IV.

Ueber die Anwendungen

der

Theorie des Potentiales

auf

physikalische Probleme

von

Dr. phil. L. Weber,

Privatdocent an der Universität.

Die Aufstellung derjenigen Funktion, über deren Anwendung auf physikalische Probleme im Folgenden die wesentlichsten Gesichtspunkte angedeutet werden sollen, rürt von folgender von Lagrange gemachten Bemerkung her. Bezeichnet man die Entfernung zwischen einem festen und einem beweglichen variabelen Punkte mit r, so bemerkte Lagrange, dass die auf ein zu Grunde zu legendes rechtwinkliges Coordinatensystem bezogenen Richtungscosinus jener Linie r identisch seien mit den partiellen Differentialquotienten der Grösse r nach den entsprechenden Coordinaten des beweglichen Punktes. Wenn nun zwischen den beiden ins Auge gefassten Punkten eine Kraft wirkend ist, deren Grösse sich als Funktion der Entfernung darstellen lässt, so fürt die von Lagrange gemachte Bemerkung sehr leicht dazu, eine neue Funktion aufzustellen von solcher Beschaffenheit, dass die partiellen Ableitungen derselben in Bezug auf irgend eine Richtung zugleich die Componenten der wirkenden Kraft nach dieser selben Richtung darstellen. Diese Funktion wird bekanntlich im Allgemeinen als Kräftefunktion und für die besonderen Fälle der im umgekehrten Verhältniss des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungskräfte als das Potential der anziehenden Masse in Bezug auf einen angezogenen Punkt bezeichnet.

Das eigentliche Bedürfniss sowol wie auch die weitere Entwickelung der Theorie des Potentiales lehnte sich indessen vorzugsweise an ein Problem an, welches seit Newtons Zeiten bis auf die Jetztzeit hin die bedeutendsten Mathematiker beschäftigt hat, ich meine an das Problem der Attraction eines Ellipsoides. Schon Newton hatte den Satz gefunden, dass eine ellipsoidische Schicht keine Wirkung auf einen innern Punkt ausübe. Er fand ferner, dass zwei concentrische Rotationsellipsoide ähnlicher Gestalt und Lage auf zwei homologe Punkte ihrer Oberfläche Anziehungen von derselben Richtung und proportional dem Abstande vom Mittelpunkte ausüben. Hieran knüpfte

Maclanrin an, und bestimmte die Attraction eines Rotationsellipsoids für einen Punkt seiner Oberfläche und einen äusseren in der Ebene des Aequators liegenden Punkt und bewies, dass zwei confocale Ellipsoide auf einen Punkt einer Hauptaxe Wirkungen ausüben in der Richtung dieser Axe und proportional ihren Massen. Nachdem dann Lagrange diesen Satz auf alle Punkte eines Hauptschnittes ausgedehnt hatte, gelang es Laplace durch Einfürung der Kräftefunktion eine vollständige Lösung des Attractionsproblemes eines Ellipsoides zu geben. Später wurde dasselbe Problem durch neue Gesichtspunkte vermehrt von Gauss, Poisson, Legendre, Chasles, Dirichlet, Jacobi u. A. aufs neue behandelt und diesen letztgenannten Gelehrten ist damit zugleich auch das Verdienst zugefallen, die Theorie des Potentiales weiter ausgebildet zu haben. Die Arbeiten Greens, von dem der Name Potential herrürt, gingen zwar von der Behandlung anderer nachher zu besprechender Probleme aus, waren indessen für die Anwendung des Potentiales von solcher Bedeutung, dass ich gleich hier derselben gedenke. In neuerer Zeit haben vorzugsweise Clausius und Neumann in Leipzig die Theorie des Potentiales zu einem besonderen Gegenstand ihrer Studien gemacht.

Es mögen nun zunächst, die hauptsächlichsten Eigenschaften des Potentiales Erwänung finden, um daran die Anwendung desselben auf physikalische Probleme anzuknüpfen. Ich deutete schon an, dass sich für alle solche Kräfte ein Potential bilden lassen müsse, deren Grösse als eine Funktion der Entfernung zwischen den wirkenden und den afficirten Punkten ausgedrückt werden könne. Da es sich bei der Anwendung jedoch nur um solche Kräfte handelt, welche im Raume wirkend gedacht umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung sind und um solche, deren Wirkung in der Ebene umgekehrt proportional der Entfernung selbst fingirt wird, so bildet man das Potential gewönlich nur diesen beiden Fällen entsprechend. Dasselbe ist im ersteren Falle ein Integral, welches aus den durch die erste Potenz der Entfernung dividirten Producten der Massenelemente gebildet wird; im zweiten Falle ein Integral, bestehend aus den mit den natürlichen Logarithmen der Entfernung multiplicirten Producten der Massenelemente. Jenes wird als das Newton'sche, dieses als das logarithmische Potential bezeichnet.

Beide Potentiale haben zunächst die Eigenschaft, welche von Gauss bez. des Newton'schen Potentiales in folgenden Satz gefasst wird: das Potential von Massen, die sämmtlich ausserhalb eines zusammenhängenden Raumes liegen, kann nicht in einem Teile dieses Raumes einen constanten Wert und zugleich in einem andern Teile desselben einen verschiedenen Wert haben. Hierin sind sogleich zwei andere Sätze enthalten, nämlich 1): Wenn der die Massen enthaltende Raum einen massenleeren Raum umschliesst und das Potential in einem Teile dieses letzteren Raumes einen constanten Wert hat, so gilt dieser für alle Punkte des ganzen eingeschlossenen Raumes und 2) Wenn das Potential der in einen endlichen Raum eingeschlossenen Massen in irgend einem Teile des äussern Raumes einen constanten Wert hat, so gilt dieser für den ganzen unendlichen äussern Raum.

Für den Fall des logarithmischen Potentiales würde in diesen Sätzen nur das Wort Raum zu ersetzen sein durch Flächenstück.

In dem Falle der Inconstanz des Potentiales ergiebt sich ferner sehr leicht, dass dasselbe in den von Masse nicht erfüllten Räumen resp. Flächen keine Maxima oder Minima aufweisen kann, was natürlich so zu verstehen ist, dass es in jenen von Masse nicht erfüllten Räumen keine Punkte gibt, die einen grösseren oder kleineren Wert des Potentiales hätten, als alle in ihrer nächsten Umgebung liegenden Punkte.

Eine weitere allgemeine Eigenschaft des Newton'schen sowol wie des logarithmischen Potentiales besteht darin, dass die Potentiale selber sowie ihre nach den Coordinanten des variabelen (afficirten) Punktes genommenen Differentialquotienten beliebig hoher Ordnung überall eindeutig und stetig sind, so lange der variabele Punkt ausserhalb der wirkenden Massen bleibt. Rückt der variabele Punkt in den von Masse erfüllten Raum resp. die mit Masse bedeckte Fläche, so sind die Ableitungen auch dann noch stetig, wenn die Dichtigkeit der Masse eine endliche ist. Unter derselben Voraussetzung gelten auch die überaus wichtigen von Laplace und Poisson aufgestellten Gleichungen, welche aussagen, dass die Summe der zweiten partiellen Ableitungen des Potentiales ausserhalb der wirkenden Masse gleich Null und innerhalb der Masse gleich der mit -4π resp. beim logarithmischen Potential mit -2π multiplicirten Dichtigkeit der Masse an der betr. Stelle sind.

Von den Fällen, die eine Unstetigkeit im Verlauf der Differentialquotienten des Potentiales aufweisen, möge nur der wichtigste angefürt werden. Denkt man sich z. B. die Gesammtmasse eines Körpers rücksichtlich ihrer Wirkung auf äussere oder innere Punkte in passender Weise dargestellt als eine materielle unendlich dünne Oberflächenschicht des Körpers, oder in dem analogen Falle des logarithmischen Potentiales als eine materielle Belegung der Randcurven des betrachteten Flächenstückes, so zeigt es sich, dass die Differentialquotienten des Potentiales an der Oberflächenschicht resp. der materiellen Curve unstetig sind. Unter der Unstetigkeit der Differentialquotienten einer Funktion versteht man bekanntlich, dass die nach zwei gerade entgegengesetzten Richtungen gebildeten Differentialquotienten nicht wie in dem Falle der Stetigkeit gleiche und entgegengesetzte Werte geben, sondern eine Summe bilden von endlicher Grösse. Bildet man nun die Differentialquotienten des Potentiales einer Oberflächen- oder Curvenbelegung nach den beiden genau entgegengesetzten Richtungen der innern und äussern Normale, so zeigt es sich, dass die Summe dieser Ableitungen nicht gleich Null ist, sondern einen endlichen Wert hat, der im Allgemeinen in jedem Punkte der betrachteten Oberfläche oder Curve verschiedene Grösse hat, aber insofern von ganz besonderer Wichtigkeit ist, als derselbe eine direkte Relation zwischen der an dem betrachteten Punkte vorhandenen Dichtigkeit der Masse und der auf denselben Punkt bez. Differentialquotienten des Potentiales nach den beiden Normalen gibt: die Summe dieser letzteren, so wies Laplace zuerst nach, ist nämlich gleich der mit -4π resp. beim logarithmischen Potential mit -2π multiplicirten Dichtigkeit an dem betr. Punkte.

Ausser diesen wenigen Angaben über die allgemeinen rein mathematischen Eigenschaften des Potentiales möge nun auch derjenigen ebenfalls mathematischen Hülfmittel, durch welche die Anwendung des Potentiales auf bestimmt gegebene Probleme wesentlich erleichtert und zum Teil überhaupt ermöglicht wird, wenigstens des wichtigsten und für die Theorie des Potentiales am meisten charakteristischen in Kürze gedacht werden. Es besteht dieses in der Anwendung der von Green gegebenen Formeln. Einesteils lassen sich durch dieselben gewisse dreifache über den ganzen Raum eines Körpers erstreckte Integrale verwandeln in Oberflächenintegrale, und durch analoge der Theorie des logarithmischen Potentiales entsprechende Formeln lassen sich gewisse zweifache über eine gegebene Fläche erstreckte Integrale verwandeln in Randcurvenintegrale; andererseits zeigen aber auch die Green'schen Formeln, wie aus der numerischen Berechnung gewisser Oberflächen- oder Randcurvenintegrale die Werte des Potentiales innerhalb jener Flächen oder Curven gefunden werden können. Die Bedeutsamkeit dieser Green'schen Formeln tritt etwas klarer hervor, wenn man folgende zwei aus den oben erwänten allgemeinen Eigenschaften des Potentiales sich leicht ergebenden Consequenzen berücksichtigt. Denkt man sich nämlich die wirkenden Massen ausserhalb eines abgegrenzten Raumes befindlich und ist man nur im Stande die Werte des Potentiales auf der jenen Raum einschliessenden Fläche anzugeben, so sind dadurch die Werte des Potentiales für jeden Punkt im Innern der Fläche bestimmt und ferner: Befinden sich die wirkenden Massen innerhalb eines Raumes und kennt man die Werte des Potentiales an der Begrenzungsfläche;

so sind dadurch die Werte des Potentiales für jeden Punkt ausserhalb des abgegrenzten Raumes bestimmt.

Aus dem Gesagten geht nun hervor, dass die mathematischen Gesichtspunkte, welche bei Anwendung der Potentialtheorie auf ein gegebenes Problem auftreten, im Wesentlichen darin bestehen, Funktionen ausfindig zu machen, die die allgemeinen Eigenschaften des Potentiales besitzen, also stetig und eindeutig sind und der Poisson-Laplace'schen Differentialgleichung genügen, und die ausserdem auf gewissen Flächen oder Linien vorgeschriebene Werte besitzen.

Um nun der Anwendung der Potentialtheorie auf physikalische Probleme näher zu treten, sei noch einmal an die oben gegebene Definition des Potentials erinnert; nämlich als derjenigen Funktion, deren Differentialquotient nach irgend einer Richtung die nach dieser Richtung ausgeübte Kraftcomponente darstellt. Da es sich bei physikalischen Problemen fast immer darum handelt, diejenigen Kräfte zu berechnen, d. h. als Funktionen der räumlichen Coordinaten anzugeben, die ein gegebenes System von Massen oder Imponderabilien auf bestimmte Punkte der zu dem System gehörigen Körper ausübt, so ist klar, dass diese Aufgabe sofort als gelöst zu betrachten ist, sobald das Potential für jenes System bekannt ist. Man würde eben nur das Potential zu differenziren brauchen um die gesuchten Kraftcomponenten zu erhalten. Hierbei ist natürlich keineswegs die Möglichkeit ausgeschlossen, dass es eine ganze Reihe von Aufgaben geben kann, bei denen man diese Operation des Differenzirens gar nicht auszufüren braucht, sondern schon aus der alleinigen Discussion des für das Potential gefundenen Ausdruckes die gesuchten Kraftcomponenten direkt zu ermitteln im Stande ist. Eine solche Discussion kann z. B. darin bestehen, dass man aus der Form des ermittelten Potentiales erkennt, dasselbe sei identisch mit dem Potentiale einer anderen und zwar einfacheren Massenverteilung, als es die gegebene ist; oder mit andern Worten, man würde aus der Form des Potentiales unter Umständen erkennen können, dass für die gegebenen Maassen bezüglich ihrer Wirkung auf einen beliebigen Punkt des Systems andere einfacher zu übersehende und zu berechnende Massen substituirt werden können. Nehmen wir beispielsweise an, es sei eine Kugel gegeben, die aus lauter concentrischen Schichten verschiedener Dichtigkeit zusammengesetzt und deren Gesammtmasse bekannt sei, und es würde verlangt, die von dieser Kugel auf einen äusseren Punkt ausgeübte Kraft unter Zugrundelegung des Newton'schen Attractionsgesetzes zu ermitteln. Die Auftsellung des Potentiales der Kugel gibt dann in diesem Falle eine sehr einfache und elegante Lösung der Aufgabe. Es zeigt sich nämlich durch eine leichte

Rechnung, dass das Potential der gegebenen Kugel identisch ist mit demjenigen Potentiale, welches die Gesammtmasse der Kugel besitzen würde, wenn man sich dieselbe in den Mittelpunkt der Kugel concentrirt dächte. Hieraus folgt dann mit Notwendigkeit, dass auch die von der gegebenen Kugel ausgeübten Kräfte identisch sind mit denjenigen Kräften, welche der fingirte Fall der im Mittelpunkt concentrirten Masse liefern würde. Man übersieht nun aber sofort, dass die Berechnung der Kräfte in dem fingirten Falle erheblich viel leichter zu bewerkstelligen ist, ja eigentlich direkt gegeben ist. Denn wenn wir mit M die gegebene Masse bezeichnen, und mit r die Entfernung des Mittelpunktes von einem äusseren variabelen Punkte, so würde die Grösse der auf diesen Punkt ausgeübten Kraft ohne Weiteres sein $\frac{M}{r^2}$ noch multiplicirt mit der Masse des angezogenen Punktes, und die Richtung der ausgeübten Kraft ergibt sich ebenso einfach; sie fällt offenbar zusammen mit der Linie r.

Ausser dieser Möglichkeit, aus der Form des Potentiales einfachere den gegebenen zu substituirende Bedingungen zu ermitteln, lassen sich noch von einem andern Gesichtspunkte aus der Betrachtung des Potentiales direkte Schlüsse ziehen auf die vorhandenen Kräfte. Bedenkt man nämlich, dass das Potential in jedem Fall eine Funktion variabeler Coordinaten ist, so ist klar, dass, wenn man diese Funktion einer willkürlichen Constanten gleichsetzt, man dadurch die Gleichung einer Fläche, oder beim logarithmischen Potential die Gleichung einer Curve erhalten muss und zwar derjenigen Fläche resp. Curve, in deren sämmtlichen Punkten das Potential einen und denselben Wert, nämlich den Wert jener willkürlichen Constanten besitzt. Diese Flächen constanten Potentiales haben nun die Eigenschaft, dass die in jedem Punkt construirte Normale zusammenfällt mit der Resultante, der auf denselben Punkt wirkenden Kräfte oder anders ausgedrückt, dass die Flächen constanten Potentiales orthogonal zu den Kraftlinien des Systemes sind. Denkt man sich nämlich die in einem Punkt einer Fläche constanten Potentiales angreifenden Kräfte zerlegt in Componenten nach 3 auf einander senkrecht stehenden Richtungen, und wält man dazu die Richtung der Normale und zwei in der Tangentialebene liegende Richtungen, so übersieht man leicht, dass die in die Tangentialebene fallenden Componenten Null sein müssen, da ja die Differentialquotienten des Potentiales nach diesen Richtungen Null sind und dass daher die nach der Normale gebildete Componente zugleich die Resultante der wirkenden Kräfte sein muss. Kennt man demnach bei einem gegebenen System von Massen das Potential und also auch den Verlauf der Flächen constanten Potentiales, so ist man dadurch sofort in den Stand gesetzt, one erst eine Differenzirung des Potentiales vornehmen zu brauchen, die Richtung der resultirenden Kraft an jedem Punkte des Systems angeben zu können. Handelt es sich beispielsweise darum, den Verlauf der Niveaufläche einer eingeschlossenen Flüssigkeit unter dem Einfluss von Massen, die ihrer Grösse und Lage nach gegeben sind, zu berechnen, so genügt zur Lösung dieser Aufgabe die Kenntniss des Potentiales der gegebenen Massen; denn man würde in diesem Falle nur nötig haben sich des Satzes aus der Hydrostatik zu erinnern, dass bei einer im Gleichgewicht befindlichen Flüssigkeit die Resultanten der wirkenden Kräfte an allen Punkten der freien Oberfläche normal zu dieser Fläche stehen müssen, um sofort zu übersehen, dass die Lage der gesuchten Niveaufläche zusammenfallen muss mit einer Fläche constanten Potentiales. Aus diesem Grunde nennt man ja auch die Flächen constanten Potentiales meistens Niveauflächen, und überträgt diese Bezeichnung auch auf die analogen Fälle bei der Behandlung imponderabeler Fluida. Die Betrachtung der Niveauflächen gibt übrigens nicht blos für die Richtung der wirkenden Kräfte, sondern auch für deren Grösse einen allgemeinen Ueberblick. Wenn man nämlich zu dem Zwecke zwei in sehr naher Distanz sich umschliessende Niveauflächen verfolgt, so ist es klar, dass der Abstand beider Flächen von einander ein relatives Maass für die an den verschiedenen Punkten derselben vorhandene Grösse der Kräfte darstellen muss; und zwar werden die letzteren umgekehrt proportional jenem Abstande sein.

Aus dem bisher Gesagten wird zur Genüge hervorgegangen sein, dass die Theorie des Potentiales auf die Probleme der Mechanik one Weiteres angewandt werden kann; dass sie in der Tat eine solche und zwar ausgedehnte Anwendung findet, mag durch folgende Tatsachen angedeutet sein.

1) Zwischen dem Potentiale und der lebendigen Kraft findet die einfache Beziehung statt, dass bei jeder Bewegung irgend eines Systems materieller Punkte die Zuwüchse des Potentiales und der lebendigen Kraft gleich und entgegengesetzt sind.

2) Die Lagrange'schen Differentialgleichungen, auf welche die meisten Probleme der Mechanik zurückgefürt werden können, enthalten als variabele Funktionen im Wesentlichen nur die lebendige Kraft und das Potential.

3) Das sogenannte Hamiltonsche Prinzip, eins der wichtigsten und praktischsten der mechanischen Prinzipien stützt sich auf ein Integral, dessen variabele Funktion wiederum aus der lebendigen Kraft und dem Potential zusammengesetzt ist.

Ich komme nun zu den übrigen Disciplinen der Physik, bei deren theoretischer Behandlung sich die Anwendung des Potentiales von grösstem Vorteil erwiesen hat und wende mich zunächst zur Electrostatik. Wie man sich auch das Wesen der Elektrizität vorstellen mag, so ist doch soviel als feststehend zu betrachten, dass dieselbe eine in die Ferne wirkende Kraft ist, deren Grösse als eine Funktion der Entfernung erscheint.

Darum ist auf jeden Fall die Zulässigkeit des elektrischen Potentiales, d. h. derjenigen Funktion, deren Differentialquotienten die ausgeübten elektrischen Kräfte darstellen, als evident anzusehen. Zur bequemeren Formulirung der betreffenden mathematischen Ausdrücke bedient man sich allerdings der hypothetischen Vorstellung zweier imponderabeler Fluida unter der Annahme, dass dieselben Kräfte ausüben, die ihrer Quantität proportinal sind und unter Benutzung des empirisch gewonnenen Resultates, dass diese Kräfte umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung sind. Man spricht demnach auch von elektrischen Massen und elektrischen Dichtigkeiten in ganz analoger Weise wie bei der ponderabelen Materie; und es würde das Potential eines mit Elektrizität bedeckten Körpers auf einen variabelen Punkt dargestellt sein durch die Summe aller elektrischen Massenteilchen dividirt durch ihre entsprechenden Entfernungen von dem variabelen Punkte. Die Probleme der Elektrostatik bestehen bekanntlich darin, die Verteilung der Elektrizität in einem Systeme von Conductoren und Isolatoren zu ermitteln, wenn die ursprünglichen Ladungen derselben gegeben sind. Man findet hierfür sofort einige allgemeinere Aufschlüsse, wenn man das Potential bildet und die vorhin angegebenen allgemeinen Eigenschaften desselben berücksichtigt. Es ergeben sich dann nämlich die bekannten wichtigen Sätze, dass die in Conductoren vorhandene freie Elektrizität sich nur an deren Oberfläche befinden kann; ferner, dass das Gesammt-Potential aller vorhandenen elektrischen Massen im Innern der Conductoren constant und dass die Oberflächen derselben Niveauflächen sein müssen; auch ergibt sich leicht, dass die Dichtigkeit an irgend einem Punkte der Oberflächen gleich der durch -4π dividirten auf diesen Punkt ausgeübten Kraft ist. Auch über die Verteilung der Elektrizität auf einem ganz beliebigen Conductor, in dessen Masse sich Hölungen befinden, geben die allgemeine Eigenschaft des Potentials einen direkten Aufschluss. Denn das Potential muss offenbar auf der Grenzfläche einer inneren Hölung denselben constanten Wert besitzen, den es innerhalb der leitenden Masse hat und daraus folgt, dass es diesen constanten Wert auch in jedem Punkte der Hölung hat, sodass in dem ganzen von der äussern Grenzfläche umschlossenen Raum das

Potential constant ist und daher freie Elektrizität nur an dieser äussern Grenzfläche auftreten kann.

Wenn nun auch die Constanz des Potentiales als notwendige und hinreichende Bedingung für das Gleichgewicht der Elektrizität auf einem Conductor erscheint, so ist damit doch die Frage nach der an jedem Punkte des Conductors vorhandenen Dichtigkeit der Elektrizität noch nicht gelöst, da die letztere wesentlich abhängig ist von der speciellen Form des Conductors. Es ist aber leicht zu übersehen, dass die Anwendung des Potentiales eine ganz allgemeine Methode zur Lösung dieser speciellen Probleme an die Hand gibt. Denn es ist klar, dass jede Niveaufläche irgend eines aufgestellten Potentiales gewissermassen das Beispiel eines Conductors ist, für den die Bedingung des Gleichgewichtes erfüllt ist, und für welchen man die Dichtigkeit erhält, wenn man das Potential nach der äussern Normale differenzirt und mit 4 π dividirt. Es würde sich also in jedem einzelnen Falle nur darum handeln, elektrische Massen in solcher Weise zu fingiren, dass eine Niveaufläche derselben mit der Oberfläche des gegebenen Conductors zusammenfällt. Für den einfachen Fall eines isolirt aufgestellten kugelförmigen Conductors, der mit einer gewissen Ladung versehen ist, würde es sich z. B. sehr leicht ergeben, dass die im Mittelpunkt concentrirt gedachte Ladung ein Potential besitzen muss, dessen Niveauflächen concentrische Kugeln sind und von denen also eine mit der Oberfläche des gegebenen Conductors zusammenfällt; und daraus folgt dann unmittelbar dass die Dichtigkeit auf allen Punkten der Oberfläche in diesem Falle dieselbe sein muss, da ja die Differentialquotienten des Potentiales nach den Normalen der Oberfläche überall dieselbe Grösse haben. Aus dem Werte des Potentiales, welches eine gerade Linie besitzt, welche mit Elektrizität gleichmässig belegt ist, findet man, dass die Niveauflächen verlängerte Rotationsellipsoide sind, deren gemeinsame Brennpunkte in die Endpunkte jener Geraden fallen und es würde daher das Potential dieser geraden Linie einen direkten Aufschluss geben über die Anordnung der Elektrizität auf einem Conductor, dessen Oberfläche ein Rotationsellipsoid ist. Je complicirter die mathematische Beschaffenheit der Oberfläche ist, desto complicirter wird natürlich auch die Form des Potentiales und es findet die Berechnung der letzteren ihre Grenze lediglich in der Vollkommenheit mathematischer Hülfsmittel. Die experimentelle Untersuchung einzelner Fälle, in denen die Dichtigkeit der elektrischen Verteilung mit Hülfe der Theorie des Potentiales berechnet werden konnte, hat übrigens mit der Theorie ausserordentlich gut zusammenstimmende Werte ergeben. Ich kann dabei auf die Arbeiten von Coulomb, Riess, Hankel und Anderen verweisen, die eine experimentelle Prüfung in der Weise vornahmen, dass sie eine relativ sehr kleine isolirte Kugel mit verschiedenen Stellen des zu untersuchenden Conductors in Berürung brachten und nun die Ladung dieser kleinen Kugel mit Hülfe der Drehwage auf ein bestimmtes Mass zurückfürten. Es liegt diesen Versuchen natürlich die Annahme zu Grunde, dass die Ladung der kleinen Kugel proportional der an der berürten Stelle ursprünglich vorhandenen Dichtigkeit sei.

In änlicher Weise lassen sich diejenigen Probleme behandeln, bei denen es sich um die Verteilung der Elektrizität auf einem Conductor handelt, der unter dem Einfluss äusserer fester elektrischer Massen oder anderer geladener Conductoren steht. Wird beispielsweise nach der Verteilung der Elektrizität gefragt, die ein isolirt aufgestellter kugelförmiger Conductor annimmt unter dem Einfluss eines äusseren elektrischen Massenpunktes, so zeigt eine leichte Rechnung, dass das Potential der auf dem Conductor durch Influenz erzeugten Elektrizität identisch ist mit demjenigen Potentiale, welches eine der Grösse nach leicht angebbare Masse besitzt, die man sich in dem sogenannten Spiegelpunkte des gegebenen äussern Punktes concentrirt denkt, woraus sich dann wiederum das Gesammtpotential des Systemes und daraus die Dichtigkeit der Elektrizität an jedem Punkte der Kugeloberfläche in einfacher Weise ergibt.

Von welcher experimentellen Bedeutung die Berechnung des gegenseitigen Einflusses zweier geladener Conductoren auf einander ist, geht aus den von Snow Harris, Thomson, Hankel, Weber und Kohlrausch angestellten Messungen hervor; die Letzteren konnten mit Hülfe einer solchen Berechnung die elektrische Ladung einer Kugel auf absolutes Mass zurückfüren. Auch über das Fractioniren von gegebenen Elektrizitätsmengen gibt die Theorie Aufschluss. Denkt man sich nämlich, dass mit einer geladenen Kugel eine zweite nicht geladene in Berürung gebracht wird, so muss im Momente der Berürung eine Verteilung der Elektrizität an die zweite Kugel stattfinden. Durch Berechnung des Potentiales für den Moment der Berürung ergibt sich dann ein Wert für Dichtigkeit und Ladung der zweiten Kugel. In dem Lehrbuche von Riess über die Reibungselektrizität ist beispielsweise eine von Plana berechnete Tabelle enthalten, aus welcher man die bei Berürung zweier Kugeln von verschiedenem Radius von einer zur andern übergehenden Elektrizitätsmengen entnehmen kann.

Nicht ganz so nahe liegend wie bei den Problemen der Elektrostatik war die Aufstellung eines Potentiales in der Elektrodynamik. Die Probleme der letzteren bestehen bekanntlich erstens darin, die anziehende oder abstossende Wirkung von Stromleitern auf einander zu ermitteln, welche von Strömen constanter Intensität durchflossen werden, und zweitens darin, die inducirende Wirkung eines Stromleiters auf einen andern zu berechnen, wenn die Intensität des Stromes in dem ersteren sich ändert. Bei der erstgenannten Gruppe von Problemen sind freilig die ausgeübten Kräfte ebenfalls Funktionen der Entfernung, aber sie hängen ausserdem noch ab von der Richtung der sich afficirenden Strombanen gegeneinander. Dennoch lässt sich auch hier, wie es zuerst der ältere Neumann gezeigt hat, die Aufstellung eines Potentiales bewerkstelligen. Dasselbe besteht dann im Wesentlichen aus dem Product der vorhandenen Stromintensitäten multiplizirt mit einer Doppelsumme, welche gebildet ist aus dem Producte der sich afficirenden Banelemente dividirt durch ihre Entfernung und multiplicirt mit den cosinus derjenigen Winkel, welche sie miteinander bilden.

Durch die Einführung dieses elektrodynamischen Potentiales wird die Einfachheit und consequenterweise die Anwendbarkeit der theoretisch entwickelten Formeln auf specielle Probleme in sehr hohem Grade gesteigert.

Wollte ich auf die letzteren genauer eingehen, so müsste ich befürchten den Rahmen dieses Aufsatzes allzuweit auszudehnen und ich beschränke mich daher darauf, eins der wichtigsten Theoreme der Elektrodynamik anzugeben, in welchem zugleich der Schlüssel zu einer ganzen Reihe specieller Aufgaben enthalten ist. Dasselbe kann etwa so ausgesprochen werden: In einem System von Körpern, in welchen elektrische Kräfte tätig sind, ist die in einem Zeitelement entwickelte Quantität von lebendiger Kraft und Wärme gleich gross mit dem Zuwachs des elektrodynamischen Potentiales vermehrt um diejenige Arbeit, die wärend dieses Zeitelementes von den elektromotorischen und den äussern Kräften verrichtet wird.

In naher Beziehung zu den vorhin genannten Problemen der Elektrostatik stehen gewisse Probleme der Wärmeleitung rücksichtlich des bei ihnen anzuwendenden Potentiales. Es handelt sich hier um Aufgaben folgender Art. Ein die Wärme leitender Körper werde an seiner Oberfläche mit Wärmequellen verschiedener aber dauernd constant erhaltener Temperatur umgeben. Es wird dann im Innern des Körpers eine Wärmecommunication von den wärmeren Oberflächenstellen nach den kälteren stattfinden und nach Verlauf von einiger Zeit wird sich in jedem Punkte des Körpers eine der Zeit nach constante Temperatur einstellen, immer vorausgesetzt, dass die den Körper umgebenden Wärmequellen sich nicht ändern oder mit andern Worten, dass die Temperaturen an der Oberfläche von der Zeit unabhängig sind. Es fragt sich nun, welche Temperaturen nach Eintritt des stationären Wärmestromes an jedem Punkte im Innern des Körpers vorhanden sind. Die physikalischen Voraussetzungen, welche zur Lösung dieser Aufgabe erforderlich sind, bestehen in folgender schon von Newton gemachten Annahme. Man denke sich ein unendlich kleines Flächenstück im Innern des Körpers; die durch dasselbe in der Zeiteinheit strömende Wärmemenge wird alsdann proportional sein der Grösse dieses Flächenelementes und einem Differentialquotienten, der dadurch gebildet wird, dass man die obwaltende Temperatur differenzirt nach der Normale des betreffenden Flächenelementes. Aus dieser Voraussetzung ergibt sich dann sehr bald, dass die als eine Funktion der Coordinaten aufzufassende Temperatur die allgemeinen Eigenschaften des Newton'schen oder des elektrostatischen Potentiales besitzen muss. Die Lösung der gestellten Aufgabe wird daher identisch sein mit der Aufsuchung eines Potentiales, welches im Innern des Körpers sammt seinen Differentialquotienten eindeutig und stetig ist, der Laplace-Poisson'schen Differentialgleichung Genüge leistet und an der Oberfläche des Körpers vorgeschriebene Werte hat.

Eine fernere Anwendung findet die Theorie des Potentiales auf die Probleme der sogenannten stationären elektrischen Strömung. Stationär nennt man bekanntlich denjenigen Zustand eines elektrischen Stromes, in welchem durch dasselbe Element des Stromleiters in gleichen Zeiten gleiche Mengen positiver oder negativer Elektrizität strömen. Denkt man sich z. B. eine constante galvanische Batterie in geschlossenem Zustande, so werden die verschiedenen Leiter dieses Systemes in stationärer Weise von Elektrizität durchflossen. Man kann sich diesen Vorgang auch so vorstellen, dass auf jeden Punkt des Leiters constante elektromotorische Kräfte, die ihren Sitz an irgend einer Stelle des Systemes haben können, einwirken und fortdauernd entgegengesetzt gleiche Quanta von Elektrizität nach entgegengesetzten Richtungen auseinandertreiben. Wenn man nun die Hypothese macht, dass die durch ein Element fliessenden Quanta proportional sind der Grösse jener elektromotorischen Kraft, so ist klar, dass man eine Funktion aufstellen kann, deren Differentialquotienten die Grösse der elektromotorischen Kraft an jedem Punkte des Systemes darstellen oder mit andern Worten, dass sich auch für diese Probleme ein Potential aufstellen lassen muss. Worauf es hier besonders ankommt, ist die Untersuchung von Strömungscurven in den betreffenden Leitern und man übersieht leicht, dass die Kenntniss des Potentiales dazu ausreichend ist. Denn es werden offenbar die Strömungscurven senkrecht zu den Flächen constanten Potentiales liegen. Ich möchte mir erlauben hier auf die besonders interessanten zuerst von Kirchhoff untersuchten Fälle aufmerksam zu machen, in denen der stationäre elektrische Strom durch eine metallische Platte von sehr kleiner oder genauer ausgedrückt, von verschwindender Dicke, geleitet wird. Es wird gefragt nach den Strömungscurven in dieser Platte. Nimmt man der Einfachheit wegen an, dass die Ab- und Zuleitung der Elektrizität durch 2 feine Dräte gemacht wird, so kann man diese punktförmigen Ansatzstellen der Dräte für die Ausdehnung der Platte als den Sitz der elektromotorischen Kräfte ansehen; man sieht ferner, dass das aufzustellende Potential in diesem Falle als Funktion zweier Variabelen x und y betrachtet werden kann; und es zeigt sich, dass dasselbe die Form des logarithmischen Potentiales annimmt. Aus den Niveauflächen werden hier Niveaucurven, deren senkrechte Trajectorien dann unmittelbar die Strömungscurven darstellen. Diese Aufgaben lassen eine sehr einfache experimentelle Prüfung des theoretisch gefundenen Resultates zu, wie gleichfalls von Kirchhoff ausgefürt ist. Derselbe untersuchte z. B. eine dünne Kreisscheibe von Kupfer, in welche die Elektrizität durch einen dünnen am Rande angelöteten Kupferdrat eintrat und durch einen zweiten ebensolchen austrat. Um die Niveaucurven zu bestimmen, setzte nun Kirchhoff das eine Ende des Drates von einem Multiplicator auf einen beliebigen Punkt der Scheibe und suchte mit dem andern Ende solche Punkte der Scheibe auf, dass die Nadel des Multiplicators keinen Ausschlag gab. Die so gefundenen Punkte mussten offenbar auf einer und derselben Niveaucurve liegen. Auf diese Weise liessen sich eine Reihe von Niveaucurven empirisch bestimmen und es zeigte sich eine vollkommene Uebereinstimmung mit der Theorie.

Schliesslich sei noch der Anwendung des Potentiales auf die Probleme der magnetischen Anziehung und Abstossung mit einigen Worten gedacht. Geht man von der bequemsten und für die Erklärung aller bekannten Erscheinungen durchaus hinreichenden Annahme aus, dass der Wirkung magnetischer Körper zwei imponderabele magnetische Fluida zu substituiren seien, und berücksichtigt man die durch die sorgfältigsten experimentellen Untersuchungen festgestellte Tatsache, dass die diesen hypothetischen Fluidis zuzuschreibenden Kräfte umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung von dem afficirten Punkte sind, so ist sofort klar, dass das Potential dieser Kräfte dieselbe einfache Form annehmen muss wie für die elektrischen Fluida, dass dasselbe nämlich besteht aus der Summe aller Producte der sich gegenseitig afficirenden magnetischen Fluida dividirt durch ihre Entfernung. Zwei Hauptprobleme sind es vorzugsweise, welche sich hier der theoretischen Behandlung darbieten und durch Benutzung der Theorie des Potentiales zu verhältnismässig einfachen Lösungen füren. Einmal handelt es sich um die Wechselwirkung permanenter Magnete aufeinander und zweitens um die Berechnung desjenigen magnetischen Zustandes, den ein magnetisirbarer Körper unter dem Einfluss gegebener inducirender magnetischer Massen annimmt.

Die mathematische Beschaffenheit der in jedem einzelnen Fall vorhandenen Form der Körper setzt der theoretischen Behandlung auch hier gewisse Grenzen. Soweit die letztere aber bisher ausgefürt ist, hat sich immer eine vollständige Uebereinstimmung der Theorie mit dem Experiment gezeigt. Bezüglich der Wechselwirkung zweier permanenter Magnete beschränke ich mich darauf, auf die classischen Arbeiten von Gauss zu verweisen, der mit fast astronomischer Genauigkeit die theoretisch ermittelten Formeln für die Ablenkung eines Magneten durch einen andern durch den Versuch bestätigt fand. Experimentelle Untersuchungen über inducirten Magnetismus sind u. A. von Plücker mit grosser Sorgfalt angestellt. Derselbe fand beispielsweise die für den inducirt magnetischen Zustand eines ungleichachsigen Ellipsoids berechnete Formel durchaus bestätigt, indem er die Schwingungsdauer eines aus weichem Eisen hergestellten Ellipsoids unter dem Einfluss eines kräftigen inducirenden Hufeisenmagneten untersuchte.

Hiermit glaube ich die hauptsächlichsten Gebiete angedeutet zu haben, in denen eine Anwendung der Theorie des Potentiales auf physikalische Probleme nicht blos möglich, sondern bereits von grösstem Nutzen gewesen ist, und einen weiteren Fortschritt in der theoretischen und experimentellen Behandlung der einschlägigen Fragen gewärleistet.
