Beilage

zu den

Tafeln für sämmtliche trigonometrische Functionen
der cyklischen und hyperbolischen Sektoren

von

Professor **J. F. W. Gronau.**

Danzig, 1863.

Der Nutzen der cyklisch-trigonometrischen Tafeln ist bekannt und erstreckt sich nicht blos auf die Trigonometrie. Zum Behuf der leichtern Auflösung des reducibeln Falls der kubischen Gleichungen habe ich in den Schriften der Naturforschenden Gesellschaft zu Danzig für das Jahr 1862 hyperbolisch-trigonometrische Tafeln herausgegeben, welche ausser den hyperbolischen Sektoren ($z = Area = Ar.$) nur noch deren Sinus ($Sin\, z$) und Cosinus ($Cos\, z$) enthalten durften. Auch sie können zu andern Zwecken gebraucht werden, namentlich zur leichtern Berechnung gewisser Integrale. Aber selbst wenn diese Tafeln auch noch die hyperbolischen Tangenten (Tg) in sich aufgenommen hätten, so würden sie zwar mehr leisten können als bisher, aber immer wären sie noch ebenso einseitig geblieben, wie die alten cyklischen Tafeln es sind. Sollte allen zeitgemässen Anforderungen entsprochen werden, so musste eine vollständige Verschmelzung beider Tafeln, der cyklischen und der hyperbolischen vollzogen werden, und das ist in den vorliegenden neuen Tafeln geschehen. In dieser naturgemässen Verschmelzung leisten sie mehr, als die alten cyklischen und meine früheren, vervollständigt gedachten hyperbolischen Tafeln zusammengenommen.

Zwar befinden sich schon in der Vorrede zu den neuen Tafeln einige Beispiele in Bezug auf elliptische Transcendenten, welche zeigen, wie man durch die Tafeln sehr leicht $sin\, am$, $tg\, am$, $\Delta\, am$ berechnen kann. Doch scheint es zweckmässig, da die Herausgabe des nächsten Heftes der Gesellschaft, welches vielfältige theoretische und praktische Anwendungen der Tafeln enthalten wird, sich noch einige Monate verzögern dürfte, schon hier einige einfache Beispiele zu geben, welche den grossen Nutzen dieser Tafeln werden erkennen lassen.

Zuvor noch ein Paar Worte: So wie ich die cyklisch-trigonometrischen Functionen mit kleinen Anfangsbuchstaben $sin\, \omega$, $cos\, \omega$, $tg\, \omega \ldots arc = ar.$), die hyperbolischen mit grossen andeute, so bezeichne ich auch die natürlichen oder hyperbolischen Logarithmen mit Log, die briggischen, deren Modul $M = 0{,}43429$ ist, mit *log.* So wie ferner in den alten cyklischen Tafeln nicht die Kreissektoren ($ar. = \frac{R^2}{2}\omega$, wo R der Kreisradius ist), oder die ihre Grösse bestimmenden Zahlen oder Bogen (ω) angegeben sind, sondern Winkel von ω Sekunden (ω'', wobei $\omega = \omega'' \Pi$ und $\Pi = \frac{\pi}{180 . 60 . 60}$ ist), so enthalten auch meine Tafeln weder die hyperbolischen Sektoren selber $\left(Ar. = \frac{R^2}{2} z\right)$, noch die ihre Grösse bestimmenden Zahlen z, welche natürliche Logarithmen von entsprechenden Asymptotenverhältnissen sind, sondern die dazu gehörigen briggischen Logarithmen $z' = Mz$. Es wird hierbei der Factor $\frac{R^2}{2} = 1$ gesetzt, weil die sogenannte Potenz der Hyperbel als gemeinschaftliches Flächenmass für die hyperbolischen und cyklischen Aren anzusehen ist.

1. Beispiel. Es ist $\int \frac{dx}{1 - x^2} = Log \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = Ar.\, Tg\, x$, oder

$M \int \frac{dx}{1 - x^2} = log. \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = Ar.' (Tg = x)$, wobei $Ar.' = M . Ar. = z'$ ist und wobei von der Constante abgesehen werden soll. Ist nun etwa $log\, x = 9{,}84067$, so geht man mit diesem Argument auf Seite 74 meiner Tafeln in die mit $log\, Tg\, z$ überschriebene Columne ein und findet dem entsprechend durch die mit z' bezeichnete Columne:

$M \int \frac{dx}{1 - x^2}$ oder $log. \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = 0{,}37057 + 10 = 0{,}37067$, weil aus der Proportion $13 : 8 = 17 : p$ sich $p = 10$ ergiebt.

2. Beispiel. Es ist $\int \frac{dx}{x^2 - 1} = Log \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = Ar.\, Cotg\, x$. Ist nun $log\, x = 0{,}57893$, so hat man $- M \int \frac{dx}{x^2 - 1} = log \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = Ar'. (Cotg = x) = 0{,}11724 + 4 = 0{,}11728$, da (pag. 105) aus der Proportion $47 : 14 = 14 : p$ sich $p = 4$ ergiebt.

3. Beispiel. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = Log\, (\sqrt{x^2 + 1} + x) = Ar.\, Sin\, x$.
Für $log\, x = 0{,}57893$ erhält man
$M \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = log\, (\sqrt{x^2 + 1} + x) = Ar'. (Sin = x) = 0{,}88696 + 36 = 0{,}88732$, weil pag. 106 aus der Proportion $51 : 37 = 51 - 1 : p$ folgt, dass $p = 36$ ist.

4. Beispiel. Für $log\, x = 0{,}57893$ ist ferner nach pag. 105
$M \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = log\, (\sqrt{x^2 - 1} + x) = Ar'. (Cos = x) = 0{,}87187 + 34 = 0{,}87221$, da $47 : 33 = 44 : 31$.

5. Beispiel. Aus $\int \frac{d\omega}{cos\, \omega} = Log\, tg\, (45^0 + \frac{\omega}{2}) = z$ folgt für $\omega'' = 43^0\, 51'\, 36''$ ohne Weiteres $z = \frac{0{,}37067}{M}$.

6. Beispiel. Ebenso ist $\int\frac{dz}{Cos\,z}=\int\frac{2.dz}{e^z+e^{-z}}=\omega$. Also für $z'=0,46404$ ist $\omega''=52^0\ 4'\ 54''$ und $\omega=0,90897$.

7. Beispiel. Montucla giebt in seiner Histoire des Mathématiques, III, pag. 151, für die Länge eines parabolischen Bogens B, dessen Parameter $2p=1$ und dessen Abscisse $x=2$ ist, folgende Formel an:

$$B=\int_0^x\frac{dx.\sqrt{2px+4x^2}}{2x}=\frac{x}{2}\sqrt{2p+4x}+\frac{p}{2}\,Log\,\frac{2x^{\frac{1}{2}}+\sqrt{2p+4x}}{\sqrt{2p}}$$

$= 3+0,4406964 = 3,4406964$ an.

Indessen der erste Theil seines Integrals ist ersichtlich falsch und muss heissen: $\frac{x^{\frac{1}{2}}}{2}\sqrt{2p+4x}=2,12132$ statt 3, sodass also $B=2,56202$ ist. Littrow in seiner Anleitung zur Mathematik pag. 349 giebt dafür folgende Formel: $B=\frac{1}{2}p\left[\frac{sin\,\varphi}{cos\,\varphi^2}-Log\,tg\left(45^0-\frac{\varphi}{2}\right)\right]$, wo φ aus $x=\frac{p}{2}\,tg\,\varphi^2$ zu berechnen ist und demzufolge $70^0\ 31'\ 44''$ beträgt. Auch sie giebt $B=2,56202$.

Meine Formel lautet $B=\frac{t}{2}+\frac{p}{2}A$, wo t die Tangente des Parabelpunktes ist, dessen Coordinaten x und y sind, sodass also $t=\sqrt{y^2+(2x)^2}$ ist, und wo $A=Ar.\,Cotg\,\frac{t}{2x}$ oder $Cotg\,A=\frac{t}{2x}$ ist. Für Montucla's Zahlenbeispiel ist $t=\sqrt{18}=4,24264$ und

$log\,\frac{t}{2x}=0,02557.6=(1)2557.6=log.\,Cotg\,A=log.\,Cotg\,z.$

Dazu gehört nach pag. 50 meiner Tafeln $z'=Ar'.=0.76528+27=0,76555$ (weil $4.5:3.3=37:27$ ist). Demnach ist $z=\frac{z'}{M}=A=1.7628$ und wie vorhin $B=2,12132+0.44070=2,56202$.

8. Beispiel. Gudermann in seiner Theorie der Potenzialfunctionen pag. 89 giebt für die u. a. bei der Brückenbaukunst wichtige Kettenlinie folgende einfache Gleichung zwischen den Coordinaten x und y, wobei die Abscissenlinie um α (= der kleinsten Spannung) von ihrem Scheitel absteht: $y=\alpha\,.\,Cos\,\frac{x}{\alpha}$. Setzt man nun $\alpha=1,4406$, indem das Gewicht eines Theils der Kette, dessen Länge der Einheit gleich ist, auch gleich 1 angenommen wird, so geben meine Tafeln, wenn successive

$x=0$	0,5	1	1,5	2	und endlich	2,5 ist,
$y=1,4406$	1,5281	1,8018	2,2946	3,0668		4,2119,

was eine Breite des Flusses oder eine Spannung des Brückenbogens = 5 und die Höhe des Gewölbes oder seine Pfeilhöhe = 2,7713 voraussetzen würde, da $4,2219-1,4406=2,7713$ ist.

9. Beispiel. Dr. Zetzsche giebt in Schlömilchs Zeitschrift V. pag. 169 für das Trägheitsmoment (T) einer Parabellinie, welche sich um die Parabelaxe dreht, mit Uebergehung gewisser Factoren μ und f, welche hier nicht in Betracht kommen, folgenden Ausdruck an:

$$T = p \int_0^z \sqrt{2pz + 4z^2} \, . \, dz = p\left(\frac{p+4z}{4\sqrt{2}} - \frac{p^2}{16} \, Log \, \frac{p+4z+2\sqrt{2pz+4z^2}}{p}\right)$$

Der erste Theil der Klammer ist gewiss nur in Folge eines Druckfehlers falsch angegeben, er muss heissen: $\frac{p+4z}{4\sqrt{2}} \, . \, \sqrt{pz+2z^2} = \frac{p+4z}{8} \sqrt{2pz+4z^2}$

Ich finde dafür folgenden Ausdruck:

$T = \frac{p^2 z}{4} \, . \, Cos \, A. \, Cotg \, \frac{A}{2} - \frac{p^3}{16} A$, wo $Cos \, A = \frac{p+4z}{p}$ ist.

Es sei nun der Halbparameter $p = 8{,}1479$ und die Grenz Abscisse $z = 10{,}9783$. Dann ist

$log \frac{p+4z}{p} = log \, Cos \, A = 0{,}80546$	$log \frac{p^2 z}{4} = 2{,}26057$	$A = \frac{A'}{M}$
$A' = 1{,}10381$	$log \, Cos \, A = 0{,}80548$	$log \, A = 0{,}40512$
$\frac{A'}{2} = 0{,}55190$	$log \, Cotg \, \frac{A}{2} = 0{,}06854$	$log \, \frac{p^3}{16} = 1{,}52903$
	$3{,}13457$	$1{,}93415$
	Dazu $1363{,}2 =$ Num.	Dazu $85{,}931$.

Also ist $T = 1363{,}2 - 85{,}931 = 1277{,}27$.

10. Beispiel. Man soll für eine hyperbolische Fläche (F) die Entfernung ihres Schwerpunktes (x') von ihrem Mittelpunkte O, (dem Mittelpunkte der zugehörigen Ellipse mit den Halbaxen a und b,) finden, wenn sich diese Fläche von ihrem Scheitel A bis zur Ordinate $BC = 2y$ erstreckt.

Aus $x' F = 2\int y \, dx \, . \, x$ und $F = 2\int y \, dx$ folgt

$x' = \frac{\frac{2}{3} a \, . \, Sin \, A^3}{-A + \frac{1}{2} Sin \, 2A}$, wo $Cos \, A = \frac{x}{a}$ ist.

Für $x = 2a$ hat man:

$A' = 0{,}57195$	$log \, Sin \, 2A = 0{,}84063$	
$log \, Sin \, A^3 = 0{,}71568$	$\frac{1}{2} Sin \, 2A = 3{,}4642$	Folglich
$log \frac{2}{3} = 9{,}82391$	$-A = 1{,}3170$	$x' = 1{,}6133 \, . \, a$.
$log \, . \, Z\ddot{a}hl. = 0{,}53959$	$log \, . \, Nenn. = 0{,}33187$	

Danzig, im December 1863.

Gronau.

Druck von A. W. Kafemann in Danzig.