Der Anteil der verschiedenen Kulturvölker an der Entwicklung der Mathematik.

Vortrag

zur Feier des 175jährigen Bestehens der Naturforschenden Gesellschaft in Danzig am 2. Januar 1918.

Von J. SOMMER - Danzig.

Bei dem Namen unserer Gesellschaft, wie überhaupt bei Naturwissenschaften denkt man gerne vor allem an die Biologie und die beschreibende Naturkunde, so daß wohl mancher unter Ihnen für den heutigen Abend einen Vortrag aus diesen bekannteren und leichter zugänglichen Gebieten erwartet haben mag. Zwar entnimmt die Mathematik ihre Begriffe auch der Anschauung und sogar der uns umgebenden Wirklichkeit, sie braucht keine Reisen und Expeditionen zu ihrer Erweiterung, aber sie streift von der sinnlichen Anschauung gerade alles Greifbare ab, entkleidet sie jeder sinnlichen Qualität, ehe sie dieselbe zum Gegenstand ihres Denkens macht, und nur wenige mögen ihr gerne auf diesem Wege der Abstraktion folgen. Indessen könnte ich mich darauf berufen, daß die Gesellschaft von Anfang an und als Hüterin des WOLFFschen Vermächtnisses stets mit Stolz ihre Beziehungen zur exakten Wissenschaft betont hat. Diesen Beziehungen verdanken unsere Gesellschaftsschriften Beiträge der Astronomen AUER, KAYSER und des Mathematikers GRONAU, welche ein rühmliches Zeugnis für den Eifer und nachhaltigen Fleiß dieser Mitglieder sind und uns die Berechtigung geben, dieser Männer am heutigen Abend zu gedenken. In Zeiten bescheidenerer Mittel, wo auch eine kleinere Gesellschaft an rein wissenschaftlichen Bestrebungen tätig teilnehmen konnte, hat die Naturforschende Gesellschaft auf Betreiben von ANGER drei damals sehr aktuelle Preisaufgaben, z. B. über die Theorie des FOUCAULTschen Pendels, gestellt, und an deren Bearbeitung haben keine Geringeren als der nach BESSEL größte deutsche theoretische Astronom P. A. HANSEN und C. A. F. PETERS teilgenommen. Heute bilden diese theoretischen Abhandlungen der Preisträger Juwelen unserer Schriften. Aber diese persönlichen Beziehungen geben nicht allein die Berechtigung für mein Thema, dieses läßt sich vielmehr sachlich rechtfertigen durch die vielfältigen und engen Verbindungen zwischen Mathematik und Naturwissenschaft. Steht doch zwischen der reinen Mathematik auf der einen Seite und den biologisch beschreibenden Wissenschaften auf der anderen die imponierende Masse der erfolgreichen exakten Naturwissenschaften, deren Rückgrat die Mathematik bildet. Gerade die Abstraktheit, die man ihr oft zum Vorwurf machen will, ist die Voraussetzung ihrer universalen Bedeutung, denn wer einen Naturvorgang in seinem zeitlichen Verlauf und seinen Wechselwirkungen zu andern Naturvorgängen genau verfolgen will, der muß die aufeinander folgenden Zustände mit einer Skala vergleichen, der muß wägen und messen, so daß ihm als Resultat seiner Mühe vielleicht eine Tafel voll Zahlen in der Hand bleibt, und wenn er jetzt frägt, ob diese Zahlen einem Gesetz, d. h. einer Regel, folgen, so treibt er Mathematik, und er wird zweckmäßig diese fragen, was sie allgemein über Abhängigkeit von Zahlenreihen zu sagen hat. Der tiefere Sinn dieser Anwendung der Mathematik ist der, daß sie uns dazu hilft, von den gegebenen, sinnlich wahrnehmbaren Dingen auf die uns unzugänglichen oder verborgenen Erscheinungen zu schließen. Durch Messung an der Erdoberfläche bestimmen wir die Form und sogar die Größe der Erde, ihre Entfernung von der Sonne und fast unvorstellbare Dimensionen am Himmel. Eine Wissenschaft, welche sich auf das Sichtbare und Fühlbare beschränken wollte, wäre dürftig und würde jeder inneren Ordnung widerstreben, d. h. ist überhaupt unmöglich. Indem wir auf mathematischem Wege unsere Beobachtungen auswerten und mit mathematischen Schlüssen von unseren Voraussetzungen fortschreiten, sind wir aber sicher, daß auf dem Weg von der Voraussetzung zum Ergebnis kein fremder Gedanke sich eingeschlichen hat, um unser Resultat zu entwerten; die Folgerung ist ebenso sicher wie die Voraussetzung, weil wir die Ausdehnung und Grenzen der mathematischen Gewißheit kennen. In diesem Sinn, unabhängig von jedem speziellen philosophischen System, dürfte es wohl immer richtig sein, wenn Kant sagt:

„Ich behaupte aber, daß in jeder besonderen Naturlehre nur soviel eigentliche Wissenschaft angetroffen werden könne, als darin Mathematik anzutreffen ist.“

Wenn uns heute die Existenz der Moleküle, die nie jemand gesehen hat und sehen wird, ebenso sicher erscheint wie die Existenz eines kleinen oder großen Planeten, so danken wir das der mathematischen exakten Naturlehre, und wir nehmen es gerne in den Kauf, wenn andererseits manche Erscheinungen, wie Wärme, Licht und Elektrizität, nur noch unter dem Bilde veränderlicher geometrischer Konfigurationen uns erscheinen. Etwas anderes gibt es eigentlich auch gar nicht, und können wir vernünftigerweise auch nicht verlangen, wenn wir auf klaren, quantitativ richtigen Begriffen bestehen. Die Tatsache dieser Besitznahme der sinnlichen Wirklichkeit durch den mathematischen Schluß kann uns aber auch den Schrecken vor der abstrakten Mathematik nehmen. Es ist in der Tat richtig, wenn der berühmte englische Astronom G. H. Darwin in einem meisterhaft geschriebenen, populären Buch über sein

Spezialgebiet: die Ebbe und Flut, schreibt: „Eine mathematische Beweisführung ist bei Lichte betrachtet nur organisierter gewöhnlicher Menschenverstand." Und geht nun die Mathematik in den Naturwissenschaften auf, so empfängt sie von diesen hinwieder reiche Anregung und wird zu einem Ferment der Kultur in einem Maße, daß sie zu einem Bestandteil der allgemeinen Bildung geworden ist. Die Zeiten sind glücklicherweise längst vorbei, wo jemand für notwendig hielt, die Furcht vor der Arithmetik — dem gewöhnlichen Rechnen — zu bekämpfen, wie wir es in einer von MELANCHTHON niedergeschriebenen Rede des Wittenberger Mathematikers G. J. RHETICUS „Über die Nützlichkeit der Arithmetik" lesen können, aus welcher Rede besonders die folgenden Sätze berühmt, um nicht zu sagen berüchtigt, geworden sind: „. . . die ersten Regeln sind so durchsichtig, daß auch Knaben sie erlernen können, weil alles der Natur gemäß. Dagegen verlangen die Regeln der Multiplikation und Division etwas mehr Aufmerksamkeit, aber bei einiger Anstrengung können sie doch bald begriffen werden."

Heute gibt es kein Kulturvolk, in dem die Mathematik nicht eine Stätte gefunden hätte, in dem nicht der Fortschritt der Wissenschaft auf alle mögliche Weise gefördert würde und die Ausbreitung derselben schon von der Schule aus betrieben würde. Das ist der Erfolg einer stolzen und bewundernswerten Entwicklung aus den einfachsten Anfängen heraus, und ich bedaure nur, Ihnen heute abend höchstens einen schwachen Umriß von der interessanten Geschichte einer der wichtigsten geistigen Bewegungen geben zu können, um so mehr, da man wohl sagen kann, daß das Verdienst um die Mathematik bei den einzelnen Völkern einen Maßstab gibt für ihre Bedeutung in der Kulturentwickelung der gesamten Menschheit. — Die verfolgbare Geschichte der Mathematik reicht über 2½ Jahrtausende zurück und in diesen Zeiten haben fast alle Konfessionen, Heiden, Buddhisten, Mohammedaner, Juden und Christen sowie alle Stämme Europas, etwa mit Ausnahme der Balkanvölker, wesentliche Beiträge geleistet. Auf die Ausbildung der Arithmetik haben von außereuropäischen Völkern die Inder einen gewissen Einfluß ausgeübt, aber diese sind auch das einzige außereuropäische Volk, welches ich heute abend zu nennen habe. Erst in neuester Zeit haben die Amerikaner aus den Vereinigten Staaten in Abhängigkeit von Deutschland und Frankreich eine mathematische Produktion entwickelt, und die Japaner haben sich vor dem Kriege viel Mühe gegeben zu beweisen, wieviel sie schon in frühesten Zeiten an Kenntnissen besessen haben; aber wenn ich selbst die Prioritätsfrage ganz beiseite lasse, so ist ihr Besitzstand doch herzlich klein gegenüber dem der Europäer, und irgendein Strauch ist aus diesen Wurzeln jedenfalls nicht gewachsen.

Bei einem zusammenfassenden Überblick über den Umfang und den Aufbau der Mathematik sind zwei Beobachtungen besonders auffällig. Die erste ist eine Tatsache, welche für eine so abstrakte Wissenschaft ziemlich merkwürdig klingt, daß nämlich im pulsierenden Leben der Mathematik der

Stil einer Zeit und der Geschmack eine wichtige Rolle spielen, daß jedes Volk seinem Werke die Züge seines Charakters und seine Eigenheit eingeprägt hat, und wir uns nicht denken können, was gegenwärtig das Bild der Mathematik wäre, wenn wir eines der führenden Länder, etwa Deutschland oder Frankreich, aus ihrer Entwickelung ausschlössen. Insbesondere trennen sich meist analytische und rein geometrische Begabung, und es ist sogar ein sehr seltener Fall, wenn beide einmal in hervorragendem Maße vereinigt sind, oder auch nur, wenn ein Mathematiker auf die Analysis und auf die Geometrie gleichen, bleibenden Einfluß ausgeübt hat. Die zweite Tatsache, die für jeden, der selbständig in der Mathematik forscht und ihren Bau in seinem Wachstum zu übersehen und zu begreifen vermag, immer von neuem ein Gegenstand der Bewunderung ist, ist die Art, wie jede Neuschöpfung sich dem Alten harmonisch an- oder eingliedert. Die innere, nie verlorengegangene, ja nie verwischte Harmonie darf wohl als ein Zeichen gelten für die Richtigkeit und Sicherheit der Methoden und für die, unabhängig vom sterblichen Individuum, nur von der Beschaffenheit des menschlichen Geistes bedingte Trefflichkeit der Voraussetzungen, auf denen unsere Schlüsse aufgebaut sind. Wir dürfen in dieser Eigentümlichkeit, in der sich die Mathematik von anderen Wissenschaften, z. B. auch von der Philosophie, wesentlich unterscheidet, aber auch einen Erfolg der Mathematiker erblicken, die mit nie rastendem Fleiß jede neue Erkenntnis für das Alte verwerteten und die nie müde wurden, ihren ganzen Besitz zu sichten, zu reinigen und nach neu gewonnenen Methoden durchzuarbeiten.

Wenn wir uns nun von der Entstehung und Vollendung des mathematischen Lehrgebäudes unterhalten wollen, so wird das nur unvollkommen und oberflächlich geschehen können, weil ich Ihnen dazu einen Begriff von den mathematischen Theorien geben müßte, woran gar nicht zu denken ist.

Ich muß im Allgemeinen bleiben und ich muß mich darauf beschränken, die Verdienste einiger großen Mathematiker zu würdigen, um damit zu zeigen, wie die Leistungen derselben mit dem Kulturfortschritt der Menschheit zusammenhängen. Ich hoffe aber, meine Gedanken so gekleidet zu haben, daß das, was ich Ihnen sage, ein Beispiel des geistigen Fortschrittes gibt und nicht nur eine einzelne, scheinbar weltabgewandte Denkweise und Forschertätigkeit betrifft.

So wollen wir uns nunmehr zuerst fragen, wie schreitet die Mathematik vorwärts, worin besteht der Wert einer Leistung für den Fortschritt der Wissenschaft? Und dieser Fortschritt besteht, können wir antworten, in folgendem:

1. In der Entdeckung neuer Tatsachen und Begriffe, neuen Stoffes, auf welchen die vorhandenen Begriffe Anwendung finden können.
2. In der systematischen Anordnung der Tatsachen, welche zugleich eine Genesis derselben ist, und in der Verbesserung der Systematik, sowie hiermit zusammenhängend

3. In der Auffindung neuer absolut gesicherter Schlußweisen, logisch geklärter und einwandfreier Denkvorschriften, und
4. (für die Mathematik in ganz besonderem Maße) In der Ausbildung einer geeigneten Nomenclatur und Formelsprache.

Es lohnt sich und wird meine fernere Rede verständlicher machen, wenn ich einiges zur Erläuterung dieser Punkte ausführe. Was sind neue Tatsachen in der Mathematik? Kann man solche erfinden, wie man eine Dynamomaschine erfindet, die vorher nicht und nirgends da war und erst aus einer freien Konstruktion erstand, oder muß man sie entdecken, wie COLUMBUS, der auszog, eine Straße zu finden und statt dessen ein Land entdeckte? Ich greife aus dem Füllhorn der Tatsachen willkürlich einige heraus.

Es war eine neue Tatsache, als PYTHAGORAS auf den Satz kam, daß in jedem rechtwinkligen Dreieck das Quadrat über der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate über den zwei Katheten ist, oder als ARCHIMEDES lehrte, wie man den Umfang des Kreises oder gar die Oberfläche der Kugel aus dem Radius dieser Gebilde berechnen kann, und seit den Zeiten des PYTHAGORAS ist die Geschichte reich an der Hervorbringung solcher neuen Tatsachen. Neu war so der von GAUSS geführte Nachweis, daß man außer dem regelmäßigen Drei- und Fünfeck auch das 17-Eck nur mit Zirkel und Lineal genau konstruieren kann, ferner die Entdeckung des einseitigen Blattes von MÖBIUS oder des verbiegbaren Polyeders von BRICARD usw. Bei allen diesen Tatsachen haben wir es mit Entdeckungen zu tun, als mit solchen, welche mit dem Begriff des rechtwinkligen Dreiecks, des regelmäßigen Vielecks, des Polyeders, gegeben sind und nur aus diesen Begriffen herausgeschält werden mußten. Dagegen sind alle die angegebenen Objekte selbst Konstruktionen, Erfindungen, und der Zweck der Mathematik hat noch viele andere Erfindungen veranlaßt. So ist z. B. die Aufgabe des Zahlenrechnens, des Multiplizierens, Dividierens und Potenzierens großer Zahlen und vieler Zahlen miteinander ungeheuer erleichtert worden durch die Erfindung der Logarithmen durch Lord NEPER und JOST BÜRGI. Ebenso dienen die von MÖBIUS, GRASSMANN und HAMILTON erfundenen Kalküle der Vereinfachung geometrischer Betrachtungen.

Indessen machen die Tatsachen allein und für sich, so wichtig sie sind, noch keine Wissenschaft. Es gilt, die vorhandenen Tatsachen bereitzustellen, daß man jederzeit über sie verfügen kann; um mich stark bildlich auszudrücken: sie müssen geordnet, registriert und gebucht werden, oder wie man sich wissenschaftlich ausdrückt, sie müssen in ein System gebracht werden. Der geistvolle Physiker und Philosoph E. MACH hat als das Ziel jeder Wissenschaft die Ökonomie des Denkens bezeichnet; und wenn das auch zu weit geht, so bleibt der praktische Nutzen und die praktische Rechtfertigung unzweifelhaft, daß die Wissenschaft uns lehren muß, große Ideenkomplexe, Tatsachenreihen und Theorien zu behalten und zu übersehen und zu überliefern, um andern weiterzuhelfen, indem wir sie in ein System bringen. Diese

Aufgabe hat keine andere Wissenschaft so gut zu lösen vermocht wie die Mathematik. In einem wunderbaren Aufbau hat sie ihre Tatsachen vereinigt, indem sie immer wieder von dem Bestreben ausging, aus einer verhältnismäßig geringen Anzahl unbeweisbarer Voraussetzungen oder sogenannter Axiome alles Vorhandene durch logische, methodische Schlüsse abzuleiten, zu deduzieren. Man hat ja darum die Mathematik gerade als eine deduktive Wissenschaft bezeichnet, und es ist unser Streben, ihr diesen Ehrennamen zu bewahren, wenn Sie auch nicht glauben dürfen, daß die Tätigkeit des Forschers sich nur mit den Deduktionen deckt. Er muß vielmehr ebensoviel konstruieren, erfinden wie deduzieren. Immerhin aber ist die Deduktion eine Zentralaufgabe der Mathematik, und mit ihr hängt die dritte Leistung zusammen, in der wir eine Hauptförderung der Mathematik erblicken müssen, nämlich die Auffindung neuer Beweismethoden und logischer Schlußweisen. Der Zweck dieser ist die Beherrschung analoger Übergänge von einem Tatsachenkomplex zu einem anderen durch eine gesicherte, möglichst einfache oder durch Gewöhnung uns vertraute logische Operation. Sie alle wissen schon aus Ihrer Schulzeit her, wie solche Schlüsse beschaffen sind. Ein klassisches Beispiel derselben haben wir in der analytischen Geometrie, welche den Beweis geometrischer Sätze auf die Rechnung zurückführt oder in der Differentialrechnung, und ich will Ihnen das Beispiel einer solchen Schlußweise aus der neueren Zeit anführen, indem ich mir erlaube, mit einer kleinen Anekdote zu beginnen. Man erzählt von einem unserer großen Mathematiker, daß er als Knabe seinen Vater auf einem Waldspaziergang fragte: „Gibt es wohl zwei Bäume im Wald, die gleich viel Blätter haben?“ Diese Frage ist klar, und man wird gerne zugeben, daß es im allgemeinen gleichgültig ist, welche zwei Bäume es gerade sind, für die dies zufällig zutrifft. Man wird sich auch nicht wundern, wenn die Frage den Vater wenig interessierte und er dem Jungen die Antwort schuldig blieb. Der Junge selbst war aber beharrlich und verkündigte nach einigem Besinnen: wenn es im Walde mehr Bäume gibt als die Zahl der Blätter auf irgendeinem Baume, dann müssen auch mindestens zwei Bäume gleich viel Blätter besitzen. Es ist dies dasselbe, wie wenn ich 10 Gegenstände in 5 Schiebladen verteilt habe und daraus folgere, daß mindestens in einer Schieblade zwei Gegenstände, d. h. mehr als ein Gegenstand sich befinde. Die Anwendung dieser Erkenntnis ermöglicht uns nun schon manche positive Aussage, in vielen Fällen die Ersetzung einer Vermutung durch eine sichere Tatsache, was doch der Zweck der Wissenschaft ist. Die Frage, ob etwa am Johannisberg zwei Bäume mit gleich viel Blättern stehen, bleibt zweifelhaft, sicherer wird das für die drei Danziger Kreise, und für Westpreußen können wir ruhig mit Ja antworten, während wir für ganz Deutschland sagen können, daß es immer ganze Gruppen von Bäumen gibt, die gleichviel Blätter tragen, wenn auch nur ein einziger die Maximalzahl tragen mag. In der Wissenschaft handelt es sich nur darum zu s e h e n, wo und in welcher Einkleidung der Schluß des Jungen Verwendung finden kann, und Dirichlet hat aus dieser alltäglichen Erfahrung und Erkenntnis eine bindende Schlußweise, ein Prinzip des Beweises gemacht, das z. B. dann angewendet wird, wenn man nachweisen will, daß zwei Zahlen aus einer Gruppe, die nur i. a. definiert ist, und wo an die Berechnung im einzelnen nicht gedacht werden kann, sich nur um einen beschränkten Betrag unterscheiden. Denn, wenn ich weiß, daß 11 Zahlen zwischen 10—20 liegen, so muß es unter den 11 mindestens 2 geben, die sich um weniger als 1 unterscheiden. Die Intervalle 10—11, . . . 19—20 stellen nämlich die 10 Schiebladen vor, auf welche die 11 Zahlen als Gegenstände zu verteilen sind.

Schon einmal habe ich heute abend gesagt, daß die Mathematik nichts anderes ist als gesunder Menschenverstand, und dieses Dirichletsche Prinzip ist ein Beleg dafür, wie in der Wissenschaft alltägliche Denkweisen zu allgemeinen Prinzipien in eine höhere, geistige Sphäre sozusagen erhoben werden, und Sie werden wenigstens mitfühlen können, was es heißt, die Wissenschaft durch neue Beweismethoden zu bereichern. Hiermit hängt aber noch etwas Weiteres zusammen. Der Fortschritt der Wissenschaft bringt es bekanntlich mit sich, daß Tatsachen, welche ehemals schwer verständlich waren, heute leicht verständlich sind. Nun, eine Tatsache verstehen heißt aber, sie in ihrem Zusammenhang mit anderen uns gewohnten Anschauungen zu erfassen, und wenn wir schwer verständliche Dinge leicht verständlich machen, so geschieht das eben durch die Auffindung neuer Beweismethoden, unter denen jene Zusammenhänge selbstverständlich erscheinen. Es kommt für die Entwicklung der Mathematik je länger um so mehr darauf an, die Beweise zu vereinfachen.

Eine Wissenschaft, die ihr 2½tausendjähriges Jubiläum feiern kann, wäre ferner auch unmöglich, wenn sie nicht die Erklärung und Beschreibung ihrer Begriffe in einer unzweideutigen Sprache ausdrücken und durch die Anwendung einer passenden Symbolik vereinfachen könnte. Diesem Zweck dient der ganze Formelapparat der Mathematik, dessen Schöpfung viel mehr Schwierigkeit gemacht hat und viel mehr Späne hinterlassen hat, als wir nur ahnen können.

Wir können jeden Fortschritt in eine dieser Klassen einordnen, ohne daß damit zugleich ein Rangunterschied ausgedrückt zu werden braucht, während eine große Leistung auch gleichzeitig in mehreren von denselben liegen kann, und es ist rückschauend, wo wir die Entwicklung der Dinge auseinander überblicken können, fast immer möglich, die Verdienste namhaft zu machen, die dem einzelnen Forscher gehören. Im übrigen ist es in der Mathematik wie in andern Wissenschaften, daß man eine Leistung häufig nicht sofort nach ihrer Wirkung auf die Gesamtentwicklung beurteilen kann. Auch in der Mathematik gibt es Zeitströmungen und Moden, und andererseits ist es der Anerkennung einer fruchtbaren Tat oft hinderlich, daß bei dem Umfang der Mathematik und der weitgehenden Spezialisierung zunächst oft nur ein ganz kleiner Kreis von Fachgenossen um Neuerungen und Fortschritte weiß und es eben lange dauert, bis sich diese Neuerungen durchgesetzt haben und Gemeingut geworden sind. Eine unmittelbare, fast selbstverständliche Anerkennung fand jedoch immer eine solche Leistung, welche eine lang gesuchte Lösung einer Frage enthielt, die den Lösungsmitteln der Wissenschaft oft jahre- oder jahrhundertelang getrotzt hat. Hierher gehört z. B. die schon von den Griechen gesuchte Quadratur des Kreises, wo aber die Lösung in negativem Sinn ausgefallen ist, indem man gezeigt hat, daß es niemals möglich ist, mit Zirkel und Lineal (als einzigen Konstruktionshilfsmitteln) ein Quadrat zu konstruieren, welches inhaltsgleich wäre mit einem gegebenen Kreis. Der erste Beweis dieser Tatsache durch LINDEMANN war eine Folgerung aus genialen Untersuchungen des Franzosen HERMITE.

Hiermit bin ich nun schon in die Würdigung einzelner Leistungen eingetreten, und ich will für jetzt diesen Gedanken nicht ausspinnen, um die Frage, was die verschiedenen Kulturnationen an Bleibendem zu dem Gesamtaufbau beigetragen haben, mehr systematisch anzufassen und wenigstens in großen Zügen zu beantworten.

So leierkastenmäßig allmählich auch die historischen Exkurse sind, welche mit den unvermeidlichen Griechen und Römern beginnen, so kann ich nur in jenem grauen Altertum anfangen, denn es ist einmal nicht zu leugnen: im jonischen Griechenland ist die Mathematik geboren, und in kaum zwei Jahrhunderten hat sie es zu einer Blüte gebracht, welche wir bloß staunend bewundern können. Den Charakter, welchen die Mathematik heute noch trägt, oder besser gesagt, welchen sie heute in einem Höhepunkt wieder trägt, hat sie unter einem Himmel gewonnen, welcher den Menschen alles gab, was sie zum Denken in ruhiger Beschaulichkeit und freier geistiger Entwicklung brauchten. Anfangs war die Mathematik ein Teil der Philosophie, und schon in jenen Anfängen findet man das Streben, die Sätze durch logische Deduktionen zu beweisen, wie wir das noch heute machen. Es ist bekannt, daß andererseits manche der philosophischen Systeme die straffe Beweisführung der Mathematik erstrebten. Unter den griechischen Mathematikern will ich nur zwei nennen, deren Größe von Späteren wohl je und je wieder erreicht, aber vielleicht niemals übertroffen worden ist: EUKLID und ARCHIMEDES. Sie repräsentieren in höchster Steigerung die beiden Typen des Gelehrtentums, wenn ich mich so ausdrücken darf, das systematische und das produktive Genie, wobei ja selbstverständlich die Systematik nicht ohne Produktion und die Produktion nicht ohne Systematik gedacht werden kann.

EUKLID ist es zuerst gelungen, jenes System der Geometrie aufzustellen, das er in seinem berühmten Buche „Die Elemente" veröffentlicht hat und welches fast zweitausend Jahre unübertroffen blieb. Man muß sich nur vorstellen, was das heißt, aus einer Fülle von Tatsachen und Sätzen diejenigen Behauptungen klar herauszuschälen, welche nur Erfahrungsresultate sind, unbeweisbar bleiben und allem Beweisen zugrunde gelegt werden müssen. Mehr noch müssen wir den sicheren Takt bestaunen, mit dem EUKLID die richtigen logischen Schlüsse, d. h. die typischen mathematischen Beweismethoden ausfindig macht und auch immer alles beweist, was wirklich eines Beweises bedarf, denn jeder von Ihnen weiß, wie geneigt wir sind, der Anschauung eine Gewißheit und Gültigkeit zuzuschreiben, welche sie bewiesenermaßen eben nicht besitzt.

Um Ihnen einen ungefähren Begriff von der überragenden Bedeutung von ARCHIMEDES zu geben, will ich nur einige seiner Leistungen nennen. Zunächst auf dem Gebiete der angewandten Mathematik hat er die Hebelgesetze und Schwerpunktssätze aufgestellt und damit die Grundlagen der gesamten Mechanik geschaffen, er hat den Begriff des spezifischen Gewichtes erfunden und die Lehre vom hydrodynamischen Auftrieb entwickelt. In der reinen Mathematik rühren von ihm die Kreisberechnung, Kugel- und Kegelberechnung her, und zwar hat er diese Aufgabe nach Prinzipien gelöst, wie wir sie heutzutage in der Integralrechnung zur Bestimmung von Raum- und Flächeninhalten fast genau so wieder anwenden. Die Leistungen der Griechen, von EUKLID, ARCHIMEDES und, wie man hinzufügen muß, von APOLLONIUS von Perga, der u. a. acht Bücher über die Parabel, Ellipse und Hyperbel geschrieben hat, von welchen uns sieben erhalten sind, liegen in erster Linie auf dem Gebiete der Geometrie und stellen nach Inhalt und Form schlechthin Meisterwerke dar. Es ist gar nicht auszudenken, was aus der Mathematik geworden wäre, wenn ihre Entwickelung von dem damals erreichten Stande in stetiger Weise fortgesetzt worden wäre. Allein, wie uns an dieser Stelle der größte Kenner des griechischen Altertums, Herr VON WILAMOWITZ-MÖLLENDORFF, einmal auseinandergesetzt hat, die hohe und strahlende Kultur mußte untergehen, weil die Talente ausstarben, und ich glaube, wohl auch, weil im Laufe der Zeit die Charaktereigenschaften und die staatsbildende Kraft des römischen Volkes höher geworden waren als die der späten Griechen. Es wäre auch die Verdrängung der griechischen Vorherrschaft durch Rom weniger tragisch, wenn die Römer das geistige Erbe Griechenlands übernommen und gemehrt hätten. Das aber kann man in der Mathematik von den Römern wirklich nicht sagen. Ein größerer Abfall als der von der griechischen zur römischen Mathematik ist überhaupt kaum denkbar. Die Römer haben die griechische Mathematik nicht einmal verstanden, geschweige denn, daß es ihnen gelungen wäre, auch nur einen nennenswerten Beitrag dazu zu liefern. Wir kennen z. B. die Formeln, nach denen die römischen Agrimensoren oder Feldmesser ihre Grundstücksvermessungen auswerteten. Diese Formeln sind einfach falsch und ergeben nur in speziellen Fällen richtige, bzw. angenähert richtige Resultate. Ich halte es für keinen Zufall, daß die Römer auch in Kunst und Poesie hinter den Griechen stehen. Die Mathematik setzt eben eine frische und blühende Phantasie voraus, als Grundlage freier Schöpfungen, und die Römer waren vielmehr ein nüchternes Volk.

Da nun die westeuropäischen Völker ihren Kulturkreis unmittelbar von den Römern übernommen haben, so wären bei dem beschränkten Stande des

Buchgewerbes und der den Griechen eigenen zurückhaltenden Publikation ihre mathematischen Reichtümer wohl noch lange vergraben und unwirksam geblieben, wenn nicht auf ganz anderen Wegen die Quellen nach Europa geleitet worden wären. Nicht bloß die Märchenwelt des Ostens, sondern auch die Früchte des exakten Denkens sind uns unter dem Zeichen des Halbmondes von den Arabern überkommen. Die Araber haben aber nicht allein aus ihrer Berührung mit den Griechen Nutzen gezogen und uns manchen Schatz der alexandrinischen Bibliothek vor dem gänzlichen Untergang gerettet, über sie haben wir auch Kenntnis gewonnen von dem, was inzwischen die Inder auf dem Gebiete der Arithmetik, d. h. des gewöhnlichen Rechnens und der Algebra, geleistet hatten. Diese Leistungen bildeten eine wertvolle Ergänzung zu denen der Griechen, welche nach den vorhandenen Zeugnissen in der Arithmetik nicht jene Vollkommenheit erreicht hatten wie in der Geometrie. Als man im Abendlande, es war in Italien, wieder die Muße fand für die mathematische Spekulation, da konzentrierte sich das Interesse zunächst auf die bürgerlichen und kaufmännischen Rechnungen, deren Bedeutung für den Fortschritt der Kultur ja selbstverständlich ist. Man sieht es unserem wundervollen Rechenapparat gar nicht an, wie viele Zeit und Mühe seine Erfindung gekostet hat, es war dazu vor allem notwendig die Erfindung der Null, die wir den Indern verdanken, und die Durchführung des Positionssystems in der Schreibweise unserer Ziffern. Die steigende Vervollkommnung verdanken wir Italienern und Deutschen. Nur ganz langsam und schrittweise dringt der Begriff der positiven und negativen Zahlen durch, und ersteht die heutige Schulalgebra mit ihrem Formelapparat. Die Geometrie macht auch einigen Fortschritt in der Zeit des Mittelalters, doch steht sie im wesentlichen im Bann der von den Arabern übernommenen, griechischen Ideen.

Der Primat in den mathematischen Wissenschaften hat im Mittelalter mehrfach gewechselt zwischen Italien, Paris — unter einem dort lebenden deutschen Dominikanermönch —, England, wiederum Frankreich, Italien und Deutschland[1]). In Frankreich stockte die Entwickelung verheißungsvoller Ansätze, wie wir das später in Deutschland zur Zeit des dreißigjährigen Krieges erleben, durch die Verheerungen des englisch-französischen Erbfolgekrieges 1339—1453, bei dem auch England, wie heute, der Störenfried gewesen war, und durch die weite Kreise in Mitleidenschaft ziehenden Kirchenstreitigkeiten. In England selbst haben die grausamen und wahrhaft barbarisch geführten Kriege zwischen der weißen und der roten Rose ebenso verheerend und den Gang der Wissenschaft hemmend gewirkt. So fehlte einem ganzen Jahrhundert der internationale Wettbewerb zum Schaden der Wissenschaft und zum Schaden mancher deutscher Gelehrten, die ihre Zeit mit Astrologie und Deutungsversuchen der Offenbarung Johannis zubrachten und

[1]) Man vergleiche hierüber insbesondere M. Cantor, Vorles. über Geschichte der Mathematik, Band 2, 2. Aufl., Leipzig 1900.

bei denen man das Gefühl hat, daß eine Schraube bei ihnen los war, weil sie im engen Kreis verkamen. Dagegen bestand im 15. und 16. Jahrhundert ein reger Verkehr zwischen den ebenbürtigen deutschen und italienischen Mathematikern, und als die exakte Physik und Mechanik in dem großen Verfechter des kopernikanischen Weltsystems, GALILEI, einen Höhepunkt erreichte, da wurden seine Leistungen diesseits der Alpen voller Bewunderung aufgenommen.

Als es für die Weiterbildung der Mathematik von entscheidender Bedeutung geworden war, daß man die griechischen Schriftsteller wieder in ihren Originalen vollständiger kennen lernte, da war es vor allen ein anerkannter deutscher Gelehrter, der vielgereiste und weltmännische, leider zu früh verstorbene REGIOMONTAN, welcher einen großzügigen Plan für eine gute Edition der griechischen Mathematiker aufstellte und der Verwirklichung entgegenführte. Es war damit dem deutschen Wesen mit seiner Kraft zur Einfühlung in große Ideen und seinem unermüdlichen Fleiß vergönnt, der Wissenschaft einen wichtigen, unentbehrlichen Dienst zu tun und den Gang der Entwickelung zu bestimmen.

Wenn man nämlich heute den Deutschen — sicher ungerecht und verlogen — vorwirft, daß sie nur fremde Ideen auszuführen, nichts Eigenes zu produzieren vermögen, so möchte ich dem hinzufügen, daß zur richtigen Aufnahme und Verbindung fremder Ideen nur fähig ist, wer diese bereits selbständig gefunden oder in sich wenigstens verarbeitet hat.

Das Studium der alten Bücher, insbesondere der Kegelschnittslehre verschaffte dem Zeitgenossen GALILEIS, dem berühmten Astronomen J. KEPLER, die Grundlagen zu der Entdeckung der Gesetze, nach welchen die Planeten um die Sonne herumlaufen. Man kann den Namen dieses Mannes, bei dem inneres Verdienst und äußere Lebensbedingungen in einem so erbarmungswürdigen Kontrast standen, nicht ohne innere Bewegung aussprechen. Sein Ruhm überstrahlt weit denjenigen aller seiner Vorgänger, nicht nur in der Astronomie, sondern auch in der Mathematik. Die Astronomie befand sich zu seiner Zeit auf einem kritischen Punkt, denn sie drohte in einem Wust von Tatsachen zu ersticken, und es ist ein fast einzig dastehender Fall, daß es KEPLER gelang, aus diesen Tatsachen, insbesondere aus dem vortrefflichen Beobachtungsmaterial TYCHO DE BRAHES, die richtigen Gesetze als den Zusammenhang aller Einzelbeobachtungen herauszulesen. Er wurde damit geradezu der Schöpfer der neuen Astronomie. Zu dieser Großtat gehörte eine Divination wie sie Gott nur wenigen Menschen beschert. Aber KEPLER war nicht nur ein bahnbrechender Astronom, er war, was dazu unumgängliche Voraussetzung ist, auch ein großer Mathematiker und ist als solcher einer der Vorläufer der Erfindung der Integralrechnung, denn er war der erste, der ohne die Kenntnis der verloren gegangenen archimedischen Schriften, wieder infinitesimale Methoden zur Berechnung von Rauminhalten anwandte. Leider blieb KEPLER, der selbst noch bis in die Mitte des Dreißigjährigen

Krieges, bis 1630, lebte, für lange Jahrzehnte der letzte deutsche Mathematiker von Ruf, während inzwischen Frankreich der Welt eine ganze Reihe großer Mathematiker schenkte. Seit dem 16. Jahrhundert, wo VIETA den Weltruf der französischen Mathematik begründete, und seit CARTESIUS und FERMAT ist der „esprit", den man der Literatur der Franzosen nachrühmt, auch ein Charakteristikum der französischen Mathematiker. Der Erfindungsreichtum, die Eleganz der Darstellung und Sprache und die Leichtigkeit der Auffassung, sowie des Übergangs von einem Thema zum andern verraten überall den Franzosen, Vorzüge, mit denen sich gerade bei den großen Mathematikern meist ein praktischer Sinn für die Anwendungen verbindet. Ja es ist wohl kein Zufall, wenn einige der französischen Mathematiker es zu großen Verwaltungsstellen und Ministerposten gebracht haben, in früheren Zeiten sogar mit besserem Erfolg als in den heutigen Tagen: zu unserem Glück. Wenn sich mit den Vorzügen des Franzosen noch ein philosophischer Sinn und Tiefe verbindet, so kommen auch stets Leistungen ersten Ranges zustande. Zu einer solchen müssen wir die Erfindung rechnen, welche die neue Mathematik einleitet, nämlich die der analytischen Geometrie durch CARTESIUS (1637). Sie stellt ein allgemeines Prinzip dar zur rechnerischen Behandlung geometrischer Verhältnisse und Figuren, indem man z. B. die Punkte in einer Ebene durch ihre Abstände von zwei festen zueinander senkrechten Geraden gibt. Wie das immer der Weg des Fortschritts ist, wurden die Mathematiker bei der Behandlung geometrischer Probleme nach dieser neuen Methode auf neue Probleme geführt, die in der Erfindung der Differential- und Integralrechnung durch NEWTON und LEIBNIZ gipfelten. Die Erfindung dieser Rechnungsmethoden ist eine der größten und erfolgreichsten in der ganzen Geschichte der Mathematik, und es verlohnt sich wohl, daß ich Ihnen das Prinzip dieser neuen Rechnung an einem Beispiel erläutere, das ich den Anwendungen auf die Physik entnehme.

Wir wissen z. B., oder genauer gesagt: wir nehmen es an, daß zwei Körper eine Kraft aufeinander ausüben und sich anziehen. Die Sonne zieht die Planeten und diese ziehen die Sonne an, ein Planet zieht jeden andern Planeten, ja jeder Stern zieht jeden andern Stern an, unsere Erde zieht einen Stein und überhaupt jeder Körper jeden andern Körper an, und zwar wechselt diese Kraft nach der Größe und Beschaffenheit und nach der Entfernung der anziehenden Körper. Nun ist es aber offenbar ganz unmöglich, ein Gesetz anzugeben, welches direkt die Kraft ergäbe, mit dem zwei irgendwie gestaltete Körper sich anziehen, und doch ist diese Kenntnis die Voraussetzung für das Verständnis aller Lagenbeziehungen und Bewegungen im Weltraum, und es gäbe Mechanik und Astronomie auf ihrem heutigen Stande niemals ohne einen Zugang zu der Lösung dieses Problems. Nun, diese Lösung geschieht mit Hilfe der Integralrechnung, und sie besteht darin, daß man von einem Gesetz der Kraftwirkung von Massenpunkt zu Massenpunkt oder zwischen unendlich kleinen Teilen ausgeht und die Kraftwirkung zwischen zwei endlich großen Körpern als die Summe aller der unbegrenzt vielen von Punkt zu Punkt wirkenden, unendlich kleinen Kräfte ansieht. So ist die Frage durch die Differential- und Integralrechnung praktisch lösbar und gelöst.

Auch bei komplizierteren Vorgängen, die sich im Lauf der Zeit abspielen, schließen wir von den Wirkungen zwischen unendlich kleinen Massenelementen in unendlich kurzer Zeit durch eine Summierung aller Einzelwirkungen auf die Kräfte und Vorgänge in endlichen Massen und in endlicher Zeit. Der Vorzug dieser Betrachtungsweise ist ein doppelter: erstens ist es eben viel leichter, Gesetze zu vermuten und zu formulieren, welche sich auf Massenpunkte beziehen und nur unendlich kleine Zeiträume zu betrachten, während deren immer störende Nebenvorgänge vernachlässigt werden können, und zweitens lassen sich viele dem Anschein nach ganz verschiedene Vorgänge, wie die Bewegung des Wassers, Strömung der Wärme und Elektrizität, ganz analog behandeln.

Ich sage nicht zu viel, wenn ich behaupte, daß die moderne exakte Naturwissenschaft nur nach der Erfindung der Differential- und Integralrechnung möglich war. Ja, es ist wohl bekannt, daß die Griechen weit von der modernen Naturanschauung getrennt sind, weil sie das Experiment in unserem heutigen Sinn nicht kannten, und es scheint mir, daß dieser Mangel mit dem geringeren Stand der Arithmetik und der Unkenntnis der Analysis aufs engste zusammenhängt.

Diese Andeutungen können Ihnen eine leise Ahnung geben von der Bedeutung der Differential- und Integralrechnung und ihrer allmählichen Weiterbildung für die Naturwissenschaften, und Sie werden das Gefühl teilen, das jeden deutschen Mathematiker überkommt bei dem Gedanken, daß ein Deutscher, der große Philosoph G. W. Leibniz mit dem größten englischen Naturforscher J. Newton sich in den Ruhm dieser Erfindung teilt. Wie es oft zu geschehen pflegt, wenn die Zeit für eine Erfindung reif ist, so ist auch die Erfindung der Differentialrechnung eben von zwei an verschiedenen Orten wohnenden, verschiedenen Männern gemacht worden, und die Menschen müßten edler und selbstloser sein, als sie es sind, wenn nicht die Frage nach der Priorität die Gemüter noch mächtig bewegt hätte. In diesem Fall ist der Streit durch das Eingreifen der Leute um Newton — nicht durch Newton selbst — zu einem häßlichen und beklagenswerten Schauspiel geworden, in dem auch Leibniz leider nicht ganz untadelhaft sich hielt, und der Streit hat Leibniz' letzte Jahre unsäglich verbittert. Aus genauen, literarischen Forschungen wissen wir heute sicher, daß erstens Newton früher im Besitze seines Kalkuls war als Leibniz. Aber Newton hat seinen Besitz peinlich gehütet, und Leibniz könnte, wenn überhaupt, nur Andeutungen davon bekommen haben. Ferner aber — und das ist doch das Entscheidende — sind Leibniz' Bezeichnungen und Formalismen zum Allgemeingut geworden, nicht die Newtons, und haben die Methoden beider charakteristische Unterschiede, welche sich bis in unsere Zeiten als wesentlich gehalten haben, endlich ging es auch in diesem Fall wie fast immer in ähnlichen Fällen: die Erfindung war der Schlußstein einer langen, mühsamen Vorgeschichte, ohne welche sie überhaupt nicht zu denken wäre, und in dieser Vorgeschichte spielen Italiener, Deutsche, wie KEPLER, Franzosen, wie PASCAL und FERMAT, und Engländer, wie J. BARROW, der Lehrer NEWTONS, gleich wichtige Rollen. Wenn man NEWTON und LEIBNIZ vergleicht, so erscheint bei dem gemeinsamen Trieb nach philosophischer Durchdringung der Dinge und dem Streben, in verschiedenartigen Vorgängen das verbindende Prinzip aufzufinden, NEWTON als der nüchternere, LEIBNIZ als der fantastischere, NEWTON als der ruhige Systematiker p. e., während LEIBNIZ mit den Erfindern die Unruhe und Geschäftigkeit teilt. Von NEWTON haben wir neben seiner großartigen Grundlegung der Mechanik und dem Gravitationsgesetz einen Strauß einzelner Theorien als Beantwortung einzelner Fragen, während LEIBNIZ immer auf die Auffindung eines universalen Kalkuls ausging und Anregungen gegeben hat, welche mit der Aufstellung der Determinantentheorie und der Algebra der Logik erst in neuerer Zeit verstanden und zur Entwickelung gelangt sind. Unter ihren Zeitgenossen reicht nur der Holländer CHR. HUYGENS an diese Männer selbst heran, aber während NEWTON in seinem eigenen Lande für lange Zeit keinen namhafteren und führenden Nachfolger gefunden hat, war LEIBNIZ hierin der glücklichere. Hatte er schon das Glück, unter seinen Mitarbeitern die beiden großen Schweizer JAKOB und JOHANN BERNOULLI zu haben, so erstand ihm erst recht in deren Schüler LEONHARD EULER ein Nachfolger, der alle Ansätze zur reichsten Entwickelung bringen sollte. EULER war wie die BERNOULLI in Basel geboren, also Schweizer, er hat aber den entscheidenden Teil seines Lebens in Petersburg, dann in Berlin als Mitglied der Friederizianischen Akademie und die letzten zwei Jahrzehnte wieder in Petersburg verlebt, und wir dürfen ihn unbeschadet seiner Schweizer Herkunft wenigstens dem deutschen Kulturkreis zurechnen. Unter den Mathematikern aller Zeiten war EULER wohl der produktivste. Nachdem man früher immer vor der Aufgabe zurückgeschreckt war, seine Werke zu sammeln, so ist diese Absicht wenige Jahre vor dem Kriege ihrer Verwirklichung nähergerückt, und bis heute sind zehn dicke Quartbände herausgekommen. Nach einem für die Zwecke der Herausgabe sorgfältig angelegten Index schätzt man die gesamte Produktion EULERS auf 43 Quartbände mit 21 000 Seiten, und das dürfte nach dem unveröffentlichten Material, welches die Petersburger Akademie noch in Aussicht gestellt hatte, immer noch nicht alles sein. Wenn man nun auch zugeben muß, daß die Darstellung an einer heute ungewohnten Breite leidet, und wenn auch mit einer derartigen Lust an der Schöpfung eine jeder geschärften Kritik genügende Reinheit der Begriffe und Schlußweisen nur in den seltensten Fällen vereint ist und insbesondere EULERS Darstellung mangelt, so kann man EULERS erstaunliches Lebenswerk doch als die denkbar großartigste Ausführung der von NEWTON und LEIBNIZ herrührenden Ideen in der Differentialund Integralrechnung und deren Anwendungen bezeichnen. Selbst ein LAGRANGE spricht von ihm als „Ce grand Géomètre, à qui toutes les parties des Mathématiques sont si redevables . . .“, und GAUSS empfiehlt noch 1849 das Studium seiner Arbeiten als „die beste und durch nichts zu ersetzende Schule für die verschiedenen mathematischen Gebiete . . . .“ In der Tat ist EULER, der noch Analysis und Geometrie in ihrem damaligen Stande gleichmäßig beherrschte, der Lehrer für alle folgenden Generationen geworden. Indem er in der Geometrie und Analysis, in der Mechanik, theoretischen Astronomie, Hydromechanik, Elastizitätstheorie den neuen Kalkul zur Anwendung brachte, hat er auf allen mathematischen Gebieten alte Aufgaben gelöst, neue Sätze in schier überwältigender Fülle gefunden und hat sich nicht bloß als abstrakter Denker hervorgetan, sondern er hat auch die besondere, die Erfahrung meisternde, begriffsbildende Kraft besessen, welche den bedeutendsten theoretischen Physikern eigen ist und die man als eine künstlerische Phantasie ansprechen muß.

Seit EULER hat die Führung in der reinen Mathematik nur zwischen Deutschland und Frankreich gewechselt, denn wenn auch in Italien und in England je und je wieder hervorragende und fruchtbare mathematische Talente hervorgetreten sind, so haben sie es doch nie zur Führerschaft gebracht neben den Franzosen und Deutschen. Insbesondere entwickelte sich das angeborene mathematische Talent der Franzosen in der breitesten Weise, so daß zu allen Zeiten Paris ein Sammelpunkt tiefster Forschung war, nach dem die Schüler aus der ganzen Welt hinstrebten. Die Franzosen haben es auch nicht verschmäht und nicht versäumt, die gesicherten Resultate in glänzend geschriebenen und in alle Kultursprachen übersetzten Lehrbüchern zugänglich zu machen. Es ist mir unmöglich, einzelnes namhaft zu machen, und nur um Ihnen eine Ahnung zu verschaffen, will ich aus der Zahl unsterblicher Forscher einige nennen wie CLAIRAUT, D'ALEMBERT, LAGRANGE, LAPLACE, MONGE, FOURIER, POISSON, CAUCHY, HERMITE und POINCARÉ (nicht der Präsident unseligen Andenkens, sondern sein Vetter). Unter diesen allen ist vielleicht CAUCHY der größte, er reicht in seiner Produktivität an EULER heran und übertrifft diesen noch als Neuerer und in kritischer Hinsicht.

Wir können uns in Deutschland in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts nicht einer gleich großen Anzahl von Mathematikern rühmen, aber der größte Mathematiker dieser Zeit und vielleicht aller Zeiten seit ARCHIMEDES gehört uns: C. F. GAUSS, der auch in weiteren Kreisen als Erfinder der elektrischen Telegraphie bekannte Göttinger Professor. Haben wir EULER als Vollender kennen gelernt, so vereinigt GAUSS schöpferisches Genie mit systematischer Kraft und eindringendster, kritischer Schärfe. Man kann direkt sagen, daß mit der GAUSSschen Doktordissertation die neueste kritische Periode der Mathematik einsetzt, so daß GAUSS schon dadurch eine besondere Stellung gegenüber allen Vorgängern einnimmt. Er ist aber auch der Begründer der neuen Zahlentheorie, der Flächentheorie und mit CAUCHY zusammen der der-

Funktionentheorie. Als Begründer der neuen Flächentheorie hat Gauss die Geometrie wie kein anderer gefördert. Schon der Eintritt von Gauss in die wissenschaftliche Laufbahn war das plötzliche Auftauchen eines neuen Sterns. Noch als Neunzehnjähriger erfand er die Prinzipien für die elementare Konstruktion regelmäßiger Vielecke, und als im Januar 1801 zu Beginn des 19. Jahrhunderts der italienische Astronom Piazzi den ersten der kleinen Planeten, Ceres, entdeckte, da wäre dieser nach einer kurzen Sichtbarkeit sicher für lange den Blicken der Astronomen wieder entschwunden, wenn nicht Gauss die Aufgabe gelöst hätte, aus drei geeigneten Beobachtungen eines Planeten dessen Bahn für lange Zeiten voraus zu berechnen, eine Aufgabe, welche bis dahin unlösbar schien. Überhaupt hat Gauss die Astronomie, die Geodäsie und die Theorie des Erdmagnetismus durch theoretische und praktische Arbeiten mehr als irgendein anderer gefördert, und die für die gesamten Naturwissenschaften so grundlegenden exakten Meßmethoden beruhen hauptsächlich auf seinen Vorarbeiten. Von ihm sagt Treitschke im zweiten Band seiner deutschen Geschichte, wo er von den geistigen Bewegungen im Anfang des 19. Jahrhunderts spricht: „und in Göttingen lebte schon, das Lehren verachtend, ganz in die letzten Probleme der reinen Theorie versunken, der Mathematiker Gauss, zu dessen Größe selbst Humboldt mit scheuer Ehrfurcht aufblickte, einer jener zeitlosen Denker, deren Wirksamkeit erst in dem Leben der kommenden Geschlechter ganz empfunden wird. Er wußte, die Mathematik sei die Königin der Wissenschaften und seine Zahlentheorie die Königin der Mathematik.“

Ja, wenn ein Historiker imstande wäre, den geheimen Anfängen unserer heutigen Zeit, mit ihrer hohen Technik und dem Heranwachsen eines millionenreichen Arbeiterheeres, dessen Organisation, Leitung und Aufzucht im Mittelpunkt unserer Staatsprobleme steht, wirklich nachzuspüren, so würde ihn sein Weg gar häufig und nachdrücklich in die stille Arbeitsstube von Gauss führen, und er würde erkennen, daß nur Kurzsichtigkeit von der Mathematik als von einer weltfremden Wissenschaft reden kann. Was im Stillen gewirkt wurde, tritt uns in den Lebensäußerungen eines ganzen Volkes mächtig entgegen, und man möchte auf sie das bekannte Wort anwenden, das der Geist über sich zu Faust spricht:

So schaff' ich am sausenden Webstuhl der Zeit
Und wirke der Gottheit lebendiges Kleid.

Obgleich Gauss jeder Lehrtätigkeit abhold war und keiner Schule vorstand, war seine Wirkung doch unmittelbar. Wie es in der Geschichte der geistigen Bewegung, z. B. in der Poesie auch sonst zu beobachten ist, daß nach einer kleineren oder größeren Ruhepause die Talente nicht einzeln, sondern gleich in Gruppen auftreten, indem die Intelligenz durch das wiedergeweckte Interesse angezogen wird, so setzte mit Gauss eine Blüte der deutschen Mathematik ein, welche noch unvermindert bis heute währt und durch eine Reihe großer Namen repräsentiert wird, unter denen ich nur

Jacobi, Steiner, Dirichlet, B. Riemann, Weierstrass, Minkowski, Hilbert (um nur einen aus der Zahl der Lebenden aufzuzählen), nenne, weil jeder dieser Namen, wenn ich den abgegriffenen Ausdruck gebrauchen darf, ein ganzes Programm bedeutet. Insbesondere sind von B. Riemann mächtige Impulse auf die Mathematik, und zwar auf die Analysis und Geometrie aller Nationen ausgegangen; er erscheint immer größer, je weiter wir uns von ihm entfernen, und die Resultate, welche er mit einem wahren Seherblick voraus erkannte, sind heute, ein halbes Jahrhundert nach seinem frühen Tod, noch nicht alle bewiesen trotz der angestrengtesten Forschung vieler Mathematiker. Über immer wiederkehrende Perioden oberflächlicher und formaler Rechnereien hat die deutsche Mathematik seit Gauss und Dirichlet immer wieder den Weg gefunden zu einer direkten Behandlung der Probleme, wobei der Zusammenhang der einzelnen Erscheinungen nur durch die Kraft der reinen inneren Anschauung, ohne das fremde Hilfsmittel der Rechnung, erkannt wird. Die Fülle der Aufgaben und die für die meisten Menschen notwendige Selbstbeschränkung hat bei uns eine oft beklagte Trennung der reinen Mathematik von der theoretischen Physik und der angewandten Mathematik zur Folge gehabt, aber das war in anderen Ländern auch nicht anders, und man muß der deutschen Mathematik andererseits Vielseitigkeit (denn Analysis und Geometrie stehen auf größter Höhe), geschärftes Urteil, durch reife Kritik geklärte Begriffe, Zuverlässigkeit und Großzügigkeit der Probleme und Behandlung nachrühmen. Leider ist der deutsche Stil nicht immer auf der Höhe der Probleme, und die deutschen Mathematiker können hierin von Gauss, aber auch von den eleganten Franzosen noch vieles lernen.

Etwas überraschend wirkt es dagegen, wenn der französische Mathematiker Picard in einem sehr unerfreulichen Pamphlet sich sogar über den Stil von Gauss beschwert und dem Deutschen komplizierte Wortverbindungen vorwirft, welche das Verständnis erschweren sollen. Dieser Vorwurf könnte wenigstens nicht den Mathematiker allein treffen. Nebenbei gesagt: es mag der nationalen Würdigung Eintrag getan haben, daß die deutschen Gelehrten ihre Abhandlungen so lange lateinisch oder französisch geschrieben haben.

Unter den bisher noch nicht genannten Ländern hat Norwegen im 19. Jahrhundert zwei selbständige, führende Männer, N. H. Abel und Sophus Lie hervorgebracht. Hier wie auch in Italien, Rußland, Ungarn, Schweden und den Vereinigten Staaten von Nordamerika vollzog sich die Entwickelung im Anschluß oder wenigstens in Konkurrenz mit Frankreich oder Deutschland oder beiden. Die Italiener haben während der letzten Jahrzehnte durch zähen Fleiß viel auf dem Gebiet der algebraischen Geometrie geleistet, ohne daß führende Mathematiker ersten Ranges unter ihnen könnten aufgezählt werden. Man hat diese Erscheinung öfter als Beleg für die materialistische Geschichtsauffassung, nach der der Fortschritt von den Massen getragen wird, hinstellen wollen, aber das wäre vielleicht doch voreilig, denn eine ganz ähnliche Erscheinung tritt uns in der Zeit vor der Erfindung der Differential- und Integralrechnung entgegen. Damals ist von Deutschen, Italienern, Franzosen (wie PASCAL) und Engländern wirklich tüchtige Arbeit geleistet worden, aus der wir bis heutigentags noch manches schöne Resultat bewahren, aber die Bahn war unfrei und die Arbeiten waren sofort überholt und veraltet, als NEWTON und LEIBNIZ mit neuen Anschauungen kamen. Sie sammelten und vereinfachten das Vorhandene, führten zu neuen Problemen und gewährten die Mittel für deren Lösung.

Unabhängig vom Kontinent führte England, seit den Tagen und unter der Last des großen Namens NEWTON, seine gesonderte Existenz, und diese Selbstgenügsamkeit hat sich gerächt, denn auf dem Gebiet der reinen Mathematik haben die Engländer mit Vorliebe sich in formale Rechnereien verbohrt und England hat trotz einzelner ganz ausgezeichneter Vertreter auch nicht entfernt die Höhe von Deutschland und Frankreich erreicht, so daß kein nachhaltiger Einfluß von England mehr ausgegangen ist. Vielleicht ist die Ursache aber auch eine eigentümliche, sinnliche, mit dem Faßbaren sich beruhigende Begabung, die die Engländer zur experimentellen und theoretischen Physik und zur theoretischen Astronomie geführt hat, wo sie Unübertroffenes geleistet haben, denn FARADAY, Lord KELVIN, MAXWELL, Lord RAYLEIGH, G. H. DARWIN haben wir nur R. MEYER, HELMHOLTZ, HERTZ als gleichwertig gegenüberzustellen, wenn auch die heutige Physik ohne F. NEUMANN, G. KIRCHHOFF, CLAUSIUS und BOLTZMANN nicht gedacht werden kann.

Die deutsche Art, in großen Umrissen zu denken, und das Suchen nach den Dingen hinter allen Erscheinungen von vielen deutschen Naturforschern, wie auch bei LEIBNIZ, war lebendig in dem genialen Entdecker des Wärmeäquivalentes und des Prinzips der Erhaltung der Energie: J. R. MAYER und es ist vielleicht auch noch heute die Ursache einer langsameren, verschlungenen Entwickelung der theoretischen Physik in Deutschland.

Man kann wohl überhaupt die Frage nicht so stellen: „Welches Volk hat am meisten in der Mathematik geleistet“, denn das hat keinen wohldefinierten Sinn. Oft ist ein Gedanke hier geboren und dort zur Reife gelangt, und wer will sagen, ob die Anregung oder die Ausführung das Wichtigste ist, da beide für sich nichts sind. Die Antwort wird auch verschieden ausfallen, je nach persönlicher Anlage, Geschmack und Übersicht, die der Urteiler besitzt und, bewußt oder unbewußt, beeinflußt von der Sympathie für dieses oder jenes Volk, wie ein bekannter Vorgang aus jüngster Zeit so schön zeigt.

Wir Deutsche nehmen es als selbstverständlich, daß wir das Verdienst da schätzen, wo es ist, und wir neigen eher zur Überschätzung fremden Talentes, wie z. B. gerade der vielseitige POINCARÉ in Deutschland gewiß noch überschätzt wurde, da er in vielem deutsche Forscher nicht übertraf, vielleicht nicht einmal erreichte. Bei aller Objektivität kann man Deutschlands Verdienste um die reine Mathematik gar nicht hoch genug schätzen, niemand kann leugnen, daß die Führerschaft in den einzelnen Disziplinen höchstens zwischen Deutschland und Frankreich abgewechselt hat. Und der Qualität und Bedeutung der deutschen Forschung entspricht ihre innere Organisation[1]) und Ausbreitung. In keinem Lande der Welt erscheinen gleichviel mathematische, stets überfüllte Zeitschriften und werden auch nur annähernd so viele mathematische Bücher gedruckt wie bei uns. Und wer in die Werkstätten deutscher Geistesarbeit hineingesehen hat, der weiß, daß die Arbeit nicht still steht und mancher Klotz seiner Bearbeitung harrt. Auf uns warten Probleme und Aufgaben in Menge, und wir vertrauen darauf, daß dieser Krieg uns neu den siegreichen Frieden zur Muße geistiger Arbeit verschafft, weil wir berufen sind, der Welt noch aus unserer Fülle mitzuteilen.

Der Wert eines Volkes liegt in seinem g e i s t i g e n Besitz, und aus unsichtbaren, geistigen Quellen wird auch wieder unser materielles Wohl gefördert und strömt der Technik zur Beherrschung der Natur immer neue unentbehrliche Kraft zu. Es ist der Stolz des selbstlosen Forschers, daß zu diesen Quellen auch die Mathematik gehört. Als internationale Wissenschaft durchzieht sie wie ein geistiges Band Zeiten und Nationen, möge sie mit dazu beitragen, die allgemein menschlichen Beziehungen zwischen den Völkern wieder aufzurichten, wenn eine gerechte Würdigung des wahren Verdienstes wieder einsetzt, und möge sie in unserem neuerkämpften, erstarkten Reich das Ansehen behalten, welches zu den Fundamenten des alten gehörte, zum Wohle des Vaterlandes und zur Ehre der Menschheit.

---

[1]) Erinnert sei nur an die von F. Klein geleitete Herausgabe der unschätzbaren mathematischen Encyklopädie.