894.
49. u. 50. Jahrgang der Jahreshefte des Vereins für vaterländische Naturkunde in Württemberg. Stuttgart 1893—94.

39. Bericht des Vereins für Naturkunde. Kassel 1894.
Abhandl. der naturhistorischen Gesellschaft zu Nürnberg. Bd. X
Heft 2. Nürnberg 1894.
- 56.—60. Jahresbericht des Vereins für Naturkunde in Mannheim.
Mannheim 1894.
- Jahresbericht des Vereins für Naturkunde in Zwickau. 1892
u. 1893. Zwickau 1894.
- Abhandlungen vom naturwissenschaftlichen Verein zu Bremen.
Bd. XIII Heft 1; nebst Extrabeilage. Bremen 1894.
- Verhandlungen des naturhistorischen Vereins der preuss. Rhein-
lande, Westfalens u. s. w. Jahrg. 50,2. Jahrg. 51,1.
Bonn 1893—94.
- Jahresbericht des naturwissenschaftlichen Vereins in Magdeburg.
1893—94, nebst Festschrift. Magdeburg 1894.
20. u. 21. Jahresbericht des westfälischen Provinzial-Vereins für
Wissenschaft und Kunst. Münster 1892—93.
- Schriften der naturforschenden Gesellschaft in Danzig. Bd. VIII
Heft 3 u. 4. Danzig 1894.
- Zeitschrift für Naturwissenschaften. Bd. 66 u. 67. Leipzig 1894.
- Jahrbücher des nassauischen Vereins für Naturkunde. Jahrg. 47.
Wiesbaden 1894.
- Verhandlungen des botanischen Vereins der Provinz Brandenburg.
Jahrg. 35. Berlin 1894.
4. 13. 14. 15. 16. 17. 18. Jahrgang der Sitzungsberichte der
naturforschenden Gesellschaft zu Leipzig. Leipzig 1878—92.
- Schriften der physikalisch-ökonomischen Gesellschaft zu Königs-
berg i. P. Jahrg. 34. Königsberg 1893.
42. u. 43. Jahresbericht der naturhistorischen Gesellschaft zu
Hannover. Hannover 1894.
71. Jahresbericht der schlesischen Gesellschaft für vaterländische
Kultur. Breslau 1894.
- Mitteilungen des Vereins für Erdkunde zu Halle a. S. 1894.
Halle 1894.
- Notizblatt des Vereins für Erdkunde in Darmstadt. IV F. Heft 14.
Darmstadt 1893.
- Verhandlungen der Berliner medicinischen Gesellschaft 1893.
Bd. XXIV. Berlin 1894.
- Sitzungsber. der Gesellschaft für Morphologie und Physiologie
in München. IX. Heft 3. München 1894.
- Zeitschrift des naturwissenschaftlichen Vereins der Provinz Posen.
Heft 2. Posen 1894.

- Bericht der bayerischen botanischen Gesellschaft. Bd. III.
München 1893.
- Programm der herzogl. technischen Hochschule zu Braunschweig.
1894—95.
- Verhandlungen des naturforschenden Vereins in Brünn. Bd.
XXXI nebst Bericht XI. Brünn 1893.
- Sitzungsber. und Abhandl. der Gesellschaft Isis. Jahrg. 1893
u. 1894. Dresden 1894.
31. Bericht des naturwissenschaftlichen Vereins für Schwaben
und Neuburg. Augsburg 1894.
25. Heft der Sitzungsberichte der physikalisch-medicinischen
Societät in Erlangen. Erlangen 1893.
- Polichia, Jahrg. 51 No. 7. Dürkheim 1893. Nebst Separat-
ausgabe. Neustadt 1894.
- Schriften des Naturwissenschaftlichen Vereins des Harzes.
Jahrg. 8. Wernigerode 1893.
- Berichte des naturwissenschaftlichen Vereins zu Regensburg.
Regensburg 1894.
- Berichte des naturwissenschaftlich-medicinischen Vereins in
Innsbruck. Innsbruck 1894.
17. u. 18. Jahresbericht der Gewerbeschule in Bistritz. Bistritz
1892—93.
- Bericht der Lese- und Redehalle in Prag 1893. Prag 1894.
- Mitteilungen des naturwissenschaftlichen Vereins für Steiermark.
Heft 30. Graz 1894.
- Bericht des naturwissenschaftlichen Vereins in Aussig für
1887—93. Aussig 1893.
25. Jahrg. des Vereins der Naturfreunde in Reichenberg.
Reichenberg 1894.
78. Jahresbericht der naturforschenden Gesellschaft in Emden.
Emden 1894.
- Jahresber. der naturforschenden Gesellschaft Graubündens. Bd.
XXXVII. Chur 1894.
- Jahrbuch des ungarischen Karpathen-Vereins, Jahrg. XXI.
Iglo 1894.
- Lotos N. F. Bd. XIV. Wien 1894.
- Schriften des Vereins zur Verbreitung naturwissenschaftlicher
Kenntnisse, Bd. XXXIV. Wien 1894.
- Jahresbericht 1893 des K. K. naturhistorischen Hofmuseums.
Wien 1894.

- Verhandlungen der naturforschenden Gesellschaft in Basel. Bd. IX Heft 3. Bd. X Heft 1. Basel 1892—93.
- Verhandlungen der Schweizerischen naturforschenden Gesellschaft 1893 in Lausanne. Lausanne 1893.
- Archives du Musée Teyler. Ser. II Vol. IV. 2. Haarlem 1894.
- Königl. Akademie der Wissenschaften in Amsterdam: Verhandlungen II No. 1—8, III No. 1—14. Zittingsverslagen 1893—94. Jaarboek 1893.
- Deutsche botanische Monatsschrift, Jahrg. XI No. 12, Jahrg. XII No. 1. Arnstadt 1893—94.
- Sociétatum litterae, Jahrg. 8. No. 1—9.
- Helios, Jahrg. XI No. 10—12, Jahrg. XII No. 1—6.
7. Report of the University of Nebraska. Lincoln 1894.
- Journal of the Elisha Mitchell Scientific Society. Jahrg. X Heft 1 u. 2. Chapel Hill 1893.
- Tufts College (Mass.) Studies No. 1—3. Tufts College 1894.
- Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences. N. S. Vol. XX. Boston 1893.
- Transactions of the Meriden Scientific Association. 1893. Meriden (Conn.) 1893.
- Journal of the New-York Microscopical Society. Vol. X No. 1—3. New-York 1894.
- Looke, Bird Migration. Washington 1881.
- Boletín de la Academia Nacional de Ciencias en Córdoba. Tom XII, 1—4. Tom XIII, 1—4. Buenos Aires 1891—93.
- Regenwaarnemingen, 14. Jahrg. 1892, und Observations Vol. XV, Batavia 1891—93.
5. Report of the Australasian Association. Sydney 1893.
- Journal and Proceedings of the Royal Society of New South Wales. Vol. XXVII. Sydney 1893.
- Bollettino del R. Comitato Geologico d'Italia. Vol. XXIV No. 1—4. Roma 1893.
- Bulletin de la Société impériale des Naturalistes de Moscou. 1894. No. 1 u. 2. Moscou 1894.
- Bericht über die erste altrussische hygienische Ausstellung 1893. St. Petersburg 1894.
- Bulletin de l'Académie impériale des Sciences de St. Petersburg. N. S. IV. 1 u. 2. St. Petersburg 1894.
- Schiötz, Pendelbeobachtungen. Kristiania 1894.



Marburg. Universitäts-Buchdruckerei (R. Friedrich).

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der Gesellschaft zur Beförderung der gesamten Naturwissenschaften zu Marburg](#)

Jahr/Year: 1895

Band/Volume: [1894](#)

Autor(en)/Author(s): Diverse Autoren

Artikel/Article: [Sitzungsberichte der Gesellschaft zur Beförderung der gesamten Naturwissenschaften zu Marburg 1894 1-39](#)