Gleichgewicht und Stabilität eines schwimmenden homogenen Würfels.

Von Professor E. Scheeffer in Danzig.

Mit einer Figurentafel.

Das Schwimmen homogener, mehr oder weniger regelmäßiger Körper ist meines Wissens nur in zwei in den letzten Jahren erschienenen Arbeiten[1]) eingehender behandelt. In diesen sind auch bereits einige Gleichgewichtslagen des Würfels, sowie deren Stabilität untersucht. Die vorliegende Arbeit soll diese Aufgabe weiterführen und zu einem gewissen Abschluß bringen.

In den nachstehenden Ausführungen wird als Flüssigkeit Wasser vom spec. Gewicht 1 vorausgesetzt und das spec. Gewicht des schwimmenden Körpers mit s bezeichnet. Der Rauminhalt des Körpers soll mit V, der des eintauchenden Theils mit V_1, der des nicht eintauchenden Theils mit V_2 bezeichnet werden und die entsprechenden drei Schwerpunkte mit S S_1 S_2. Nach dem Archimedischen Princip ist dann $V_1 = Vs$, $V_2 = V(1-s) = V\sigma$. Für den Würfel soll die Kante $= 1$ angenommen werden, also auch $V = 1$, $V_1 = s$, $V_2 = \sigma$. Das spec. Gewicht s soll stets $> \frac{1}{2}$, also $\sigma < \frac{1}{2}$ vorausgesetzt werden, denn für $s < \frac{1}{2}$ bleibt Alles unverändert, wenn der eintauchende Körpertheil mit dem nicht eintauchenden vertauscht, d. h. wenn $1-s = \sigma$ statt s gesetzt wird.

I.

Gleichgewicht und Stabilität eines geraden Prismas.

Jedes gerade (homogene) Prisma hat eine Haupt- oder Schwimmachse, welche die Schwerpunkte der beiden Grundflächen verbindet und den Seitenkanten parallel ist. Es schwimmt in aufrechter Lage (d. h. bei vertikaler

[1]) G. Schülen (in Erlangen): „Das Schwimmen, theilweise von einem neuen Standpunkt aus bearbeitet“ in Hoffmann's Zeitschrift f. math. u. naturw. Unterricht. Jahrg. 31, Heft 7, 8. Jahrg. 32, Heft 2.

E. Scheeffer: „Ueber stabiles Schwimmen homogener Körper“ Programmschrift des Realgymnasiums St. Johann in Danzig. Ostern 1902.

Hauptachse) im Gleichgewicht, da die drei Schwerpunkte $S\,S_1\,S_2$ in derselben Vertikallinie liegen.

Jede neue Gleichgewichtslage kann mit Hülfe äußerer Kräftepaare durch Drehung des Prismas um eine horizontale Achse von konstanter Richtung erreicht werden. Der veränderliche Drehungswinkel sei φ. Der Körper gelangt dabei nach einander in drei wesentlich verschiedene Drehungsgebiete. Im ersten wird keine der Grundflächen, im zweiten eine, im dritten werden beide Grundflächen vom Wasserspiegel durchschnitten. Stellt Fig. 1 die obere Grundfläche vor, O ihren Schwerpunkt, A O B die Richtung der Drehungsachse und ist $C\,O\,D \perp A\,O\,B$, so müssen in der neuen Gleichgewichtslage ($\varphi = \varphi_1$) die Schwerpunkte $S_1\,S_2$ in der durch C D gelegten Vertikalebene liegen, d. h. das statische Moment von V_1 oder V_2 für diese Ebene muß gleich Null sein. Dies ist die I. Gleichgewichtsbedingung. 1.

Sie wird in verschiedenen Gleichungen zum Ausdruck gebracht, je nachdem das Prisma sich im 1ten, 2ten oder 3ten Drehungsgebiet befindet. Wie man leicht einsieht, wird für das 1te Drehgebiet, wenn O C als $(+x)$ Achse, O B als $(+y)$ Achse angenommen und ein Element der Grundfläche (mit den Coord. x y) durch d f bezeichnet wird, das statische Moment von V_2

$$\operatorname{tg}\varphi_1 \cdot \int x\,y \,.\, df = 0, \text{ wo} \int d\,f = A\,C\,B\,D,$$

$$\text{also} \int x\,y\,df = 0 \qquad 2.$$

Liegt das Gleichgewicht im 2ten Drehungsgebiet, so werde die obere Grundfläche (Fig. 1) in der Geraden M N ($\parallel$ A B) vom Wasserspiegel durchschnitten. Wird P, der Schnittpunkt von COD und M N, jetzt als Coordinatenanfangspunkt angenommen, so wird bei derselben Richtung der Coordinatenachsen die I. Gleichgewichtsbedingung

$$\int_1 x\,y\,d\,f = 0 \qquad 3.$$

wo nun über die Fläche M N A C B zu integriren ist.

Für das 3te Gebiet endlich möge $M_2\,N_2$ die Projektion der Wasserschnittlinie $M_1\,N_1$ der unteren Grundfläche auf die obere und P_2 ihren Schnittpunkt mit C D bezeichnen.

Dann lautet die I. Gleichgewichtsbedingung

$$\int_1 x\,y \,.\, d\,f - \int_2 x\,y \,.\, d\,f = 0 \qquad 4.$$

wo die Summe $\int_1$ wie in 3, die Summe $\int_2$ aber auf die Fläche $M_2\,N_2\,C$ und den Coordinatenanfangspunkt P_2 zu beziehen ist.

In der Gleichgewichtslage des Prismas müssen die drei Schwerpunkte $S\,S_1\,S_2$ aber auch in der durch A B (Fig. 1) gelegten Vertikalebene liegen, d. h das statische Moment von V_1 (oder V_2) für diese Ebene muß gleich Null sein. Dies ist die II Gleichgewichtsbedingung. 5.

Um sie zu formuliren, bestimmen wir für einen beliebigen Drehungswinkel φ ($< \varphi_1$) das statische Moment von V_2.

In Fig. 2 sei Z Z die Vertikallinie, die mit der Hauptachse S O den Drehungswinkel φ bildet und $S_1^1 S_2^1$ seien die Projektionen von S_1 S_2 auf die Ebene der Zeichnung. Wird $S_1^1 P_1$ und $S_2^1 P_2$ senkrecht zu Z Z gezogen, $S_1^1 P_1$ mit m_1, $S_2^1 P_2$ mit m_2 bezeichnet, so sind $m_1 V_1 = m_2 V_2$ die statischen Momente, die in der Gleichgewichtslage verschwinden müssen. Wird $S_2^1 Q$ ($\perp$ O S) mit q und S Q mit p bezeichnet, so ist nach bekannter Coordinaten-Transformation

$$m_2 = q \cos \varphi - p \sin \varphi$$

folglich die II. Gleichgewichtsbedingung:

$$m_2 V_2 = m_1 V_1 = V_2 \ (q \cos \varphi_1 - p \sin \varphi_1) = 0 \qquad 6.$$

Das statische Moment $m_1 V_1$ ist zugleich das Drehungsmoment des wirkenden Kräftepaars (der in S nach unten wirkenden Schwerkraft und des in S_1 nach oben wirkenden Auftriebes) für die mit A B (Fig. 1) parallele Drehungsachse. Hat dieses beim Verschwinden (also beim Durchgange durch die Gleichgewichtslage) den Zeichenwechsel + —, so ist 7.
das Gleichgewicht labil, im entgegengesetzten Falle für diese Achse stabil. Man kann dies auch dahin aussprechen, daß in der stabilen Gleichgewichtslage die kleinste Aenderung des Drehungsmoments, d. h. also der Differentialquotient von $m_1 V_1$ (nach φ genommen) positiv, im labilen Gleichgewicht negativ ist. Ist ersteres für alle horizontalen Achsenrichtungen der Fall, so findet vollkommene Stabilität statt. Diese Bedingung für die Stabilität hat zuerst Duhamel in seinem Lehrbuch der Mechanik in folgende Form gebracht:

$$T - V_1 e_1 > 0 \ \text{(Duhamel'scher Satz).} \qquad 8.$$

Hierin ist T das Trägheitsmoment des Wasserschnitts[1]) für jede durch seinen Schwerpunkt gehende Drehungsachse und $e_1 = SS_1$. Natürlich ist diese Bedingung für alle Schwerpunktsachsen erfüllt, wenn sie für die Achse des kleinsten Trägheitsmoments erfüllt ist. Zum Zweck der Bestimmung des letzteren in den einzelnen Fällen werden hier folgende Sätze vorausgeschickt und bewiesen:

Erster Satz. Hat eine ebene Figur eine Symmetrieachse 9.
und für diese und irgend eine andere Achse (A_1) gleiches Trägheitsmoment, so hat sie für alle durch den Schnittpunkt O der beiden ersteren gehenden Achsen auch dasselbe Trägheitsmoment.

Beweis. Das Trägheitsmoment für die Symmetrieachse (X-achse) sei T_x, das T. M. für die in O auf ihr senkrechte (Y-)Achse T_y und das T. M. für

[1]) Wasserschnitt soll die Fläche heißen, in der der Körper von der Ebene des Wasserspiegels geschnitten wird.

L. of C.

irgend eine mit der X-achse den Winkel ω bildende Achse $T\omega$, so erhält man durch Drehung des Coordinatensytems die Gleichung

$$T\omega = T_x \cdot \cos^2\omega + T_y \cdot \sin^2\omega \pm \sin 2\,\omega \cdot \int x\,y \cdot d\,f$$

wo das auf die ganze Fläche zu beziehende $\int x\,y \cdot d\,f = 0$ ist, also

$$T\omega = T_x \cdot \cos^2\omega + T_y \cdot \sin^2\omega \qquad 10.$$

Bildet nun die Achse A_1 mit der X-achse den Winkel ω_1, so ist ebenso

$$T\omega_1 = T_x = T_x \cdot \cos^2\omega_1 + T_y \cdot \sin^2\omega_1$$

Hieraus folgt aber $T_x = T_y$ und folglich (aus 10):

$$T\omega = T_x = T_y. \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Zweiter Satz. Von allen die Symmetrieachse einer ebenen Fläche in demselben Punkte schneidenden Achsen haben die Symmetrieachse und die auf ihr senkrechte das größte und kleinste Trägheitsmoment der Fläche. 11.

Beweis. Unter Beibehaltung der Bezeichnungen des ersten Satzes gilt auch hier für eine beliebige Achse (ω) die Gleichung 10.

$$T\omega = T_x \cdot \cos^2\omega + T_y \cdot \sin^2\omega$$

Soll $T\omega$ ein Minimum oder Maximum sein, so muß der erste Differentialquotient (nach ω) verschwinden, also $(T_y - T_x) \cdot \sin 2\,\omega = 0$ sein. 11a.

Diese Gleichung hat für $0 < \omega < 180^0$ die beiden Lösungen $\omega = 0$ (oder 180^0) und $\omega = 90^0$ oder (11a) $T\omega = T_x$ und $T\omega = T_y$. w. z. b. w.

In der Folge soll ein Gleichgewicht nur dann kurz mit labil bezeichnet werden, wenn es für alle Schwerpunktsachsen des Wasserschnitts labil ist (allseitig labil). Ist das Gleichgewicht aber für die Drehungsachse stabil, für die darauf senkrechte Achse labil, so soll es teilweise stabil (tw. st.) und im umgekehrten Falle teilweise labil (tw. l.) genannt werden.

II.

Der Würfel im ersten Drehungsgebiet.

Aus den beiden anfangs erwähnten Schriften ist Folgendes zu entnehmen:

1) Wenn s zwischen 1 und 0,7887 $\left(\text{genau: } \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{12}}\right)$

oder zwischen 0 und 0,2113, so schwimmt der Würfel aufrecht stabil. 12.

2) Wenn s zwischen 0,7887 und 0,7735 (genau: $\frac{1}{7}\,(4 + \sqrt{2})$)

oder zwischen 0,2113 und 0,2265, so schwimmt er aufrecht labil, schief stabil. 13.

Die schiefe Lage wird durch Drehung um eine beliebige horizontale Achsenrichtung erreicht. Bestimmungsgleichung für den Drehungswinkel φ_1: $\operatorname{tg}^2 \varphi_1 = 12\,s\,(1-s) - 2$. 14.

3) Wenn s zwischen 0,7735 u. 0,7500
oder zwischen 0,2265 u. 0,2500, so schwimmt er aufrecht labil, schief stabil. 15.

Die schiefe Gleichgewichtslage wird durch Drehung um eine horizontale Achsenrichtung erreicht, die mit einer Kante den Winkel ω bildet. Obere Grenze für ω:

$$\sin^2(45^0+\omega) < \frac{(1-s)^2}{6\,s\,(1-s)-1}\left(s > \frac{1}{2}\right) \qquad 16.$$

Bestimmungsgleichung für φ_1 wie in 2).

4) Wenn s zwischen 0,7500 u. 0,5000
oder zwischen 0,2500 u. 0,5000, so schwimmt er aufrecht labil. 17.

III.

Der Würfel im zweiten und dritten Drehungsgebiet.

Im zweiten und dritten Drehungsgebiet ist der Wasserschnitt der Gleichgewichtslage ein Dreieck, Viereck, Fünfeck oder Sechseck. Das Viereck ist ein Rechteck, wenn die Drehungsachse einer Würfelkante parallel ist, andernfalls ein Trapez.

A. Der Rechteckschnitt.

Diesen Fall hat Schülen (a a. O.) für ein quadratisches Prisma behandelt, dessen Drehungsachse einer Quadratseite parallel ist. Die Anwendung auf den Würfel ergiebt mit Rücksicht auf die Grenzbedingungen folgende von einander verschiedene Gleichgewichtslagen ($0 < \varphi_1 \leqq 45^0$):

1) Wenn s zwischen 1 u. 0,8750 $\left(\frac{7}{8}\right)$
oder zwischen 0 u. 0,1250 theilw. labil ($\varphi_1 = 45^0$) 18.

2) s zwischen 0,8750 u. 0,7500 $\left(\frac{3}{4}\right)$
oder zwischen 0,1250 u. 0,2500 labil ($\varphi_1 = 45^0$) 19.

3) s zwischen 0,7500 u. 0,7187 $\left(\frac{23}{32}\right)$
oder zwischen 0,2500 u. 0,2813 theilw. stabil, ($\varphi_1 < 45^0$) labil ($\varphi_1 = 45^0$) 20.

Der Drehungswinkel φ_1 für die erstere Lage ist bestimmt durch die Gleichung $\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{16\,s - 7 - 3\sqrt{32\,s - 23}}{16\,(1-s)}\left(s > \frac{1}{2}\right)$ 21.

4) Wenn s zwischen 0,7187 u. 0,5000 $\left(\frac{1}{2}\right)$
oder zwischen 0,2813 u. 0,5000 teilw. stabil ($\varphi_1 = 45^0$) 22.

B Der Fünfeckschnitt.

In Fig. 3 sei (entsprechend Fig. 1) M N die Wasserschnittlinie der oberen Grundfläche E F G H, O ihr Schwerpunkt, A B || N M_1 die Richtung der Drehungsachse, C D ⊥ A B, so ist die Bedingung dafür, daß die Schwerpunkte S S_1 S_2 in der durch C D gelegten Vertikalebene liegen, (s. 2) $\int x\,y\,.\,d\,f = 0$, wo die Integration über die Fläche N M H E F auszudehnen ist und die (+ x) und (+ y) Achse die Richtungen wie in Fig. 1 haben. Diese Bedingung kann leicht in folgende umgeformt werden*):

$$\int x\,y\,.\,d\,f = 0 \qquad 28.$$

wo nun P D die (+ x) Achse, P M die (+ y) Achse und die Integration über die Fläche N M G auszudehnen ist.

Wird der kleinere N der beiden Dreieckswinkel N und M mit ω bezeichnet (also $\omega < 45^0$), ferner G N mit ϱ, so kann das Integral 28 leicht bestimmt werden*).

Man erhält

$$\int x\,y \cdot d\,f = \frac{\varrho^3}{24} \sin^2 \omega \cdot (1 - \operatorname{tg} \omega) \cdot (1 - \varrho + 1 - \varrho \operatorname{tg} \omega) = 0 \qquad 29.$$

Da nun $\varrho < 1$ und $\operatorname{tg} \omega < 1$ ist, so sind sämmtliche Factoren dieses Ausdrucks positiv und er kann nur für $\omega = 0$ oder $\omega = 45^0$ verschwinden.

Der erstere Fall ist ausgeschlossen, es kann also nur Gleichgewicht stattfinden, wenn die Drehungsachse einer Diagonale der Grundfläche parallel ist. Auch dies ist bereits früher von mir bewiesen[1]).

Die II. Gleichgewichtsbedingung.

Es sei (Fig. 4) A C B D die obere Grundfläche, von der das gleichschenklige Dreieck D N M durch den Wasserspiegel abgeschnitten wird, also M N ⊥ C O D, ferner K der Schwerpunkt der Fläche M N A C B, P K = x_s, M D = N D = x. Der nicht eintauchende Würfelteil ist ein gerades durch den Wasserschnitt schief abgestumpftes Prisma mit der Grundfläche M N A C B $= 1 - \frac{x^2}{2}$, die in K errichtete Höhe K $K_1 = x_s \cdot \operatorname{tg} \varphi_1$, also das Volumen dieses Körpertheils

$$V_2 = \sigma = \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) x_s \cdot \operatorname{tg} \varphi_1 \qquad 30.$$

Da P D $= \sigma \frac{x}{2} \sqrt{2}$, O P $= \frac{1 - x}{2} \cdot \sqrt{2}$, so ergiebt sich für die Fläche A C B D und ihre beiden Theile die Gleichung der statischen Momente (Momentenachse M N)

$$x_s \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) = \frac{1 - x}{2} \cdot \sqrt{2} + \frac{x^2}{2} \cdot \frac{x}{6} \sqrt{2}$$

---

1) s. Scheeffer a. a. O.

oder mit Rücksicht auf 30:

$$\left(1 - x + \frac{x^3}{6}\right) \operatorname{tg} \varphi_1 = \sigma \cdot \sqrt{2}$$

und wenn der Kürze wegen

$$\left.\begin{aligned} 1 - x + \frac{x^3}{6} &= z \\ \text{gesetzt wird,} \qquad z \cdot \operatorname{tg} \varphi_1 &= \sigma \sqrt{2} \end{aligned}\right\} \qquad 31.$$

Nach 6 und Fig. 2[1]) ist das Drehungsmoment

$$m_1 V_1 = V_2 (q \cdot \cos \varphi_1 - p \sin \varphi_1) = 0$$

$$\text{wo } p = SO - S_2U = \frac{1}{2} - r \text{ und } q = UP - OP$$

$$= w - \frac{1 - x}{2} \cdot \sqrt{2} \text{ ist (s. Fig. 4),} \qquad 31a.$$

also $$m_1 V_1 = V_2 \left(\omega - \frac{1 - x}{2} \sqrt{2}\right) \cos \varphi_1 - V_2 \left(\frac{1}{2} - r\right) \sin \varphi_1 = 0 \qquad 32.$$

Um ω und r zu bestimmen, findet man leicht das statische Moment von V_2 für die Ebene der Grundfläche

$$\left.\begin{aligned} V_2 r &= \frac{1}{2} T \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi_1 \\ \text{und} \quad V_2 \omega &= T \cdot \operatorname{tg} \varphi_1 \end{aligned}\right\} \qquad 33.$$

wo T das Trägheitsmoment der Fläche M N A C B für die Achse M N ist.

Es folgt also aus 32

$$m_1 V_1 = T \sin \varphi_1 - \frac{\sigma}{2} (1 - x) \sqrt{2} \cos \varphi_1 - \frac{\sigma}{2} \sin \varphi_1 + \frac{1}{2} T \sin \varphi_1 \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi_1 = 0$$

oder

$$\frac{m_1 V_1}{\sin \varphi_1} = T \left(1 + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi_1\right) - \frac{\sigma}{2} (1 - x) \sqrt{2} \operatorname{cotg} \varphi_1 - \frac{\sigma}{2} = 0$$

und wenn aus 31) $\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\sigma}{z} \sqrt{2}$, $\operatorname{cotg} \varphi_1 = \frac{z}{\sigma \sqrt{2}}$ gesetzt wird,

$$\frac{2 z^2}{\sin \varphi_1} \cdot m_1 V_1 = 2 T (z^2 + \sigma^2) - \sigma z^2 - (1 - x) z^3 = 0 \qquad 34.$$

Das Trägheitsmoment T findet man (Fig. 4) als Differenz aus den T. M. von B D A C und M D N. Das erstere ist für die Schwerpunktachse A B, $T_s = \frac{1}{12}$, folglich (nach einem bekannten Satze) für die Achse M N, $T_s + \overline{OP}^2 = \frac{1}{12} + \frac{(1 - x)^2}{2}$. Das T. M. von M D N ist $\frac{x^4}{24}$, also

$$T = \frac{1}{12} + \frac{(1 - x)^2}{2} - \frac{x^4}{24} = \frac{1}{24} \left\{2 + 12 (1 - x)^2 - x^4\right\} \qquad 35.$$

[1]) P R bezeichnet die Schnittlinie des Wasserschnitts mit der Ebene der Zeichnung.

Vor der Discussion der Gleichung 34 sind die Grenzen für x zu bestimmen. Die untere Grenze ist offenbar $x = 0$, die obere ergiebt sich aus Gleichung 31, wenn die Drehung die Grenze des zweiten Drehungsgebietes erreicht, d. h. (Fig. 5) es muss $\overline{CP} \cdot \operatorname{tg} \varphi_1 < 1$ sein oder, da $\overline{CP} = \left(1 - \frac{x}{2}\right) \sqrt{2}$,

$$\left(1 - \frac{x}{2}\right) \sqrt{2} \operatorname{tg} \varphi_1 < 1. \qquad 36.$$

Setzt man (aus 31) $\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\sigma}{z} \sqrt{2}$, so ergiebt sich für die obere Grenze von x

$$(2 - x)\, \sigma < z \qquad 37.$$

Discussion der II. Bedingungsgleichung (34).

Wird in 34 der stets positive und von Null verschiedene Faktor $\frac{2 z^2}{\sin \varphi_1}$ des Drehungsmoments weggelassen, so wird die zu untersuchende Gleichung

$$\left.\begin{aligned} (m_1 V_1) &= 2 T \cdot \sigma^2 - z^2 \sigma + 2 T z^2 - (1 - x) z^3 = 0 \\ \text{wo } (31)\ z &= 1 - x + \frac{x^3}{6} \\ (35)\ 2 T &= \frac{1}{12} \left\{ 2 + 12 (1 - x)^2 - x^4 \right\} \end{aligned}\right\} \qquad 38.$$

die untere Grenze $x = 0$, die obere durch die Gleichung (37) $2 - x)\, \sigma = z$ bestimmt ist.

Da der obere Grenzwerth von $x < 1$ ist, so kann die Gleichung für das Gebiet von $x = 0$ bis $x = 1$ untersucht werden.

Setzt man $1 - x = y$, so erhalten die Gleichungen 38 folgende Form:

$$(m_1 V_1) = 2 T \sigma^2 - z^2 \sigma + 2 T z^2 - y z^3 = 0 \qquad 39.$$

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{1}{24} \left\{ (1 + y)^4 - 2 y^4 \right\} = \frac{1}{24} \cdot y_4 \\ z &= \frac{1}{6} \left\{ (1 + y)^3 - 2 y^3 \right\} = \frac{1}{6} \cdot y_3 \\ \text{Bezeichnet man noch den Differentialquotienten } z' \text{ mit v, so wird} \\ v &= \frac{1}{2} \left\{ (1 + y)^2 - 2 y^2 \right\} = \frac{1}{2} \cdot y_2 \\ v' &= 1 - y = y_1 \end{aligned}\right\} \qquad 40.$$

und die Functionen T, z, v haben nun die Eigenschaft, daß in dieser Reihenfolge jede der Differentialquotient der vorhergehenden ist, also

$$\left.\begin{aligned} T' &= z,\ z' = v,\ v' = 1 - y = y_1 \\ \text{oder auch } y_4' &= 4 y_3,\ y_3' = 3 y_2,\ y_2' = 2 y_1 = 2 (1 - y) \end{aligned}\right\} \qquad 41.$$

$$\left.\begin{aligned} \text{Setzt man } (m_1 V_1) &= F(\sigma, y) = F \\ \text{also } F(\sigma, y) &= 2 T \sigma^2 - z^2 \sigma + 2 T z^2 - y z^3 \end{aligned}\right\} \qquad 42.$$

so ist die Gleichung $F(\sigma, y) = 0$ in Bezug auf ihre reellen Wurzeln für das

Gebiet $0 < y < 1$ zu untersuchen. Später soll letzteres dann (gemäß 38) auf seine richtigen Grenzen eingeschränkt werden.

Löst man die Gleichung $F = 0$ nach σ auf und führt für T und z die Bezeichnungen 40 ein, so erhält man

$$\sigma = \frac{1}{6} \cdot \frac{y_3}{y_4} \left(y_3 \pm \sqrt{y_3^2 - y_4^2 + 2\, y\, y_3\, y_4} \right) \qquad 43.$$

wo die Wurzel mit ihrem absoluten Werthe zu nehmen ist. Die Function σ, als Curve dargestellt, besteht also aus zwei Aesten, deren Gleichungen, wie folgt, unterschieden werden sollen:

$$\left.\begin{aligned} \underset{+}{\sigma} &= \frac{y_3}{6\, y_4} \cdot (y_3 + \sqrt{R}) \\ \underline{\sigma} &= \frac{y_3}{6\, y_4} (y_3 - \sqrt{R}) \\ \text{wo } R &= y_3^2 - y_4^2 + 2\, y\, y_3\, y_4 \end{aligned}\right| \qquad 44.$$

Die Gestalt der beiden Curvenäste soll, soweit es für den vorliegenden Zweck nöthig ist, bestimmt werden. Zunächst erhält man aus 44 die Grenzwerthe:

$$\left.\begin{aligned} \text{für } y = 0, \quad & y_3 = 1 \quad y_4 = 1 \quad R = 0 \\ & \underset{+}{\sigma} = \underline{\sigma} = \frac{1}{6} = 0{,}1667. \\ y = 1, \quad & y_3 = 6 \quad y_4 = 14 \quad R = 8 \\ & \underset{+}{\sigma} = \frac{1}{7} (3 + \sqrt{2}) = 0{,}6306 \\ & \underline{\sigma} = \frac{1}{7} (3 - \sqrt{2}) = 2265. \end{aligned}\right| \qquad 45.$$

Um den Verlauf von $\underset{+}{\sigma}$ zu erkennen, bilden wir in (44)

$$\underset{+}{\sigma} = \frac{1}{6} \left\{ \frac{y_3^2}{y_4} + \sqrt{\frac{y_3^2}{y_4} \cdot \frac{R}{y_4}} \right\} \qquad 46.$$

den Differentialquotienten von $\frac{y_3^2}{y_4}$ (s. 41)

$$\left(\frac{y_3^2}{y_4}\right)' = \frac{2\, y_3}{y_4^2} (3\, y_4\, y_2 - 2\, y_3^2) \qquad 47.$$

und wenn für $y_4\, y_3\, y_2$ (aus 40) die Werthe eingesetzt werden, nach Reduction:

$$\begin{aligned} 3\, y_4\, y_2 - 2\, y_3^2 &= 1 + 6\, y + 9\, y^2 + 4\, y^3 - 3\, y^4 - 6\, y^5 + y^6 \\ &= 1 + 6\, y\, (1 - y^4) + 9\, y^2 + y^3 (4 - 3\, y) + y^6 \end{aligned}$$

Diese Summe ist (da y zwischen 0 und 1) positiv, ebenso der Factor $\frac{2\, y_3}{y_4^2}$, folglich auch $\left(\frac{y_3^2}{y_4}\right)'$ d. h. $\frac{y_3^2}{y_4}$ nimmt mit wachsendem y zu. 48.

Nach 44 ist ferner $R = y_3^2 - y_4^2 + 2y\, y_3\, y_4$, also nach Einsetzen der Werthe (40) und Reduction:

$$\left.\begin{aligned} R &= y^2 + 2y^3 + 3y^4 + 4y^5 + 3y^6 - 6y^7 + y^8 \\ &= y^2(1 + 2y + 3y^2 + 4y^3 + 3y^4 - 6y^5 + y^6) = y^2 \cdot u \end{aligned}\right\} \quad 49.$$

folglich der Differentialquotient:

$$\begin{aligned} R' &= 2y + 6y^2 + 12y^3 + 20y^4 + 18y^5 - 42y^6 + 8y^7 \\ &= 2y\,(1 + 3y + 6y^2 + 10y^3 + 9y^4 - 21y^5 + 4y^6) \end{aligned} \quad 50.$$

Bildet man nun (in 46) den Differentialquotienten von $\frac{R}{y_4}$,

$$\left(\frac{R}{y_4}\right)' = \frac{1}{y_4^2}\left(y_4 \cdot R' - 4\,R\,y_3\right) \quad 51.$$

setzt in der Paranthese (aus 40, 49, 50) die Werthe ein und reducirt, so wird

$$\begin{aligned} \left(\frac{R}{y_4}\right)' &= \frac{2y}{y_4^2} \cdot \left\{\begin{aligned} &1 + 5y + 14y^2 + 32y^3 + 60y^4 + 52y^5 - 20y^6 \\ &\qquad - 60y^7 - 33y^8 + 19y^9 - 2y^{10} \end{aligned}\right\} \\ &= \frac{2y}{y_4^2} \cdot \left\{\begin{aligned} &1 + 5y + 14y^2 + y^3(32 - 20y^3) + 60y^4(1 - y^3) \\ &\qquad + y^5(52 - 33y^3) + y^9(19 - 2y) \end{aligned}\right\} \end{aligned} \quad 52.$$

d. i. aber stets positiv (für y zwischen 0 und 1), also nimmt auch $\frac{R}{y_4}$ mit wachsendem y zu. 53.

Da die Größen $\frac{y_3^2}{y_4}$ und $\frac{R}{y_4}$ mit wachsendem y zunehmen und selbst positiv sind, so muß (s. 46) auch $\underset{+}{\sigma}$ beständig zunehmen. 54.

Aus 44 folgt:

$$\underset{+}{\sigma} - \underset{-}{\sigma} = \frac{y_3}{3\,y_4} \cdot \sqrt{R} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{y_3^2}{y_4} \cdot \frac{R}{y_4}}$$

Dieser Ausdruck ist nach dem Vorhergehenden stets positiv und nimmt zu. Folglich müssen die beiden Curvenäste mit wachsendem y sich immer weiter von einander entfernen. 55.

Aus 45 und 55 geht hervor, daß von den Wurzeln der Gleichung $F(\sigma, y) = 0$ bei konstantem $\sigma\left(> \frac{1}{6}\right)$ die erste (kleinste) auch (die einzige) Wurzel der Gleichung $\underset{+}{\sigma} = \sigma$, alle folgenden dagegen Wurzeln der Gleichung $\underset{-}{\sigma} = \sigma$ sein müssen.

Um den Verlauf von $\underset{-}{\sigma}$ zu erkennen, differentiiren wir die Gleichung $F(\sigma\, y) = 0$ nach y:

$$F'(y) + \sigma' \cdot F'(\sigma) = 0$$

woraus

$$\sigma' = \frac{-F'(y)}{F'(\sigma)} \quad 56.$$

Aus 42 folgt $\quad F'(\sigma) = 4\,T\,\sigma - z^2$

oder (40) $\quad F'(\sigma) = \frac{1}{6}\,y_4\,\sigma - \frac{1}{36}\,y_3^2$

und (nach 44)

$$\left.\begin{aligned} \underset{+}{F'}(\sigma) &= + \frac{y_3}{36} \cdot \sqrt{R} \\ \underset{-}{F'}(\sigma) &= - \frac{y_3}{36} \cdot \sqrt{R} \end{aligned}\right| \qquad 57.$$

wo die erste Gleichung auf den Curvenast $\underset{+}{\sigma}$, die zweite auf $\underset{-}{\sigma}$ zu beziehen ist.

Aus 56 und 57 folgt

$$\left.\begin{aligned} \underset{+}{\sigma'} &= \frac{-36}{y_3 \cdot \sqrt{R}} \cdot \underset{+}{F'}(y) \\ \underset{-}{\sigma'} &= \frac{+36}{y_3 \cdot \sqrt{R}} \cdot \underset{-}{F'}(y) \end{aligned}\right| \qquad 58.$$

wo die Bedeutung von $\underset{+}{F'}(y)$ und $\underset{-}{F'}(y)$ leicht ersichtlich ist.

Bildet man nun aus Gleichung 42 (s. 41)

$$\begin{aligned} F'(y) &= 2 z \sigma^2 - 2 z v \sigma + 2 z^3 + 4 T z v - z^3 - 3 z^2 v y \\ &= z (2 \sigma^2 - 2 v \sigma + z^2 + 4 T v - 3 z v y) \end{aligned}$$

oder nach 40

$$F'(y) = \frac{y_3}{216} \cdot \left(72 \sigma^2 - 36 y_2 \sigma + y_3^2 + 3 y_2 y_4 - 9 y y_2 y_3\right)$$

und setzt

$$f(\sigma y) = f = 72 \sigma^2 - 36 y_2 \sigma + y_3^2 + 3 y_2 y_4 - 9 y y_2 y_3 \qquad 59.$$

so wird

$$F'(y) = \frac{y_3}{216} \cdot f \qquad 60.$$

und (58)

$$\left.\begin{aligned} \underset{+}{\sigma'} &= \frac{-f_+}{6 \sqrt{R}} \\ \underset{-}{\sigma'} &= \frac{+f_-}{6 \sqrt{R}} \end{aligned}\right| \qquad 61.$$

Aus 61) ersieht man, daß f_+ das entgegengesetzte Vorzeichen von $\underset{+}{\sigma'}$ haben muß. Da aber (54) $\underset{+}{\sigma'}$ positiv ist, so muß f_+ d. h. die Function $f(\sigma, y)$ für die Wurzel der Gleichung $\underset{+}{\sigma} = \sigma$ negativ sein. 61a.

Setzt man in 59 für y_2 y_3 y_4 die Werthe (aus 40) ein und reducirt, so wird

$$\left.\begin{aligned} f &= 72 \sigma^2 - 36 \sigma (1 + 2 y - y^2) + w \\ \text{wo } w &= 4 + 15 y + 9 y^2 - 20 y^3 - 12 y^4 + 21 y^5 - 5 y^6 \end{aligned}\right| \qquad 62.$$

Zunächst sollen jetzt die Grenzwerthe von $\underset{-}{\sigma'}$ bestimmt werden, (wobei statt $\underset{-}{\sigma'}$, $\underset{-}{f}$ kurz σ', f geschrieben werden soll).

Nach 49 wird $\sigma' = \dfrac{f}{6 \cdot \sqrt{u} \cdot y} = \dfrac{1}{6 \sqrt{u}} \cdot \dfrac{f}{y}$ 63.

Für $y = 0$ wird $\sigma = \dfrac{1}{6}$, $f = 0$, also $\dfrac{f}{y} = \dfrac{0}{0}$.

Um den wahren Werth dieses Bruches zu ermitteln, ersetzen wir Zähler und Nenner durch ihre Differentialquotienten. Es wird

$$\frac{df}{dy} = f' y + \sigma' \cdot f' \sigma, \quad \frac{f}{y} = \frac{f' y + \sigma' \cdot f' \sigma}{1},$$

also aus 63) $\sigma' = \dfrac{f' y + \sigma' \cdot f' \sigma}{6 \cdot \sqrt{u}}$, woraus

$$\sigma' = \frac{f' y}{6 \sqrt{u} - f' \sigma} \quad (\text{für } y = 0).$$

Es wird aber (62) $f'(y) = -72\,\sigma + 15 = 3$, $f'(\sigma) = 2 \cdot 72\,\sigma - 36 = -12$, ferner (49) $\sqrt{u} = 1$, also $\underline{\sigma}' = \frac{1}{6} = 0{,}1667 \cdot (y = 0)$ 64.

Für $y = 1$ wird (62) $w = 12$, $f = 72\,\sigma^2 - 72\,\sigma + 12$, (nach 45) $\underline{\sigma} = \frac{1}{7}(3 - \sqrt{2})$, (nach 49) $R = 8$ und nach Ausführung aller Rechnungen (61) angenähert $\underline{\sigma}' = -0{,}036$ $(y = 1)$ 65.

Nach 61 hat $\underline{f}$ mit $\underline{\sigma}'$ gleiches Vorzeichen. Da aber (nach 64) am Anfange der Curvenast $\underline{\sigma}$ steigt, so muß für die erste Wurzel der Gleichung $\underline{\sigma} = \sigma$ die Function $f(\sigma, y)$ bei constantem σ $\left(> \frac{1}{6}\right)$ positiv sein. 66.

Aus 61a und 66 ergiebt sich, daß die Funktion $f(\sigma, y)$ bei konstantem σ $\left(> \frac{1}{6}\right)$ zwischen der Wurzel von $\underset{+}{\sigma} = \sigma$ und der ersten Wurzel von $\underline{\sigma} = \sigma$ wenigstens einen Zeichenwechsel und zwar $- +$ erleidet. 67.

Wieviel weitere Zeichenwechsel der Funktion $f(y)$ eintreten können, soll nun untersucht werden. Bildet man aus 62 die abgeleiteten Functionen (bei konstantem σ) und bestimmt für jede das Vorzeichen des Anfangs- $(y = 0)$ und des Endwertes $(y = 1)$, so weit es möglich ist, so erhält man mit Unterdrückung des positiven Zahlenfactors:

$$\begin{aligned}
f(y) &= (72\,\sigma^2 - 36\,\sigma + 4) + (15 - 72\,\sigma)\,y + (9 + 36\,\sigma)\,y^2 \\
&\qquad - 20\,y^3 - 12\,y^4 + 21\,y^5 - 5\,y^6 \\
&\qquad\qquad\qquad

Wie aus vorstehender Uebersicht hervorgeht, hat zwischen $y = 0$ und $y = 1$

$f^{V}(y)$	1	Zeichenwechsel	$+$	$-$
$f^{IV}(y)$	1	„	$-$	$+$
$f'''(y)$	1	„	$-$	$+$
$f''(y)$ nicht mehr als	2	„	$+ \; -$	$+$
$f'(y)$ „ „ „	2	„	$- \; +$	$-$
$f(y)$ „ „ „	3	„	$+ - +$	$-$

68.

Diese letzte Maximalzahl vermindert sich auf 2, da f am Anfange negativ[1]) ist $(- + -)$. Da nun nach 67) der erste dieser beiden Zeichenwechsel bereits zwischen der Wurzel von $\underset{+}{\sigma} = \sigma$ und der ersten Wurzel von $\underline{\sigma} = \sigma$ liegt, so kann f und folglich auch $\underline{\sigma}'$ außer diesem nur noch einen Zeichenwechsel $+ -$ haben. Die Curve $\underline{\sigma}$ kann daher zwischen $y = 0$ und $y = 1$ nur ein Maximum, aber kein Minimum haben. Sie hat bis auf etwaige Zeichenwechsel des zweiten Differentialquotienten die Gestalt C H D in Fig. 5. Hierin ist A B die $(+ y)$ Achse, A K die $(+ \sigma)$ Achse, $A C = \frac{1}{6}$, $B D = \sigma_1$

$$= \frac{1}{7} (3 - \sqrt{2}) = 0{,}2265 \text{ (s. 45).} \qquad 69.$$

Die größte Ordinate $H G = E B$ werde mit σ_m bezeichnet. Durch Anwendung einer Näherungsmethode fand ich $\sigma_m = 0{,}2377$ und den zugehörigen Werth von y zwischen 0,5969 und 0,5970. 69a.

Jetzt soll die Grenzbedingung 37 berücksichtigt werden: $(2 - x)\,\sigma < z$ oder, wenn $1 - x = y$ und $z = \frac{1}{6} y_3$ gesetzt wird:

$$6\,\sigma\,(1 + y) < y_3 \qquad 69a.$$

Diese Bedingung ist für $\underline{\sigma}$ und für $\underset{+}{\sigma}$ zu untersuchen. Für $\sigma = \underline{\sigma}$ ergiebt sich (aus 44)

$$(1 + y)\,(y_3 - \sqrt{R}) < y_4$$

$$\text{oder} \quad 0 < y_4 - (1 + y)\,y_3 + (1 + y)\sqrt{R}$$

$$0 < 2\,y^3 + (1 + y)\sqrt{R}$$

Diese Bedingung ist stets erfüllt.

Für $\sigma = \underset{+}{\sigma}$ dagegen ergiebt sich (44, 69a) die Bedingung

$$(1 + y)\,(y_3 + \sqrt{R}) < y_4$$

$$\text{oder} \quad (1 + y)\sqrt{R} < 2\,y^3$$

und wenn die beiden (positiven) Seiten quadrirt werden und (49) $R = y^2 \cdot u$ gesetzt, $(1 + y)^2 \cdot y^2\,u < 4\,y^6$, also (den Werth für u eingesetzt)

$$(1 + y)^2 \cdot (1 + 2\,y + 3\,y^2 + 4\,y^3 + 3\,y^4 - 6\,y^5 + y^6) < 4\,y^4$$

oder $4\,y^3(1 + y + y^2) + (1 + y)^2(1 + 2\,y + 3\,y^2 + 3\,y^4 - 6\,y^5 + y^6) < 0.$ 70.

[1]) Nach 61a.

Diese Bedingung ist aber für $y < 1$ nicht erfüllt. Es findet daher ein Gleichgewicht nur für die auf einander folgenden reellen Wurzeln der Gleichung $(V_1 m_1) = F(\sigma y) = 0$ (39, 42) zwischen $y = 0$ und $y = 1$ statt, die zugleich Wurzeln der Gleichung $\underline{\sigma} = \sigma$ sind. Letztere sind aus Fig. 6 leicht zu erkennen, nämlich

für $\sigma < \frac{1}{6}$ oder $\sigma > \sigma_m$ keine

für $\frac{1}{6} < \sigma < \sigma_1$ eine

für $\sigma_1 < \sigma < \sigma_m$ zwei reelle Wurzeln.

Die Stabilität.

Wird statt y wieder x als unabhängige Veränderliche eingeführt ($y = 1 - x$ gesetzt), so wird in Fig. 5 B der Coordinatenanfangspunkt, B A die $(+x)$ Richtung, ferner $\underline{\sigma}' = -\underline{\sigma}'(x)$, $F'(y) = -F'(x)$, folglich (58) $\underline{\sigma}'(x) = \frac{36}{y_3 \cdot \sqrt{R}} \cdot F'(x)$. Hiernach hat $F'(x)$ das Vorzeichen von $\underline{\sigma}'(x)$, also $F(x) = (m_1 V_1)$ beim Verschwinden denselben Zeichenwechsel wie $\underline{\sigma}(x)$. Folglich sind die mit zunehmendem Drehungswinkel φ eintretenden Gleichgewichtslagen der Reihe nach für die Drehungsachse

wenn $\frac{1}{6} < \sigma < \sigma_1$ labil

$\sigma_1 < \sigma < \sigma_m$ stabil, labil 71.

Für die zur Drehungsachse senkrechte (Symmetrie-) Achse ist die Bedingung der Stabilität nach dem DUHAMEL'schen Satze (8) zu untersuchen. Wird das Trägheitsmoment des Wasserschnitts für die Symmetrieachse mit T_2 bezeichnet, so ist $T_2 = \frac{T_1}{\cos \varphi_1}$ 72.

wo (Fig. 4) T_1 das T. M. von N M B C A für die Achse C D bedeutet und den leicht zu bestimmenden Werth hat $T_1 = \frac{1}{12} - \frac{x^4}{24}$ 73.

Aus Fig. 2 folgt[1]) $SS_2^1 = e_2 = \frac{p}{\cos \varphi_1}$, also (nach 31a und 33)

$$V_2 e_2 = \frac{1}{\cos \varphi_1} \cdot \left(\frac{1}{2} V_2 - \frac{1}{2} T \cdot tg^2 \varphi_1 \right)$$

oder, da $V_2 = \sigma$ und (31) $tg^2 \varphi_1 = \frac{2 \sigma^2}{z^2}$ ist,

$$V_1 e_1 = V_2 e_2 = \frac{1}{\cos \varphi_1} \cdot \left\{ \frac{\sigma}{2} - \frac{\sigma^2}{z^2} T \right\} \qquad 74.$$

[1]) Für $\varphi = \varphi_1$ fällt S_2 mit S_2^1 und P_2 zusammen.

Es folgt also (aus 72, 74)

$$T_2 - V_1 e_1 = \frac{1}{2 \cos \varphi_1} \cdot \left(2 T_1 + \frac{2 T \sigma^2}{z^2} - \sigma\right)$$

oder da (38) $\frac{2 T \sigma^2}{z^2} - \sigma = (1 - x) z - 2 T$

$$T_2 - V_1 e_1 = \frac{1}{2 \cos \varphi_1} \cdot \left\{2 T_1 - 2 T + (1 - x) z\right\}$$

Nach (38, 73) wird aber nach gehöriger Reduction

$$2 T_1 - 2 T + (1 - x) z = \frac{x^3}{6} (1 - x)$$

$$\text{folglich } T_2 - V_1 e_1 = \frac{x^3 (1 - x)}{12 \cdot \cos \varphi_1} \text{ d. i. } > 0.$$

Jede der drei Gleichgewichtslagen (71) ist daher für die Symmetrieachse stabil. 75.

Da (nach 69 und 69a) $\sigma_1 = \frac{3 - \sqrt{2}}{7} = 0{,}2265$ und $\sigma_m = 0{,}2377$, also die zugehörigen Werthe $s_1 = \frac{4 + \sqrt{2}}{7} = 0{,}7735$ und $s_m = 0{,}7623$, so ergeben sich aus 71 und 75 für den Fünfeckschnitt folgende Gleichgewichtslagen:

1) Wenn s zwischen $\left(\frac{5}{6}\right)$ 0,8333 und 0,7735 $\left(\frac{4 + \sqrt{2}}{7}\right)$
oder zwischen 0,1667 und 0,2265 liegt,
so hat der Würfel eine teilweise labile Gleichgewichtslage. 76.

2) Wenn s zwischen 0,7735 und 0,7623 (s_m)
oder zwischen 0,2265 und 0,2377 (σ_m) liegt,
so hat er eine stabile und eine teilweise labile Lage. 76a.

Die Bestimmungsgleichung für den Drehungswinkel φ_1 ist für beide Fälle (31. 40, 44)

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{6 \sigma \sqrt{2}}{y_3},$$

wo $y_3 = (2 - x)^3 - 2 \cdot (1 - x)^3$, $y_4 = (2 - x)^4 - 2 (1 - x)^4$, und x eine zwischen 0 und 1 liegende Wurzel der Gleichung $y_3^2 - y_3 \cdot \sqrt{y_3^2 - y_4^2 + 2 y_3 y_4 (1 - x)} = 6 \sigma y_4$ ist.

C. Der Dreieckschnitt.

Im vorigen Abschnitt (B) wurde gezeigt, daß, wenn der Wasserspiegel von der oberen Würfelfläche ein Dreieck abschneidet, letzteres in der Gleichgewichtslage ein gleichschenkliges sein muß. In dem vorliegenden Falle tritt dies in jeder der drei oberen Flächen ein, folglich ist der dreieckige Wasserschnitt senkrecht zu einer Würfeldiagonale. Die beiden Gleichgewichtsbedingungen sind dann von selbst erfüllt, es ist daher nur die Frage der Stabilität zu untersuchen.

Ist x die Kathete des abgeschnittenen Dreiecks, so ist der über dem Wasser befindliche Würfeltheil eine reguläre gerade 3-seitige Pyramide mit der Grundkante $x\sqrt{2}$, der Höhe $h = \frac{x}{3}\sqrt{3}$ und dem Rauminhalt $V_2 = \frac{x^3}{6} = \sigma$. 77.

Der Schwerpunkt der Pyramide hat von der Spitze die Entfernung $\frac{3}{4}h = \frac{x}{4}\sqrt{3}$, folglich ist

$$e_2 = \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{x}{4}\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1 - \frac{x}{2}\right)$$

$$\text{und (1) } V_2\, e_2 = V_1\, e_1 = \frac{x^3}{12}\left(1 - \frac{x}{2}\right)\sqrt{3} \qquad 78.$$

Das Trägheitsmoment eines gleichseitigen Dreiecks (mit der Seite a) hat für alle Schwerpunktsachsen denselben Werth, nämlich $T = \frac{a^4}{96}\sqrt{3}$, also hier, da $a = x\sqrt{2}$, $T = \frac{x^4}{24}\cdot\sqrt{3}$ 79.

Aus 2 und 3 folgt also

$$T - V_1\, e_1 = \frac{x^4}{24}\sqrt{3} - \frac{x^3}{12}\left(1 - \frac{x}{2}\right)\sqrt{3} = \frac{x^3}{12}\left(x - 1\right)\sqrt{3}$$

d. i. aber < 0. Folglich ist nach dem Duhamel'schen Satze das Gleichgewicht allseitig labil. 80.

Als Grenzbedingung für s ergiebt sich aus 1) $\sigma < \frac{1}{6}$ oder $s > \frac{5}{6}$ $\left(\text{für } s > \frac{1}{2}\right)$ und $s < \frac{1}{6}$ $\left(\text{für } s < \frac{1}{2}\right)$ 81.

D. Der Trapezschnitt.

Fig. 6 stelle Fig. 1 für den vorliegenden Fall dar. Von der oberen Grundfläche E F G H wird das Dreieck E M N abgeschnitten, in dem der kleinste Winkel E M N ($< 45^0$) mit ω bezeichnet ist. $E M_2 N_2$ sei die Projection des von der unteren Grundfläche durch den Wasserspiegel abgeschnittenen Dreiecks $E_1 M_1 N_1$ auf die obere Grundfläche. Wird E M mit x_1, $E_1 M_1 = E M_2$ mit x_2 ($< x_1$) bezeichnet, so ist der nicht eintauchende Theil des Würfels eine abgestumpfte 3seitige Pyramide mit den Grundflächen $g_1 = \frac{x_1^2}{2}\operatorname{tg}\omega$, $g_2 = \frac{x_2^2}{2}\operatorname{tg}\omega$ und der Höhe $h = 1$. Das Volumen dieses Körpertheils ist:

$$V_2 = \frac{h}{3}\left(g_1 + \sqrt{g_1\, g_2} + g_2\right) = \frac{1}{6}\left(x_1^2 + x_1\, x_2 + x_2^2\right)\operatorname{tg}\omega = \sigma,$$

$$\text{folglich } \left(x_1^2 + x_1\, x_2 + x_2^2\right)\operatorname{tg}\omega = 6\,\sigma \qquad 82.$$

Dies ist die Bedingung des Schwimmens.

Die I. Gleichgewichtsbedingung ist (s. 4)

$$\int_1 x\,y \cdot d\,f - \int_2 x\,y \cdot d\,f = 0 \qquad 83.$$

wo O C die (+ x) Achse, O B die (+ y) Achse, das Integral $\int_1$ auf die Fläche M N E und $\int_2$ auf $M_2\,N_2\,E$ auszudehnen ist.

Die Berechnung der beiden Flächenintegrale (83) ergiebt (s. 29) unter der Voraussetzung $\omega < 45^0$:

$$\left.\begin{aligned} \int_1 x\,y \cdot df &= \frac{1}{12} \sin^2\omega\,(1 - \operatorname{tg}\omega) \left\{ \frac{x_1^4}{2}(1 + \operatorname{tg}\omega) - x_1^3 \right\} \\ \int_2 x\,y \cdot df &= \frac{1}{12} \sin^2\omega\,(1 - \operatorname{tg}\omega) \cdot \left\{ \frac{x_2^4}{2}(1 + \operatorname{tg}\omega) - x_2^3 \right\} \end{aligned}\right\} \qquad 84.$$

folglich als I. Gleichgewichtsbedingung (83)

$$\frac{1}{12} \sin^2\omega\,(1 - \operatorname{tg}\omega) \cdot \left\{ (x_1^3 - x_2^3) - \frac{1}{2}(x_1^4 - x_2^4)\,(1 + \operatorname{tg}\omega) \right\} = 0$$

oder $$(x_1 - x_2) \sin^2\omega\,(1 - \operatorname{tg}\omega) \cdot \left\{ \begin{aligned} &2\,(x_1^2 + x_1\,x_2 + x_2^2) \\ &- (x_1^2 + x_2^2)\,(x_1 + x_2)\,(1 + \operatorname{tg}\omega) \end{aligned} \right\} = 0. \qquad 85$$

Diese Bedingung ist erfüllt, wenn einer der vier Factoren links verschwindet. Der erste Factor $x_1 - x_2 = 0$ führt auf einen bereits behandelten Fall (s. A.). Der zweite $\sin^2\omega = 0$ ist ausgeschlossen, es bleiben daher die folgenden beiden Fälle zu untersuchen:

$$\omega = 45^0 \qquad 85a.$$

$$2\,(x_1^2 + x_1\,x_2 + x_2^2) - (x_1^2 + x_2^2)\,(x_1 + x_2)\,(1 + \operatorname{tg}\omega) = 0. \qquad 85b.$$

Bevor auf diese näher eingegangen wird, soll zunächst die II. Gleichgewichtsbedingung aufgesucht werden.

Das Drehungsmoment ist nach 6 (s. Fig. 3):

$$m_1\,V_1 = V_2\,(q \cos\varphi_1 - p \sin\varphi_1) = 0 \qquad 86.$$

Hier ist $p = \frac{1}{2} - r$ (Fig. 2) und zur Bestimmung von r hat man die bekannte Momentengleichung der abgestumpften Pyramide

$$V_2 \cdot r = \frac{h^2}{12}\,(g_1 + 2\sqrt{g_1\,g_2} + 3\,g_2).$$

Setzt man $V_2 = \sigma$, $g_1 = \frac{x_1^2}{2} \operatorname{tg}\omega$, $g_2 = \frac{x_2^2}{2} \operatorname{tg}\omega$, $h = 1$,

so wird $$\left.\begin{aligned} r &= \frac{\operatorname{tg}\omega}{24\,\sigma}\left(x_1^2 + 2\,x_1\,x_2 + 3\,x_2^2\right) \\ p &= \frac{1}{2} - r \end{aligned}\right\} \qquad 87.$$

Zur Bestimmung von q denke man sich durch S_2 zur oberen Grundfläche eine Parallelebene gelegt. Die dadurch entstandene Figur sei in Fig. 7 dar-

gestellt. Die Buchstaben sind hier dieselben wie in Fig. 6, nur mit dem Index s versehen. Nur der Mittelpunkt ist statt mit O_s, der Fig. 2 entsprechend, mit Q bezeichnet.

Der Schwerpunkt S_2 ist auch zugleich Schwerpunkt des Dreiecks $M_s\ N_s\ E_s$ und nach der I. Gleichgewichtsbedingung ist $Q\ P_s\ S_2 \perp A_s\ B_s$, also auch $\perp N_s\ M_s$ und $Q\ S_2 = q$ (wie in Fig. 2). Wird $E_s\ M_s$ mit x_s bezeichnet, so findet man leicht $Q\ P_s = \frac{1}{2} \cos \omega - \left(x_s - \frac{1}{2}\right) \sin \omega$, $P_s\ S_2 = \frac{x_s}{3} \sin \omega$, folglich $Q\ P_s + P_s\ S_2 =$

$$q = \frac{1}{2} \cos \omega + \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\, x_s\right) \cdot \sin \omega \qquad 88.$$

Um x_s zu bestimmen hat man

$$\frac{r}{h} = \frac{x_1 - x_s}{x_1 - x_2} \text{ oder (da } h = 1) \ x_s = x_1 - r\,(x_1 - x_2) \qquad 89.$$

Zur Bestimmung von φ_1 ziehe man (in Fig. 7) $E\ K_2\ K \perp M\ N$, dann ist in der durch E K und die Kante $E\ E_1$ gelegten Ebene, wie leicht ersichtlich,

$$\operatorname{cotg} \varphi_1 = (x_1 - x_2) \cdot \sin \omega \qquad 90.$$

Aus den Gleichungen 87 bis 90 sind nun die Größen p, q, cotg φ_1 auszudrücken und in die Gleichung 86 einzusetzen, der folgende Form gegeben werden soll:

$$\frac{m_1\ V_1}{\sigma \cdot \sin \varphi_1} = q \cdot \operatorname{cotg} \varphi_1 - p = 0 \qquad 91.$$

Hierbei ist es zweckmäßig statt $x_1\ x_2$ neue Größen u v durch folgende Substitution einzuführen:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = u \qquad \frac{x_1 - x_2}{2} = v \qquad 92.$$

Hieraus ergiebt sich

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = u + v, \quad x_2 = u - v, \quad x_1^2 + x_1\,x_2 + x_2^2 = 3\,u^2 + v^2 \\ x_1^2 + 2\,x_1\,x_2 + 3\,x_2^2 = 2\,(3\,u^2 + v^2 - 2\,u\,v) \end{array}\right\} \qquad 93.$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{also (82)} & (3\,u^2 + v^2)\ \operatorname{tg} \omega = 6\,\sigma \\ \text{(87)} & r = \dfrac{\operatorname{tg} \omega}{12\,\sigma} \cdot (3\,u^2 + v^2 - 2\,u\,v) \\ \text{oder} & r = \dfrac{1}{2} - \dfrac{u\,v}{6\,\sigma} \cdot \operatorname{tg} \omega \text{ und } p = \dfrac{u\,v}{6\,\sigma} \operatorname{tg} \omega \\ \text{(89)} & x_s = u + \dfrac{u\,v^2}{3\,\sigma} \cdot \operatorname{tg} \omega \\ \text{(88)} & q = \dfrac{1}{2}\left(\cos \omega + \sin \omega\right) - \dfrac{2\,u}{3} \sin \omega \left(1 + \dfrac{v^2}{3\sigma} \operatorname{tg} \omega\right) \\ \text{(90)} & q \cdot \operatorname{cotg} \varphi_1 = v \sin \omega \left\{\begin{array}{l} \cos \omega + \sin \omega - \dfrac{4\,u}{3} \sin \omega \\ - \dfrac{4}{9\sigma} \cdot \dfrac{u\,v^2}{\cos \omega} \sin^2 \omega \end{array}\right. \end{array}\right\} \qquad 94.$$

folglich aus 91, wenn $\operatorname{tg} \omega = t$ gesetzt wird, nach einigen Reductionen:

$$\frac{6}{v \cdot \sin \varphi_1 \cdot \sin \omega \cdot \cos \omega} \cdot m_1 V_1 =$$

$$6 \sigma (1 + t) - \frac{8}{3} \sigma u t - \frac{8}{3} u v^2 t^2 - u (1 + t^2) = 0 \qquad 95.$$

Wird hierin noch aus 94 (82)

$$v^2 t = 6 \sigma - 3 u^2 t \qquad 96.$$

gesetzt und der stets positive und von 0 verschiedene Factor von $m_1 V_1$ weggelassen, so erhält man als II. Gleichgewichtsbedingung:

$$(m_1 V_1) = 6 \sigma (1 + t) - (1 + 24 \sigma t + t^2) u + 8 t^2 u^3 = 0 \qquad 97.$$

Hierzu tritt nun die I. Bedingung (85a, 85b).

Betrachten wir zuerst den Fall 85b:

$$2 (x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) - (x_1^2 + x_2^2) (x_1 + x_2) (1 + t) = 0$$

Wird auch hier u, v statt x_1 x_2 eingeführt (93), also

$$x_1^2 + x_2^2 = 2 (u^2 + v^2) \text{ und (82) } x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 = \frac{6 \sigma}{t} \text{ gesetzt,}$$

so wird

$$\frac{12 \sigma}{t} - 4 u (u^2 + v^2) (1 + t) = 0$$

oder nach 96:

$$3\sigma - 6\sigma (1 + t) u + 2 t (1 + t) u^3 = 0 \qquad 98.$$

Aus den Gleichungen 96, 97, 98 können die Unbekannten u, v, t bestimmt werden.

Wird aus 97 und 98 u^3 eliminirt, so erhält man

$$u = \frac{6\sigma}{1 + t} \qquad 99.$$

und wenn dieser Wert in eine der Gleichungen 97, 98 eingesetzt wird,

$$\left.\begin{array}{l} \Big((t + 1 - 12\sigma)\Big) \left(\frac{1}{t} + 1 - 12\sigma\right) = 0 \\ \text{woraus} \qquad t_1 = 12\sigma - 1 \\ \qquad\qquad\quad t_2 = \dfrac{1}{12\sigma - 1} \end{array}\right| \qquad 100.$$

Da $t < 1$, so ist nur eine dieser beiden Wurzeln giltig, nämlich

$$\left.\begin{array}{ll} \text{für } \sigma < \frac{1}{6} & t_1 = 12\sigma - 1 \\ \sigma > \frac{1}{6} & t_2 = \dfrac{1}{12\sigma - 1} \end{array}\right| \qquad 101.$$

Zur Bestimmung von x_1 und x_2 hat man folgende Gleichungen:

$$(99)\ u = \frac{6\sigma}{1 + t} \quad (96)\ v = \sqrt{\frac{6\sigma}{t} - 3 u^2}, \quad (93)\ \begin{array}{l} x_1 = u + v \\ x_2 = u - v \end{array} \qquad 102.$$

Mit Hilfe derselben erhält man aus der Bedingung

$$x_2 > 0 \text{ für } t = t_1, \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{3(1-4\sigma)}{4(12\sigma-1)}} > 0$$

oder $\sigma > \frac{1}{6}$, was der Bedingung 101 widerspricht.

Und für $t = t_2$ erhält man aus der Bedingung

$$x_1 < 1, \frac{1}{2}\left(12\sigma - 1 + \sqrt{3(1-4\sigma)(12\sigma-1)}\right) < 1$$

oder da, für die Reellität von x_1, $\sigma < \frac{1}{4}$ sein muß, durch weitere Entwickelung $\sigma < \frac{1}{6}$, was auch der Bedingung 101 widerspricht.

Die Wurzeln $t = t_1$ und $t = t_2$ fallen also aus und es bleibt für die Gleichgewichtslage nur der Fall 85a) $\omega = 45^0$, $t = 1$ übrig.

Für diesen Fall geht die II. Bedingungsgleichung 97 (mit Unterdrückung des Factors 8) in folgende über:

$$(m_1 V_1) = u\left(u^2 - \frac{1}{4}\right) - 3\sigma\left(u - \frac{1}{2}\right) = 0$$

oder

$$(m_1 V_1) = \left(u - \frac{1}{2}\right)\left(u^2 + \frac{1}{2}u - 3\sigma\right) = 0 \qquad 103.$$

deren reelle Wurzeln

$$u_1 = \frac{1}{2} \qquad u_2 = \frac{1}{4}\left(\sqrt{48\sigma + 1} - 1\right) \text{ sind.} \qquad 104.$$

Aus 96 folgt ferner $v^2 = 6\sigma - 3u^2$ 105.

und aus 93:

$$x_1 = u + \sqrt{6\sigma - 3u^2} \qquad x_2 = u - \sqrt{6\sigma - 3u^2} \qquad 106.$$

wo die Quadratwurzel mit dem absoluten Werthe zu nehmen ist.

Die bereits oben benutzte Grenzbedingung $0 < x_2 < x_1 < 1$ soll nun zunächst auf die Wurzel $u = u_2$ angewendet werden.

Die Bedingung $x_2 > 0$ ergiebt nach 106: $u > \sqrt{\frac{3\sigma}{2}}$ 107.

und wenn hierin $u = u_2$ (104) gesetzt wird, $\sigma > \frac{1}{6}$ 107a.

Die Bedingung $x_1 < 1$ ergiebt nach 106:

$$\sqrt{6\sigma - 3u^2} < 1 - u.$$

Die rechte Seite ist positiv, denn die Reellität von x_1 und x_2 erfordert $u^2 < 2\sigma$, also da $\sigma < \frac{1}{2}$, $u^2 < 1$. Folglich können beide Seiten quadrirt werden und man erhält $6\sigma - 1 < 2u(2u - 1)$, und wenn hier (aus 104) $u = u_2$ gesetzt und weiter entwickelt wird,

$$\left(\frac{1}{2} - \sigma\right)\left(\frac{1}{6} - \sigma\right) > 0 \qquad 107b.$$

Diese Bedingung ist aber mit 107a nicht zu vereinen. Es bleibt daher für das Gleichgewicht als einzige Wurzel der Gleichung $(m_1 V_1) = 0$, $u = u_2 = \frac{1}{2}$.

$$\left.\begin{aligned} &\text{Aus 105 folgt } v^2 = 6\sigma - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}\left(24\sigma - 3\right) \\ &\text{und aus 93 } x_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{24\sigma - 3}\right) \\ &\qquad\qquad x_2 = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{24\sigma - 3}\right) \end{aligned}\right| \qquad 108.$$

Für diese Lösung ist aber erst noch die Grenzbedingung zu untersuchen. Die bisher benutzte Bedingung $x_1 < 1$ ist zwar notwendig, aber nicht für jeden Wert von σ hinreichend. Aus Gleichung 82 (für $\operatorname{tg} \omega_1 = 1$) $x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 = 6\sigma$ 109.

geht hervor, daß x_1 mit wachsendem x_2 abnimmt und umgekehrt. Es gehört daher

zum Minimum $x_2 = 0$ das Maximum $x_1 = \sqrt{6\sigma}$

und zum Maximum $x_2 = x_1$ das Minimum $x_1 = x_2 = \sqrt{2\sigma}$

und die genauen Grenzbedingungen sind nun folgende:

$$0 < x_2 < \sqrt{2\sigma} < x_1 < \left\{\begin{array}{l} \sqrt{6\sigma} \text{ für } \sigma < \frac{1}{6} \\ 1 \text{ für } \sigma > \frac{1}{6} \end{array}\right\} \qquad 110.$$

Die Reellität von x_1 und x_2 fordert $\sigma > \frac{1}{8}$ 110a.

und die untere Grenze $0 < x_2$ (nach 108)

$$1 > \sqrt{24\sigma - 3} \text{ oder } \sigma < \frac{1}{6} \qquad 110b.$$

Wenn diese beiden Bedingungen 110a, 110b erfüllt sind, so sind alle übrigen (110) von selbst erfüllt, wie man sich leicht überzeugen kann.

Es findet also Gleichgewicht statt, wenn

$$\left.\begin{aligned} &\sigma \text{ zwischen } \frac{1}{8} = 0{,}1250 \text{ und } \frac{1}{6} = 0{,}1667 \\ &\text{oder s zwischen } \frac{7}{8} = 0{,}8750 \text{ und } \frac{5}{6} = 0{,}8333 \text{ liegt.} \end{aligned}\right| \qquad 111.$$

Diese Gleichgewichtslage ist bestimmt durch die Gleichungen 108 und der Drehungswinkel φ_1 durch Gleichung 90, wenn darin $\omega = 45^0$ und $x_1 - x_2 = 2v$ (s. 108) gesetzt wird

$$\operatorname{cotg} \varphi_1 = \sqrt{\frac{3}{2}(8\sigma - 1)} \qquad 112.$$

Die Stabilität.

Aus den Gleichungen (92) $v = \frac{x_1 - x_2}{2}$ (105) $v^2 = 6\,\sigma - 3\,u^2$ und 199 ff. geht hervor, daß (mit wachsendem x_2) v abnimmt und u zunimmt. x_2 wächst aber mit dem Drehungswinkel φ, folglich muß auch u mit φ zugleich wachsen.

Da in Gleichung 103 der Factor $u^2 + \frac{1}{2}u - 3\,\sigma$ für $u = \frac{1}{2}$ und $\sigma < \frac{1}{6}$ positiv ist, so hat das Drehungsmoment $(m_1\,V_1)$ beim Verschwinden (mit wachsendem φ) den Zeichenwechsel — +. Das Gleichgewicht ist also für die Drehungsachse stabil.

Um den DUHAMEL'schen Satz (8) anwenden zu können, muß man zunächst das Trägheitsmoment T_1 für die Schwerpunktsachse des Wasserschnitts bestimmen, die zur Drehungsachse senkrecht ist, d. i. aber hier die Symmetrieachse des Trapezes. Dieses Trägheitsmoment ist, wenn a, c ($<$ a) die parallelen Seiten, h die Höhe eines gleichschenkligen Trapezes ist, bekanntlich

$$T_1 = \frac{h}{48}\,(a + c)\,(a^2 + c^2).$$

Hier ist nun $a = x_1\sqrt{2}$, $c = x_2\sqrt{2}$, $h = \sqrt{1 + \frac{(x_1 - x_2)^2}{2}}$

$$\text{also } T_1 = \frac{\sqrt{2}}{24}\left(x_1 + x_2\right)\left(x_1^2 + x_2^2\right) \cdot \sqrt{1 + \frac{(x_1 - x_2)^2}{2}} \qquad 113.$$

und nach 92, 97, 105:

$$T_1 = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot u\,(3\,\sigma - u^2) \cdot \sqrt{1 + 2\,(6\,\sigma - 3\,u^2)} \qquad 114.$$

also für $u = u_1 = \frac{1}{2}$:

$$T_1 = \frac{1}{24}\,(12\,\sigma - 1) \cdot \sqrt{24\,\sigma - 1} \qquad 115.$$

Um ferner $V_1\,e_1 = V_2\,e_2$ zu bestimmen, hat man in Fig. 2: $S\,S_2 = e_2 = \frac{p}{\cos\varphi_1}$ oder nach 94) $e_2 = \frac{u\,v}{6\,\sigma \cdot \cos\varphi_1}$ und nach 105, wenn $u = \frac{1}{2}$ gesetzt wird:

$$V_1\,e_1 = \sigma\,e_2 = \frac{1}{24} \cdot \sqrt{24\,\sigma - 3} \cdot \frac{1}{\cos\varphi_1} \qquad 116.$$

Da aber (112) $tg^2\,\varphi_1 = \frac{2}{24\,\sigma - 3}$, also $1 + tg^2\,\varphi_1 = \frac{1}{\cos^2\varphi_1} = \frac{24\,\sigma - 1}{24\,\sigma - 3}$ so wird

$$V_1\,e_1 = \sigma\,e_2 = \frac{1}{24} \cdot \sqrt{24\,\sigma - 1} \text{ und (115)}$$

$$T_1 - V_1\,e_1 = \frac{1}{12}\,(6\,\sigma - 1) \cdot \sqrt{24\,\sigma - 1} \text{ d. i. } < 0. \qquad 117.$$

Das Gleichgewicht ist also labil oder kann in gewissem Sinne teilweise stabil genannt werden.

Bemerkung 1. Da $u = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1}{2}$, also $x_1 + x_2 = 1$ ist, so muß jeder Schenkel des Trapezes durch den Mittelpunkt seiner Würfelfläche gehen.

Bemerkung 2. Außer der in diesem Abschnitt bestimmten Gleichgewichtslage tritt noch für $\varphi_1 = 90^0$ die in Abschnitt A. (für $\varphi_1 = 45^0$) angegebene (Rechteckschnitt) ein. Das Trapez wird dann zum Rechteck und das Gleichgewicht muß hier für s zwischen 1 und $\frac{7}{8}$ $\left(\text{oder zwischen 0 und } \frac{1}{8}\right)$ teilweise stabil, für s zwischen 0,7187 und 0,2813 teilweise labil genannt werden.

E. Der Sechseckschnitt.

In diesem Falle muß der Wasserspiegel, wie früher gezeigt wurde[1]), senkrecht zu einer Würfeldiagonale sein und von jeder Fläche ein gleichschenkliges Dreieck abschneiden. Wird von der oberen Grundfläche (s. Fig. 4) das Dreieck M D N abgeschnitten, dessen Kathete mit x bezeichnet werden mag, so sind $BM = AN = x_1$ die Katheten von den Dreiecken der beiden Nachbarflächen und, wie man sieht, ist $x_1 = 1 - x$.

Der Wasserschnitt ist ein Sechseck mit 3 Symmetrieachsen, in dem je zwei gegenüberliegende Seiten einander parallel, aber ungleich sind, hat also die Gestalt von M N P Q R L (Fig. 8). Die Schnittpunkte der drei kürzeren Seiten bilden ein gleichseitiges Dreieck A B C. Der eintauchende Würfelteil bildet eine auf der Grundfläche A B C stehende gerade Pyramide mit gleichschenklig rechtwinkligen Seitenflächen, von der drei ähnliche Pyramiden mit den Grundflächen M N A, P Q B, R L C abgeschnitten sind. Die Seitenkanten der Hauptpyramide sind $= 1 + x$, ihre Grundkanten $= (1 + x)\sqrt{2}$. Die abgeschnittenen Pyramiden haben die Seitenkante x und die Grundkante $x\sqrt{2}$. In dem Wasserschnitt sind die drei längeren Seiten $MN = PQ = RL = x\sqrt{2}$, die drei kürzeren $NP = QR = LM = (1 - x)\sqrt{2} = x_1\sqrt{2}$. Die Höhen des Dreiecks A B C sind die Symmetrieachsen des Sechsecks und schneiden einander im Schwerpunkt O beider Figuren. Die Höhe der Hauptpyramide ist dann $h = \frac{1 + x}{3}\sqrt{3}$, ihre Grundfläche $g = \frac{(1 + x)^2}{2}\sqrt{3}$, also ihr Rauminhalt $\frac{1}{3} g h = \frac{1}{6}\left(1 + x\right)^3$. Ebenso ist für jede abgeschnittene Pyramide die Höhe $h_1 = \frac{x}{3}\sqrt{3}$, die Grundfläche $g_1 = \frac{x^2}{2}\sqrt{3}$, der Rauminhalt $\frac{1}{3} g_1 h_1 = \frac{1}{6} x^3$.

Das Volumen des eintauchenden Würfelteils ist daher

$$V_1 = \frac{1}{3}\left(g h - 3 g_1 h_1\right)$$

$$\text{oder} \quad s = \frac{1}{6}\left\{(1 + x)^3 - 3 x^3\right\} \qquad 118.$$

Diese Gleichung enthält die Bedingung des Schwimmens.

[1]) s. Scheeffer a. a. O. im letzten Kapitel.

Da die beiden Gleichgewichtsbedingungen hier selbstverständlich erfüllt sind, so ist nur noch die Stabilität nach dem DUHAMEL'schen Satze (8) zu untersuchen.

Der Wasserschnitt hat für die drei Symmetrieachsen offenbar gleiches Trägheitsmoment T. Nach dem Lehrsatz (9) (s. Abschn. I) muß folglich für alle Schwerpunktsachsen das Trägheitsmoment denselben Werth T haben. Wir bestimmen ihn für die Symmetrieachse B O.

Das Trägheitsmoment des Dreiecks A B C ist, wie man leicht findet,

$$\frac{g}{12}(1+x)^2 = \frac{(1+x)^4}{24}\cdot\sqrt{3},$$

für das Dreieck P Q B, $\frac{g_1}{12}x^2 = \frac{x^4}{24}\cdot\sqrt{3}$,

für jedes der Dreiecke A M N, C L R, $\frac{g_1}{2}\left(1+\frac{x^2}{6}\right) = \frac{x^2}{4}\left(1+\frac{x^2}{6}\right)\sqrt{3}$

folglich $$T = \left\{\frac{(1+x)^4}{24} - \frac{x^4}{24} - \frac{x^2}{2}\left(1+\frac{x^2}{6}\right)\right\}\cdot\sqrt{3}$$

oder $$T = \frac{\sqrt{3}}{24}\cdot\left\{(1+x)^4 - 3x^4 - 12x^2\right\} \qquad 119.$$

Um $S S_1 = e_1$ zu bestimmen, nehmen wir den Wasserschnitt als Momentenebene an und bezeichnen seinen Abstand von S_1 mit z. Dann ist die Momentengleichung

$$V_1 z = \frac{g h^2}{12} - 3\cdot\frac{g_1 h_1^2}{12}$$

also mittelst der obigen Werthe

$$V_1 z = \frac{\sqrt{3}}{72}\left\{(1+x)^4 - 3x^4\right\} \qquad 120.$$

Es ist nun

$$e_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3} - (h - z) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1+x}{3}\right)\sqrt{3} + z$$

$$(120)\quad V_1 e_1 = s\left(\frac{1}{2} - \frac{1+x}{3}\right)\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{72}\left\{(1+x)^4 - 3x^4\right\}$$

oder wenn aus 118 für s der Werth eingesetzt und reducirt wird:

$$V_1 e_1 = \frac{\sqrt{3}}{24}\cdot\left\{2(1+x)^3 - 2x^3 - (1+x)^4 + 3x^4\right\}$$

und nach 119 nach Reduction:

$$T - V_1 e_1 = \frac{\sqrt{3}}{12}\cdot\left\{(1+x)^4 - 3x^4 - (1+x)^3 + x^3 - 6x^2\right\}$$

$$T - V_1 e_1 = \frac{x}{12}\cdot\sqrt{3}\cdot\left(1 - 3x + 4x^2 - 2x^3\right) \qquad 121.$$

$$= \frac{x}{12}\cdot\sqrt{3}(1-x)\cdot\left\{(1-x)^2 + x^2\right\}$$

Da nun $x < 1$ ist, so ist

$$T - V_1 e_1 > 0$$

also das Gleichgewicht stabil.

Da für $s = \frac{5}{6}$ der Sechseckschnitt in den Dreieckschnitt übergeht, so findet dieses stabile Gleichgewicht für $\frac{1}{2} < s < \frac{5}{6}$

oder $\frac{1}{6} < s < \frac{1}{2}$ statt.

IV.

Zur Uebersicht der in den vorstehenden Untersuchungen gewonnenen Resultate folgen zwei Tafeln, die für die verschiedenen Werte (bezw. Wertgebiete) von s alle überhaupt möglichen Arten von Gleichgewichtslagen des schwimmenden Würfels enthalten, und zwar in der Reihenfolge, wie sie aus der aufrechten Lage durch Drehung um eine horizontale Achse von konstanter Richtung entstehen.

Wenn $s = 1$ ist oder zwischen $\left\{\begin{matrix} 0{,}7887 \text{ und } 0{,}7500 \\ 0{,}2113 \quad „ \quad 0{,}2500 \end{matrix}\right\}$ liegt, giebt es unendlich viele stabile Gleichgewichtslagen, die ebenfalls in den beiden Tafeln angegeben sind. Die stabile Lage ist stets im Druck hervorgehoben. Wenn der Würfel in einer labilen Lage um die Drehungsachse nicht kippen kann, so ist diese Lage teilweise stabil (tw. stab.), und wenn dasselbe mit der auf der Drehungsachse senkrechten Achse der Fall ist, teilweise labil (tw. lab.) genannt (s. I am Schluß).

Tafel a. Die Drehungsachse hat die Richtung einer Kante.

Specif. Gewicht.		I. Drehgebiet.		II. Drehgebiet.	
		$\varphi_1 = 0$	$0 < \varphi_1 < 45^0$		$\varphi_1 = 45^0$
0,0000	1,0000	Der Würfel schwimmt in jeder belieb. Lage stabil.			
0,1250	0,8750	stabil	..	..	tw. lab.
		stabil	..	..	labil
0,2113	0,7887	stabil [1])	..	..	labil
		labil	stabil [2])	..	labil
0,2500	0,7500	labil	tw. stab.		labil
		labil	..	tw. stab.	labil
0,2813	0,7187	labil	..	..	tw. stab. [3])
0,5000	0,5000	labil	..	..	tw. stab.

[1]) Hier fallen unendlich viele Gleichgewichtsarten zusammen.

[2]) Die Stabilität bleibt bestehen, wenn der Würfel um seine Schwimmachse gedreht wird, so lange die obere Fläche nicht eintaucht.

[3]) Hier fallen zwei Gleichgewichtsarten zusammen.

Tafel b. Die Drehungsachse hat die Richtung einer Flächendiagonale.

Specif. Gewicht.		I. Drehgebiet.		Wasserschnitt					
		$\varphi_1 = 0$		Fünfeck		Dreieck	Sechseck	Trapez	Rechteck $\varphi_1 = 90^0$
0,0000	1,0000	Der Würfel schwimmt in jeder beliebigen Lage stabil.							
		stabil	· ·	· ·	· ·	labil	· ·	· ·	tw. stab.
0,1250	0,8750	stabil	· ·	· ·	· ·	labil	· ·	· ·	tw. stab.[1]
		stabil	· ·	· ·	· ·	labil	· ·	tw. stab.	labil
0,1667	0,8333	stabil	· ·	· ·	· lab. · [2]		· tw. stab.	·	labil
		stabil	· ·	· ·	tw. lab.	· ·	stabil	· ·	labil
0,2113	0,7887	stabil[3]	· ·	· ·	tw. lab.	· ·	stabil	· ·	labil
		labil	stabil[4]	· ·	tw. lab.	· ·	stabil	· ·	labil
0,2265	0,7735	labil	stabil		tw. lab.	· ·	stabil	· ·	labil
		labil	· ·	stabil	tw. lab.	· ·	stabil	· ·	labil
0,2377	0,7623	labil	· ·	stabil [2]	tw. lab.	· ·	stabil	· ·	labil
		labil	· ·	· ·	· ·	· ·	stabil	· ·	labil
0,2813	0,7187	labil	· ·	· ·	· ·	· ·	stabil	· ·	tw. lab.
0,5000	0,5000								

Sämmtliche Gleichgewichtslagen mit Ausnahme des Dreieck- und des Sechseckschnitts können auch erreicht werden, wenn der Würfel aus der aufrechten Lage um eine schiefe horizontale Achse von konstanter Richtung gedreht wird (vorausgesetzt, daß dabei jede Drehung um die senkrechte horizontale Achse verhindert wird). Die Drehungsachse bilde mit einer Kante der Grundfläche den Winkel ω ($< 45^0$).

A. Für die schiefe Gleichgewichtslage des ersten Drehgebietes ist die Bestimmung des Drehungswinkels φ_1 aus Abschnitt II (13—16) zu ersehen.

[1]) Hier fallen zwei Gleichgewichtsarten zusammen.

[2]) Hier fallen vier (bezw. zwei) Gleichgewichtslagen zusammen und das teilweise stabile Gleichgewicht ist auf eine der beiden Drehungsrichtungen beschränkt.

[3]) Hier fallen unendlich viele Gleichgewichtsarten zusammen.

[4]) Die Stabilität bleibt bestehen, wenn der Würfel beliebig weit um seine Schwimmachse gedreht wird.

B. Für den Rechteckschnitt ergiebt sich aus III A 20, 21, wenn darin ω statt φ_1 gesetzt und der Drehungswinkel nun mit φ_1^1 bezeichnet wird, eine labile (teilweise stabile) Gleichgewichtslage,

wenn $0{,}7500 \geqq s > 0{,}7187$

oder $0{,}2500 \leqq s < 0{,}2813$

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{16\,s - 7 - 3\sqrt{32\,s - 23}}{16\,(1 - s)} \left(\text{für } s > \frac{1}{2}\right)$$

$$\varphi_1^1 = 90^0$$

C. Der Trapezschnitt bildet mit zwei zusammenstoßenden Würfelflächen eine rechtwinklige körperliche Ecke, und es ergiebt sich daher mit Hilfe der sphärischen Trigonometrie aus Abschnitt III D

$$\operatorname{tg} \omega = \sqrt{2} \cdot \operatorname{cotg} \varphi_1 \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg} \omega = \sqrt{24\,\sigma - 3}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1^1 = \frac{1}{\cos \omega} \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg} \varphi_1^1 = \sqrt{24\,\sigma - 2}$$

Specifisches Gewicht: $0{,}8750 \gtreqqless s \geqq 0{,}8333$

oder $0{,}1250 \lesseqqgtr s \leqq 0{,}1667$

Das Gleichgewicht ist labil (teilweise stabil).

D. Für den Fünfeckschnitt ergiebt sich ebenfalls mit Hilfe der sphärischen Trigonometrie aus Abschnitt III B.

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{1}{2}\sqrt{2}\operatorname{tg} \varphi_1 \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg} \omega = \frac{6\,\sigma}{y_3}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1^1 = \sqrt{1 + 2\operatorname{cotg}^2 \varphi_1} \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg} \varphi_1^1 = \frac{1}{6\,\sigma}\sqrt{36\,\sigma^2 + y_3^2}$$

Das Nähere (über s und y_3) ist aus 76 und 76a zu ersehen.

Druckfehler-Berichtigung.

S. 102. Z. 4 von unten lies: $\frac{x}{2}\sqrt{2}$ statt $\sigma \cdot \frac{x}{2}\sqrt{2}$.

S. 103. Z. 10 u. 14 von oben lies: w statt ω.

S. 105. No. 45 letzte Zeile lies: 0,2265 statt 2265.

S. 110. Z. 14 von oben lies: $\underline{\sigma}$ (x) — σ statt $\underline{\sigma}$ (x).

Fig. 5.

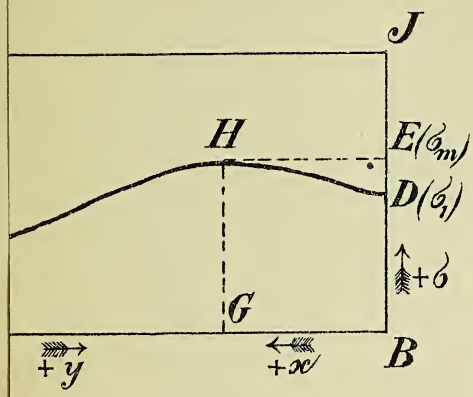


Fig. 6.

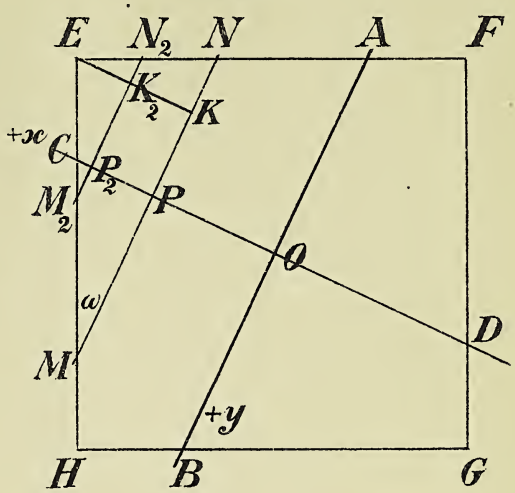


Fig. 7.

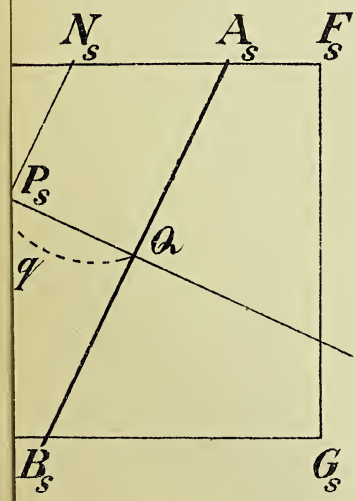


Fig. 8.

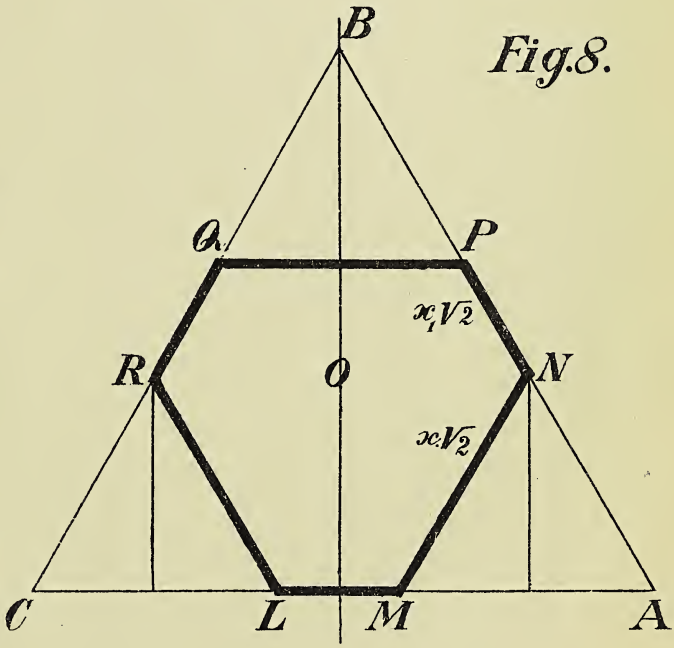


Fig. 1.

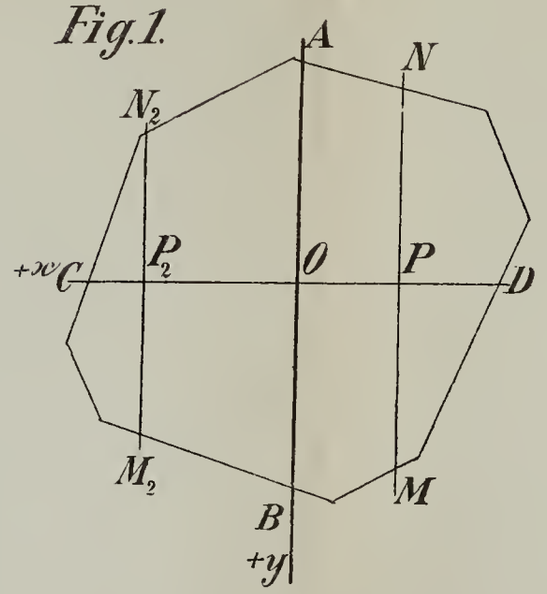


Fig. 2.

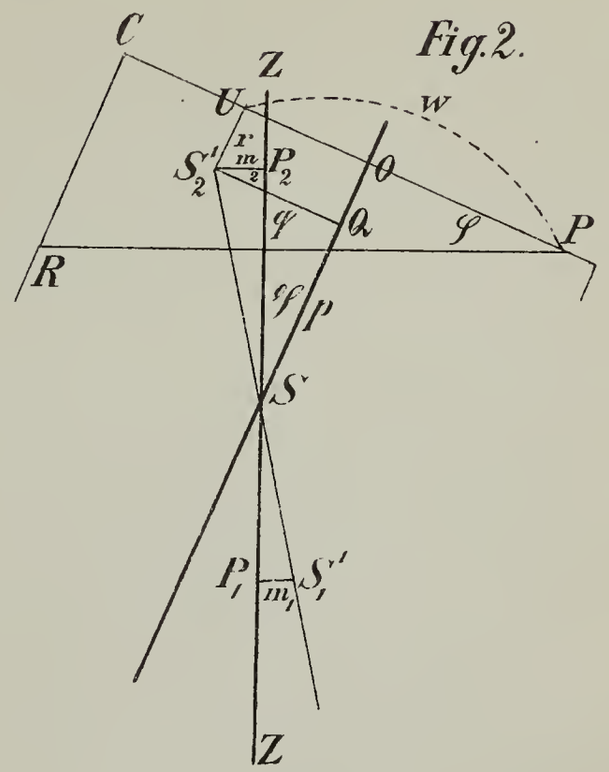


Fig. 5.

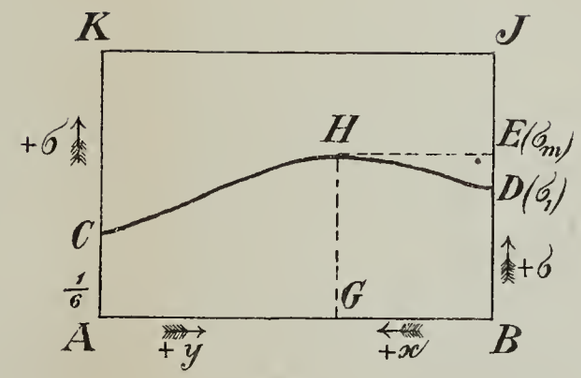


Fig. 6.

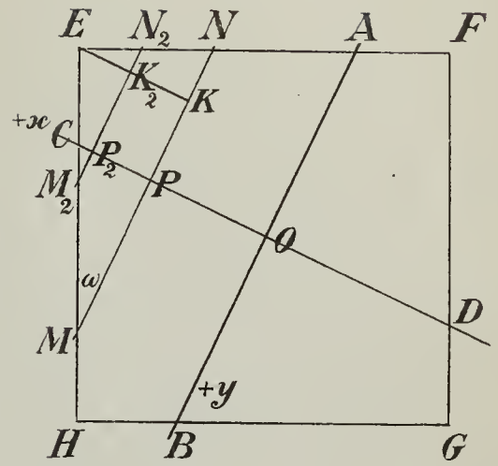


Fig. 3.

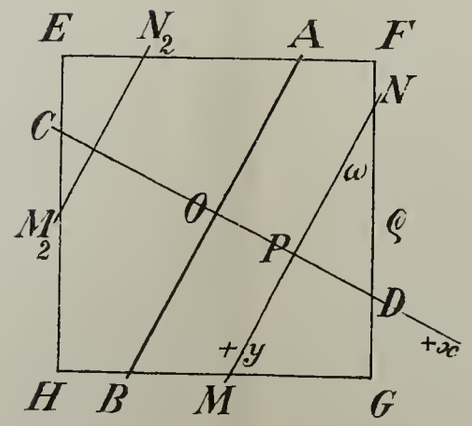


Fig. 4.

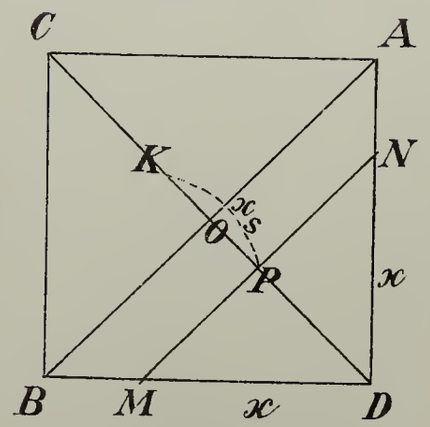


Fig. 7.

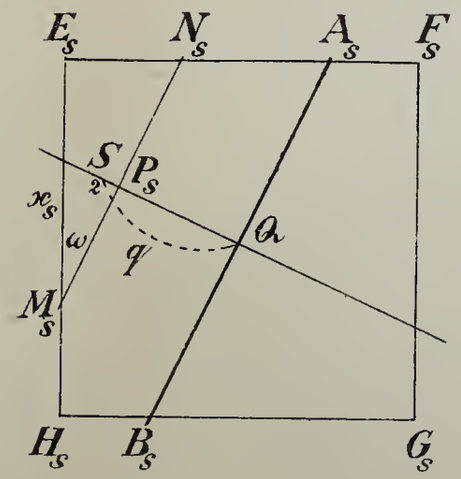
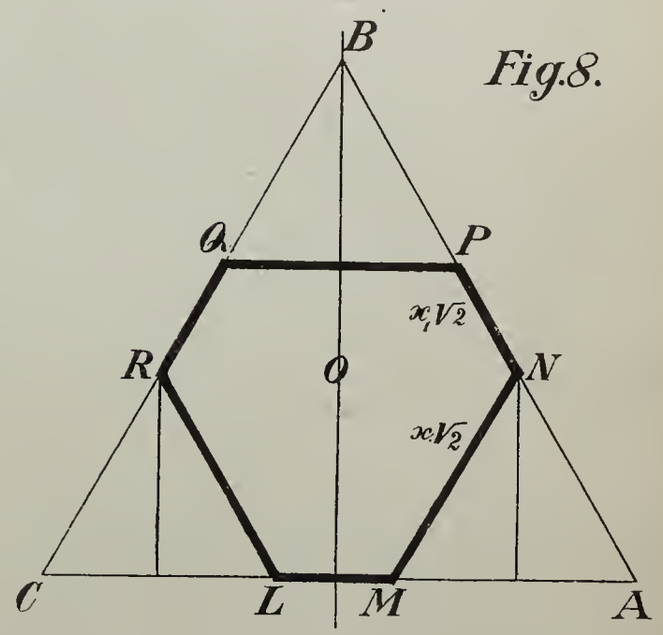


Fig. 8.



ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Schriften der Naturforschenden Gesellschaft Danzig

Jahr/Year: 1902

Band/Volume: NF_10_4

Autor(en)/Author(s): Scheeffer E.

Artikel/Article: Gleichgewicht und Stabilität eines schwimmenden homogenen Würfels. 97-123