Allgemeine Bemerkungen

über die

Bewegung des Wassers in Röhren,

nebst

Messungen von Druck und Geschwindigkeit

an der

ca. 45000 Fuss langen neuen Danziger Wasserleitung

von

Dr. C. J. H. Lampe,
ordentlicher Lehrer am Gymnasium zu Danzig.

Mit 2 lithographirten Tafeln.

Inhalt.

Fehlerberichtigung.

pag. 1 Z. 10 v. u. statt hat l. hatte.

„ 4 „ 8 v. u. sind die Worte „an dieser Stelle“ fortzulassen.

„ 21 „ 22 v. u. ist C. hinter Wirbel zu streichen.

„ 29 „ 13 v. u. statt fand l. sank.

„ 32 ist überall ϱ statt R zu setzen.

„ 30 Gl. 37 muss heissen $\varrho\, i = \left(0{,}00051 + \frac{0{,}0000065}{\varrho}\right) v^2$

„ 33 Z. 17 v. u. sind die Worte nun hat umzustellen.

„ 36 „ 25 v. o. statt in der l. in den.

„ 39 „ 10 v. o. statt o″ l. x″.

„ 42 „ 6 v. u. statt b = 0,00001139 l. 0,0000139.

„ 43 „ 3 v. o. statt D l. D = 1,293.

„ 43 „ 11 v. o. hinter aufgestellten ist Formel einzuschalten

„ 43 „ 15 v. o. sind die Worte sodann bis Werthe zu streichen.

„ 44 muss die letzte Zahl der Tabelle heissen 39387 statt 39487

„ 44 Z. 16 v. u. statt 0,000000000989 l. 0,000000001007

„ 44 „ 10 v. u. statt 6194 l. 6040.

„ 44 „ 9 v. u. statt 5715 l. 5627.

„ 44 „ 8 v. u. statt 3864 l. 3914.

„ 47 „ 7 v. u. statt 151,425 l. 151,7

„ 58 „ 14 v. u. statt 30,08 l. 3008

Vorwort*).

Zur Ausführung der im zweiten Theile dieser Arbeit näher beschriebenen Messungen wurde ich hauptsächlich durch das Studium der Abhandlung von G. Hagen**) „über den Einfluss der Temperatur auf die Bewegung des Wassers in Röhren“ angeregt. Der Verfasser, welcher genöthigt war, zur Vergleichung der Formel, die er aus seinen eigenen sehr sorgfältigen aber an kleinen Röhren angestellten Messungen abgeleitet hatte, mit den an grösseren Leitungen beobachteten Werthen der Druckhöhe und Geschwindigkeit auf die alten wenig brauchbaren Beobachtungen von Couplet zurückzugehen, äussert sein Befremden darüber, dass man dieselben nicht durch sichere Messungen in der Neuzeit ersetzt habe, indem er zugleich auf die grosse praktische Wichtigkeit solcher Messungen hinweist. Der Wunsch, einen kleinen Beitrag zur Ausfüllung der von dem genannten verdienstvollen Forscher und gewiss auch von den Praktikern lebhaft empfundenen Lücke in dem Beobachtungsmateriale zu liefern, veranlasste mich, derartige Messungen an der im Jahre 1869 hier erbauten eisernen Röhrenleitung anzustellen, welche dazu wegen der sehr bedeutenden Länge (im Ganzen über zwei Meilen) und der eigenthümlichen Gefällsverhältnisse besonders geeignet erschien. Leider konnte die Zahl derselben nur gering sein, da es nicht von meinem Willen abhing, ob und wann ich sie anstellen durfte, ich dazu vielmehr nur einige mir durch die Gefälligkeit der Techniker und durch Zufall dargebotene Gelegenheiten benutzen konnte. Die einzelnen Messungen liegen deshalb auch zum Theil der Zeit nach ziemlich weit auseinander. Dass sich indessen während derselben die Leitungsfähigkeit des Rohres nicht wesentlich verändert hatte, lehrte einmal die Besichtigung der inneren Wandung einiger nach Beendigung meiner Untersuchungen gebrochener Röhren (auf welchen sich nur ein ganz dünner Beschlag gebildet hat, der sich leicht mit dem Finger abreiben liess) und folgte auch indirect aus der Uebereinstimmung der Messungen unter einander und mit den aus der Interpolationsformel, welche aus ihnen abgeleitet war, berechneten Werthen.

Als ich die ersten drei Messungen bereits berechnet hatte, wurde ich von Herrn Dr. Bail, dem Vorsitzenden der hiesigen Naturforschenden Gesellschaft, welcher ich über meine Beobachtungen Mittheilungen gemacht hatte, auf die neueste Arbeit Hagen's†) „über die Bewegung des Wassers in cylindrischen

*) Das Verzeichniss der im Folgenden citirten Schriften sowie die abgekürzte Bezeichnung derselben in den Citaten ist in No. 1. des Anhanges enthalten. **) H. II. Siehe Anhang No. 1. †) H. III. Siehe Anhang.

nahezu horizontalen Röhrenleitungen“ aufmerksam gemacht. Aus dieser Arbeit, welche in den Schriften der Berliner Akademie aus dem Jahre 1869 erschienen ist, der Naturforschenden Gesellschaft aber erst im Januar 1871 vorgelegt wurde, ersah ich, — was mir bei der Mangelhaftigkeit der hiesigen literarischen Hilfsmittel entgangen war — dass der französische Ingenieur Darcy bereits im Jahre 1858 die Resultate von Messungen veröffentlicht hat, die von ihm an zwei und zwanzig verschiedenen Röhren in Chaillot bei Paris angestellt sind. Diese Messungen unterscheiden sich, abgesehen von der grossen Sorgfalt, mit welcher sie ausgeführt wurden, von allen früheren wesentlich dadurch, dass bei ihnen ebenso wie bei den meinigen der Seitendruck direct beobachtet wurde. Hagen hat daher den Versuch gemacht, aus ihnen unter Auswahl derjenigen zwölf Beobachtungsreihen, bei denen er glaubte, eine möglichst regelmässige cylindrische Form der Röhren voraussetzen zu können, „die Gesetze herzuleiten, nach denen die Bewegung des Wassers in Röhren erfolgt, während (wie Hagen sagt) Darcy sich darauf beschränkte, einige praktische Regeln über die Ergiebigkeit verschiedener Arten von Röhren aufzustellen“.

Nach vorläufiger Durchsicht der Hagen'schen Abhandlung schob ich die bereits für den vorjährigen Band der Schriften der Naturforschenden Gesellschaft bestimmte Publikation meiner Untersuchungen auf, weil ich zweifelhaft geworden war, ob dieselben noch hinreichendes Interesse bieten könnten, und mich zunächst mit dem Inhalte der erwähnten Schriften von Hagen und Darcy genauer bekannt machen wollte. Wenn ich, nachdem dieses geschehen, meine Arbeit nun dennoch, wenngleich in etwas veränderter und erweiterter Gestalt veröffentliche, so bin ich dazu durch folgende Gründe veranlasst worden.

Erstens habe ich nach eingehendem Studium der Hagen'schen Abhandlung nicht die Ueberzeugung gewinnen können, dass die neue von ihm aufgestellte Formel wirklich der Ausdruck eines Naturgesetzes sei, glaube vielmehr, dass dieselbe lediglich als Interpolationsformel anzusehen ist. Es geht dieses — abgesehen von dem theoretischen Bedenken, ob sich überhaupt die Gesetze der Bewegung des Wassers in cylindrischen Röhren bei niederem und hohem Drucke durch eine Formel darstellen lassen und ob dieselbe dann eine so einfache Gestalt haben könne — wie mir scheint mit Evidenz aus der Nichtübereinstimmung der Werthe der Hagen'schen „Constanten“ a und b mit den aus meinen Beobachtungen und denen von Jacobson folgenden Werthen derselben Grössen hervor, abgesehen davon, dass der Werth von b selbst bei den Darcy'schen Beobachtungen, aus welchen Hagen doch seine Formel abgeleitet hat, innerhalb sehr weiter Grenzen schwankt. (Vergl. unten die Tabelle auf pag. 35 u. f.).

Zweitens bilden meine Messungen eine Ergänzung zu denen von Darcy und zwar in doppelter Beziehung. Einmal nämlich ist zwischen den beiden weitesten von ihm benutzten Röhren, deren Durchmesser resp. 0,5 ᵐ und 0,297 ᵐ sind, eine erhebliche Lücke. Da man das Gesetz, nach welchem die Ergiebigkeit eines Rohres von seinem Durchmesser abhängt, nicht mit Sicherheit kennt, so ist es nothwendig namentlich bei den in der Praxis (wenigstens bei grösseren Wasserleitungen) am häufigsten gebrauchten weiten Röhren Messungen für möglichst viele verschiedene Durchmesser anzustellen. Der Durchmesser des von mir untersuchten Rohres liegt nun nahezu in der Mitte zwischen den oben angegebenen; er beträgt nämlich 0,418 m. Sodann ist der von Darcy bei der weitesten Röhre (von 0,5 m Durchmesser) gemessene Druckverlust wegen der verhältnissmässig zu geringen Länge des Rohrstranges (100 Meter) viel zu unerheblich, um sich mit hinreichender Sicherheit beobachten zu lassen. Er betrug in der That auch beim stärksten angewandten Drucke nur 0,25 m und zwar wurde er für die erste Hälfte des Rohres zu 0,14 m für die zweite zu 0,11 m beobachtet, so dass der Fehler der Messung etwa $^1/_8$ des ganzen Werthes beträgt. Bei meinen Beobachtungen stieg die beobachtete Druckdifferenz bis über 50 Fuss rhld., da das Verhältniss der Länge zum Durchmesser des Rohres ein sehr viel grösseres war*). Daraus resultirt aber eine erheblich genauere Bestimmung des relativen Gefälles. Auch die zugehörigen Werthe der Geschwindigkeit haben einen etwas höheren Grad der Genauigkeit als bei Darcy, da ich wegen der bedeutenden Grösse des Bassins, in welchem die ausfliessende Wassermenge gemessen wurde, eine längere Beobachtungszeit anwenden konnte**.)

Drittens habe ich von den Druckmessungen eine Anwendung gemacht, welche sich, wie ich glaube, auch anderweitig wird verwerthen lassen und deshalb vielleicht einige Beachtung verdient. Ich habe nämlich, nachdem ich aus einigen directen Messungen des Druckes und der zugehörigen Geschwindigkeit eine Interpolationsformel abgeleitet hatte, den Versuch gemacht, mittelst derselben die mittlere Geschwindigkeit des Wassers im Rohre aus dem an einer hinreichend grossen Strecke beobachteten Druckverluste durch Rechnung zu bestimmen. Die Uebereinstimmung der so erhaltenen Resultate mit den durch directe Messung im Sammelbassin gewonnenen war so befriedigend, dass ich mich veranlasst fühlte, den städtischen Behörden vorzuschlagen, das von der Leitung gelieferte Wasserquantum auf dem angedeuteten indirecten Wege, durch Druckmessungen, von Zeit zu Zeit ermitteln zu lassen. Da eine directe Messung hier wie wohl in den meisten Fällen mit vielfachen Unzuträglichkeiten verbunden und im Winter namentlich fast unausführbar war†), während die Druckmessung ohne irgend welche Schwierigkeit jederzeit angestellt werden konnte, so wurde mein Vorschlag acceptirt. Seit fast einem Jahre wird nun täglich aus dem an einem stationair in der Nähe des Ursprunges der Leitung††) aufgestellten Manometer abgelesenen Drucke mit Hülfe einer ein für alle mal von mir berechneten Tabelle das durch das Rohr in 24 Stunden hindurchfliessende Wasserquantum bestimmt. Da ferner einzelne Messungen in grösseren Zeitintervallen von mir schon seit längerer Zeit angestellt sind, so konnten die Veränderungen in der Ergiebigkeit der Quellen, durch welche die Leitung gespeist wird, für einen nun fast dreijährigen Zeitraum festgestellt werden, und zwar so genau wie er bisher kaum irgend wo geschehen sein dürfte. Die Resultate dieser

*) Nämlich ca. 23000 : 1, während es bei Darcy nur 200 : 1 war.

**) Bei Darcy betrug die Beobachtungszeit für die grösste Ausflussgeschwindigkeit nur 13 Minuten, bei meinen Beobachtungen im Minimum ca. 2 Stunden. Siehe das Nähere im II. Theil.

†) Es musste u. A. bei jeder Messung wenigstens für einen halben Tag der Stadt das Wasser entzogen werden. Wegen des sehr starken Druckes (fast fünf Atmosphären) war das Wiederanlassen des Wassers nicht ganz ohne Gefahr für die Röhren und erforderte ausserdem ein zahlreiches Personal.

††) Bei Luftbahn Nr. 24; vergl. den Nivellementsplan.

Messung finden sich am Ende des zweiten Theiles zusammengestellt und dürften bei der Ausführung ähnlicher Anlagen einigen Anhalt gewähren.

Würden mit den Druckmessungen fortdauernde Messungen des Wasserstandes im Sammelbassin (etwa mit Hülfe eines registrirenden Wasserstandsanzeigers) verbunden, so könnte man durch Combination beider den Wasserverbrauch in der Stadt bestimmen.

Auch die Ergiebigkeit neu angelegter Leitungen, welche häufig sehr schwierig zu bestimmen ist, wird sich wie ich glaube, durch Beobachtung des Seitendruckes in vielen Fällen unter Benutzung der Darcy'schen Messungen mit hinreichender Genauigkeit ermitteln lassen*).

Viertens. Durch meine Druckmessungen wird bewiesen, dass wenigstens bei so weiten Leitungen wie die von mir untersuchte auch durch ziemlich starke Krümmungen**) wenn dieselben nur allmählig eintreten, kein merklicher Druckverlust hervorgebracht wird. Die beobachteten Druckhöhen sind so nahe den entsprechenden Rohrlängen proportional, dass die Abweichungen innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler liegen.

Fünftens konnten verschiedene mit den Profilverhältnissen zusammenhängende eigenthümliche Druckerscheinungen constatirt werden, unter anderen die bemerkenswerthe, von dem Erbauer der Leitung vorausgesehene, indessen hier von mehren Seiten bezweifelte Thatsache, dass durch die Erhebung des Rohrstranges über die Gefällslinie†), (welche das Niveau des Ober- mit dem des Unterwassers verbindet) die Continuität des Wasserfadens in der Leitung unterbrochen wird, also auch ein Verlust an nutzbarem Gefälle stattfindet.

Der Mittheilung meiner Messungen habe ich eine kurze Uebersicht der wichtigsten über die Bewegung des Wassers in cylindrischen Röhren angestellten Untersuchungen vorangeschickt, unter hauptsächlicher Berücksichtigung derjenigen Forscher, deren Arbeiten mit denen Hagen's in innerem Zusammenhange stehen, auf die ich mich daher bei Besprechung der letztern mehrfach beziehen musste. Es sind dieses ausser den älteren Untersuchungen von Poiseuille namentlich die neueren von Dr. Heinrich Jacobson (jun.) in Königsberg, dessen Arbeiten Hagen indessen nicht zu kennen scheint, da er sie nirgend erwähnt. Sie sind um so beachtenswerther, als der Verfasser sich bei der Ausführung seiner sehr werthvollen Experimentaluntersuchungen auf die strenge Theorie von F. E. Neumann stützt, welche von ihm zuerst mit Genehmigung ihres Autors veröffentlicht ist.

Das Verzeichniss sämmtlicher von mir im Folgenden citirten Schriften habe ich im Anhange beigefügt. In Bezug auf die ältere Literatur verweise ich auf den ersten Theil von Hagen's Wasserbaukunst sowie auf die übrigen im Anhange angeführten Abhandlungen.

Schliesslich spreche ich an dieser Stelle den Herren, welche theils mir durch ihr gefälliges Entgegenkommen die Ausführung der Messungen ermöglichten, theils mich direct bei Ausführung derselben unterstützten, an dieser Stelle meinen wärmsten Dank aus. Ich habe zu nennen die Herren: Stadtbau-

*) In der That beabsichtigt der Erbauer der Danziger Leitung, Herr Ingenieur Müller diese Methode bei der gegenwärtig von ihm ausgeführten gusseisernen Leitung, durch welche der Badeort Zoppot mit Quellwasser versorgt werden soll, anzuwenden.

**) Vergl. den Nivellementsplan. †) Bei Lufthahn Nr. 5; vergl. den Nivellementsplan.

rath Licht hier, Stadtbaurath Leiter (gegenwärtig in Königsberg i. Pr., damals in Danzig) Stadtbaumeister Kawerau und besonders den Erbauer der Leitung Herrn Ingenieur Müller, der mich, soweit es seine geschäftlichen Verhältnisse gestatteten, stets auf's Bereitwilligste mit Rath und That unterstützt hat und gemeinschaftlich mit Herrn Baumeister Kawerau eine Reihe von Messungen angestellt hat, als ich selbst durch Krankheit daran verhindert war. Ausserdem hat Herr stud. phil. Kirchner mir bei den Messungen assistirt, auch selbstständig einige Druckmessungen ausgeführt.

I. Allgemeine Bemerkungen über die Bewegung des Wassers in Röhren.

Bei der Untersuchung der Bewegung des Wassers in Röhrenleitungen handelt es sich wie bekannt wesentlich um die Berechnung des in denselben auftretenden Widerstandes resp. der zu seiner Ueberwindung erforderlichen Druckhöhe (der sogenannten Widerstandshöhe). Ueber die Natur dieses Widerstandes waren noch bis in die neueste Zeit hinein vielfach unklare, ja gradezu falsche Vorstellungen verbreitet. Die älteren Hydrauliker z. B. Eytelwein gingen nach Hagen*) von der Annahme aus, dass derselbe der Ausdehnung der inneren Wandfläche (also der Länge und dem Durchmesser des Rohres) proportional sei. Dieses involvirt die Vorstellung, dass das Wasser, indem es wie ein fester Körper ohne gegenseitige Bewegung der einzelnen Theile in dem Rohre fortgeschoben wird, sich nur mit seiner Oberfläche an der inneren Wandung des Rohres reibe. Diese Vorstellung liegt allen Formeln zu Grunde, in welchen die Widerstandshöhe dem Durchmesser des Rohres umgekehrt proportional gesetzt wird, wie dieses, abgesehen von der Eytelwein'schen, in der auch heute noch von Technikern vielfach angewandten Weisbach'schen der Fall ist**).

Dass die Bewegung in Wirklichkeit anders beschaffen ist, lehrt eine einfache Beobachtung. Mischt man dem Wasser leichte Körperchen z. B. Bernsteinpulver bei und verfolgt die Bewegung derselben während das Wasser durch eine Glasröhre fliesst, so erkennt man leicht, dass die Wasserschicht, welche die Wandung berührt, sich in Ruhe befindet, die Geschwindigkeit der Wassertheilchen aber umsomehr zunimmt, je näher sie der Axe des Rohres sind; dort hat sie den grössten Werth. Der Widerstand rührt also in diesem und in allen

*) Vergl. Hagens Wasserbaukunst Th. I. p. 208 und 209 (1. Ausgabe).

**) Dieselbe ist von der Form

$$h = k\,\frac{Lc^2}{D}$$

worin h die Widerstandshöhe, L die Länge, D den Durchmesser des Rohres, c die mittlere Geschwindigkeit bedeuten; k ist ein constanter Faktor. Vergl. H. Wbk. pag. 209, Weisbachs Experimentalhydraulick pag. 92, Gl. 1.

Fällen, wo die Wandung des Rohres von der Flüssigkeit benetzt wird, nur von der gegenseitigen Reibung der einzelnen Wasserschichten her. Man hat diese Art der Reibung passend die innere Reibung genannt*).

Findet keine Benetzung statt, so kann allerdings zur inneren noch eine äussere Reibung hinzukommen, indem die Oberfläche der Flüssigkeit an der Wandung des Rohres fortgleitet. Eine solche Gleitung findet z. B. bei der Bewegung des Quecksilbers durch Glasröhren statt und ist ausserdem zwischen Wasser und polirten Gold- und Silberflächen beobachtet worden**) In diesen Ausnahmefällen wird man also die von beiden Arten der Reibung herrührenden Widerstände gesondert betrachten müssen. Meistens haftet indessen das Wasser namentlich nach längerer Berührung so fest an der Röhrenwand, dass die äusserste Schicht auch während der Strömung in Ruhe bleibt***). Direct nachgewiesen ist dieses Verhalten für die Berührung von Wasser mit Glas, polirtem Messing und Zinn. Allerdings hat die ruhende Wasserschicht nicht wie Hagen aus seinen Versuchen schliessen zu müssen glaubte eine endliche Dicke, sondern ist vielmehr als unendlich dünn anzusehen.†)

Durch die oben angedeutete Methode, die Bewegung des Wassers in einer Glasröhre mit Hülfe von beigemischtem Bernsteinpulver zu studiren, kann man noch eine wichtige Thatsache erkennen. Man bemerkt nämlich, namentlich bei solchen Röhren, welche eine im Verhältniss zu ihrem Durchmesser erhebliche Länge haben, dass so lange der Druck gering ist, die Bewegung nur parallel zur Axe des Rohres vor sich geht, bei höherem Drucke aber Wirbel auftreten, so dass die Theilchen sich in den verschiedensten Richtungen bewegen ††). Während des ersten Stadiums der Bewegung hat der austretende Strahl (wenn er nicht etwa, was bei sehr engen Röhren eintritt, durch die Capillarattraction am Glase zurückgehalten wird) eine ganz glatte Oberfläche und zeigt, da er vollkommen ruhig bleibt, das Aussehen eines polirten Glasstabes. Wird der Druck mehr und mehr gesteigert, so tritt zuerst ein vorübergehendes Zucken (4 bis 6 mal in der Minute) des sonst noch continuirlich fliessenden Strahles ein, allmählig werden die Schwankungen intensiver und zahlreicher, gehen dann in sehr heftige und häufige Stösse und zuletzt in eine ununterbrochene Vibration über, während zugleich die kleinen Wellen auf seiner Oberfläche ihm den Glanz und die weisse Färbung des geätzten Glases geben.

Misst man zugleich die aus dem Rohre fliessende Wassermenge, so zeigt sich, dass dieselbe während des zuletzt geschilderten Stadiums der Bewegung im Verhältnisse zum Drucke eine viel geringere ist, als während des ersteren, indem ein erheblicher Theil der ganzen Druckhöhe zur Darstellung jener inneren Wirbel, welche unabhängig von der fortschreitenden Bewegung stattfinden, verwandt wird.

*) Vergl. über dieselbe u. A. Oscar Emil Meyer in Pogg. Ann. Bd. 113 pag. 55 u. ff., ferner Crelle-Borchardts Journal Bd. 59. Coulomb, Weissbach u. A. gebrauchen dafür die Namen „Viscosität" oder „Klebrigkeit". S. Hg. Wbk. I. p. 209; Weissbach's Experimentalhydraulik p. 91 u. 92.

**) S. Helmholtz und v. Piotrowski in den Wiener Sitzungsberichten vom April 1860.

***) Vergl. O. E. Meyer l. c. p. 61.

†) H. I. p. 41 u. ff. Dort ist dieselbe zu etwa 0,0013 Zoll rhld. berechnet. Vergl. auch J. III. p. 306.

††) Vergl. H. III. p. 1 u. 2.

Es lässt sich hiernach schon vermuthen und ist durch exacte Untersuchungen von Hagen, Poiseuille und Jacobson*) bewiesen worden, dass die Bewegung des Wassers in langen und engen Röhren unter übrigens unveränderten Verhältnissen nach zwei wesentlich verschiedenen Gesetzen vor sich geht, je nachdem der Druck ein niedriger oder hoher ist. Es sei hier gleich bemerkt, dass der Uebergang aus der einen in die andere Art der Bewegung auch hervorgebracht werden kann: erstens durch Verkürzung des Rohres, zweitens durch Vergrösserung des Durchmessers, drittens durch Erhöhung der Temperatur.

Das erste der angedeuteten Gesetze, welches gültig bleibt, so lange die Bewegung des Wassers nur parallel zur Axe des Rohres stattfindet, lässt sich durch folgende Gleichung ausdrücken:

1) $$p = f \frac{l}{d} c$$

Hierin bedeuten

p den Druck am Anfange des Rohres,

f einen nur der Temperatur und der Grösse der Schwerkraft am Beobachtungsorte abhängigen Faktor,

l die Länge, d den Durchmesser des Rohres,

c die mittlere Geschwindigkeit des Wassers.

Dieses Gesetz soll nach den beiden Forschern, welche es unabhängig von einander entdeckt haben, im Folgenden das *Hagen-Poiseuille*'sche genannt werden.

Hagen kam darauf bereits im Jahre 1838; die Abhandlung, in welcher er dasselbe zuerst veröffentlichte, befindet sich in Poggendorfs Annalen Band 46 pag. 423 ff. Seine Beobachtungsmethode war im Wesentlichen folgende. Er liess das Wasser aus einem Speisegefässe, in welchem (durch einen schwimmenden Heber) das Niveau constant erhalten wurde, durch ein sorgfältig ausgeschliffenes cylindrisches Rohr in ein Auffangegefäss treten, in welchem letzteren der Wasserspiegel ebenfalls constant erhalten wurde, und mass nun die Niveaudifferenz im Speise- und Auffangegefässe (h) und zugleich die Ausflussmenge und die Temperatur des Wassers. Seine Beobachtungen liessen sich unter der Form darstellen

2) $$h = rM + sM^2$$

worin M die in einer Secunde austretende Wassermenge darstellt.

Er berechnete die wahrscheinlichsten Werthe von r und s für die verschiedenen von ihm angewandten Röhren**) und fand schliesslich für eine Temperatur von 8° R. folgenden Ausdruck (in welchem alle Grössen sich auf das Pariser Zollmass beziehen)

3) $$h = \frac{1}{\varrho^4} (0{,}000012354\ lM + 0{,}00037752\ M^2)$$

Der Zahlencoefficient von lM ist eine Funktion der Temperatur und verwandelt sich für t° R. in

4) $$0{,}00001726 - 0{,}000000785\ t + 0{,}0000000216\ t^2.$$

Hagen ging bei der Discussion der Formel (2) von der üblichen Zerlegung

*) Die Titel der betreffenden Abhandlungen sind im Anhange angegeben.

**) Dieselben hatten folgende Dimensionen

	Länge	Radius
a)	17,483	0,0171
b)	40,262	0,0741
c)	38,667	0,10905 Pariser Zoll.

der ganzen Druckhöhe in eine Geschwindigkeitshöhe und Widerstandshöhe aus. Unter der ersteren versteht man bekanntlich denjenigen Theil der gesammten Druckhöhe (h), welcher verbraucht werden soll, um dem Wasser diejenige mittlere Geschwindigkeit mitzutheilen, mit welcher es das Rohr durchströmt, während der übrige Theil der ganzen Druckhöhe, welchen man Widerstandshöhe zu nennen pflegt, nach derselben Annahme zur Ueberwindung des Widerstandes in der Röhre consumirt wird. Es stelle in Fig. (1) Taf. II. A ein Speisegefäss vor, MN den constanten Wasserspiegel in demselben. Das Wasser trete bei b in eine horizontale cylindrische Röhre ein und fliesse bei c aus. In die obere Wandung der Röhre bc seien an verschiedenen Stellen feine Löcher gebohrt, welche mit darüber befindlichen senkrechten Glasröhren communiciren. Die Weite dieser Röhren sei so gross, dass die capillare Steighöhe in ihnen vernachlässigt werden kann. Die erste derselben befinde sich unmittelbar an der Einflussöffnung bei b, die letzte vor der Mündung bei c. Wird die letztere verschlossen, so steht das Wasser in allen Röhren in gleicher Höhe (bei g_1, g_2, g_3 etc.) mit dem Niveau im Gefässe MN. Oeffnet man den Verschluss bei c, so sinkt es im Allgemeinen*) um so tiefer, je weiter die betreffende Röhre von dem Gefässe entfernt ist. Bezeichnen h_1 h_2 h_3 etc. die einige Zeit nach Beginn der Bewegung eingetretenen constanten Wasserstände in den aufeinander folgenden Röhren vom Speisegefässe ab gerechnet, so würde also g_1 h_1 nach der gewöhnlichen Anschauungsweise die Geschwindigkeitshöhe, h_1 a_1 die Widerstandshöhe bezeichnen. Diese ist also identisch mit dem am Anfange der Röhre vorhandenen Seitendrucke.

Hagen versuchte nun mit Hülfe der Gleichung der lebendigen Kräfte nachzuweisen, dass das M^2 enthaltende Glied der Gleichung (2) die Geschwindigkeitshöhe darstelle, setzte aber bei der Berechnung derselben voraus, dass die Geschwindigkeit des in der Axe befindlichen Wasserfadens gleich dem dreifachen der mittleren Geschwindigkeit sei**), während sie (wenigstens innerhalb der Grenze des Hagen-Poiseuille'schen Gesetzes) das doppelte derselben ist†). Ferner nahm er an, dass die Geschwindigkeit eines beliebigen Wassertheilchens dem Abstande desselben von der Röhrenwand ($R—r$) proportional sei, dass also, wenn man sich den aus der Röhre hervortretenden Strahl plötzlich beseitigt denkt, die alsdann austretende Wassermasse kegelförmig sei. In Wirklichkeit ist aber u der Grösse $R^2—r^2$ proportional (wenn R den Radius des Rohres r den Abstand des betrachteten Wassertheilchens von der Mitte des Rohres bezeichnet). Die austretende Wassermasse würde also die Gestalt eines Rotationsparaboloids haben, wie es bereits von Stefan bemerkt ist††).

Es geht hieraus hervor, dass der von Hagen berechnete Werth die wirkliche Geschwindigkeitshöhe, d. h. also den zur Erzeugung der beobachteten mittleren Geschwindigkeit erforderlichen Theil der Druckhöhe nicht darstellen kann, und

*) Vergleiche übrigens pag. 20 und f. Ueber die Darstellung der Druckverhältnisse durch Drucklinien siehe das Nähere im Anhange unter No. 2.

**) Vergl. H. I. pag. 433, H. II. pag. 55 unten.

†) Vergl. weiter unten pag. 19, Gleichung (21) und (24).

††) Wiener Sitzungsberichte vom Jahre 1861.

wirklich sind auch die von Hagen berechneten Geschwindigkeitshöhen stets kleiner als die von ihm beobachteten*).

Hagen sucht den Ueberschuss der beobachteten Werthe durch die Abhängigkeit der Geschwindigkeitshöhe von der Länge der Röhre zu erklären.

In der That lässt sich der ganze Begriff der Geschwindigkeitshöhe, wie er gewöhnlich gefasst wird, vom Standpunkte der strengen Theorie aus nicht rechtfertigen, wie weiter unten näher dargelegt werden wird**). Diese ergiebt nämlich, dass das mit M^2 (resp. c^2) multiplicirte Glied der Gl. (2) allerdings den beim Eintritte des Wassers in das Rohr stattfindenden Druckverlust darstelt, indessen eine andere mechanische Bedeutung hat, als Hagen annahm***). Die weitere Annahme Hagens, dass das zweite Glied die Widerstandshöhe darstelle, wird durch die Theorie bestätigt. Diese fand Hagen der vierten Potenz des Radius, also wenn man statt M in die Gl. (2) die mittlere Geschwindigkeit c einführt (da $M = R^2 \pi c$) der zweiten Potenz des Radius umgekehrt, der ersten Potenz der Geschwindigkeit direct proportional, während die Widerstandshöhe nach der gewöhnlichen Annahme (vergl. pag. 5) der ersten Potenz des Radius umgekehrt, dem Quadrate der Geschwindigkeit direct proportional gesetzt wurde. Hagen hat selbst bereits in seiner ersten Abhandlung ausdrücklich bemerkt, dass das von ihm gefundene Gesetz nur für gewisse von den Dimensionen des Rohres und der Temperatur abhängige Grenzen des Druckes und der Temperatur gelte).

Den bedeutenden Einfluss der letzteren hat Hagen in einer zweiten Abhandlung†) zum Gegenstande einer sorgfältigen und umfassenden Untersuchung gemacht. Schon der ältere Gerstner erkannte, dass die ausfliessende Wassermenge in hohem Grade durch die Wärme bedingt ist und in vielen Fällen sich verdoppelt, sobald die Temperatur um 20 bis 30 Grade zunimmt††). Hagen entdeckte die merkwürdige Erscheinung, dass namentlich bei engen Röhren, unter übrigens gleichen Umständen, die Geschwindigkeit mit wachsender Temperatur stark zunimmt, ein Maximum erreicht, bei weiterer Erwärmung fast eben so schnell wieder abnimmt, bei 10 bis 20° von der Temperatur des Maximums einen zweiten Wendepunkt, also ein Minimum erreicht und erst nach Ueberschreitung desselben wieder regelmässig mit der Temperatur wächst†††).

Für das erste Stadium der Bewegung vor dem Eintritte des Maximums fand Hagen das bereits früher von ihm abgeleitete Gesetz im Wesentlichen bestätigt. Er gelangte schliesslich durch Discussion seiner sehr reichhaltigen und mit musterhafter Sorgfalt angestellten Beobachtungen, welche sämmtlich nach der Methode

---

*) Vergl. weiter unten pag. 11.

**) Vergl. pag. 23.

***) Siehe weiter unten pag. 23, Gl. 26 etc.

†) Sie wurde bereits in der Einleitung erwähnt und ist im folgenden unter H. II. citirt. Siehe Nr. 1 des Anhanges.

††) Gilberts Annalen Bd. V. pag. 160 ff.

†††) Bei weiten Röhren und grösseren Geschwindigkeiten fallen beide Wendepunkte unter den Gefrierpunkt, bei sehr engen Röhren und sehr kleinen Druckhöhen dagegen über den Siedepunkt.

der kleinsten Quadrate berechnet sind, zu einem Ausdrucke für die gesammte Druckhöhe, welcher die Form hat:

5) $$h = r + sc + tc^2 \text{*)}$$

Dieser Ausdruck unterscheidet sich von dem in der früheren Abhandlung ermittelten zunächst wesentlich dadurch, dass auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens ein von c unabhängiges Glied vorhanden ist. Dieses stellt nach Hagen einen capillaren Gegendruck dar, der sich auch während des Fliessens des Wassers in transversaler Richtung bemerkbar machen soll und bei seinen früheren Beobachtungen deswegen nicht hervortrat, weil dort das Rohr unter Wasser mündete. Er leitet dafür den Ausdruck ab

6) $$r = \frac{\mu}{\varrho\gamma}$$

Hierin bedeutet μ die Spannung eines 1 Zoll (rhld.) breiten Streifens der Wasseroberfläche; γ das Gewicht von 1 Cubikzoll Wasser; ϱ den Halbmesser der Röhre.

Für die Grössen s und t ermittelte Hagen durch Discussion der Beobachtungen folgende Werthe:

7) $$s = \frac{l\,\varrho^{2}\beta}{(\varrho - \alpha)^{4}}$$

8) $$t = (\alpha' + l\,\beta')\,\frac{\varrho^{4}}{(\varrho - \alpha)^{4}}$$

Hierin bedeutet l die Länge, α, α', β, β' sind Constanten, von denen namentlich β' und β von der Temperatur abhängig sind. Diese Abhängigkeit stellt Hagen durch die Interpolationsformeln dar.

9) $$\beta' = 0{,}00004208 - 0{,}0000003121\,\tau$$

10) $$\beta' = 0{,}00006338 - 0{,}000014413\,\sqrt[3]{\tau} \text{ **)}$$

oder noch kürzer

$$\beta = 0{,}000015\,(\sqrt[3]{80} - \sqrt[3]{\tau})$$

wobei Grössen von der Ordnung des wahrscheinlichsten Fehlers vernachlässigt sind.

Die Abhängigkeit der Grösse α' von der Temperatur ist weniger sicher. Hagen fand †) für

5^0	. . . . $\alpha' =$	0,00 2248
10^0		2605
20^0		3490

α, eine von der Temperatur unabhängige Grösse, soll nach Hagen die von ihm damals noch als endlich angenommene Dicke einer Wasserschicht bezeichnen, welche an der Wandung der Röhre haftet und auch während des Fliessens in Ruhe bleibt††). Setzt man die obigen Werthe von s und t in die Gleichung (5) ein, so wird dieselbe

---

*) H. II. pag. 35.

**) H. II., 52. In seiner ersten Abhandlung hatte Hagen die Abhängigkeit der entsprechenden Constanten von der Temperatur unter der Form dargestellt

$$a + b\tau + c\tau^2$$

vergl. H. I pag. 435.

†) Siehe H. II. pag. 46—48.

††) Vergl. oben pag. 4 Anmerkung, ausserdem weiter unten pag. 20.

11) $$h = \frac{\mu}{\varrho\gamma} + \frac{l\,\varrho^2\,\beta}{(\varrho-\alpha)^4}\,c + (\alpha' + l\,\beta')\,\frac{\varrho^4}{(\varrho-\alpha)^4}\,c^2$$

Abgesehen von dem ersten Gliede ohne c, welches hierin auftritt, wird durch den vorstehenden Ausdruck das Hauptresultat der früheren Untersuchung Hagen's bestätigt, dass nämlich die Widerstandshöhe, welche durch das Glied sc dargestellt wird, der ersten Potenz der Geschwindigkeit direct, dem Quadrate des Radius indirect proportional sei. Denn wegen der geringen Grösse von α (= 0,0013 Zoll ca.) ist jedenfalls sehr angenähert

$$\frac{\varrho^2}{(\varrho-\alpha)^2} = \frac{1}{\varrho^2}$$

zu setzen. Uebrigens hat Hagen die von ihm sogleich als problematisch bezeichnete Annahme, dass α bei Röhren mit glatten Wänden einen endlichen Werth besitze, in seiner neuesten Arbeit selbst aufgegeben; sie lässt sich in der That nicht mit dem Begriffe der Continuität der Flüssigkeiten in Einklang bringen und wird durch die später anzuführenden Versuche von Jacobson direct widerlegt.

Das letzte Glied (tc^2) stellt nach Hagens Anschauung die Geschwindigkeitshöhe dar. Er entwickelt für dieselbe auf die bereits oben besprochene Art ebenso wie in seiner ersten Abhandlung den theoretischen Werth

11) $$h = \frac{2{,}7}{4g}\,c^2 = 0{,}0035982\;c^2 = tc^2$$

während die Beobachtungen bei 20 ° R. folgendes ergaben*):

Röhre.	Radius ϱ Zoll (rhld.)	Länge l	t
A	0,053844	18,092	0,0042633
B	0,077394	41,650	0,0046617
C	0,113914	39,858	0,004617

bei 5 ° dagegen hatte sich ergeben für:

Röhre A . . .	t =	0,0033104
B		0,0042636
C		0,0040871

Hagen erklärt die ihm selbst auffallende Verschiedenheit der beobachteten von den theoretisch berechneten Werthen durch die Abhängigkeit des Faktors t von der Länge der Röhre. Eine theoretische Definition für diese Abhängigkeit vermag er jedoch nicht zu geben**). Aus diesem Grunde und weil er den Seitendruck nicht direct beobachtete†), wird durch seine Untersuchungen der Zweifel nicht ausgeschlossen: ob nicht in dem mit c^2 multiplicirten Gliede ein Theil der Widerstandshöhe enthalten sei, für welche man bis dahin nach dem Vorgange von Coulomb und Prony allgemein den Ausdruck

$$w = a\,c + bc^2$$

*) S. H. II. pag. 39.

**) Vergl. H. II. pag. 59.

†) Dieser wesentliche Mangel der im Uebrigen so sehr sorgfältig angestellten und werthvollen Messungen liesse sich beseitigen, wenn Herr Hagen sich entschliessen wollte, nachträglich an seinen Röhren Beobachtungen über die Beziehung der Druckhöhe im Speisegefässe (h) und dem Seitendrucke (p) in mehreren Punkten am oberen Ende, ausserdem in der Nähe der Mündung anzustellen. Zu diesem Zwecke müssten in die Seitenwandung nach Einführung eines genau passenden Stempels bis zu der betreffenden Stelle feine Löcher eingebohrt werden. Siehe übrigens weiter unten pag. 19 u. ff.

angenommen hatte, worin w die Widerstandshöhe, c wie oben die mittlere Geschwindigkeit, a und b aber Constanten bedeuten. Das Verdienst, zuerst das wahre mit der Theorie in Einklang stehende, wenngleich nur innerhalb gewisser Grenzen giltige Gesetz für die Bewegung des Wassers aufgefunden zu haben, kann und soll Hagen nicht abgesprochen werden. Unabhängig von ihm und ebenfalls auf rein experimentalem Wege wurde, wie es bereits in der Einleitung bemerkt ist, dasselbe Gesetz von Poiseuille aufgefunden, dessen Abhandlung bereits erschienen war, als Hagen seine zweite Arbeit veröffentlichte, indessen von ihm nicht erwähnt wird.

Poiseuille stellte seine Experimente hauptsächlich zu dem Zwecke an, um die Gesetze des Blutkreislaufes, namentlich die Bewegung des Blutes in den Capillargefässen zu untersuchen. Er experimentirte daher mit Capillarröhren, deren Durchmesser zwischen

$$0{,}01395^{\text{mm}} \quad \text{bis} \quad 0{,}6522^{\text{mm}}$$

variirten. Die Längen betrugen bei den engsten Röhren im Minimum ca. 2^{mm}, bei den weiteren im Maximum 962^{mm}. Sie wurden dadurch verändert, dass dieselbe Röhre durch Abschneiden mehr und mehr verkürzt wurde.

Die Einrichtung des Apparates war wesentlich von der Hagen's verschieden. Das Danptheil desselben ist in Fig. 3, Taf. II. dargestellt. Zur Aufnahme der Flüssigkeit, deren Ausfluss beobachtet werden sollte, diente ein kleines kugelförmiges Gefäss AB, welches durch die Erweiterung einer Glasröhre gebildet wurde. An diese schloss sich unten bei G die Capillarröhre an, welche zu dem betreffenden Experimente benutzt wurde. Vor dem Eintritte in das Capillarrohr musste die Flüssigkeit eine kleine Erweiterung des stärkeren Rohres passiren. Oberhalb und unterhalb des kugelförmigen Gefässes bei C und E waren feine Striche in das Glas eingeritzt, welche als Marken dienten. Das Glasrohr konnte durch Oeffnen eines Hahns mit einem kupfernen Ballon in Verbindung gesetzt werden, in welchem die Luft vermittelst einer Compressionspumpe bis auf 11 Atmosphären zusammengepresst werden konnte. Der Druck der zusammengepressten Luft konnte, wo er zu stark war um direct durch eine Wassersäule gemessen zu werden, durch ein mit dem Ballon in Verbindung stehendes offenes Quecksilbermanometer bestimmt werden, welches mit einer sehr genauen Theilung und Nonien versehen war. Es wurde bei einigen der Versuche der Druck bis auf die enorme Grösse von über 8 Atmosphären gesteigert*). Unmittelbar vor der Mündung des Capillargefässes befand sich die Kugel eines Thermometers, welche von der ausfliessenden Flüssigkeit getroffen wurde, und zur Messung ihrer Temperatur diente. Der ganze in Figur 3, Taf. II. gezeichnete Theil des Apparates nebst dem Thermometer ging durch den Deckel eines grösseren Gefässes, welches wiederum in einem Eimer stand, der mit Wasser gefüllt war, dessen Temperatur, wenn es sich nicht darum handelte, dieselbe zu steigern, constant auf 10^{0} erhalten wurde.

*) Bis auf $6136{,}534^{\text{mm}}$ Quecksilberdruck $= 83{,}156^{\text{m}}$ Wasserdruck $= 8{,}3$ Atmosphären ca Vergl. P. No. 76, Tableau 26. de la premiere série d'experiences

Poiseuille variirte nun nach der Reihe einzeln*)

a) den Druck, b) die Länge der Röhre, c) den Durchmesser, d) die Temperatur.

Es ist bereits oben angegeben worden, innerhalb welcher Grenzen die ersten drei Grössen verändert wurden; die für jede einzelne Versuchsreihe constante Temperatur konnte von 0° bis 45° gesteigert werden.

Poiseuille beobachtete bei jedem Versuche die Zeit, während welcher die Flüssigkeit von der Marke C bis zur Marke E sank. Er gelangte durch die Discussion seiner Beobachtungen schliesslich zu folgender Gleichung

12) $$M = K \frac{pd^4}{l}$$

worin die Buchstaben folgende Bedeutung haben:

M das Gewicht der in einer Secunde ausgeflossenen Flüssigkeitsmenge in $^{\text{mgr.}}$,
p der Druck, durch die Höhe einer Quecksilbersäule bei 10° C., in $^{\text{mm.}}$,
d der Durchmesser der Röhre in $^{\text{mm.}}$,
l die Länge der Röhre in $^{\text{mm.}}$

K bezeichnet eine von den Dimensionen des Rohres unabhängige, dagegen von der Schwerkraft und namentlich der Temperatur abhängige Grösse, für welche Poiseuille den Ausdruck giebt

13) $$K = 1836\,724 \times (1 + 0{,}00\,336793\ \tau + 0{,}000\,2209936\ \tau^2)$$

worin τ die Temperatur in Centesimalgraden bezeichnet.

Ist der Druck statt durch die Höhe einer Quecksilbersäule durch diejenige einer Wassersäule gegeben, so ist statt des Zahlenfactors 1836,724 zu setzen

$$\frac{1836{,}724}{13{,}577} = 135{,}282$$

dieser Werth gilt aber strenge genommen nur für Paris, wo $g = 9{,}808^{\text{m}}$ ist.

Um die Gl. (12) auf die Form des Hagen'schen Ausdruckes für die Widerstandshöhe**) zu bringen, braucht man nur zu setzen

14) $$M = \frac{\pi}{4}\ d^2\ c$$

worin die Grössen M, d und c die bisherige Bedeutung haben. Dadurch verwandelt sie sich in folgende

15) $$p = K'\ \frac{lc}{d^2}$$

was mit dem Hagen'schen Ausdrucke übereinstimmt wenn man $K' = \beta$ setzt. Ist p wie oben durch die Höhe einer Wassersäule in Millimetern gegeben, so wird nach dem Obigen

16) $$K' = \frac{0{,}00580561}{1 + 0{,}0336793\ \tau + 0{,}000\,2209936\ \tau^2}.$$

Die Uebereinstimmung der nach dieser Formel berechneten Werthe mit den

*) P. I. chap. I. No. 34 bis 80; No. 81 bis 112; No. 113 bis 137.

**) Das zweite Glied auf der rechten Seite der Gl. (11) wenn darin $\alpha = 0$ gesetzt wird.

direct beobachteten ist ausserordentlich, da die letzteren von den ersteren gewöhnlich erst in der vierten Stelle um eine oder zwei Einheiten abweichen*)

Hieraus geht einerseits hervor, mit wie ausserordentlicher Genauigkeit die Experimente Poiseuille's angestellt sind, anderseits aber auch, dass die von ihm angegebene Formel das Gesetz der Bewegung wirklich darstellt. Weil dieselbe indessen mit der bis dahin allgemein angenommenen Prony'schen**) im Widerspruch stand, welche die Form hatte

17) $$p = \frac{l}{D}(\alpha\, c + \beta\, c^2)$$

(wo die Grössen l, D, c, p die frühere Bedeutung haben, α und β aber Constanten bedeuten) so ernannte die Pariser Akademie der Wissenschaften eine Commission zur Prüfung der Untersuchungen Poiseuille's. Diese wiederholte seine Experimente mit etwas weiteren Röhren (von $0{,}13^{mm}$ bis $0{,}27^{mm}$) und unter Anwendung einer noch genaueren Methode der Druckmessung, konnte indessen das von ihm gefundene Gesetz lediglich bestätigen. Den Widerspruch mit der oben angeführten Prony'schen Formel sowie mit den Beobachtungen von Gerstner und Girard bei weiteren Röhren***) suchte man durch die Verschiedenheit der Dimensionen der von ihnen angewandten Röhren zu erklären, nahm also an, dass die von Poiseuille aufgestellte Formel nur für Capillarröhren gelte. Dass diese Annahme unrichtig ist, folgt wie bereits oben bemerkt†) mit W a h r s c h e i n l i c h k e i t aus den bereits besprochenen Hagen'schen, mit E v i d e n z aus den Jacobson'schen Untersuchungen, auf welche im Folgenden noch näher eingegangen werden wird. Einige neuere Physiker, wie Fick und namentlich Hagenbach††), haben versucht nachzuweisen, dass das Poiseuille'sche Gesetz nur so lange gelte als man die Geschwindigkeitshöhe vernachlässigen könne. Sei dieses nicht der Fall, so gelte die allgemeinere Gleichung

18) $$h = K' \frac{l}{d^2}\, c + 0{,}000080865\, c^2$$

worin das erste Glied die Widerstandshöhe (nach Poiseuille's Gesetz), das zweite die Geschwindigkeitshöhe bedeutet. Hagenbach hat nach der obigen Formel aus einer grössern Anzahl der Poiseuille'schen Beobachtungen die constante K'†††) berechnet, und zwar aus solchen, die ausserhalb der Grenze seines Gesetzes liegen. Die gefundenen Werthe stimmen häufig ziemlich genau mit denen überein, welche aus Versuchen innerhalb der Grenze ermittelt sind. Die noch übrig bleibenden Abweichungen erklärt Hagenbach durch den von ihm eingeführten „Erschütterungswiderstand", der sich bei weiteren Röhren und rauhen Wänden bemerkbar mache. Dass diese Ansicht nicht stichhaltig sei, ist von Jacobson überzeugend nachgewiesen[a]). Dieser hat nämlich gezeigt, dass die Poiseuille'schen Beobachtungen ausserhalb der Grenze[b]) sich nicht, wie es nach den Hagenbach'schen Tabellen den Anschein hat, d u r c h g e h e n d s sondern nur zum Theil unter der Form

$$h = sc + tc^2$$

*) Vergl. die weiter unten pag. 15 mitgetheilte Tabelle. **) Vergl. D. p. 144. ***) Memoires de l'Institut. 1813—1816. †) Vergl. pag. 11. ††) Vergl. Pogg. Ann. Bd. 109. pag. 385 u. ff.

†††) $K' = 32\frac{\eta}{g}$ wo η den Coefficienten der inneren Reibung bedeutet. Vergl. weiter unt. pag. 18.

a) Siehe J. III pag. 325. b) P. seconde série d'expériences No. 42 etc.

darstellen lassen, dass ferner der Coefficient t nicht constant und fast immer erheblich grösser ist als Hagenbach ihn angenommen hat. Jacobson macht ferner darauf aufmerksam, dass die Uebereinstimmung in den Werthen von K' (resp. η) auch da, wo sich die Beobachtungen durch die Interpolationsformel darstellen lassen, durchaus nicht der bei Poiseuille's Methode erreichbaren entspricht, da sie meistens schon in der zweiten Stelle differiren, während die übrigen auf vier Ziffern genau sind. Der „Erschütterungswiderstand", der dieses erklären solle, dürfe doch (abgesehen havon, ob er überhaupt annehmbar sei) so lange die Bewegung zur Axe parallel — und diese Voraussetzung mache Hagenbach gerade für die vorliegenden Versuche geltend*) — nicht zu statuiren sein.

Die Form des Ausdruckes allein sei ferner durchaus nicht massgebend, es liessen sich häufig, namentlich bei engeren Röhren, Beobachtungen ausserhalb der Grenze des Gesetzes unter derselben Form darstellen (wie durch Zahlenbeispiele belegt wird). So scheine ihm aus Poiseuille's Versuchen das Gegentheil von dem hervorzugehen, was Hagenbach daraus geschlossen, dass nämlich die Vorstellung einer Widerstandshöhe, welche die Reibung überwinden, und einer Geschwindigkeitshöhe, welche die Bewegung erzeugen soll, nicht nur theoretisch unzulässig**), sondern auch mit der Erfahrung im Widerspruche sei. Man dürfe nur seine Versuche bei hohem Drucke innerhalb der Grenze durchsehen, um zu erkennen, dass die Ausflussgeschwindigkeiten bei derselben so beträchtlich sind, dass eine Vernachlässigung der sogenannten „Geschwindigkeitshöhe" auch hier nicht erlaubt wäre.

Um zu dieser letzten Behauptung einen Beleg zu geben, wähle ich aus dem reichhaltigen in der Poiseuille'schen Arbeit enthaltenen Beobachtungsmateriale zwei Reihen aus.

1) Poiseuille recherches experimentales No. 152 Röhre A.

Länge der Röhre . . . . 100,5 mm
Mittlerer Durchmesser . . 0,141125
Druck . . . . 776,0 (Quecksilberhöhe).

T. Temperatur. ° Cels.	M. Ausflussquantum pro 1 Secunde berechnet mgr.	M. Ausflussquantum pro 1 Secunde beobachtet mgr.
0,6	5.7395	5.7437
5	6.6038	6.6096
10,0	7.6443	7.6465
15	8.7471	8.7499
20	9.9119	9.9153
25	11.1389	11.1458
30	12.4542	12.4563
35,1	13.8071	13.8069
40,1	15.2218	15.2187
45,1	16.6686	16.6740

*) Insofern Hagenbach in seine Tabellen nicht selten Beobachungen innerhalb der Grenze aufgenommen hat. **) Vergl. weiter unten pag. 23.

Berechnet man aus den Zahlen der letzten Columne die entsprechenden Werthe der mittleren Geschwindigkeit und aus diesen nach der Formel

19) $$h' = \frac{c^2}{k^2 2g}$$

worin $k = 0{,}8^{\text{m}}$ ca. und $g = 9808^{\text{mm}}$ zu setzen ist*) die entsprechenden Geschwindigkeitshöhen, so findet man z. B. für:

$\tau =$	10^0	20^0	30^0	40^0	45^0
$h =$	$19{,}02^{\text{mm}}$	32,0	50,5	75,4	99,0

Werthe, welche viel zu bedeutend sind, als dass man sie gegenüber der Genauigkeit der Poiseuille'schen Messungen etwa für Grössen von der Ordnung der Beobachtungsfehler halten könnte**). Selbst bei noch viel höherem Drucke zeigt sich die mittlere Geschwindigkeit (resp. M) dem Drucke proportional, wie folgende Tabelle zeigt***).

Röhre K.

Länge der Röhre . . . . $l = 364{,}00^{\text{mm}}$
Durchmesser am freien Ende $D = 0{,}1316$

Experiment No.	Temperatur. ^{0} Cels.	Quecksilber-druck. mm.	Zeit des Ausflusses für 1^{cm} Cub. Secunden.
1	11	54.987	8590.00
2	11	210.129	2250.00
3	11	419.645	1125.75
4	11	835.565	565.00
5	12	1576.000	286.00
6	11	2338.37	197.50
7	11	3095.54	154.00
8	11	3856.94	123.00
9	11	4616.53	106.25
10	11	5376.53	88.25
11	11	6136.53	77.50

Indem man von den Daten des 2ten Experimentes ausgeht und die Zeit, während welcher 1^{cm} Cub. ausfliesst (also auch die mittlere Geschwindigkeit) dem Drucke direct proportional setzt, findet man folgendes:

Berechnete Zeiten. Secunden.	Beobachtete Zeiten. Secunden.	Berechnete Zeiten. Secunden.	Beobachtete Zeiten Secunden.
8598.2	8590.0	122.80	123.0
1126.6	1125.7	102.40	106.25
565.8	565.0	87.93	88.25
202.1	197.5	77.04	77.50
152.73	154.0		

*) Vergl. H. II. p. 49, ferner H. Wbk. I. pag. 217, H. III. pag. 26.

) Aus den in der obigen Tabelle enthaltenen Angaben lässt sich auch der bedeutende Einfluss der Temperatur auf die Grösse des Ausflussquantums in 1 Sec. erkennen, insofern letztere bei einer Temperaturerhöhung von 0 bis 45^0 fast auf das dreifache steigt, während der Druck unverändert geblieben ist. *) P. No. 76.

Die Ausflussmenge bleibt hier also auch dem Drucke proportional, obgleich der letztere bis zu einer ausserordentlichen Höhe (7,9 Atmosphären) gesteigert wurde*) Die Bewegung ist demnach in dieser Röhre bei einer Temperatur von 11° selbst bei dem stärksten angewandten Drucke zur Axe parallel geblieben, denn nur unter dieser Bedingung gilt das Hagen-Poiseuille'sche Gesetz (vergl. weiter unten pag. 19. und Anhang No. 3). Vergleicht man die Dimensionen der Röhre K mit denen der Röhre A, so ersieht man, dass die Durchmesser beider nahezu gleich sind; die Länge von K ist ca. 3,6 mal so gross, während der Druck fast 8 mal so gross ist. Bei der Röhre A war die Grenze der parallelen Bewegung bereits für einen Druck von 387,52^{mm} Quecksilber und der Temperatur von 10° überschritten, wenn die Länge durch Abschneiden des Endes auf 25,55^{mm} redueirt wurde**).

Es wurde bereits oben hervorgehoben, dass der experimentelle Beweis, dass das Poisseuille'sche Gesetz auch für weitere Röhren als capillare gelte, nur durch directe Messung des Seitendruckes geliefert werden könne. Diese Messung lässst sich ohne erhebliche Schwierigkeit auf die pag.8 angegebene Weise ausführen, nur muss man dabei Sorge tragen, dass bei der Durchbohrung der Seitenwandung im Innern der Röhre keinerlei Hervorragungen entstehen. Durch solche wird nämlich, wie aus den älteren Versuchen von Daniel Bernouilli und den neueren von Stefan hervorgeht, die Strömung allerdings wesentlich verändert, während die geringe Unterbrechung der Continuität der Oberfläche, wie sie durch ein kleines Bohrloch ohne vorspringende Ränder hervorgebracht wird, ohne bemerkbaren Einfluss ist.

Unter Anwendung dieser Methode ist nun von Heinrich Jacobson durch zahlreiche exacte Messungen nachgewiesen worden, dass, wie es durch die Untersuchungen Hagen's allerdings sehr wahrscheinlich geworden war, das Gesetz Poiseuille's auch für weitere Röhren gelte.

Die von ihm angewandten Röhren hatten zum Theil nahe gleiche Weite, wie diejenigen, an welchen Gerstner und Girard zu einer durchaus von der Poiseuille'schen abweichenden Formel gelangt waren. Jacobson zeigt aber, dass die auffallenden Abweichungen in den Beobachtungen der genannten Experimentatoren sich nur durch erhebliche Ungleichheiten des Durchmessers der angewandten Röhre erklären lassen.†)

Die Arbeiten Jacobson's erhalten, ganz abgesehen von den sehr schätzbaren eigenen Untersuchungen des Verfassers, einen besonderen Werth dadurch, dass sie sich auf die strenge von F. E. Neumann (sen.) in Königsberg entwickelte Theorie der Bewegung des Wassers in cylindrischen Röhren stützen. Da erst durch diese die mechanische Bedeutung sowohl der Grösse K in der Poiseuille'-

*) Die Geschwindigkeiten waren bei den Experimenten No. 2, 4, 8, 11 folgende:

	No. 2	No. 4	No. 8	No. 11
	32,67 mm	30,01 mm	597,7 mm	948,6 mm
die entsprechenden Geschwindigkeitshöhen	0,085 mm	1,35 mm	28,46 mm	71,69 mm

**) P. No. 42, 1er Tableau de la seconde série d'expériences.

†) Es sollte z. B. bei einer kupfernen Röhre von 1,83 mm. Durchmesser für $t = 9{,}5^0 - 6^0$ C. und einer Druckhöhe $h = 100$ mm. bei einer Länge $l = 1790$ mm. die Geschwindigkeit grösser als bei $l = 1590$ mm. und beinahe gleich der bei $l = 992$ mm. vorhandenen gewesen sein. Vergl. J. III. p. 306.

schen Formel als auch der Coefficienten s und t in der Hagen'schen Gleichung (s. oben pag. 10 Gl. 5) klar gelegt wird, so ist es ohne Kenntniss derselben nicht möglich eine tiefere Einsicht in das Wesen der Bewegung zu gewinnen.

Die genannte Theorie basirt auf der zuerst von Newton aufgestellten Hypothese, dass die äussere Reibung, wie sie zwischen der Oberfläche eines festen Körpers und einer an derselben gleitenden Flüssigkeit*) oder auch zwischen zwei heterogenen Flüssigkeiten wie z. B. Wasser und Oel stattfindet, der Differenz der Geschwindigkeiten $(u-v)$ und der Grösse der sich berührenden Flächen (O) proportional ist, also ausgedrückt wird durch ein Produkt von der Form

$$EO\,(u-v)$$

worin E eine von der Natur der sich berührenden Körper abhängige Constante bedeutet, welche man den Coefficienten der äusseren Reibung nennt. Der Werth derselben wird unendlich gross, wenn die Flüssigkeit an der Wandung haftet, wie z. B. bei Wasser und Glas. Aus derselben Hypothese folgt mit Nothwendigkeit, dass die zwischen zwei aneinander grenzenden Schichten derselben Flüssigkeit stattfindende Reibung dem Differentialquotienten der Geschwindigkeit nach der Normale (n) der reibenden Fläche proportional sein muss, mithin ausgedrückt wird durch das Produkt

$$\eta\,\omega\,\frac{\partial u}{\partial n}$$

worin ω die Grösse der reibenden Fläche, η eine Constante bedeutet, die als das Maas der Zähigkeit (Viscosität) der betreffenden Flüssigkeit betrachtet werden kann, und der Coefficient der inneren Reibung genannt wird.

Mit Benutzung dieser Hypothese lässt sich nun die Differentialgleichung für die Bewegung eines Elementes der Flüssigkeit bilden, da auf dieses ausser der Reibung an seinen Seitenflächen nur die Schwerkraft wirkt. Wenn man nun annimmt, dass ein stationärer Zustand der Bewegung eingetreten sei, dass dieselbe ferner nur parallel zur Axe des Rohres stattfinde und zwar so, dass alle in derselben Entfernung von der Axe befindlichen Theilchen dieselbe Geschwindigkeit haben, so vereinfacht sich die Bewegungsgleichung so, dass man sie selbst für den Fall auflösen kann, wenn ausser der gegenseitigen Verschiebung der einzelnen Flüssigkeitscylinder eine Gleitung an der Wandung des Rohres angenommen wird. Die Ausführung der Rechnung ergiebt schliesslich**)

$$20)\qquad u = \frac{p^0}{4\eta l}\left\{\varrho^2\left(1+\frac{2\eta}{E\varrho}\right)-r^2\right\}$$

Hierin bedeuten:

u die Geschwindigkeit eines beliebigen Flüssigkeitstheilchens,
r die Entfernung desselben von der Axe,
ϱ den Radius } des Rohres,
l die Länge } des Rohres,
p^0 der Druck am Anfange des Rohres†),
E den Coefficienten der äusseren } Reibung.
η „ „ „ inneren } Reibung.

*) Vergl. oben pag. 6. **) Siehe Anhang No. 3. †) Derselbe ist nicht mit der Druckhöhe im Speisegefässe, die früher mit h bezeichnet wurde, zu verwechseln. Vergl. oben pag. 8.

Wird die Wandung des Rohres von der Flüssigkeit benetzt, so verwandelt sich die obige Gleichung da für diesen Fall $E = \infty$ ist, in folgende einfachere

21) $$u = \frac{p^0}{4\eta l}(\varrho^2 - r^2)$$

Nennt man wieder c die mittlere Geschwindigkeit, so ergiebt sich hieraus

22) $$p^0 = 8\eta \frac{l}{\varrho^2} c$$

Diese Gleichung bleibt auch gültig, wenn man unter p^0 den Seitendruck an einer beliebigen Stelle des Rohres, unter l die zugehörige Entfernung von der Mündung versteht. Sie stimmt der Form nach mit der Gl. (1) überein und wird mit derselben identisch, wenn man

23) $$f = 32\eta$$

setzt; sie ist also als der theoretische Ausdruck für das Hagen-Poiseuille'sche Gesetz zu betrachten. Vergleicht man die Gl. (22) mit der aus den Poiseuille'schen Beobachtungen abgeleiteten Gleichung (12) pag. 13 und bemerkt, dass dort p die Höhe einer Wassersäule von 10° bedeutete p^0 also gleich $gp\delta$ ist (wo δ die der Temperatur τ entsprechende Dichtigkeit bedeutet) so ergiebt sich leicht

24) $$\eta = \frac{g\delta}{5511{,}3} \times \frac{1}{1 + 0.033679\,\tau + 0.0002209\,\tau^2}$$

Nach dieser Formel lässt sich also der Reibungecoefficient des destillirten Wassers für eine beliebige Temperatur berechnen.

Für die Geschwindigkeit U des Axenfadens dagegen erhält man aus Gl. (21) indem man $r = o$ setzt

25) $$U = \frac{p^0}{4\eta l} R^2$$

Dieselbe ist also gleich der zweifachen und nicht wie Hagen annahm gleich der dreifachen mittlern Geschwindigkeit. Auch zeigt die Gleichung (21), dass die Geschwindigkeit eines beliebigen Flüssigkeitstheilchens (u) keineswegs wie Hagen ebenfalls annahm der Entfernung (r) von der Axe des Rohres proportional ist.*)

Jacobson hat nun zunächst einige Reihen von Beobachtungen angestellt, um die Gültigkeit des Poiseuille'schen Gesetzes auch für weitere Röhren nachzuweisen.

Die bei seinen neueren Beobachtungen von ihm benutzte Messingröhre (D) die weiteste von allen, hatte einen Durchmesser von 5,108 mm. Sie bestand aus mehreren über einen polirten Stahldorn gezogenen und sorgfältig ausgeschliffenen Stücken, welche vermittelst konischer Ansatzstücke, die durch Schrauben festgezogen wurden, so aneinander gefügt werden konnten, dass an ihren Verbindungsstellen sich keine Ungleichheit der inneren Oberfläche zeigte. Ihre Gesammtlänge betrug 2518,9 mm. In der Seitenwandung befanden sich in Entfernungen von 1,5 mm, 10,1 mm und 17,5 mm vom Anfange feine Bohrlöcher, welche durch Drehung des Conus, vermittelst dessen die Röhre in einen entsprechenden Ansatz des Speisegefässes eingesetzt wurde, mit einem aus einer ³/₄ Zoll weiten senkrechten Glasröhre bestehenden Piezometer in Communication gebracht werden konnte**). Indem Jacobson so direct den Seitendruck (p^0) oder die Wider-

*) Vergl. oben pag. 8. **) J. II. 307.

standshöhe maass und zugleich die dazu gehörige mittlere Geschwindigkeit (durch Wägung der in einer bestimmten Zeit ausgeflossenen Wassermenge) bestimmte, zeigte er, dass auch für weitere Röhren das Poiseuille'sche Gesetz gilt, indem er nachwies, dass der Druck an der Einflussöffnung (p^0) proportional der Länge der Röhre und der mittleren Ausflussgeschwindigkeit, umgekehrt proportional dem Quadrate des Radius ist (Vergl. Gleichung 22.). Die von ihm für sehr verschiedene Temperaturen (zwischen 0,8 und 21° C.) aus seinen Messungen nach Gl. (22) berechneten Werthe von η stimmen mit denen, welche sich aus der Poiseuille'schen Formel*) ergeben etwa bis auf den 80ten oder 100ten Theil des ganzen Werthes überein, was bei einer so kleinen und mit der Temperatur in hohem Maase veränderlichen Grösse als ausreichend erscheinen wird, wenn man bedenkt, dass kleine Temperaturschwankungen sich nicht verhindern lassen und dass bei so langen und weiten Röhren als die von Jacobson angewandten auch geringe Ungleichmässigkeiten des Durchmessers schwer zu vermeiden sind. Da ferner die Gleichung (22) nur unter der Voraussetzung gilt, dass die Flüssigkeit an der Wandung nicht gleite und ferner, dass die der Wandung angrenzende Schicht unendlich dünn sei, so folgt aus ihrer Uebereinstimmung mit der Beobachtung einmal, dass das Wasser an polirtem Messing haftet, die ruhende Schicht jedoch nicht wie Hagen annahm, eine endliche Dicke besitzt. (Vergl. oben pag. 11.)

Durch Vergleichung der Drucke an den drei verschiedenen Durchbohrungen entdeckte Jacobson die bisher nicht bekannte und sehr bemerkenswerthe Thatsache, dass sobald man die Grenze des Gesetzes überschreitet, die Continuität des Ausflusses also aufhört (vergl. pag. 6), der Druck am Anfange des Rohres (p_0) stets kleiner ist als der an der nächsten weiter entfernten Durchbohrung gemessene, und dass die Differenz steigt, je weiter man sich von der Grenze entfernt, dass ferner der Druck an der Einflussöffnung um so mehr sinkt, je grösser der Durchmesser im Verhältniss zur Länge ist.

Wie bedeutend diese Senkung des Druckes ist, lässt sich aus der Tabelle**) auf der folgenden Seite, auf welche ich mich später noch einmal beziehen werde, erkennen. Darin bezeichnen

$$p^0 \quad p' \quad p''$$

die in den Entfernungen

$$1{,}5^{\text{mm}} \quad 10{,}1^{\text{mm}} \quad 17{,}5^{\text{mm}}$$

vom Anfange der Röhre gemessenen Drucke, h die Höhe des Wassers im Speisegefässe. Die Angaben beziehen sich auf Theile einer Skala der an jeder $= 0{,}922^{\text{mm}}$ war.

Jacobson bemerkt darüber folgendes:

„Zur Erklärung dieser eigenthümlichen Druckerscheinungen in der Nähe der „Einflussöffnung reicht die Theorie noch nicht aus; es müsste dazu das Gesetz „der Strömung bekannt sein, wenn ihre Richtung nicht mehr der Axe parallel, „der Druck innerhalb desselben Querschnittes also nicht constant ist. Einer

*) Siehe oben Gl. 18. **) Vergl. J. II. pag. 312 Tab. III.

Messingröhre D; $\varrho = 2{,}551$ mm.

1) $l = 1006{,}8$ mm.				2) $l = 1338{,}5$ mm.			
h.	p⁰	p′	p″	h.	p⁰	p′	p″
106.6	86	88	88.5	140.5	117.6	119.4	119.6
115.6	90.3	94.8	94.3	162.6	133.2	138.3	138
125.1	97.2	101	101.4	177.5	143.7	150.2	150.2
136.5	105.2	111.6	111	279.8	232.5	242.4	243
160	123.5	130.7	130.8	427.3	335.2	366	365.7
193	149	159.5	159	471.3	368.7	403.4	402.2
199	152.2	163.5	164	515.8	402	444.1	440
279	213.3	232.7	232				
341.8	251.2	288.7	283.2	3) $l = 2123{,}4$ mm.			
372.6	274.7	312.2	307.2	403.8	353.2	369.2	369.1
				456.7	399	417.1	415.2
				513	447.3	470.4	468.1
				541	470.3	491.2	488.8

„ähnlichen Erscheinung wie der vorliegenden begegnet man bei kurzen Ansatz- „röhren. Bohrt man nämlich am Anfange derselben ein kleines Loch durch die „Wand, so findet ein Ansaugen der Luftstatt, weil der Druck an dieser Stelle „in Folge der Contraction des Strahles negativ, niedriger als der Atmosphären- „druck an der Ausflussöffnung ist. In unserm Falle scheint mir, so lange die „Bewegung binnen, der an der Einflussöffnung entstehende Wirbel C. sich nicht „1,5 mm. weit in die Röhre hinein zu erstrecken, bei engen Röhren auch ausser- „halb der liniären Bewegung keine grösseren Dimensionen anzunehmen; je weiter „und kürzer dieselben aber sind, um so tiefer in sie hineinzureichen.“

Jacobson hat ferner eine Reihe von Versuchen angestellt, um die Relation zwischen Länge, Durchmesser, Druck und Temperatur zu ermitteln, durch welche die Grenze der Gültigkeit des Hagen-Poiseuille'schen Gesetzes bestimmt ist. So lange diese Relation nicht bekannt ist, lässt sich nur durch die Versuche selbst entscheiden, ob die Grenze überschritten ist oder nicht. Aus den Beobachtungen Poiseuille's geht nur hervor, dass das Verhältniss zwischen Länge und Durchmesser kein constantes ist; die aus den Jacobson'schen und auch aus den Hagen'schen Beobachtungen für dieses Verhältniss sich ergebenden Werthe weichen auffallend von dem von Poiseuille geforderten ab.

Hagen stellte die Hypothese auf, dass das Maximum der Ausflussgeschwindigkeit, welches mit der angedeuteten Grenze der Gültigkeit des in Rede stehenden Gesetzes zusammenfällt, dann eintrete, wenn der Axenfaden die Geschwindigkeit erlangt habe, welche die Druckhöhe erzeugen würde, wenn keine Widerstände vorhanden wären. Dann würde also nach dem Torricelli'schen Satze die Geschwindigkeit des in der Axe fliessenden Strahles

$$U = \sqrt{2gh'}$$

der in ihm vorhandene Druck an allen Stellen derselbe wie am Anfange der

*) Vergleiche H. I. pag. 64—65.

Röhre, nämlich $= gh$ sein. Die Neumann'sche Theorie bietet das Mittel diese Annahme zu prüfen. Setzt man nämlich die vorstehenden Werthe statt U und p^0 in die Gleichung 25. auf pag. 19, so ergiebt sich aus dieser die Gleichung

26) $$l = \frac{\sqrt{2gh}}{8\eta}\,\varrho^2$$

Jacobson stellte nun zur Prüfung, ob diese Relation für die Grenze gültig sei, Versuche an, indem er

1) Durch Veränderung der Temperatur die Grenzwerthe von η ermittelte für verschiedene Längen der Röhre, während h und R ungeändert blieben.

2) η und ϱ veränderte, während h und l constant blieben.

Er fand, dass die obige Grenzrelation, wenn man sie auf die erste Reihe der Beobachtungen anwendet, nur in zwei Fällen den Beobachtungen annähernd genügte, die Hagen'sche Hypothese also nicht stichhaltig sei. Dagegen bestätigte sich die Relation für die zweite Reihe der Beobachtungen, indem in der That die Grenzwerthe von η sich wie die Quadrate der Radien verhielten.

Jacobson stellte ferner, da er für die Hypothese Hagen's in den Beobachtungen keine genügende Begründung fand, Versuche an, um die Relation zwischen p^0 und l für die Grenze zu ermitteln. Es ergab sich aus denselben, dass die Drucke an der Einflussöffnung, bei denen sich das Gesetz der Bewegung ändert, proportional sind der Länge der Röhre. Es ergiebt sich z. B. aus einer bei 14° angestellten Versuchsreihe das Verhältniss der Längen für die Grenze

$$\frac{l}{l_1} = \frac{2418}{1006{,}8} = 2{,}402$$

Das Verhältniss der entsprechenden Drucke

$$\frac{p^0}{p_1^0} = \frac{194{,}6}{78{,}8} = 2{,}469$$

Bei einer andern Versuchsreihe wurde für $t = 15^0{,}8$ gefunden

$$\frac{l}{l_1} = \frac{2123{,}4}{711{,}8} = 2{,}984$$

$$\frac{p^0}{p_1^0} = \frac{174}{61{,}9} = 2{,}829$$

Da eine genaue Beobachtung der Grenzwerthe schwierig ist, kann eine grössere Uebereinstimmung kaum erwartet werden.

Die bisher angeführten Untersuchungen Jacobson's bezogen sich auf die Verificirung der theoretischen Gleichung (20) resp. (21) und sind zugleich als eine Bestätigung und Erweiterung der von Poiseuille auf rein experimentellem Wege erhaltenen Resultate anzusehen, indem durch sie die Gültigkeit seines an Capillaren gefundenen Gesetzes auch für weitere Röhren nachgewiesen wird und ausserdem Anhaltepunkte für die Grenze der Gültigkeit derselben gewonnen sind. In dem zweiten Theile seiner Arbeit hat Jacobson in ähnlicher Weise die Relation zwischen h und c (Siehe oben pag. 11 Gl. 11), welche von Hagen aus seinen sehr genauen Experimenten abgeleitet wurde, mit der theoretischen Gleichung, welche von Neumann auch für diesen Fall aufgestellt ist, verglichen.

Unter den bei der Ableitung des Poiseuille'schen Gesetzes zu Grunde liegenden Voraussetzungen (Siehe oben pag. 18 u. f.) und der ferneren Annahme, dass beim Uebergange des Wassers aus dem Speisegefässe in die Röhre kein Verlust an lebendiger Kraft stattfinde, führt die Theorie*) zu der Gleichung

27) $$h = \frac{c^2}{g} + \frac{8\eta l}{g\delta\varrho^2}\, c$$

Hierin bedeutet h also die Höhe des Niveaus im Speisebassin über der Ausmündung der Röhre, δ die Dichtigkeit der Flüssigkeit; die übrigen Buchstaben haben die oben (pag. 18) angegebene Bedeutung.

Die theoretisch abgeleitete Gleichung (27) hat nun in der That, abgesehen davon, dass in ihr das von c unabhängige Glied fehlt, dieselbe Form, wie die von Hagen auf empirischem Wege ermittelte. Aus ihr lässt sich indessen die mechanische Bedeutung der einzelnen Glieder erkennen.

Nach den Torricelli'schen Theorem ist bekanntlich ohne Berücksichtigung der innern Reibung

$$h = \frac{c^2}{2g}$$

Der Einfluss der Reibung bewirkt also:

erstens, dass das von c^2 abhängige Glied der Druckhöhe sich verdoppelt und

zweitens, dass noch ein zweites der ersten Potenz der Geschwindigkeit proportionales Glied hinzutritt.

Es folgt hieraus, dass die allgemeine Annahme, das in c^2 multiplicirte Glied stelle die Geschwindigkeitshöhe $\left(\frac{c^2}{2g}\right)$ dar, theoretisch nicht begründet ist. Es wurde bereits oben nachgewiesen**), dass sie auch mit den Ergebnissen der genaueren Experimente nicht in Einklang zu bringen ist.

Die mechanische Bedeutung des 2ten mit c proportionalen Gliedes, welches nach der Annahme Hagens die sogenannte Widerstandshöhe repräsentirt, ergiebt sich aus Gleichung (22). Nach dieser ist nämlich, wenn man

$$p^0 = g\delta h$$

setzt

28) $$h' = \frac{8\eta l}{g\delta\varrho^2}\, c$$

Da der Ausdruck auf der rechten Seite mit dem 2ten Gliede der Gl. (27) identisch ist, so wird durch dieses in der That der theoretische Werth des Seitendruckes am Anfange des Rohres dargestellt.

Jacobson's Versuche bestätigen nun im Wesentlichen die aus der Theorie abgeleiteten Resultate. Dieselben lassen sich zunächst genau durch einen Ausdruck von der Form

29) $$h = sc + tc^2$$

welche den der theoretischen Gleichung (27) entspricht, darstellen. Ein capillarer, von dem cylindrischen Mantel des ausfliessenden Strahles her gerichteter, zur Vergrösserung von h beitragender Gegendruck war also wenigstens bei den vom Verfasser benutzten Röhren nicht vorhanden. Jacobson hat dieses auch noch durch directe Versuche bewiesen, indem er den Strahl abwech-

*) Siehe Anhang No. 4.

**) Vergl. pag. 11 und 16

selnd in die Luft und unter Wasser austreten liess. „Die Geschwindigkeit war dieselbe beim Ausfluss unter Wasser wie in Luft.“

Die nach Gl. (22) berechneten Werthe von h' stimmen ferner mit den direct gemessenen so genau überein, als es bei der angewandten Methode irgend zu erwarten war, wie durch zahlreiche Versuche bei den verschiedensten Temperaturen, Druckhöhen und Längen nachgewiesen wird. Ich entnehme der von ihm mitgetheilten Reihe von Beobachtungen nur einzelne Beispiele, um den Grad der Uebereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung zu zeigen.

τ °C.	h	sc beobacht.	sc berechnet	c	l	$\frac{\eta}{g}$	s	t
0,75	148.4	129	131.2	424.3	1338.5	0.0001839	0.30958	0.00009266
	128.3	114.2	115.8			1847		
	89	80.5	82.3	266		1831		
4	105.2	72.5	73.1	512	711.8	1613	0.14276	0.00012203
	84.2	61.5		431.8		1623		
	66	49.9	·	354.6		1603		
12,5	100	78.8	78.5	478.5	1006.8	1326	0.16415	0.00009869
	96.9	75.4	75.4	459.5		1321		
	89.1	71.2	70.3	428.5		1338		
12,4	189.9	164.3	163.7	478.1	2123.4	1338	0.3424	0.0001101
	171.7	152.7	150.9	440.6		1322		
	158.9	143.6	140.3	411.8		1330		
	119.9	110.4	108.4	316.5		2330		

Für den Coefficienten t, welcher nach Gleichung (21) den theoretischen Werth $\frac{1}{g} = 0{,}0001019$ hat, ergaben sich aus der obigen Beobachtungsreihe allerdings zum Theil kleinere Werthe. Bei einer andern Beobachtungsreihe (J. III. Tab. VI.) schwankte derselbe zwischen 0,000101 und 0,000167, kam also dem theoretischen Werthe ziemlich nahe. Bei seinen früheren Versuchen hatte Jacobson statt des theoretischen Werthes $gt = 1$ gefunden $gt = 1{,}2$ bis 1,5.

Bei den obigen und den sonst von Jacobson angestellten Versuchen schwankte der Werth dieses Productes zwischen 1,1 und 1,66 und war zuweilen auch kleiner als 1.

Es ist für die Beurtheilung dieser Abweichungen nicht zu übersehen, dass bei Ableitung der Gleichung (27) angenommen wurde, dass beim Uebergange der Flüssigkeit in das Rohr kein Verlust an lebendiger Kraft stattfinde**). Aus dem Umstande, dass der theoretische Werth des Coefficienten von c^2 mit dem wirklich beobachteten nicht genau übereinstimmt, geht nur hervor, dass jene Annahme bei der von Jacobson gewählten Anordnung des Apparates (wie auch sonst meistens) nicht statthaft ist. Geht man, um den Verlust an lebendiger Kraft zu berechnen, von der Hypothese aus, dass der Strahl sich beim Eintritt in die Röhre (ähnlich wie in einem Ansatzrohre) contrahire, darauf wieder ausbreite und an die Wandung anlege, so erhält t, der Coefficient

*) J. II. tab. II. **) Vergl. pag. 23 und Anhang No. 4.

von c^2 den Werth $\frac{1}{g}\left[1+\left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right)^2\right]$ wo γ den Contractionscoefficienten bedeutet*), der nach Newton für enge Oeffnungen = 0,7 für weitere 0,6 ist. Man erhält demnach

für enge Oeffnungen gt = 1,18
„ weitere „ 1,41

was mit den oben angeführten von Jacobson wirklich beobachteten Werthen nahezu übereinstimmt. Es gewinnt hiernach die Annahme, dass der Strahl sich auch beim Eintritt in längere Röhren contrahire, einigen Anhalt.

Soviel geht aus den Versuchen Jacobsons in Uebereinstimmung mit der Theorie mit Sicherheit hervor, dass die Schwankungen von t nicht durch Temperaturschwankungen hervorgerufen werden. Hagen glaubte aus seinen Versuchen schliessen zu müssen, dass dieses der Fall sei. In dem von ihm aus seinen Beobachtungen abgeleiteten Ausdrucke

$$t = (\alpha' + l\beta')\ \frac{\varrho^4}{(\varrho-\alpha)^4}$$

sollte β' ein (nach Gl. 9 pag. 10) von der Temperatur abhängige Grösse bedeuten.

Während ferner nach Hagen, wie die vorstehende Gleichung lehrt, t eine lineäre Funktion der Länge ist, fand Jacobson diese Grösse von derselben unabhängig. In der oben (pag. 24) mitgetheilten Tabelle ist der Werth von t beim 4ten Versuche sehr nahe derselbe wie beim zweitem, obgleich die Länge beim letzteren fast dreimal so gross und die Temperatur eine um 8,4° höhere war.

Jacobson vermuthet eine Beziehung zwischen t und dem Geschwindigkeitscoefficienten, dessen Werth je nach der Druckhöhe, der Weite der Röhre, der Abrundung der scharfen Kanten an der Einmündungsstelle etwa zwischen 0,72 und 0,95 variiren soll, und meint, dass sich die Frage durch vergleichende Bestimmungen an Ansatz- und langen Röhren werde entscheiden lassen. Aus seinen Versuchen, die nur mit längeren Röhren angestellt wurden, liess sich darüber noch nichts feststellen. Die Angaben über den Geschwindigkeitscoefficienten sind übrigens sehr widersprechend. Hagen sah ihn mit abnehmender Druckhöhe sehr steigen**), Donders fallen; Weissbach ihn mit wachsendem Durchmesser fallen, Donders steigen. Soviel geht sowohl aus den Versuchen Jacobson's als denjenigen Hagen's hervor, dass eine Uebertragung der bei Ansatzröhren gefundenen Resultate auf lange Röhren nicht gestattet ist.

Uebrigens sei noch bemerkt, dass nach der oben gemachten Annahme, wenn man den Geschwindigkeitscoefficienten k nennt, so dass also

24) $$c^2 = k^2\ 2gh$$

ist, zwischen k und g die Beziehung stattfinden muss

25) $$\frac{1}{k^2} = 1 + \left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right)^2$$

k veränderte sich nach Hagen bei weiteren Oeffnungen mit abnehmendem h von 0,82 bis 0,7. Aus den von Jacobson für die rechte Seite gefundenen Werthen 1,22 bis 1,47 würde k = 0,82 bis 0,90 folgen. Innerhalb dieser Grenzen liegen

*) Vergleiche J. I. pag. 98. **) Vergleiche H. II. pag. 119.

auch die bei engen Ansatzröhren bestimmten Werthe für k. Der Verlust an lebendiger Kraft scheint demnach nahezu derselbe zu sein, ob die Strömung durch ein Ansatzrohr oder durch eine längere Röhre erfolgt*).

Die im Vorgehenden mitgetheilten Untersuchungen beziehen sich nur auf den Fall, wenn die Bewegung einer Flüssigkeit der Axe des Rohres parallel ist. Auf grössere Leitungen lassen sich dieselben nicht anwenden, weil bei diesen die Länge im Verhältniss zum Durchmesser eine so geringe ist, dass wenigstens bei den Geschwindigkeiten, wie sie gewöhnlich vorkommen, die Maxima und Minima der Hagen'schen Geschwindigkeitscurven, welche nach dem Obigen die Grenze des Poiseuille'schen Gesetzes bezeichnen, (vergl. oben pag. 7 und 9) unter den Gefrierpunkt fallen. Hagen hat aus seinen Messungen zwei Interpolationsformeln abgeleitet, nach welchen sich annähernd berechnen lässt, für welche Geschwindigkeit die Maxima und Minima in den Gefrierpunkt fallen. Auf preuss. Zolle bezogen lauten dieselben**), wenn ϱ den Radius der Röhre bezeichnet

32)
$$c = \frac{3.452}{\varrho} \text{ für das Maximum,}$$
$$c = \frac{4.2}{\varrho} \text{ für das Minimum.}$$

Wendet man diese Ausdrücke z. B. auf die von mir untersuchte Danziger (Prangenauer) Wasserleitung, deren lichte Weite 16 Zoll beträgt, an, so wird das Maximum der Geschwindigkeit, welches die Grenze der axialen Bewegung bezeichnet, schon bei einer Geschwindigkeit von 0.43 Zollen, das Minimum bei einer Geschwindigkeit von 0.54 Zollen eintreten. Die mittlere Geschwindigkeit ist aber grösser als 24 Zoll, die Temperatur ca. 6°, so dass also bei dieser Leitung, obgleich ihre Länge etwa 30000 Mal den Durchmesser übertrifft, die Grenze des Hagen-Poiseuille'schen Gesetzes bei weitem überschritten ist. Aehnliches findet bei allen grösseren Leitungen statt, bei denen also die Maxima und Minima der Geschwindigkeit nicht beobachtet werden können.

Während für die Bewegung unterhalb der Grenze des *Hagen-Poiseuille*'schen Gesetzes eine im Wesentlichen mit der Erfahrung übereinstimmende Theorie existirt, fehlt ausserhalb jener Grenze eine solche Grundlage noch gänzlich.

Es wurde bereits im Eingange (pag. 6) bemerkt, dass bei höherem Drucke die Wassertheilchen sich nicht mehr parallel zur Axe, sondern nach den verschiedensten Richtungen bewegen, woraus folgt, dass auch für denselben Querschnitt der Druck nicht mehr als constant betrachtet werden kann. Da für diesen Fall die Integration der Differentialgleichungen, durch welche die Bewegung definirt wird†), bisher nicht ausgeführt werden konnte, so ist man hier vollständig auf den Weg der Erfahrung angewiesen. Man muss versuchen, aus möglichst genauen, systematisch angestellten Beobachtungen mit Hülfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung die Gesetze der Bewegung abzuleiten oder wenigstens, wenn es sich nur um practische Anwendungen handelt, zu möglichst sicheren Interpolationsformeln zu gelangen. Leider ist das Beobachtungsmaterial gerade für den vorliegenden und in der Praxis fast allein vorkommenden Fall noch un-

*) Vergl. J. I. pag. 98. **) Vergl. H. II. pag. 63. †) Vergl. über dieselben O. E. Meyer in Crelle-Borchardts Journal Bd. 59.

zureichend, und namentlich fehlten bis vor kurzer Zeit genaue Beobachtungen an grösseren Leitungen gänzlich.

Unter den an kleinen Röhren angestellten Messungen sind zunächst diejenigen Hagens zu erwähnen, welche im letzten Theile der oben erwähnten Abhandlung*) bearbeitet sind. Die älteren Beobachtungen von Gerstner und Girard u. A. sind deswegen nicht zu verwerthen, weil bei ihnen, (abgesehen von dem Mangel an der erforderlichen Genauigkeit) auf die Grenze des Hagen-Poiseuille'schen Gesetzes, sowie auf die Temperatur keine Rücksicht genommen ist.

Die Hagen'schen Messungen, so genau sie im Uebrigen sind, leiden an dem wesentlichen Uebelstande, dass bei ihnen die Widerstandshöhe, auf deren genaue Kenntniss es vor allem ankommt, nicht direct beobachtet, sondern durch Abzug der Geschwindigkeitshöhe d. h. des Druckverlustes am Anfange des Rohres von der ganzen Druckhöhe berechnet worden ist. Wie unsicher diese Berechnung aber, namentlich bei bedeutenden Geschwindigkeiten ist, wurde oben erörtert, (vergl. pag. 11) abgesehen davon, dass der ganze Begriff der Geschwindigkeitshöhe, wie er gewöhnlich gefasst wird, theoretisch nicht gerechtfertigt erscheint**). Die oben mitgetheilten Beobachtungen Jacobson's (vergl. pag. 21 u. ff.) lehren, dass es nicht einmal genügt, den Druck unmittelbar hinter der Eintrittsstelle der Flüssigkeit zu messen, da derselbe, wie oben erwähnt wurde, jenseits der Grenze des Hagen-Poiseuille'schen Gesetzes in einer von der Geschwindigkeit resp. der Länge des Rohres abhängigen Entfernung vom Anfange erst sein Maximum erreicht, und nur von da ab (wie Jacobson ebenfalls gefunden hat) nach dem Gesetze einer geraden Linie abnimmt. Es ist also erforderlich das Maximum des Druckes und die Stelle wo es stattfindet zu ermitteln. Ein Blick auf die pag. 21 mitgetheilten Tabelle lehrt, dass die Differenzen zwischen dem Maximal-Werthe des Druckes und p^0 namentlich bei verhältnissmässig grossem Drucke sehr erheblich sind; sie betragen z. B. im letzten Experimente der 2ten Reihe ca. 10 pCt. des ganzen Werthes, so dass durch Vernachlässigung derselben sehr bedeutende Fehler entstehen. Nichts desto weniger verdienen die Hagen'schen Experimente wegen der grossen Sorgfalt mit welcher sie angestellt und berechnet sind, besondere Beachtung.

Hagen fand zunächst, dass die Wassermenge ausserhalb der Grenze der parallelen Bewegung viel weniger von der Temperatur beeinflusst werde, als innerhalb derselben. Er versuchte nun für die ganze Druckhöhe wieder einen Ausdruck von der Form

$$h = r + sc + tc^2$$

einzuführen. „Diese Annahme erwies sich aber als ganz unstatthaft, denn die „wahrscheinlichsten Werthe der Constanten liessen keine einfachen Beziehungen „zu den Längen und Weiten der drei Röhren erkennen. Am auffallendsten war es „aber, dass die Constante r für die Röhre (A) negativ wurde, während sie für (B) „und (C) positiv war". Hagen verminderte daher die ganze Druckhöhe zunächst um das Glied r, welches nach seiner Annahme den Gegendruck der gespannten

*) Hg. II. pag. 68 u. ff. **) Vergl. oben pag. 23.

Oberfläche im ausfliessenden Strahle bezeichnet und sodann um die Geschwindigkeitshöhe. Für die letztere ergiebt sich unter der Annahme, dass der Geschwindigkeits-Coefficient $k = 0{,}76$ sei*), für preuss. Zollmaas der Werth

$$0.002307\ c^2.$$

Für die nun noch übrig bleibende Widerstandshöhe H nahm er einen Ausdruck von der Form

33) $$p = mlc^{x}\varrho^{-y}$$

worin c wieder die mittlere Geschwindigkeit, ϱ den Radius, l die Länge der Röhre bezeichnen, m dagegen eine Constante, welche nur von der Temperatur abhängig ist. Der obige Ansdruck schloss sich den Beobachtungen befriedigend an wenn

$$x = 1{,}75\,; \qquad y = 1{,}25$$

angenommen wurden, so dass der Exponent von c wieder den bereits von Woltmann vorgeschlagenen Werth $^7/_4$ erhielt. Die wahrscheinlichsten Werthe von x und y waren zwar von den obigen etwas verschieden, konnten aber ohne Ueberschreitung der wahrscheinlichen Fehler auf die obigen einfachen Werthe abgerundet werden. Unter Einführung derselben wird die obige Gleichung

34) $$p = m\,l\,\varrho^{-1{,}25}\,c^{1{,}75}$$

Die Abhängigkeit des Coefficienten m vor der Temperatur wurde in befriedigender Weise durch die Interpolationsformel

35) $$m = 0.00000\ 17185\ (22{,}62 - \tau)$$

dargestellt, welche ergiebt, dass

bei 0° R. . . . . . . $m = 0.00003894$

„ 80° R. . . . . . . $m = 0.00002357$

ist; dieser Coefficient nimmt also bei der Erwärmung des Wassers vom Gefrierpunkte bis zum Siedepunkte nur um etwa vier Zehntel seines Werthes ab, wodurch die oben gemachte Bemerkung in Betreff der Abhängigkeit der Grösse c von der Temperatur bestätigt wird.

Ueber die Grösse m sagt Hagen: „Es leidet wohl keinen Zweifel, dass dieser „Faktor zum Theil von der Reibung abhängt, welche die bewegten Wasser„theilchen erfahren, woher er zu dem oben untersuchten Widerstands-Coeffi„cienten β in gewisser Beziehung stehen muss. Beide vermindern sich mit zu„nehmender Temperatur, wenn indessen für siedendes Wasser β gleich Null wird, „m dagegen noch einen bedeutenden Werth behält, so erklärt sich dieser durch die „inneren Bewegungen, deren Darstellung einen grossen Theil der lebendigen „Kraft consumirt, und die bei zunehmender Beweglichkeit des Wassers keines„wegs aufhören, sondern sich wahrscheinlich sogar verstärken“. Er fügt hinzu, dass er eine Erklärung der Potenzen, in welchen die mittleren Geschwindigkeiten und die Halbmesser der Röhren vorkommen nicht zu geben vermöge.

So befriedigend sich die Formel an die Beobachtungen Hagens, aus denen sie abgeleitet war, anschloss, so erhebliche Abweichungen zeigten sich bei der Vergleichung derselben mit den an grösseren Leitungen angestellten Beobachtungen. Wenngleich zu erwarten stand, dass die beobachteten Druckhöhen grösser sein würden als die nach der Formel berechneten, so stellten sich so

*) Vergl. oben pag. 16 u. ff. und pag. 25.

bedeutende und unregelmässige Differenzen zwischen beiden heraus, dass man sie zum grossen Theile der Ungenauigkeit der verglichenen Beobachtungen zuschreiben muss.

Es ist bereits im Vorworte bemerkt worden, dass Hagen genöthigt war, in Ermangelung anderen Materials auf die alten Beobachtungen von Couplet zurückzugehen, welche schon von Dubuat, Woltmann, Prony und Eytelwein benutzt waren*). Sie beziehen sich auf Leitungen von 4 bis 18 Zoll Weite und 1700 bis 11400 Fuss Länge, werden aber von Hagen als höchst mangelhaft bezeichnet. Beide sind daher wenig geeignet einer Theorie zu Grunde gelegt zu werden. Sie schliessen sich so schlecht an die Hagen'sche Formel an, dass selbst bei der verhältnissmässig besten Beobachtungsreihe, welche bei allen späteren Untersuchungen vorzugsweise benutzt ist — sie bezieht sich auf eine fünfzöllige Röhre von 7022 Fuss Länge — die wirklich beobachteten Widerstandshöhen 1,45 bis 1,8 mal so gross waren als die berechneten!

Der Exponent (x) der Geschwindigkeit in Gl. (33) ergab sich zu 1,52 statt 1,75. Noch viel erheblicher waren die Abweichungen bei anderen Röhren. Bei einer sechszölligen Röhre von 1713 Fuss Länge waren die beobachteten Widerstandshöhen etwa dreimal so gross als die berechneten. Bei einer zwölfzölligen Röhre von 3600 Fuss Länge war das Verhältniss nahe wie 2 : 7; bei einer achtzölligen Röhre von 4700 Fuss Länge gar wie 1 : 4. Es unterliegt wohl keinem Zweifel, dass die grossen Verschiedenheiten der angegebenen Zahlenverhältnisse wesentlich durch die Unregelmässigkeit der Röhren hervorgebracht sind.

Ausser mit den Couplet'schen hat Hagen seine Formel noch mit den Beobachtungen von Bossut verglichen, welche ihm zwar als weit zuverlässiger bezeichnet worden, sich aber auf Röhren von weit geringeren Dimensionen, nämlich von 1, 1⅓ und 2,01 Pariser Zoll und 30 bis 180 Pariser Fuss Länge beziehen. Auch bei ihnen musste, wie bei den Couplet'schen, zur Ermittelung der Widerstandshöhe die Geschwindigkeitshöhe von der beobachteten gesammten Druckhöhe abgezogen werden. Als mittlerer Werth der Exponenten von c ergab sich hier 1,725 mit dem wahrscheinlichen Fehler 0.0305, so dass ohne den letzteren zu überschreiten $x = 1,75$ gesetzt werden könnte. Es folgt übrigens aus den Bossut'schen Beobachtungen, welche sich auch im übrigen der Hagenschen Formel ziemlich gut anschliessen, das bemerkenswerthe Resultat, d a s s d e r W e r t h v o n m i t z u n e h m e n d e r L ä n g e s i c h v e r m i n d e r t. So fand er bei einer 1⅓ Zoll weiten Röhre von 1,77 bis auf 1,69 herab, als ihre Länge von 360 Zoll (Pariser) bis auf 2160 Zoll vergrössert wurde; bei der weiteren Röhre von 2.01 Zoll Durchmesser nahm sein Werth von 1,77 bis auf 1,65 ab, während die Länge ebenfalls von 360 Zoll bis 2160 Zoll zunahm.

Endlich zog Hagen noch einige Beobachtungen von Dubuat zur Prüfung seiner Formel heran. Aus 11 Messungen an einer einzölligen Röhre von 737 Zoll Länge, bei welcher die Druckhöhen von 2 Linien bis 24 Zoll wechselte, ergab sich $x = 1,8$. Aus je 3 Beobachtungen an einer einzölligen Röhre folgte für eine Länge von

138,5 Zoll	$x =$	1.69
117 „		1.83

was die Abnahme des Werthes von x mit der Länge bestätigt. Bei einer zwei-

*) Sie waren bereits im Jahre 1732 der Pariser Akademie vorgelegt.

zölligen Röhre von 255,25 Zoll Länge, mit der allerdings nur zwei Messungen bei einem Drucke von 16,33 resp. 36,35 Zoll angestellt wurden ergab sich der von dem Resultate der übrigen Messungen abweichende Werth $x = 2,05$.

Wurde dafür 1,75 angenommen, so ergab sich der Exponent des Radius (in Gl. 26) $y = 1,37$, also einigermassen annähernd der von Hagen ermittelte Werth 1,25.

Weitere Beobachtungen standen Hagen damals nicht zur Verfügung. Die vom englischen Ingenieur Provis angestellten, welche etwa noch in Betracht kommen konnten, stimmen unter sich so wenig überein, dass Hagen von ihrer Berechnung Abstand nehmen musste.

So liess sich aus den vorliegenden Beobachtungen nicht entscheiden, ob die Gleichung (34) das Gesetz der Bewegung richtig darstelle und vielleicht sich so modificiren lasse (etwa durch Veränderung des Zahlenfactors in dem Werthe für m) um für die Praxis verwendet werden zu können.

Die von Hagen mit Recht beklagte Lücke in dem Beobachtungsmaterial war bereits, ohne dass er darum wusste, ausgefüllt, als seine Arbeit erschien. Schon im October 1851 hatte Darcy, damals Director der Wasserwerke von Paris, seine grossartigen im August 1849 begonnenen Messungen vollendet; die Bearbeitung derselben nahm indessen mehrere Jahre in Anspruch, so dass sie erst im Jahre 1857 (also drei Jahre nach dem Erscheinen der Hagen'schen Abhandlung) publicirt wurden*). Sie sind in Chaillot bei Paris an besonders dazu hergerichteten Leitungen angestellt und beziehen sich auf 22 Röhren von verschiedenem Material, (gezogenes Eisen, Blei, Glas, Blech mit Asphalt überzogen, Gusseisen) deren Durchmesser von $0,0122^m$ bis $0,5^m$ variirten. Darcy sagt selbst, dass sich alles vereinigte um seine Untersuchungen zu erleichtern, und so sind in der That die von ihm gewonnenen Beobachtungs-Resultate sowohl wegen der Zweckmässigkeit der von ihm getroffenen Vorrichtungen, als auch wegen der grossen Sorgfalt, mit welcher die Messungen ausgeführt wurden, weit zuverlässiger als alle bis dahin bekannt gewordenen. Namentlich ist hervorzuheben, dass er den Seitendruck respective den einer bestimmten Rohrlänge entsprechenden Druckverlust (d. h. also die Widerstandshöhe) direct beobachtete. Er bediente sich zum Messen sogen. Piezometer d. h. offener Glasröhren, welche mit dem Innern der Leitung communicirten, so dass das Wasser in ihnen bis zu der dem Drucke an der betreffenden Stelle entsprechenden Höhe emporsteigen konnte. Es waren im Ganzen fünf solcher Piezometer vorhanden, welche folgendermassen vertheilt waren:

No. 5 gab die Höhe des Wassers im Speisegefäss an,
„ 4 „ „ „ „ „ beim Eintritt in die Röhre,
„ 3 „ „ „ „ „ $4,7^m$ von diesem Punkte.
„ 2 „ „ „ „ „ 50^m von dem letzten Punkte,
„ 1 „ „ „ „ „ 50^m von diesem Punkte.

Sehr zweckentsprechend hatte Darcy die Zuleitungsröhren auf einen Punkt, in der Nähe des Piezometers No. 2 zusammengeleitet, so dass er die Glasröhren alle auf demselben Massstabe angebracht und von demselben Beobachter

*) Siehe Anhang No. 1, c. Es ist mir erst vor einigen Monaten gelungen, mir die Arbeit Darcy's auf antiquarischem Wege zu beschaffen.

abgelesen werden konnten. Die Beobachtung begann erst wenn ein stationärer Zustand der Bewegung eingetreten war, was daran erkannt werden konnte, dass der Stand des Wassers in den einzelnen Piezometern sich nicht mehr merklich veränderte. Eine fernere Controlle war dadurch gegeben, dass die Differenz zwischen den Angaben des 1ten und 2ten Piezometers gleich derselben Differenz beim 2ten und 3ten Piezometer sein musste, wenn die Röhren regelmässig geformt waren und an keiner Stelle eine Verengung des Lumens (etwa durch angesammelte Luftblasen) stattgefunden hatte. Sorgfältig hatte Darcy jede Hervorragung der untern Enden der Verbindungsröhren über die innere Wandung des Leitungsrohres an den Durchbohrungsstellen vermieden, weil er aus den von ihm selbst angestellten Experimenten erkannt hatte, wie gross der Einfluss solcher Hervorragungen auf die von dem Piezometer angezeigte Druckhöhe ist. (Vergl. D. pag. 360 u. f.) Es wurden daher bei den gusseisernen Röhren von 0,0801 m Durchmesser und darüber die in die Dicke des Eisens eingeschraubten Manometerhähne unten cylindrisch ausgefeilt, um ihnen die Krümmung des Rohres zu geben, nachdem die Dicke des Schraubenvorsprunges genau berechnet war. Die Bohrlöcher hatten bei den engeren Röhren einen Durchmesser von 2 bis 3 mm und die Manemeterhähne wurden oberhalb derselben aufgelöthet. Nur bei der Messung der grösseren Druchhöhen wurden Quecksilbermanometer angewandt.

Die Differenz in dem Stande der Manometer No. 1 und No. 3 gab den Druckverlust für 100 m an. Dieses war auch die ungefähre Länge der meisten untersuchten Leitungen. Nur die aus Glasröhren zusammengesetzten waren etwa halb so lang. Der Röhrenstrang verlief stets in gerader Linie und man hatte ihm, um das Entweichen der Luft beim Anlassen des Wassers zu erleichtern, eine sanfte Neigung nach der Mündung zu gegeben.

Der Durchmesser der Röhren wurde grösstentheils durch Anfüllen mit Wasser, bei den weiteren Röhren auch durch kreuzweise Messung an beiden Enden bestimmt, wodurch zugleich ihre Abweichung von der Kreis- resp. Cylinderform festgestellt werden konnte.

Zur Messung der Ergiebigkeit der Röhren dienten 7 Bassins, theils von rechteckiger, theils von cylindrischer Form, unter welchen bei den einzelnen Experimenten immer das der Ergiebigkeit der in Funktion befindlichen Leitung entsprechende ausgewählt wurde.

In der Einleitung seines Werkes spricht sich Darcy über die Gründe aus, welche ihn dazu bestimmten, die langwierigen und mühevollen Versuche zu unternehmen. Bis dahin war in Frankreich allgemein die bekannte Prony'sche Formel für die Berechnung der Ergiebigkeit der Röhren angewandt worden*). Darcy führt nun mehrere Fälle an, in welchen sich in der Praxis erhebliche Abweichungen der wirklich beobachteten von der nach der Formel berechneten Wassermenge herausgestellt hatten. So hatte unter Andern die Leitung des Foubourg St. Victor nur die Hälfte von der voraus berechneten ergeben. Da er nun der Ansicht ist,

*) Sie lautet

$$\frac{D}{4}\, i = \alpha v + \beta v^2$$

wo v die mittlere Geschwindigkeit, D der Durchmesser, i den Druckverlust für 1 m und α und β zwei Constante bedeuten, deren Werthe sind resp. 0,00061733 uud 0,00034826.

für welche er in seinen Beobachtungen eine Stütze findet, dass die Prony'sche Formel das Gesetz, nach welchem er die Druckhöhe von der Geschwindigkeit abhängt, richtig darstelle, so suchte er den Grund der thatsächlich vorhandenen bedeutenden Abweichungen der berechneten von den effectiven Werthen erstlich in dem Einflusse der Röhrenwandung auf die Bewegung und zweitens darin, dass die Prony'sche Formel das Gesetz, nach welchem die Ergiebigkeit von dem Durchmesser des Rohres abhängt, nicht richtig darstelle. Durch die Rauhigkeit der Wände werden nach seiner Ansicht in den angrenzenden Schichten Wirbel erregt, so dass diese nicht in derselben Weise, wie die anderen Theile der Flüssigkeit an der translatorischen Bewegung theilnehmen können; die Experimente weisen darauf hin, dass der Einfluss dieser Wirbel auf die Ergiebigkeit um so grösser ist, je kleiner der Durchmesser des Rohres. Er hält es daher durchaus für nothwendig, die verschiedenen Arten von Röhren gesondert zu untersuchen und hat demgemäss bei seinen Versuchen Röhren aus den verschiedenartigen in der Praxis vorkommenden Materialien (Schmiedeeisen, asphaltirtem Gusseisen und Blech, Blei und Glas) benutzt, und zwar sowohl neue als auch alte mit Niederschlägen bedeckte. Die letzteren liess er dann zum Theil wieder reinigen, um den Einfluss der Niederschläge zu ermitteln. Er gelangte schliesslich durch Discussion seiner zahlreichen Messungen zu dem Resultate, dass die Widerstandshöhe durch zwei Ausdrücke von der Form

$$av + bv^2 \qquad \text{und} \qquad b_1 v^2$$

dargestellt werde, von denen der erstere für Röhren mit glatten Wänden gelte, die zweite anwendbar sei bei grösseren Geschwindigkeiten, oder wenn die Wände der Röhren mit Niederschlägen bedeckt wären. Für die Coefficienten a, b, b_1, welche für die einzelnen Röhren nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet wurden, giebt er folgende Mittelwerthe an**).

$$a = 0{,}000031635 + \frac{0{,}0000000037556}{R^2}$$

36)
$$b = 0{,}000442939 + \frac{0{,}000006201}{R}$$

$$b_1 = 0{,}00051 + \frac{0{,}0000065}{R}$$

worin R den Radius des Rohres bedeutet. Der Werth des Verhältnisses zwischen a und b ist um so grösser je glatter die Wände sind.

Für neue gusseiserne Leitungen hat Darcy sehr umfassende Tabellen nach der Formel

37)
$$Ri = \left(0{,}00051 + \frac{0{,}0000065}{R}\right)^2$$

berechnet, aus denen man, wenn das Gefälle gegeben ist, die zu jeder Röhrenweite gehörige Ergiebigkeit entnehmen kann†). Zugleich giebt er an, in welcher Weise die aus den Tafeln abgelesenen Werthe modificirt werden müssen, wenn die Beschaffenheit der Wände durch leichte Niederschläge oder durch Oxydation des Eisens verändert ist.

Einen wichtigen Abschnitt der Arbeit Darcy's bildet die Untersuchung über die relative Geschwindigkeit der einzelnen Flüssigkeitsschichten in verschiedenem

*) D. pag. 149. **) D. pag. 342. †) Vergleiche D. chap. IV. und pag. 368 u. ff.

Abstande von der Axe. Er ermittelte dieselbe auf experimentellem Wege vermittelst der sogen. Pitot'schen Röhre*). Es ist dieses eine dünne, glatte Röhre, welche durch zwei in der Wandung des Rohres angebrachte Stopfbüchsen hindurchging, so dass sie die Axe der Leitung senkrecht durchschnitt. Im Innern zweigte sich von derselben rechtwinklich ein kurzes konisch geformtes Ansatzrohr ab, welches mit seiner Mündung gegen die Strömung gerichtet werden konnte. Dieses Mundstück konnte durch Verschiebung der Röhre in den Stopfbüchsen längs eines Durchmessers bewegt werden. Die an den verschiedenen Punkten des letztern stattfindende Geschwindigkeit liess sich aus der Differenz der Höhen berechnen, bis zu welchen das Wasser in einer mit der Pitot'schen Röhre in Verbindung stehenden und in einer zweiten, an einem anderen Punkte desselben Querschnittes angebrachten Piezometerröhre emporstieg. Durch eine passende Aushöhlung unterhalb der Stopfbüchse war die Möglichkeit gegeben, die Mündung der Ansatzröhre bis an die Wandung des Rohres zu bringen und die Geschwindigkeit der unmittelbar angrenzenden Wasserschichten zu bestimmen.

Darcy leitete schliesslich aus seinen Beobachtungen für das Gesetz, nach welchem die Geschwindigkeit (v) eines Theilchens von seiner Entfernung von der Mitte des Rohres (r) abhängt, den Ausdruck ab (welchen er auch theoretisch zu rechtfertigen versucht)

$$V - v = 11{,}30 \frac{r^{3/2}}{\varrho} \sqrt{i}$$

worin V die Geschwindigkeit des Axenfadens, ϱ den Radius des Rohres und i wie oben das relative Gefälle (Druckverlust für 1 ^{m} Länge) bezeichnen. Aus dieser Formel ergiebt sich für die mittlere Geschwindigkeit u, wenn man die Geschwindigkeit an der Wandung durch w bezeichnet, der Ausdruck †)

$$u = \frac{3\,V + 4w}{7}$$

Darcy nun hat für jedes Rohr eine Curve construirt, indem er, von einem bestimmten Querschnitte ausgehend r als Abscisse, v als Ordinate auftrug. Diese parabelähnlichen Curven geben ein anschauliches Bild von der relativen Verschiebung der einzelnen Wasserschichten. Auf die Krümmung derselben an der Spitze scheint die Rauhigkeit der Wände keinen Einfluss zu haben.

In einer zweiten Reihe von Tafeln hat er die Abhängigkeit der Geschwindigkeit vom Gefälle für die verschiedenen Arten von Röhren graphisch dargestellt. Hier ist namentlich die Vergleichung der verschiedenen Werthe der Geschwindigkeiten von Interesse, welche bei gleichen Gefällen in derselben Röhre entstanden, wenn dieselbe gereinigt oder wenn sie mit Niederschlägen bedeckt war.

Wenngleich durch die kurzen im Vorstehenden enthaltenen Andeutungen kein vollständiges Bild von dem reichen Inhalte der Darcyschen Arbeit gegeben werden konnte, so wird doch soviel aus ihnen ersichtlich sein, dass Darcy sich keineswegs, wie Hagen sagt**), darauf beschränkte, einige practische Regeln für die Ergiebigkeit verschiedener Arten von Röhren aufzustellen, sich vielmehr das höhere Ziel gesteckt hatte, die Gesetze für die Bewegung des Wassers in cylindrischen

*) Vergl. D. Taf. IV. **) H. III. p. 3 †) Vergl. D. pag. 267 ff. und 342 ff.

Röhren zu ermitteln. Durch Verbindung theoretischer Betrachtungen mit den Ergebnissen seiner Experimentaluntersuchungen hat er sich vielfach bemüht, die Formen der von ihm aufgestellten Gleichungen zu rechtfertigen. Dass er das gesteckte Ziel, wie er selbst zu glauben scheint, wirklich erreicht habe, will ich keineswegs behaupten.

Ich wende mich nun zur Besprechung der neuesten Arbeit Hagens*) in welcher derselbe, wie bemerkt, seinerseits den Versuch gemacht hat, aus den Messungen Darcy's die wahren Gesetze für die Bewegung des Wassers herzuleiten, da er die von diesem aufgestellten Formeln nur als empirische Regeln gelten lassen will. Er hat zunächst die Beobachtungen gesichtet, indem er aus den 22 Reihen von Beobachtungen, welche Darcy angestellt hatte, 12 Reihen auswählte, welche sich auf Röhren bezogen, bei denen er eine regelmässigere, nahezu cylindrische Form voraussetzen zu können glaubte. Es sind dieses: gezogene eiserne Röhren, Bleiröhren, gebrauchte und neue gusseiserne Röhren. Die Durchmesser derselben sind in der Tabelle auf pag. 35 angegeben.

Hagen hat es nicht für bedenklich gehalten die verschiedenen Arten von Röhren gemeinschaftlich der Rechnung zu unterziehen. Er ist nämlich der Ansicht, dass durch die Rauhigkeit der Wände nur die Dicke der an ihnen haftenden und auch während der Strömung ruhenden Schicht, welche bei Röhren mit glatten Wänden unendlich dünn ist, dem Grade der Rauhigkeit entsprechend vergrössert werde. Ueber diese Schicht hinaus meint er sei ein Einfluss der Wände auf die Bewegung des Wassers undenkbar**), während Darcy der Ansicht ist, (für welche er einen experimentiellen Beleg anführt) dass die an Wänden haftende Wasserschicht zu dünn ist, um die Rauhigkeiten derselben verschwinden zu lassen, so dass dieselben, in die bewegten Schichten hineinragend, Wirbel verursachen***).

Hagen hat nun zunächst die drei verschiedenen Ausdrücke, welche man bisher für die Abhängigkeit des Gefälles von der Geschwindigkeit aufgestellt hatte, mit den Beobachtungen vergleichen, um zu prüfen, welchem derselben sie sich am besten anschlössen. Diese Ausdrücke haben nach dem früheren die Form

$$\text{a)}\quad P = r' c^x \quad ; \quad \text{b)}\quad P = rc + sc^2 \quad ; \quad \text{c)}\quad P = s' c^2$$

worin P das relative Gefälle, c die mittlere Geschwindigkeit, r, s, r', s', x aber Constanten bezeichnen, deren Werthe Hagen aus den 87 Beobachtungen, welche die von ihm ausgewählten zwölf Beobachtungsreihen umfassten, bestimmte. Dabei führte er (wie es auch Darcy gethan hatte) die Rechnung so, dass die Summe der Quadrate der Fehler von $\frac{P}{c}$ (also der relativen Fehler) ein Minimum wurde, weil sonst diejenigen Beobachtungen, bei denen die Geschwindigkeit und das relative Gefälle geringer war, auf das Resultat fast keinen Einfluss gehabt haben würden. Er brachte daher die obigen Ausdrücke auf die Form:

$$\text{A)}\quad \frac{P}{c} = r'c^{x-1} \quad ; \quad \text{B)}\quad \frac{P}{c} = r + sc \quad ; \quad \text{C)}\quad \frac{P}{c} = s'c$$

und bestimmte unter der angegebenen Bedingung die Werthe von r', x; r, s; s' nach der Methode der kleinsten Quadrate. Er fand, dass sich die beiden besten

*) H. III. Siehe Anhang No. 1. **) Vergl. H. III. pag. 21. ***) Vergl. D. pag. 347.

Beobachtungsreihen*) am genauesten der Form (b) anschlossen, indem diese für die Summe der Fehlerquadrate bei beiden Reihen den kleinsten Werth ergab. Von dieser als der wahrscheinlichsten ausgehend, berechnete er nun für jede Röhre die wahrscheinlichsten Werthe der Constanten r und s, nachdem er sich vorher davon überzeugt hatte, dass das zweite Glied der rechten Seite von Gl. (b) nicht etwa eine höhere Potenz von c als die 2te enthalte. Die Resultate dieser Rechnung sind in der nachstehenden Tabelle enthalten**).

No. der Beobachtungsreihe.	Art der betreffenden Röhre.	D Durchmesser in Metern.	r.	s.	rD^2. (a)	sD. (b)
IV.	Bleiröhre	0.014	0.01279	0.0898	0.000002286	0.00126
V.	do.	0.027	0.00713	0.0470	0.000005199	0.00127
XIII.	Gebrauchte gusseiserne Röhre	0.0364	0 00304	0.0343	0.000004028	0.00125
III.	Gezogene eiserne Röhre	0.0395	0.00422	0.0316	0.000006584	0.00115
VI.	Bleiröhre	0.041	0.00447	0.0281	0.000007515	0.00115
XV.	Gebrauchte gusseiserne Röhre	0.0801	0.000544	0.0188	0.000003489	0.00151
XVI.	Neue gusseiserne Röhre	0.0819	0.000923	0.0157	0.000006192	0.00147
XVII.	do.	0.137	0.000500	0.00740	0.000009385	0.00101
XVIII.	do.	0.188	0.000364	0.00588	0.00001287	0.00110
XX.	Gebrauchte gusseiserne Röhre	0.2447	0.000136	0.00557	0.000008141	0.00136
XXI.	do.	0.297	0.000024	0.00406	0.000002117	0.00121
XXII.	Neue gusseiserne Röhre	0.5006	0.000005	0.00195	0.000001253	0.00098

Die in der letzten Columme für sD angegebenen Werthe stellen nahezu eine constante Zahl dar. Wird diese mit a bezeichnet, so erhält das zweite Glied des Ausdruckes (b) für P die Form

$$\frac{a}{D}\, c^2$$

was dem von Eytelwein eingeführten Ausdrucke entspricht†).

Ueber das erste Glied der Gleichung (b) äussert sich Hagen, nachdem er bemerkt, dass r augenscheinlich einer höheren Potenz des Durchmessers (umgekehrt) proportional sei, folgendermassen: „Meine früheren Untersuchungen, die „insofern entscheidender waren, als ich sehr enge Röhren benutzt hatte, zeigten, „dass das erste Glied die zweite Potenz des Durchmessers zum Divisor hatte. „Auch die vorliegenden Beobachtungen ergaben dasselbe Resultat, „sobald man die erste Reihe, nämlich No. IV. ausschliesst. Diese ist „aber für diesen Zweck nicht brauchbar, weil die Weite der Bleiröhre nur in „ganzen Millemetern angegeben ist und einige Zehntel Millimeter mehr oder „weniger das Resultat schon wesentlich verändern".

Gegen den Inhalt dieser Worte lassen sich, wie ich glaube, wesentliche Bedenken erheben. Wenn zunächst Hagen auf seine früheren an sehr engen Röhren angestellten Beobachtungen recurrirt, bei welchen, da sie sich dem Poiseuille-

*) Sie beziehen sich auf die Röhren III. und XVI der obigen Tabelle.

**) Vergl. H. III. pag. 16. In der auf pag. 7 der Hagen'schen Abhandlung befindlichen Tabelle ist bei Röhre. XXII. der Werth von r (wohl durch einen Druckfehler) zu 0,000353 der von s zu 0,00162 angegeben statt wie oben zu 0,000005 und 0,00195. †) Vergl. oben pag. 5.

schen Gesetze anschliessen, die Bewegung nur parallel zur Axe des Rohres statt fand, um aus denselben Schlüsse für die Bewegung ausserhalb der Grenze zu ziehen, so involvirt dieses die Voraussetzung, dass beide Arten der Bewegung sich durch dieselbe Formel ausdrücken lassen, gewissermassen nur specielle Fälle eines allgemeineren Gesetzes sind. Dass Hagen diese Anschauung gehabt hat, geht auch aus der weiteren Bemerkung hervor „dass das 2te Glied der Gleichung (b) gegen das erste verschwinde, sobald D sehr klein sei und deshalb gelte für enge Röhren der durch das zweite Glied repräsentirte Ausdruck*)“, für welchen Hagen dann die bereits oben mitgetheilte Neumann'sche Theorie giebt.

Hier ist zunächst zu bemerken, dass der Werth des 2ten Gliedes doch nicht von D allein, sondern auch von c abhängt und sehr erheblich werden kann, wenn letzteres einen hinreichend grossen Werth besitzt, wie z. B. bei den von Hagen selbst angestellten Beobachtungen mit den von ihm erwähnten engen Röhren, welche sich auf den zweiten Schenkel seiner Geschwindigkeitscurve beziehen**). Sodann lehrt (wie am Eingange dieser Arbeit bemerkt wurde) schon der Augenschein, dass die Bewegung des Wassers jenseits der Grenze des Hagen-Poiseuille'schen Gesetzes eine ganz andere, höchst complicirte wird, wie dieses ja Hagen selbst mehrfach hervorgehoben hat; es lässt sich daher, wenn man erwägt, eine wie complicirte Form die Differentialgleichungen für diese Bewegung auch unter den einfachsten Voraussetzungen, erhalten, wohl nicht erwarten, dass ihre Integration schliesslich zu einer so einfachen Formel führen werde, die sich von derjenigen für die parallele Bewegung nur durch ein das Quadrat der Geschwindigkeit enthaltendes Glied unterscheidet. Endlich aber findet die Annahme Hagens, wie ich nachweisen werde, nicht einmal in der von ihm zu Grunde gelegten Darcy'schen Beobachtungen eine sichere Stütze, während sie durch andere genauere Messungen, direct widerlegt wird.

Hagen hat auffallender Weise, während er die Werthe von sD, die in der That, wie er annimmt, nahezu constant sind, vollständig anführt, die Werthe des Productes rD^2, welche nach ihm ebenfalls eine Constante darstellen sollen, nicht angegeben, sondern über diese nur die Bemerkung gemacht, dass die Annahme, r sei dem Quadrate von D umgekehrt proportional, grössere Wahrscheinlichkeit besitze, als wenn man jene Grösse der ersten Potenz von D umgekehrt proportional setze, da in diesem Falle die Summe der Fehlerquadrate eine grössere sei als in jenem. Nun lehrt aber ein Blick auf die von mir berechneten, der obigen Tabelle (pag. 35) beigefügten Werthe von rD^2, dass diese Producte doch keineswegs als constant betrachtet werden können, da sie kaum in der Ordnung der ersten Ziffer übereinstimmen, selbst wenn man von dem ersten derselben, wie Hagen will, ganz absieht. Indessen sind auch die Abweichungen der übrigen Werthe unter sich viel grösser, als die Veränderungen, welche der Werth jenes Productes erfährt, selbst wenn man annimmt, dass der Fehler in der Messung von D den Betrag von einen Millimeter erreicht habe; denn da in der Formel, aus welcher r nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet wird, D^2 als constanter Factor im Zähler steht, erhält man

*) Dieselbe Anschauung findet sich auch bei Darcy. Vergl. D. pag. 352 Anm. **) Vergl. oben pag. 9.

für $D = 0.013^{\text{m}}$ $rD^2 = 0.000001863$
0.014 „ 2507
0.015 „ 3305

so dass auch die von Hagen aufgestellte Behauptung „durch einige Zehntel Millimeter mehr oder weniger werde das Resultat schon wesentlich verändert“, im Vergleich zu den viel grösseren Abweichungen der übrigen von ihm beibehaltenen Werthe nicht zutreffend erscheint. Ausserdem bemerkt Darcy ausdrücklich, dass der Durchmesser gerade dieser Röhren sehr gut bestimmt sei*). Nicht recht verständlich ist es mir ferner, wenn Hagen sagt, seine früheren Beobachtungen wären in Bezug auf die Frage, welcher Potenz von D die Grösse r umgekehrt proportional sei, insofern entscheidender als sie an engen Röhren angestellt seien. Denn abgesehen davon, dass Hagen nur die Beobachtungen innerhalb der Grenze des Poiseuille'schen Gesetzes meinen kann, welche für die gänzlich veränderte Bewegung ausserhalb des Gesetzes (auf welchen Fall sich die von Hagen berechneten Beobachtungen Darcy's beziehen) nichts beweisen können, handelt es sich bei der Entscheidung der vorliegenden Frage doch nur: einmal um genaue Messung, sodann um möglichste Mannigfaltigkeit der Werthe von D, und diese ist bei den Darcy'schen Messungen, bei denen die Werthe von D innerhalb sehr weiter Grenzen (0,014 bis 0,5 $^{\text{m}}$) variiren, entschieden grösser als bei denjenigen Hagens, dessen Röhren Durchmesser von resp. 0,1077; 0,15479; 0,22783 pr. Zollen hatten.

Dass auch bei sehr engen Röhren P keineswegs allein durch das Glied

$$\frac{b}{D^2}\, c$$

(worin b eine Constante bedeutet) dargestellt wird, lehren unter anderem schon die Poiseuille'schen Beobachtungen, welche von ihm selbst als ausserhalb der Grenze seines Gesetzes liegend bezeichnet sind**).

Jacobson hat diese Beobachtungen, um die von Hagenbach aufgestellte Formel***) zu prüfen, unter der Form

$$h = pc + qc^2$$

dargestellt, worin h die Höhe einer Wassersäule bedeutet, durch welche der Druck gemessen wird, c die mittlere Geschwindigkeit, während p und q Constanten bezeichnen, deren Werthe von Jacobson nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet sind. Die obige Gleichung erhält die von Hagen angenommene Form, wenn man setzt

$$p = \frac{l}{D^2}\, b \qquad q = \frac{l}{D}\, a$$

wo a und b die Hagen'schen Constanten sind, die anderen Buchstaben aber die frühere Bedeutung haben. Ich habe nun unter Zugrundelegung der von Jacobson angegebenen Werthe von p und q die entsprechenden Werthe von a und b zur Vergleichung mit den von Hagen aus den Darcy'schen Beobachtungen abgeleiteten berechnet. Die Resultate finden sich in der Tabelle auf der folgenden Seite zusammengestellt. Die Werthe von l und D sind in Millimetern angegeben; bei der Rechnung ist indessen alles auf Metermass reducirt, da diese Masseinheit

*) Vergl. D. pag. 177. Dort heisst es: Les conduites en plomb refoulé (IV., V., VI. der obigen Tabelle) avaient un diamètre parfaitement bien déterminé. **) Vergl. Poiseuille No. 35 (seconde série d'expériences) u. ff. ***) Siehe J. II. pag. 326.

den Hagen'schen Rechnungen zu Grunde liegt. Die Werthe von a und b beziehen sich also auf Meter.

$\tau = 10^0$ *Cels.*

l mm.	D mm.	a	b
26	0.6546	0.002639	0.000001778
50,45	0.651	0.001528	0.000004106
99,72	0.654	0.0009445	0.000004126
200	0.653	0.0004215	0.000004162
15,75	0.2834	0.001945	0.00001733
9,55	do.	0.003424	0.00001768
6,775	do.	0.004649	0.00001766
1	do.	0.02694	0.00002681
9	0.1134	0 001962	0.000005192
3,9	do.	0.003054	0.000003966
6,025	0.0855	0.002726	0.000003918
3,35	0.0435	0.001839	0.000004207

Nach Hagen ist für eine Temperatur von τ^0 R.

32) $$b = 0.000005871 - 0.000000267\,\tau + 0.00000000735\,\tau^2$$

Da die obigen Beobachtungen sich auf eine constante Temperatur von 10^0 Cels. $= 8^0$ Ré. beziehen, so gilt für dieselben der Werth

$$b = rD^2 = 0.00000420$$

dagegen soll unabhängig von der Temperatur sein

$$a = sD = 0.001202$$

Die Vergleichung dieser Werthe mit den in der obigen Tabelle aus den Poiseuille'schen Beobachtungen berechneten zeigt nun, dass beide keineswegs übereinstimmen, wie es der Fall sein müsste, wenn die Hagen'sche Formel ein allgemeines Gesetz darstellte.

Gegen die in der obigen Tabelle angegebenen Werthe von a und b liesse sich nach dem früheren allerdings der Einwand erheben, dass in den Poiseuille'schen Beobachtungen der Seitendruck nicht direct beobachtet, die Berechnung von P aus ihnen also ebenso unsicher als aus den Hagen'schen sei (vergl. pag. 11). In der That lässt sich dieser Einwand nicht vollständig entkräften, obgleich es nach dem obigen nicht wahrscheinlich ist, dass bei der Anordnung des Poisseuille'schen Apparates ein merklicher Druckverlust beim Eintritt des Wassers in das Capillarrohr stattfindet. Innerhalb der Grenze des Poiseuille-Hagen'schen Gesetzes fand ein solcher sicher, trotz der zum Theil sehr erheblichen Werthe des Druckes und der Geschwindigkeit (vergl. oben pag. 15 und 16), nicht statt, da sonst die Beobachtungen mit der theoretischen Formel (Gl. 22) nicht in dem Grade übereinstimmen würden wie es der Fall ist. Ob aber ein innerhalb der Grenze unmerklicher Druckverlust nicht vielleicht ausserhalb derselben eine erhebliche Grösse erreicht, lässt sich nicht entscheiden, da für den letzteren Fall die der Gl. 22 entsprechende theoretische Gleichung noch nicht existirt.

Ich habe daher die Hagen'sche Formel ausser mit den Poiseuille'schen noch mit einigen Beobachtungen von Jacobson und den von mir an der hiesigen Wasserleitung angestellten verglichen. Leider sind von den ersteren nur wenige zu diesem Zwecke zu verwerthen, da der Verfasser hauptsächlich das erste Stadium der Bewegung untersuchen wollte. Ich habe zunächst drei im ersten Beitrage gelegentlich mitgetheilte*) Messungen berechnet. Sie beziehen sich auf die Röhre (C), deren Durchmesser $D = 0{,}0028656^{\text{m}}$, die Gesammtlänge des Rohres betrug $0{,}620^{\text{m}}$, der Seitendruck wurde an zwei den $0{,}3089^{\text{m}}$ von einander abstehenden Stellen gemessen und es hatte sich ergeben, dass für die betreffende Strecke des Rohres auch ausserhalb der Grenze der parallelen Bewegung der Druck eine lineäre Funktion des Abstandes vom Ende des Rohres blieb. Bezeichnen wir letzteren mit x' resp. $0''$ so war nämlich

$$\frac{l-x'}{l-x''} = \frac{272{,}9^{\text{mm}}}{582{,}8} = 0{,}468$$

während wenn die den Stellen x' und x'' entsprechenden Druckhöhen durch p' und p'' bezeichnet werden, beobachtet wurde

$$\frac{p'}{p''} = \frac{315{,}3}{662{,}9} = 0{,}474 \quad ; \quad c = 1201{,}3^{\text{mm}}$$

$$\frac{p'}{p''} = \frac{296{,}9}{637{,}2} = 0{,}465 \quad ; \quad c = 1176{,}3$$

$$\frac{p'}{p''} = \frac{210{,}2}{447} = 0{,}470 \quad ; \quad c = 967$$

Leider sind bei den übrigen Beobachtungen die Werthe der Geschwindigkeit nicht beigefügt, auch fehlt die Angabe der Temperatur. Letztere lag jedoch sehr wahrscheinlich zwischen 13,4 und 16,7 ^{0} Cel., da alle übrigen auf die Röhre C bezüglichen Beobachtungen in diesem Temperaturintervalle angestellt sind.

Stellt man die angegebenen Beobachtungen unter der Form

$$P = \frac{b}{D^2}\,c + \frac{a}{D}\,c^2$$

dar, so ergeben sich nach der Methode der kleinsten Quadrate für die Constanten b und a (auf Meter bezogen) die Werthe:

$$b = 0{,}000001561$$
$$a = 0{,}001863$$

Nach Hagen war

$$a = 0{,}001202$$

während für

$$\tau = 10^0\,R\acute{e}.\quad b = 0{,}000003936$$
$$12\ \text{„}\qquad 0{,}000003700$$

wird.

Die Werthe von b betragen also mehr als das Doppelte von denen Hagen's, während der von a nur in der ersten Stelle übereinstimmt.

Viel wichtiger und entscheidender sind zwei andere Reihen der Messungen Jacobson's, welche sich am Ende**) des dritten Beitrages befinden. Sie beziehen sich auf die Röhre D, deren Durchmesser nach pag. 21 $= 5{,}108^{\text{mm}}$ war, und sind in folgender Tabelle enthalten:

---

*) J. I. pag. 92 No. 1. **) J. II. pag. 328.

$\tau = 22^0$ *Cels.*

I. $l = 1731{,}5$ mm		II. $l = 2118{,}4$ mm	
p^0 mm	c mm	p^0 mm	c mm
284,3	638,3	406,1	638
271,2	620,6	392	624,5
259,5	604,8	367,1	604,1
253,4	594	359,8	595
240,2	582	344,5	582
227,1	559	321,5	559,5
199,8	523	282,2	523,2
142,5	461,2	197,5	460,8

p^0 bedeutet wie oben den am Anfange des Rohres gemessenen Seitendruck. Dieser kann nicht unmittelbar zur Berechnung des relativen Gefälles P benutzt werden, weil nach pag. 20 und 21 ausserhalb der Grenze des Hagen-Poiseuille'-schen Gesetzes der Druck erst in einer gewissen, von dem Durchmesser der Länge der Röhre etc. abhängigen, Entfernung sein Maximum erreicht, und nur von diesem Punkte an, welcher bei abnehmendem Durchmesser der Einflussöffnung näher rückt, die an der Peripherie gemessenen Drucke sich verhalten wie innerhalb des Gesetzes d. h. wie die Ordinaten einer geraden Linie. Leider hat Jacobson die Maximalwerthe des Druckes nicht angegeben, doch lassen sich dieselben aus den auf pag. 21 (Tabelle) enthaltenen Druckmessungen, welche sich auf dieselbe Röhre D beziehen, hinreichend genau berechnen. Aus diesen folgt nämlich, wie Jacobson ebenfalls bemerkt hat, dass sowohl p^0 als auch $p^{\text{max.}}$, der Maximalwerth des Druckes, der Länge des Rohres proportional ist. Da demnach ihr Verhältniss von l unabhängig ist, so kann man setzen

$$p^{\text{max.}} = \alpha p^0$$

Für den constanten Faktor α erhält man nach pag. 21 die beiden Werthe

1) aus Reihe (2) für $l = 1338{,}5$ . . . . $\alpha = 0{,}9582$
2) aus Reihe (3) für $l = 2123{,}4$ . . . . $\alpha = 0{,}9573$

Beide Werthe unterscheiden sich, wie man sieht, sehr wenig von einander, so dass die Abweichungen der mittels derselben berechneten Werthe von $p^{\text{max.}}$ als innerhalb der Beobachtungsfehler liegend betrachtet werden können.

Als die $p^{\text{max.}}$ entsprechende Länge kann nach der Tabelle auf pag. 21 der Abstand der mittleren (10,1 mm vom Anfange der Röhre entfernten) Durchbohrung vom Ende des Rohres angesehen werden. Diese Länge ($l^{\text{max.}}$) beträgt demnach

1) für die Reihe (2) . . . . $l^{\text{max.}} = 1721{,}4$ mm
2) für die Reihe (3) . . . . $l^{\text{max.}} = 2408{,}3$ mm

Hiernach sind die relativen Gefälle $\left(\frac{p^{\text{max.}}}{l^{\text{max.}}}\right)$ berechnet.

Unter Benutzung der vorstehenden Data ergeben sich nun schliesslich auf Meter bezogen nach der Methode der kleinsten Quadrate folgende Werthe der von Hagen mit a und b bezeichneten Grössen:

Aus Reihe I.

$$b = -\ 0{,}000\,000\,028\,81 \qquad a = +\ 0{,}002\,048\,42$$

Aus Reihe II.

$$b = -\ 0{,}000\,000\,716\,86 \qquad a = +\ 0{,}002\,280\,8$$

Nach Hagen wäre für dieselbe Temperatur ($\tau = 18{,}16\,^0$ R.)

$$b = +\ 0{,}000\,003\,446 \qquad a = +\ 0{,}001\,202.$$

Die Werthe von a stimmen also nur in der Ordnung der ersten Stelle überein, während die von b sowohl der Grösse als dem Zeichen nach differiren. Dabei stimmen die unter Benutzung der obigen Zahlen für a und b berechneten Werthe von $\frac{p}{c}$ (welche durch Accente bezeichnet sind) mit den beobachteten ziemlich befriedigend überein, wie folgende Zusammenstellung zeigt:

I.

$\left(\frac{p'}{c}\right)$ berechnet.	$\left(\frac{p}{c}\right)$ beobachtet.	Differenz.
0.2549	0.2481	+ 0.0068
0.2491	0.2448	+ 0.0043
0.2415	0.2389	+ 0.0026
0.2372	0.2379	— 0.0007
0.2323	0.2298	— 0.0025
0.2231	0.2261	— 0.0031
0.2086	0.2121	— 0.0035
0.1837	0.1720	+ 0.0103

II.

$\left(\frac{p'}{c}\right)$ berechnet.	$\left(\frac{p}{c}\right)$ beobachtet.	Differenz.
0.2582	0.2531	+ 0.0051
0.2522	0.2496	+ 0.0024
0.2430	0.2420	+ 0.0010
0.2390	0.2405	— 0.0015
0.2331	0.2354	— 0.0023
0.2230	0.2285	— 0.0055
0.2068	0.2145	— 0.0077
0.1788	0.1704	+ 0.0074

Obgleich die Differenzen nicht sehr gross sind, so zeigt doch schon der regelmässige, bei beiden Beobachtungsreihen übereinstimmende Gang derselben, dass die angenommene Form das wahre Gesetz der Bewegung nicht darstellt. Denkt man sich die beobachteten sowohl als die berechneten Werthe von $\frac{p}{c}$ durch zwei Curven dargestellt, so erkennt man leicht, dass dieselben in zwei, bei beiden Reihen wenig verschiedenen Punkten schneiden, nämlich bei der Reihe I. in der Nähe der Werthe $\frac{P}{c} = 0{,}2385$ und $0{,}2023$, bei der Reihe II. in der Nähe der Werthe $0{,}2414$ und $0{,}1921$; ausserhalb dieses Intervalles sind die berechneten Werthe stets grösser als die beobachteten.

Beiläufig sei bemerkt, dass die obigen Beobachtungen sich auch nicht unter der Form

$$P = fc^x$$

darstellen lassen (worin f eine Constante bedeutet). Der Exponent x wächst mit zunehmender Geschwindigkeit von 1,5 bis ca. 2,7.

Ich führe nun schliesslich noch die Resultate der Vergleiche meiner an der Prangenauer Leitung angestellten Messungen mit der Hagen'schen Formel an, über welche das Nähere sich im II. Theil dieser Arbeit findet (pag 48 ff.). Ich stelle zunächst die beobachteten und berechneten Werthe in ähnlicher Weise wie es von Hagen bei den Darcy'schen Beobachtungen geschehen ist, zusammen.

Mit Lack überzogene gusseiserne Röhre.

$D = 1{,}3333$ Fuss rhld. $= 0{,}41847$ m, Temperatur 7° R.

P beobachtet	c in rhl. Fuss	P' berechnet	$\frac{P-P'}{P}$
0.0019498	3.00073	0.002012	− 0.0318
0.0016300	2.63119	0.001582	+ 0.0294
0.001376	2.4079	0.001348	+ 0.0203
0.0005915	1.5312	0.0006062	− 0.0248

Summe der Fehlerquadrate*)

$$\Sigma x^2 = 0.000\,000\,000\,973\,7$$

Für die Constanten b und a ergeben sich aus den obigen Beobachtungen vermittelst der Methode der kleinsten Quadrate auf rhld. Fuss bezogen die Werthe

$$b = 0{,}000\,195\,45 \qquad a = 0{,}000\,248\,98$$

und zwar wurde die Rechnung (ebenso wie bei Hagen und Darcy) so geführt, dass die Summe der Quadrate der relativen Fehler ein Minimum wurde.

Die Abweichungen der unter Annahme der obigen Werthe der Constanten b und a berechneten Werthe von P von den beobachteten betragen wie man sieht etwa 2 pCt. des ganzen Werthes.

Nach Hagen soll für 7° R. (diese Temperatur hatte das Wasser sehr nahe bei allen den Beobachtungen) ebenfalls für rhld. Fuss sein

$$b = 0{,}000\,011\,39 \qquad a = 0{,}000\,377$$

Der erste dieser Werthe stimmt nicht einmal in der Ordnung der ersten Stelle mit dem obigen aus meinen Beobachtungen folgenden überein, während der Werth von a sich zu dem meinigen etwa wie 3 : 2 verhält. Diese Abweichungen sind so bedeutend, dass man dieselben nicht etwa durch Ungenauig-

*) $x = \frac{P}{c} - \left(\frac{P'}{c}\right)$

keit in der Messung des Radius erklären könnte. Wenn man nämlich auch den kleinsten gemessenen (nur ausnahmsweise an einzelnen etwas elliptisch geformten Röhren) vorkommenden Werth von D der Rechnung zu Grunde legt, so erhält man statt der obigen Werthe folgende

$$b = 0{,}000\,1839 \qquad a = 0{,}000\,2415.$$

Hier zeigt sich, wie man sieht, erst in der zweiten Ziffer eine Abweichung um eine Einheit. Nichtsdestoweniger schliesst sich meine Formel den Darcy-schen Messungen wenigstens für weitere Röhren ebenso gut an, wie die Hagensche, obgleich die letztere doch aus ihnen abgeleitet ist; während umgekehrt, wenn man aus den von mir an der Prangenauer Leitung beobachteten Werthen der Geschwindigkeit die zugehörigen Gefälle nach der von Hagen aufgestellten berechnet, sich keineswegs eine ebenso genügende Uebereinstimmung herausstellt. Die Belege hierfür finden sich in den folgenden Tabellen, in welchen ich einmal die von Hagen mit No. XXII. und XVIII. bezeichneten Beobachtungsreihen Darcys, sodann die an der Prangenauer Leitung von mir gemessenen Werthe mit meiner und der Hagen'schen Formel zusammengestellt habe. Zur leichteren Vergleichung mit den Darcy'schen Messungen habe ich meine Formel in Meter umgerechnet, dann ergiebt sich

$$b = 0{,}000\,061\,341 \qquad a = 0{,}000\,793\,32$$

Die unter P' stehenden Zahlen sind die unter Zugrundelegung der beobachteten Werthe von c nach der Formel (vergl. pag. 39)

$$P = b\,\frac{c}{D^2} + a\,\frac{c^2}{D}$$

berechneten Werthe des relativen Gefälles.

Asphaltirte (neue) gusseiserne Röhren.

Reihe XVIII. $D = 0{,}188$.

P beobachtet	P' berechnet (nach meiner Formel.)	c	$\frac{P-P'}{P}$ nach meiner Formel.	$\frac{P-P'}{P}$ nach Hagen.
0.00175	0.00190	0.497	+ 0.0857	— 0.063
0.00368	0.003745	0.758	+ 0.0163	+ 0.019
0.00805	0.007847	1.128	— 0.0248	+ 0.026
0.01310	0.011939	1.488	— 0.1090	+ 0.069
0.02250	0.01911	1.933	— 0.119	+ 0.071
0.03810	0.03151	2.506	— 0.172	+ 0.061
0.10980	0.08666	4.323	— 0.210	+ 0.090
0.14591	0.1112	4.928	— 0.237	+ 0.068
Reihe XXII $D = 0{,}5006$				
0.00120	0.000995	0.7932	— 0.179	+ 0.267
0.00125	0.001197	0.7951	— 0.040	0.224
0.00210	0.001974	1.0412	— 0.062	0.248
0.00230	0.002237	1.1135	— 0.026	0.304
0.00260	0.002260	1.1197	+ 0.131	0.165
0.00250	0.002288	1.1278	+ 0.088	0.228

Wie man durch Vergleichung der beiden letzten Spalten erkennt, sind bei der ersten Reihe von Beobachtungen die Abweichungen der nach meiner Formel berechneten Werthe etwas grösser als sie nach der Hagen'schen sich herausstellen. Bei der zweiten Reihe dagegen findet das umgekehrte Verhältniss statt. Dass diese zweite Reihe sich meiner Formel besser anschliesst, liegt, wie es scheint, einfach daran, dass der Durchmesser der Röhre XXII. einen von dem des Prangenauer Rohres nicht sehr verschiedenen Werth besitzt, auch die Gefälle einigermassen einander nahe stehen.

Ich habe die an der Prangenauer Leitung angestellten Beobachtungen noch unter den beiden Formen

$$\alpha)\quad \frac{P}{c} = r + sc \qquad \beta)\quad \frac{P}{c} = r'c^{z}$$

berechnet. Für rhld. Fuss ergiebt sich bei (α)

$$r = 0{,}000\,109\,95 \quad ; \qquad s = 0{,}000\,186\,73$$

Die berechneten Werthe stimmen hier mit den beobachteten ziemlich eben so genau überein als unter Annahme der Hagen'schen Form des Ausdrucks für $\frac{P}{c}$, wie folgende Tabelle zeigt.

$\frac{P}{c}$	$\left(\frac{P'}{c}\right)$
0,00064983	0,00067029
61950	60128
57145	55959
38637	39487

Die Summe der Fehlerquadrate war hiernach

$$0{,}000\,000\,000\,989$$

also fast der auf pag. 42 Tab. angegebenen gleich.

Die Berechnung der Grössen r' und z in der Gleichung (β) liefert endlich die wahrscheinlichsten Werthe

$$r' = 0{,}00027816 \qquad z = 0{,}80186$$

Die hiernach berechneten Werthe von $\frac{P}{c}$ sind

0,0006697
6194
5715
3864

Die Summe der Fehlerquadrate ergiebt sich demnach gleich

$$0{,}000\,000\,000\,696\,8$$

Die Formel (β) schliesst sich daher meinen Beobachtungen am besten an. Nimmt man an, dass die Grösse r', wie Hagen es aus seinen früheren Beobachtungen schliessen zu können glaubte, der 1,25ten Potenz des Durchmessers umgekehrt proportional sei, so wird (für Meter) die Formel (β) folgende

$$(\beta') \quad P = 0{,}0008289\ \frac{c^{1.802}}{D^{1.25}}$$

Vergleicht man die nach dieser Formel berechneten Werthe für P mit den beiden oben (pag. 43) angeführten Beobachtungsreihen Darcy's, so erhält man folgendes:

Reihe XVIII. $D = 0{,}188^{m}$			Reihe XXII. $D = 0{,}500^{m}$		
P	P'	$\frac{P-P'}{P}$	P	P'	$\frac{P-P'}{P}$
0.00175	0.001900	+ 0.0857	0.00120	0.001297	— 0.01049
0.00368	0.004064	+ 0.103	0.00125	0.001302	— 0.00525
0.00805	0.008316	+ 0.0336	0.00210	0.002116	— 0.002094
0.01340	0.01370	+ 0.0224	0.00230	0.002389	— 0.009441
0.02250	0.02195	— 0.0244	0.00260	0.002414	+ 0.01993
0.03810	0.03503	— 0.0704	0.00250	0.002444	+ 0.00629
0.1098	0.09369	— 0.146			
0.14591	0.1185	— 0.187			

Die Vergleichung der hier vorkommenden Differenzen mit denen auf pag. 43 Tab. zeigt, dass die Formel (β') sich mindestens ebenso gut wenigstens den hier verglichenen Beobachtungen anschliesst, als die Hagen'sche, obgleich die Dimensionen der Röhren namentlich bei der ersten Beobachtungsreihe wesentlich von denen verschieden sind, welche bei der Ableitung der Gleichung (β') zu Grunde gelegt wurden.

Nach allem Vorhergehenden glaube ich schliessen zu müssen,

dass die neueste in den Abhandlungen der Berliner Akademie vom Jahre 1869 von Hagen aufgestellte Formel für die Bewegung des Wassers in Röhren nur als eine Interpolationsformel, nicht aber als wahrer Ausdruck des Gesetzes für jene Bewegung betrachtet werden kann.

II. Messungen von Druck und Geschwindigkeit an der neuen Danziger Wasserleitung.

Die Wasserleitung, an welcher die im Folgenden mitgetheilten Messungen angestellt sind, wurde auf Anregung des Oberbürgermeisters Herrn Geheimrath v. Winter nach dem Projecte des herz. sächs. Bauraths Herrn Henoch unter Leitung des Ingenieurs Herrn A. W. Müller*) erbaut, zu dem Zwecke, den Bewohnern Danzigs statt des bis dahin benutzten schlechten Radaunewassers ein gesundes, wohlschmeckendes Trinkwasser zuzuführen**). Sie beginnt bei dem etwa zwei Meilen von der Stadt entfernten Dorfe Prangenau, endigt in einem etwa eine halbe Meile von der Stadt entfernten, ca. 130 Fuss über dem Strassenniveau auf einem Hügel in der Nähe des Dorfes Ohra aufgeführten Sammelbassin (sog. Hochreservoir) und hat eine Gesammtlänge von 3751,2 Ruthen oder 45014,4 Fuss rhld. bei einem Gefälle von ca. 150 Fuss. Sie ist aus je 12 Fuss engl. langen, lackirten gusseisernen Röhren von 16 Zoll rhld. lichter Weite zusammengesetzt. Die Röhren sind in der Weise ineinandergefügt, dass das eben abgeschliffene Ende jedes Rohres in die Muffe des nächstfolgenden gesteckt und der Zwischenraum mit Hanf und Blei ausgefüllt wurde. Ihre Form kann als eine im Ganzen sehr regelmässige bezeichnet werden. Nach gefälliger Angabe des Herrn Ingenieur Müller, der vielfache Messungen der Durchmesser angestellt hat, erreichten die Abweichungen nur bei einzelnen Röhren die Grösse von einem Zehntel Zoll, während die meisten das vorgeschriebene Mass zeigten. Ich selbst konnte leider an den zur Leitung verwendeten Röhren keine Messungen vornehmen, da dieselben bereits verlegt waren, als sich für mich die Aussicht eröffnete, die von mir projectirten Untersuchungen auszuführen. Der nach einem patentirten Verfahren hergestellte Lacküberzug der Röhren war so dünn, dass die durch ihn etwa herbeigeführte Verminderung des Durchmessers nicht in Betracht kommen konnte. Er hat sich bisher vollkommen bewährt; bis jetzt, nach mehr als zweijähriger Benutzung zeigte sich, wenigstens bei den von mir untersuchten Röhren, auf der inneren Wandung keine Spur von Rost†).

---

*) Jetzt selbstständig als Unternehmer hier ansässig, damals Techniker des Hauses J. & A. Aird. Das genannte Haus hatte nicht nur den Bau der Wasserwerke, sondern auch die Ausführung der grossartigen, gegenwärtig (Juni 1872) fast vollendeten Kanalisirungs- und Berieselungsanlagen übernommen.

**) In Betreff der chemischen Beschaffenheit des Wassers verweise ich auf die im vorjährigen Hefte der Schriften der hiesigen Naturforschenden Gesellschaft publicirten Untersuchungen der Herren Dr. Lissauer und Apotheker Helm. Nach dem Urtheile hiesiger Aerzte ist es vermuthlich dem Gebrauche dieses Wassers zuzuschreiben, dass die im vorjährigen Sommer (1871) hier eingeschleppte Cholera im Keime erstickt wurde und im Gegensatze zu früheren Epidemien nur sehr wenige Opfer forderte, während sie an andern Orten der Provinz z. B. in Königsberg sehr heftig auftrat.

†) Siehe Anhang No. 5.

Der Röhrenstrang folgte allen Unebenheiten des Terrains*) und zwar durchschnittlich in einer Tiefe von 5 Fuss, die nur in einer Entfernung von etwa 3000 Ruthen vom Anfange auf 6 Fuss, in der Nähe des Hochbassins bei Ohra bis auf 12 Fuss stieg.

Die vertikalen Krümmungen waren, obgleich die Leitung durch hügeliges Terrain ging (*N. P.*), doch im allgemeinen so sanft, dass nur an zwei Stellen die Anwendung von Bogenröhren erforderlich war, nämlich zwischen den Lufthähnen No. (16—17) und No. (14—15). Der Krümmungsradius derselben betrug 10 Fuss rhld., die Spannung jedes Bogens 22,5°. Ganz unbeträchtlich waren die horizontalen Krümmungen; nur an einer Stelle, zwischen Lufthahn No. (19—20), machte der Strang eine erheblichere Biegung, so dass eine der obigen Bogenröhren angewendet wurde.

Gespeist wird die Leitung durch die in der Nähe von Prangenau entspringenden Quellen, deren Ergiebigkeit durch die unter Aufsicht des Herrn Henoch ausgeführten Aufschlussarbeiten erheblich gesteigert wurde, so dass sie unmittelbar nachdem die Wasserwerke in Betrieb gesetzt wurden, ein Wasserquantum von 362000 Kubikfuss rhld. pro 24 Stunden lieferten†). Die einzelnen aus den bewaldeten Hügeln hervorrinnenden Wasseradern wurden (in dem Ostroschker und Popowker Thal) in allmählich sich erweiternde Sammelkanäle und schliesslich in einen weiten Brunnen, die S a m m e l s t u b e, geleitet.

In diese mündet von der anderen Seite her auch das nach oben umgebogene und trompetenartig erweiterte Mundstück des Hauptrohres, und zwar ist der obere Rand desselben 3 Fuss rhld. über der Sohle angebracht, um den Eintritt der etwa mitgeführten erdigen Theile zu verhindern. Ausserdem ist in der Sammelstube ein Ueberflussrohr angebracht, durch welches das von der Leitung nicht abgeführte Wasser austreten kann; der vertikale Abstand der Oberkanten beider Röhrenmundstücke, also auch die Differenz zwischen dem tiefsten und höchsten Wasserstande beträgt 3 Fuss. Uebrigens wird der letztere nur zur Zeit der Schneeschmelze erreicht, da das Rohr, wie die im Folgenden mitgetheilten Messungen ergeben, weit über 400000 Kubikfuss rhld. abzuführen vermag, während das durchschnittlich von den Quellen gelieferte Wasserquantum gegenwärtig 300000 Kubikfuss kaum erreicht††). Für gewöhnlich steht daher das Wasser in der Sammelstube in gleicher Höhe mit dem oberen Rande des trompetenförmigen Mundstücks, durch welches es in das Hauptrohr einfliesst (*N. P.*).

An der Mündung im Hochreservoir ist das Rohr in ähnlicher Weise wie in der Sammelstube nach oben gebogen, so dass der horizontale Rand des Mundstückes etwa 5 Fuss über der Sohle des Bassins sich befindet. Das Wasser kann in dem Hochbassin bis zu einer Höhe von etwa 10 Fuss über der Sohle steigen, dann fliesst es durch ein Ueberlaufrohr in den Radaunebach. Die Höhendifferenz zwischen den Rändern des oberen Mundstückes in der Sammelstube und des unteren im Hochreservoir beträgt 151,425 Fuss rhld. (*N. P.*). Denkt man sich beide durch eine gerade Linie — die Gefällslinie — verbunden (*N. P.*) so erkennt

*) Vergl. hier und im Folgenden an allen mit (*N. P.*) markirten Stellen den Nivellementsplan auf Taf. I. †) Ueber die bisher hervorgetretenen Veränderungen der Ergiebigkeit der Quellen geben die am Schlusse zusammengestellten Beobachtungen Aufschluss.

††) Vergl. die Beobachtungen am Schlusse dieser Arbeit.

man, dass dieselbe zwar grösstentheils oberhalb der gebrochenen Linie, welche den Lauf des Rohrstranges darstellt, liegt, indessen an einer Stelle, etwa 700 Ruthen vom Hochbassin, (in der Nähe des vierten Lufthahnes) unterhalb derselben fortgeht. Dieser Umstand ist, wie man von vornherein erkennt, für die Druckverhältnisse von Bedeutung.

Um der Luft, welche sich wie bekannt namentlich beim Anlassen des Wassers im Rohre leicht ansammelt und erhebliche Verengungen des Querschnittes hervorbringt, einen Ausweg zu verschaffen, sind an den höchsten Punkten des Röhrenstranges sogen. Lufthähne angebracht, welche in der beiliegenden Nivellementskarte durch *Lh.* mit beigefügter Nummer bezeichnet sind. Es waren im Ganzen sechsundzwanzig, der erste derselben (in der Nähe des Bassins) ist indessen später als überflüssig entfernt worden. Da an ihnen die Messungen des Seitendruckes ausgeführt wurden, so habe ich im Anhange eine Beschreibung eines solchen Lufthahnes beigefügt*)

Das Hochbassin, in welches die Leitung mündet, hat die Form eines Quadrates von 125 Fuss rhld. Seitenlänge. Es ist vollständig überwölbt. Die Tonnengewölbe, welche die Decke tragen, ruhen auf 70 freistehenden und 20 Strebepfeilern, welche sämmtlich bis zur Höhe von ca. 5 Fuss rhld. senkrechte Kanten haben. Der Querschnitt der freistehenden Pfeiler ist ein Rechteck von 3 Fuss rhld. Länge und 1 Fuss 9 Zoll Breite, während der Querschnitt der Strebepfeiler eine Länge von 2 Fuss 8 Zoll rhld. und eine Breite von ebenfalls 1 Fuss 9 Zoll hat. Hiernach berechnet sich der Quadratinhalt der Bodenfläche des Bassins auf 15160 Quadratfuss**).

Ich gehe nun zur Beschreibung der von mir ausgeführten Messungen des Seitendruckes und der zugehörigen mittleren Geschwindigkeit über und beginne mit der letzteren. Zur Ermittelung derselben war es nothwendig, das während einer gewissen, möglichst gross zu wählenden Zeit in das Bassin geflossene Wasserquantum zu bestimmen, wozu wiederum die Messung der entsprechenden Steighöhe erforderlich war. Aus dieser lässt sich dann, da der Kubikinhalt des Bassins bekannt ist, die gesuchte Grösse auf die einfachste Weise berechnen†). Die Höhe des Wasserspiegels konnte an einem Pegel abgelesen werden, der in der Nähe der Einsteigeöffnung an der Wandung befestigt und in einzelne Zolle getheilt war. Der Nullpunkt desselben liegt ca. 5 Zoll über der Sohle des Bassins an derselben Stelle. Das Wasser kann bis zu einer Höhe von 10 Fuss (Pegelhöhe) steigen, dann beginnt es durch das Ueberflussrohr abzufliessen††). Da eine genaue Ablesung des Wasserstandes wegen der schwachen Beleuchtung des Pegels durch das spärlich einfallende Tageslicht, der steten

---

*) Vergl. Anhang No. 6 und Fig. 2 auf Taf. I. **) Siehe Anhang No. 7.

†) Es ist nämlich
$$c = \frac{M}{q}$$
wenn M das Wasserquantum pro Secunde, q den Querschnitt des Rohres bezeichnet, c aber wie oben die mittlere Geschwindigkeit angiebt.

††) Die Entleerung des Bassins konnte in kurzer Zeit durch ein unmittelbar an der Sohle mündendes Rohr, das mit dem Ueberlaufrohre in Verbindung stand, bewirkt werden. Dieses, sowie ein drittes Rohr, durch welches das Wasser aus dem Bassin der Stadt zugeführt wurde, konnten durch Schieberhähne abgeschlossen werden.

Wellenbewegung des Wassers und der ziemlich grossen Entfernung des Auges nicht möglich war, ferner die Theilung des Pegels nicht unerhebliche und dabei unregelmässige Fehler zeigte*), so construirte ich zur Messung der Steighöhe einen Schwimmer. Er bestand (Fig. 4 Taf. II.) aus einem Cylinder von Zinkblech von 8 Zoll Durchmesser und ebenso grosser Höhe, an den sich unten ein Kegel von demselben Durchmesser und 4 Zoll Höhe ansetzte. Letzterer war mit (ca. 7 Pfund) Blei ausgegossen. In den Deckel des Schwimmers war eine circa 6 Zoll vorspringende unten verschlossene cylindrische Hülse eingelöthet, deren Axe mit der des Schwimmers zusammenfiel. In diese konnte ein genau passender, etwa 18 Fuss langer Holzstiel von 1 Zoll Durchmesser gesteckt werden, dessen oberes Ende bis zur Decke des Bassins reichte und durch zwei übereinander in entsprechender Entfernung in die Wand befestigte durchbohrte eiserne Arme in seiner senkrechten Lage erhalten wurde. Die geringe Reibung des Stieles in den Durchbohrungen übte wegen des absichtlich gross gewählten Tragheitsmomentes des Schwimmers keinen merklichen Einfluss auf die Bewegung desselben aus. An dem Stiele war rechtwinklich zu seiner Axe ein Zeiger mit feiner Spitze (eine starke Nadel) angebracht, durch welche an einer senkrechten, unmittelbar daneben aufgestellten, in Zehntel Zolle getheilten Skala das allmählige Steigen des Wasserspiegels markirt wurde. Da man durch vorsichtige Drehung des Schwimmerstieles bewirken konnte, dass die Nadelspitze die Skala berührte, also eine Parallaxe nicht stattfand, da ferner das Auge des auf der Treppe, welche in den Bassin führt, sitzenden Beobachters sich stets in gleicher Höhe mit dem Zeiger befand, so konnte die Ablesung des Theilstriches, auf welchen er gerade einspielte, sehr genau erfolgen. Dabei wirkte der Umstand, dass der Schwimmer durch die in dem Bassin von dem einfliessenden Wasser erregten Wellen in Schwingungen versetzt wurde, nur günstig, da dieselben, eben wegen der bedeutenden Masse des Apparates, sehr regelmässig vor sich gingen, die Ablesung also ähnlich wie bei einer Wage durch das Mittel der Amplituden erhalten wurde.

Um die einer gewissen Steighöhe des Schwimmers entsprechende Zeit zu finden, befolgte ich ein ähnliches Verfahren wie man es bei der Bestimmung der Schwingungsdauer einer Magnetnadel anwendet. Es wurde nämlich, wenn der Schwimmer anfing zu steigen, eine hinreichende Anzahl von Durchgängen des Zeigers durch die aufeinanderfolgenden Theilstriche beobachtet und die zugehörige Zeit notirt, und ebenso wenn der Wasserspiegel eine Höhe von ca. 5 Fuss erreicht hatte. Beide Reihen von Beobachtungen ergaben in passender Weise kombinirt die gesuchten Zeitintervalle mit vollkommen ausreichender Genauigkeit.

Am Beginn jeder Messung wurde die Höhe des Wasserspiegels durch Oeffnung des Entleerungsschiebers so weit vermindert, dass der Schwimmer sich noch eben bewegen konnte, ohne auf den Grund zu stossen. Nachdem man einige Zeit hatte verstreichen lassen, bis der, wegen des schnellen Sinkens des Wasserspiegels möglicherweise zuerst etwas beschleunigte Zufluss wieder gleichförmig

*) Beispielsweise betrug die Abweichung von der wahren Länge
2,5 Linien rhld. bei 3 Fuss Pegelhöhe
1,5 „ „ „ 5 „ „
2 „ „ „ 6 „ „

geworden war, (was durch die Beobachtung selbst controllirt werden konnte) wurden die beiden Hähne, durch welche ein Abfluss aus dem Bassin hätte stattfinden können, geschlossen und mit der Beobachtung begonnen. Ich konnte im Ganzen leider nur vier Beobachtungsreihen anstellen, deren Resultate in der nachfolgenden Tabelle zusammengestellt sind.

A. Beobachtungen am Schwimmer.

Nummer der Beobachtung.	h	T Std.	T min.	n	Q Kbfss.	w min.	w_m min.	$\frac{w_m}{T}$	ΔQ Kbfss.	Datum der Beobachtung.
I. a.	6 dm	1	54,79	12	363300					17. 10. 69.
b.	7,5 dm	2	24,283	12	361300					do.
c.	13,5 dm	4	19,09	12	361700					do.
II.	3 Fuss 4 Zoll	3	49,25	10	317420	0,0856	0,0271	0,0001182	37,5	19. 9. 71.
III.	3 „ 6 „	4	23,038	10	290480	0,0913	0,0289	0,0001099	30,4	8. 10. 70.
IV.	5 dm	3	8,27	14	184720	0,24	0,0665	0,0003532	65,3	25. 9. 70.
					B. Beobachtungen am Pegel.					
I. a.	2 Fuss rhld.	2	1,36	4	359700	0,3646	0,1824	0,001504	537	27. 10. 69.
b.	2 Fuss 4 Zoll	2	21,47	5	360000					
c.	4 „ 3 „	4	17,57	6	360200					
II.	3 „ — „	3	28,38	7	314364	0,53	0,2003	0,0009595	303,1	19. 3. 71.
III.	3 „ 1 „	3	52,843		289080	0,287	0,129	0,0005543	161,4	9. 10. 70.
IV.	1 „ 11 „	3	47,276	7	184010	0,483	0,182	0,0008003	147,3	25. 9. 70.

In derselben bedeutet:

T die Zeit (in Stunden und Minuten), während welcher der Wasserspiegel um die Höhe h stieg, als Mittel aus allen Beobachtungen.

n die Anzahl der der Berechnung von T zu Grunde gelegten Beobachtungen.

Q das aus der beobachteten Steighöhe berechnete Wasserquantum pro 24 St.

w den wahrscheinlichen Fehler einer Beobachtung dieser Zeitdifferenz in Minuten.

w_m den wahrscheinlichen Fehler des Mittels der beobachteten Werthe von T in Minuten.

$\frac{w_m}{T}$ den relativen Fehler von T resp. Q.

ΔQ die dem Fehler w_m entsprechende Veränderung des Wasserquantums.

Der Beobachtungsreihe I. für den Schwimmer habe ich den wahrscheinlichen Fehler nicht hinzugefügt, weil bei derselben eine besondere Fehlerquelle hinzukam, welche bei den andern Beobachtungsreihen nicht vorhanden war. Ich hatte nämlich auf den Wunsch des Ingenieur Herrn Müller, welcher besorgte, der schwere, an einem ziemlich dünnen und langen Stiele befestigte Schwimmer könnte abbrechen und, zum Abflussrohre hinschwimmend, in dieses hineingezogen werden, denselben mittels einer dünnen Hanfschnur an der Wandung des Bassins befestigt, in der Meinung, dass durch das verhältnissmässig geringe Gewicht derselben keine bemerkbare Veränderung in dem regelmässigen Steigen des Zeigers hervorgebracht werden würde. Die Vergleichung der Beobachtungsreihen I. a und I. b, zeigt, dass dieses wahrscheinlich dennoch der Fall war, indem der Schwimmer um so langsamer stieg, als ein grösserer Theil der Schnur, die zuerst fast der ganzen Länge nach an der Wand herabhing, von ihm getragen wurde. Möglicher Weise erklärt sich das schnellere Steigen des Niveaus am Anfange der Beobachtung zum Theil auch daraus, dass beim Beginn dieser Beobachtungsreihe noch kein vollständig stationärer Zustand der Bewegung eingetreten war (vergl. oben pag. 49).

Das Mittel aus den obigen drei Beobachtungsreihen am Schwimmer ist

$$Q(S) = 362200 \text{ Kubikfuss rhld.}$$

Um einigermassen die Grösse des diesem Resultate anhaftenden Fehlers beurtheilen zu können, habe ich Q auch aus den gleichzeitig angestellten Beobachtungen am Pegel berechnet. Das Mittel der obigen Reihen Ia., Ib., Ic. der Pegelbeobachtungen ist

$$Q(P) = 359967 \text{ Kubikfuss}$$

Es wurde bereits oben bemerkt, dass die Theilung des Pegels sich bei einer allerdings erst längere Zeit nachher angestellten Prüfung als ziemlich ungenau erwies, und zwar waren die Theile desselben etwas zu gross. Da demnach die an ihm abgelesene Zahl von Zollen, durch welche die Steighöhe ausgedrückt ist, zu klein wird, so ist natürlich auch das aus derselben berechnete Wasserquantum zu klein.

Als mittlerer Werth des Verhältnisses zwischen der wirklichen und der am Pegel abgelesenen Steighöhe ergab sich durch directe Messung der Pegeltheile

1,0058	bei	3	Fuss	Pegelhöhe
1,00208	„	5	„	„
1,00232	„	6	„	„
1,0034	im Mittel.			

Dasselbe Verhältniss lässt sich auch durch Vergleichung der übrigen gleichzeitig am Pegel und am Schwimmer angestellten Beobachtungen ermitteln, und zwar ergiebt sich dasselbe durch Vergleichung der Beobachtungsreihe

III. zu	1,0052	bei ca.	4	Fuss	Steighöhe
IV. „	1,0064	„	3	„	
II. „	1,0094	„	2	„	
Mittel . .	1,0070				

Nimmt man das Mittel aus diesem und dem obigen Werthe desselben Verhältnisses, so erhält man

$$1{,}0052$$

Multiplicirt man $Q(P)$ mit dieser Zahl, so ergiebt sich

361842 Kubikfuss.

Und das Mittel aus dieser Wassermenge und $Q(S)$ ist endlich

362021 Kubikfuss

was ohne Schaden auf 362000 abgerundet werden kann. Dieser Werth für Q ist bei Berechnung der mittleren Geschwindigkeit in Reihe I. zu Grunde gelegt.

Ich gehe nun zur Beschreibung der mit den vorstehend mitgetheilten Geschwindigkeitsmessungen verbundenen Messungen des Seitendruckes über. Da auf letztere bei Herstellung der Leitung nicht Bedacht genommen war, so konnte ich dazu nur die zu einem anderen Zwecke angebrachten Lufthähne benutzen. Nur bei wenigen Hähnen (bei Lufth. 5. und später, nach starker Abnahme des ursprünglich vorhandenen Wasserquantums, bei Lh. (25) war es möglich, den Druck direct durch Messung der Höhe der entsprechenden Wassersäule zu bestimmen. Es geschah dies in der Weise, dass man das Wasser durch einen mit dem Lufthahn in Verbindung gesetzten Gummischlauch in eine hinreichend weite Glasröhre eintreten liess, welche gegen einen Massstab gehalten wurde, dessen unteres Ende auf den Rand des den Lufthahn umgebenden gusseisernen Koffers gesetzt wurde.

Bei den übrigen Lufthähnen war der Druck so stark, dass, um ihn direct zu messen, besondere Vorrichtungen erforderlich gewesen wären, wie sie mir nicht zu Gebote standen. Ich wandte daher zu seiner Bestimmung zwei verschiedene Manometer an, ein geschlossenes Luftmanometer, in welchem der Druck durch das Volumen einer zusammengedrückten Luftsäule und ein offenes Quecksilbermanometer, in welchem er durch die Höhe einer vom Wasser emporgetriebenen Quecksilbersäule gemessen wurde. Das erstere, dessen Einrichtung mir zum Theil von Herrn Ingenieur Müller vorgeschlagen wurde, erwies sich für meinen Zweck als nicht geeignet, da es nicht hinreichend genaue Resultate lieferte und die Berechnung der Messungen wegen der mehrfachen anzubringenden Correctionen ziemlich umständlich war. Ich habe daher nur eine Reihe von Druckmessungen mit demselben angestellt, dieselben jedoch, obgleich ich sie berechnet habe, wegen ihrer geringeren Genauigkeit nicht bei der Ableitung der im ersten Theile dieser Arbeit angegebenen Interpolationsformel benutzt. Das Quecksilbermanometer dagegen bewährte sich als sehr brauchbar und habe ich daher die mit demselben ausgeführten Messungen der Rechnung allein zu Grunde gelegt. Die Einrichtung desselben ist aus Fig. 5 Taf. II. ersichtlich. Auf dem Grundbrette AB eines stark gefirnissten Stativs aus Tannenholz ist ein Glasgefäss mit starken Wänden mn angebracht, welches zur Aufnahme des Quecksilbers diente*). Der Deckel dieses Gefässes wird durch eine luftdicht schliessende Metallplatte op gebildet, welche an drei Stellen r, s, t durchbohrt ist. In die erste Oeffnung r ist die Röhre $b\,r\,d$ eingesetzt, durch welche bei Oeffnung des Hahnes h das Wasser aus der Leitung in das Manometer eintritt. Das untere Ende d dieser Röhre befindet sich etwa 0,1 Zoll über dem Quecksilberspiegel Q. Durch die Oeffnung s geht ein ca. 6 Fuss langes möglichst gleichförmig starkes Glasrohr, von ca. 1^{cm} äusserem, 3^{mm} innerem Durchmesser, welches in das Quecksilber hinabreicht und von dem Ständer CC' gehalten wird. Auf diesem befindet

*) Bei dem ursprünglich von mir selbst zusammengestellten Instrumente benutzte ich dazu ein starkwandiges Pulverglas mit weiter Oeffnung, in welche ein doppelt durchbohrter Gummipropf eingedrückt und mit Draht befestigt wurde. In die zweite Durchbohrung (b) wurde eine kurze am unteren Ende etwas verjüngte Glasröhre gesteckt, deren oberes Ende mit eine Tille versehen war. Auf die letztere wurde ein starkwandiger Gummischlauch gesteckt, welcher mit dem Rohre des Lufthahnes communicirte. (Vergl. die Beschreibung des letzteren im Anhange No. 6.) Das ganze Instrument war, da ich mit demselben bei jeder Messung etwa 2 Meilen wandern musste, leicht tragbar eingerichtet. Uebrigens lässt sich die Messung des Druckes, wenn er nicht über eine Atmosphäre beträgt und es nicht auf sehr grosse Genauigkeit ankommt, am einfachsten mit Hülfe einer oben geöffneten Barometerröhre ausführen, auf deren Gefäss man den Gummischlauch aufsteckt. Das oben beschriebene vollkommener eingerichtete Manometer, welches bei Lufthahn No. 24 stationair aufgestellt ist, war nach meiner Angabe vom hiesigen Mechaniker G. Grotthaus gefertigt und kostet in solider Ausführung 40 Thaler.

sich eine in Zehntel Zoll getheilte Skala. Bei *t* endlich ist eine ebenfalls mit einem Hahne *a* verschliessbare Röhre *t c* eingesetzt, welche zum herauslassen der Luft diente. Beim Gebrauche des Instrumentes wurden nun, nachdem die Verbindung der Röhre *r g h* mit der Leitung hergestellt war, zunächst die beiden Hähne *b* und *a* geöffnet, so dass das Wasser durch *b* eintreten, die Luft durch *a* entweichen konnte. Hatte sich der Raum über dem Quecksilber mit Wasser gefüllt, (was daran erkannt werden konnte, dass dasselbe bei *c* auszufliessen begann), so wurde der Hahn bei *a* geschlossen und die Höhe *Q Q'* beobachtet, bis zu welcher das Quecksilber durch den Druck des Wassers emporgetrieben wurde. Zur Messung dieser Höhe war auch auf der Vorderseite des Glasgefässes eine Theilung angebracht, welche das Niveau (*QQ*) des Quecksilbers in demselben abzulesen gestattete. Zur Entleerung des Gefässes von dem über dem Quecksilber stehenden Wasser hatte man dem Hahne *b* eine T förmige Durchbohrung gegeben, so dass er bei der in Fig. 5b gezeichneten Stellung mit einer darunter befindlichen Ansatzröhre, auf welche ein Gummischlauch gesteckt wurde, communicirte. Wurde nun *a* geöffnet und an dem Gummischlauch gesogen, so fand die Entleerung statt. Diese Vorrichtung war namentlich für das stationair am 24ten Lufthahne aufgestellte Manometer nothwendig, da ohne dieselbe im Winter das Glasgefäss beim Gefrieren des Wassers gesprengt worden wäre.

Um den Wasserdruck zu finden, welcher dem beobachteten Manometerstande entsprach, musste an der Wasserhöhe, welche sich durch Multiplikation der gemessenen Quecksilberhöhe mit dem spezifischen Gewichte des Quecksilbers ergab*), noch verschiedene Correctionen angebracht werden.

Zunächst wurde zu derselben die Erhebung des Nullpunktes der Skala (*QQ*) über dem Rande des Koffers, von welchem aus der Druck gemessen werden sollte, addirt.

Zweitens musste der Wasserwerth der (wegen der Enge des Rohres nicht zu vernachlässigenden) Depression des Quecksilbers bestimmt werden. Zu diesem Zwecke wurde die Zuleitungsröhre *b d* herausgenommen, statt derselben ein Glastrichter bei *r* eingesetzt, in diesen Wasser gegossen und unter Benutzung des Hahnes *b* der Wasserstand (*W*) in dem Trichter so lange regulirt, bis die Quecksiberkuppe in der Manometerröhre gleiche Höhe mit dem Niveau des äusseren Quecksilbers (*QQ*) hatte. Die Höhe der Wassersäule *Q W* bildete dann die constante Correction, welche zu der wie oben berechneten Druckhöhe hinzuzufügen war. Sie betrug bei meinem Instrumente 1,06 Zoll.

Ein Fehler in der beobachteten Druckhöhe entsteht ferner, wie bereits vorhin bemerkt wurde, dadurch, dass durch die bei Beschreibung des Lufthahnes**) erwähnte Oeffnung (*d*) an der knieförmigen Biegung des Eisenrohres etwas Wasser ausfloss. Obgleich man von vornherein erkennt, dass dieser Fehler wegen der Kleinheit der Oeffnung (*d*) im Verhältnisse zum Durchmesser des Rohres *c f* nicht sehr erheblich sein kann, so habe ich doch, um sicher zu sein, dass er von derselben Ordnung sei als die sonstigen unvermeidlichen Beobachtungsfehler (wie

*) Das specifische Gewicht des zur Füllung angewandten Quecksilbers, welches ich vorher mit Eisenchlorid gereinigt hatte, betrug 13,59.

**) Vergl. Fig. 2 Taf. I. und Anhang No. 6.

sie namentlich durch die fortwährenden stossweise vor sich gehenden unregelmässigen Schwankungen des Druckes, durch eine, wenn auch geringe, so doch bei der grossen Länge der Leitung unvermeidliche Ungenauigkeit des Nivellements etc. hervorgebracht werden) den Versuch gemacht, die Grösse desselben bei den einzelnen Hähnen zu bestimmen. Ich setzte zu diesem Zwecke, nachdem der Hahn bei c geöffnet war und das Wasser bei f hervorquoll, auf die dort befindliche Hülse, welche eine dazu hinreichende Weite besass, eine umgekehrte, mit Wasser gefüllte Flasche, deren Capacität ich vorher bestimmt hatte, schloss dann den Hahn c, und beobachtete die Zeit, während welcher sie durch den Ausfluss bei d entleert wurde. Aus dieser Ausflusszeit lässt sich, wie im Anhange (No. 8) näher ausgeführt ist, der bei der Druckmessung durch den Ausfluss bei d hervorgebrachte Fehler mit hinreichender Annäherung berechnen. Auf diesem Wege fand ich, dass derselbe im Maximum ca. $0{,}01^{\mathrm{m}}$ betrug. Diese Grösse liegt aber vollständig innerhalb der Grenze der bei jeder einzelnen Messung überhaupt erreichbaren Genauigkeit.

Uebrigens kommt der erwähnte Fehler fast nur bei der ersten Reihe von Druckmessungen in Betracht, da bei den späteren die meisten Oeffnungen durch Rost und Sand hermetisch verschlossen waren. Um der grösseren Sicherheit dieser Beobachtungen Rechnung zu tragen, habe ich ihnen bei Berechnung der Drucklinien das doppelte Gewicht beigelegt, und die so erhaltenen Gleichungen mit denjenigen verglichen, welche sich ergaben, wenn man nur die Beobachtungen an den gut schliessenden Hähnen zu Grunde legt. In der Uebereinstimmung beider liegt eine Bestätigung des auf dem oben angedeuteten anderen Wege gewonnenen Resultates, dass die in Rede stehenden Fehler der Druckmessung in der That vernachlässigt werden können.

Ich gehe nun zur Darstellung der schliesslichen Ergebnisse der Druckmessungen über. Nach dem früheren handelt es sich im Wesentlichen darum, die relativen Gefälle (vergl. Th. I. pag. 34) zu bestimmen, welche den oben in der Tabelle auf pag. 50 enthaltenen Werthen des Ausflussquantums resp. der mittleren Geschwindigkeiten entsprechen. Da in der Leitung keine plötzlichen Krümmungen oder sonstige Discontinäten vorkommen, so liess sich erwarten, dass der einer gewissen Strecke entsprechende Druckverlust der Länge derselben proportional sein werde. Ich habe daher, da eine vorläufige graphische Darstellung der Beobachtungen diese Annahme bestätigte, die Gleichungen der gesuchten Drucklinien unter der Voraussetzung berechnet, dass letztere gerade seien. Als Axe der x habe ich die Horizontale gewählt, welche durch den niedrigsten Wasserstand in der Sammelstube bei Prangenau geht und auf diese die Rohrlängen aufgetragen; als Axe der y die durch die Mitte der Sammelstube gelegte Vertikale (vergl. den N. P. und pag. 47). Auf diese bezogen, waren die Coordinaten der Lufthähne, wie sie mir vom Kgl. Feldmesser Herrn Buhse, welcher den Nivellementsplan ausgeführt hat, mitgetheilt wurden, folgende: (Siehe umseitig.)

Die Werthe von y' beziehen sich auf den Deckel sr des zu jedem Lufthahn gehörigen gusseisernen Koffers (Vergl. Fig. 2 Taf. I.). Die in der 3ten (mit Differenz überschriebenen) Spalte enthaltenen Zahlen geben die Rohrlänge zwischen je zwei aufeinander folgenden Lufthähnen an, während der entsprechende Höhenunterschied in derselben Horizontalreihe der letzten Spalte steht; das Pluszeichen

Lufthahn No.	Rohrlänge von der Sammelstube in Prangenau ab gerechnet. x' (in rhld. Ruthen)	Differenz.	Tiefe des Kofferrandes unter dem Niveau der Sammelstube y' (in pr. Fuss.)	Differenz.
1	3690,86		134,85	
2	3556,13	34,73	160,53	— 25,68
3	3552,13	104,00	141,84	+ 18,69
4	3077,22	474,91	89,48	+ 52,36
5	2940,01	137,21	95,64	— 6,16
6	2789,81	150,2	102,93	— 7,28
7	2576,88	212,93	111,70	— 8,77
8	2372,96	203,92	100,62	+ 11,08
9	2185,76	187,20	99,78	+ 0,84
10	1974,17	211,59	108,65	— 8,87
11	1909,49	64,68	92,42	+ 16,23
12	1763,71	145,75	88.75	+ 3,68
13	1668,09	95,65	110 38	— 21,63
14	1632,12	35,97	118,13	— 7,75
15	1583,77	48,35	120,47	— 2,34
16	1446,44	137,33	125,04	— 4,57
17	1409,14	37,30	105,20	+ 9,84
18	1313,40	95,74	108,10	— 2,90
19	1262,93	50,47	109,83	— 1,73
20	1074,79	188,14	113,52	— 3,69
21	883,34	191,45	92,97	+ 20,55
22	766,12	117.22	69,38	+ 23,59
23	687,37	78 75	68,53	+ 0,85
24	455,60	231,77	65,25	+ 3,28
25	373,06	82,54	60,46	+ 4,79
26	205,90	167,16	38,57	+ 21,89

giebt dabei ein Steigen an. Es bezeichne nun h dis Höhe der Wassersäule (vom Rande des Koffers $p\,y$ ab gerechnet), durch welche der Druck dargestellt wird, und es werde gesetzt

$$y = y' - h$$

so giebt offenbar y die Coordinate der Drucklinie für den entsprechenden Punkt an*)

Die beobachteten Werthe von h resp. y für die Lufthähne No. 26 bis No. 5 sind in der Tabelle auf der folgenden Seite zusammengestellt. Die einzelnen Beobachtungsreihen sind mit denselben römischen Zahlen bezeichnet wie die entsprechenden Ausflussmessungen in der Tabelle auf pag. 50, nach welchen die zu jeder Druckmessung gehörigen mittleren Geschwindigkeiten (c) berechnet sind. Die Gleichungen der entsprechenden Drucklinien, welche nach der Methode der kleinsten Quadrate unter Annahme der Form

$$y = a + bx$$

abgeleitet wurden, habe ich nebst Angabe der wahrscheinlichen Fehler der Con-

*) Vergl. pag. 11 und Anhang No. 2.

	Beobachtungsreihe No. I Datum der Beobachtung 17. Oct. 1869. Mittl. Geschwind. $c = 3.0007$ Fuss rhl.					No. II. 19. März 1871. $c = 2.6312$.					No. III. 8. October 1870. $c = 2.4079$.					No. IV. 1. October 1870. $c = 1.5312$.				
	Gleich.d.Druckl. $y = 21.845 + 0.023398\,x$ wahrscheinl. Fehler 0.329 0.000160 relative Gefälle $P = 0.0019498$.					$y = 34.6017 + 0.0195597\,x$ w. F. 0.1104 0.0000783 $P = 0.00163$.					$y = 42.5913 + 0.016512\,x$ w. F. 0.0722 0.000046 $P = 0.001376$.					$y = 70.9538 + 0.0070984\,x$ w. F. 0.0575 0.0000302 $P = 0.0005915$.				
Luftl. No.	y (in rh. Fuss)		h (in rh. Fuss)		Differenz.	y		h		Differenz.	y		h		Differenz.	y		h		Differenz.
	ber.	beob.	ber.	beob.		ber.	beob.	ber.	beob.		ber.	beob.	ber.	beob.		ber.	beob.	ber.	beob.	
26																				
25						41.90	42.03	18.56	18.43	+ 0.13	48 75	49.14	11.71	11.32	+ 0.39					
24						43.515	43.47	21.74	21.78	— 0.05	50.11	50.18	15.14	15.07	+ 0.07					
23											53.94	53.85	14.59	14.68	— 0.09					
22	39.76	40.05	29.62	29.33	+ 0.29	49.59	49.47	19.79	19.91	— 0.12	55.24	54.91	14.14	14.47	— 0.33					
21	42.50	43.06	50.47	49.91	+ 0.56						57.18	56.88	35.79	36.09	— 0.30	77.224	77.26	15.75	15.71	+ 0.036
20																78.58	78.63	34.74	34.89	+ 0.047
19											63.44	63.29	46.39	46.54	— 0.15	79.918	79.72	29.91	30.10	— 0.19
18											64.28	64.05	43.82	44.05	— 0.23	80.277	80.33	27.77	27.82	+ 0.05
17	54.795	54.54	50.405	50.66	— 0.255						65.86	65.85	39.34	39.35	— 0.01	80.956	81.00	24.34	24.20	+ 0.044
16																				
15											68.74	68.93	51.73	51.54	— 0.19	82.196	82.45	38.27	38.02	+ 0.254
14											69.54	69.67	48.59	48.46	+ 0.13					
13	60.85	60.05	49.53	50.33	— 0.80	67.22	67.04	43.16	43.34	— 0.18	70.13	70.40	40.25	39.98	+ 0.27	82.795	82.69	27.59	27.69	+ 0.105
12	63.09	63.91	25.66	24.84	+ 0.82						71.72		19.03			83.474	83.88	5.28	4.87	+ 0.406
11																				
10	68.04	67.99	40.61	40.66	— 0.05	73.21	73.55	35.43	35.10	+ 0.34	75.19	75.13	33.46	33.52	— 0.16	64.967	85.08	23.68	23.57	+ 0.113
9	72.99	72.78	26.79	27.0	— 0.21											86.470	86.52	13.31	13.26	+ 0.051
8	77.38	76.95	23.24	23.67	— 0.43	81.01	80.90	19.61	19.72	— 0.11	81.77	81.95	18.85	18.67	+ 0.18	87.798	87.79	12.82	12.83	— 0.008
7	82.14	82.12	29.56	29.58	— 0.02	85.01					85.14					89.245	89.22	22.46	22.48	— 0.025
6	87.11	87.60	15.83	15.33	+ 0.5	89.18	89.28	13.75	13.65	+ 0.11	88.66	88.39	14.27	14.54	— 0.27	90.757	90.75	12.27	12.18	— 0.007
5	90.64	90.31	5.00	5.33	— 0.33	92.10	92.08	3.54	3.557	— 0.02	91.14	91.18	4.50	4.46	+ 0.04	91.824	91.91	3.62	3.73	— 0.086

y ist in Fussen, x in Ruthen rhld. auszudrücken.

stanten a und b beigefügt. Dem Nivellementsplane entsprechend, habe ich die Werthe der Constanten so bestimmt, dass wenn man x durch Ruthen ausdrückt, die Gleichung den entsprechenden Werth von y in Fussen rhld. ergiebt. Um daher die ebenfalls beigefügten relativen Gefälle (d. h. die Tangenten der Neigungswinkel der Drucklinien gegen den Horizont) zu erhalten, muss man die Werthe von b durch 12 dividiren. Die nach den Gleichungen berechneten Werthe von y resp. h sind neben die beobachteten gestellt. Die beigefügten Differenzen zeigen den Grad der Uebereinstimmung. Sie fallen so unregelmässig, dass sie ohne Zweifel als Beobachtungsfehler anzusehen sind. Darauf deutet auch die verhältnissmässig geringe Grösse der wahrscheinlichen Fehler der Constanten a und b in den Gleichungen der Drucklinien. Die Genauigkeit ist bei der ersten Reihe am geringsten, weil es mir an Zeit fehlte die Messungen, welche nicht aufgeschoben werden konnten, gehörig vorzubereiten*) und ich mit der Einrichtung der Lufthähne und den sonstigen Umständen auf welche ich zu achten hatte noch nicht hinreichend vertraut war, überhaupt diese Messungen nur als provisorisch betrachtete. Ich habe sie indessen bei der Ableitung der im ersten Theile erwähnten Formeln benutzen müssen, weil ich leider trotz mehrfachen Bemühungen später keine Gelegenheit fand, eine Messung bei hohem Drucke anzustellen. Der Grad der erreichten Genauigkeit lässt sich aus den beigefügten wahrscheinlichen Fehlern beurtheilen.

Construirt man die Drucklinien unter Benutzung der in der obigen Tabelle enthaltenen Gleichungen, so findet man, dass die Durchschnittspunkte derselben zwischen der 4ten und 5ten Lufthähne liegen. Ich habe diese Linien, um ihre Lage zu veranschaulichen, unter Beifügung der entsprechenden mittleren Geschwindigkeiten und relativen Gefälle in den Nivellementsplan eingetragen, indem ich die aus den Gleichungen berechneten Ordinaten zweier möglichst entfernten Punkte auftrug und ihre Endpunkte durch eine gerade Linie verband. Dieses ist insofern nicht ganz richtig, als in dem N.-P. statt der wahren Rohrlängen nur die horizontalen Entfernungen angegeben sind. Der Unterschied ist aber, obgleich er auf dem N.-P. nicht unbedeutend erscheint, (weil die Längen in viel stärkerem Verhältnisse verkleinert sind als die Höhen) in Wirklichkeit sehr gering, wie die Vergleichung der in den N.-P. eingetragenen Horizontalabstände der Lufthähne mit den Zahlen der 2ten Spalte in Tabelle auf pag. 55, wo die wahren Rohrlängen (x) angegeben sind, zeigt.

Aus der Definition der Drucklinie folgt, dass an den Punkten, wo sie mit dem Rohre zusammenfällt, der Druck gleich Null ist. Die Betrachtung des N.-P. zeigt, dass dieses im oberen Theile der Leitung resp. bei O', O'', O''' der Fall war. Da die Verbindungslinien dieser Punkte mit dem Niveau in der Sammelstube eine stärkere Neigung gegen den Horizont haben, als die Drucklinien, so ergiebt sich, dass der Theil des Rohres oberhalb der erwähnten Punkte nicht ganz gefüllt sein kann, das Wasser in ihm vielmehr wie in einem offenen Gerinne fliesst. Etwas ähnliches findet unterhalb der Stelle U (ungefähr in der Mitte zwischen dem 3ten und 4ten Lufthahne) statt, wo die Drucklinien sich ebenfalls an die Leitung anlegen. Es ist dieses die im Vorworte (pag. 4) erwähnte

*) Ich musste mir das Manometer selbst verfertigen.

Stelle, wo die Leitung über die Gefällslinie hervortritt, während sie unmittelbar darauf ein sehr starkes Gefälle hat (N.-P.).

Nimmt man an, dass an dem höchsten Punkte die Mündung der Leitung wäre, so würden alle Gefällslinien nach derselben hin convergiren. Weil das Terrain indessen gerade hier nahezu eine ebenso geringe Neigung gegen die Horizontale hat wie die Drucklinien, so verändert sich der Ort des Punktes, wo der Druck Null ist, indem derselbe bei stärkerem Drucke weiter nach dem 4ten Lufthahne rückt, bei schwächerem Drucke wieder zurückgeht. Nimmt man, um annähernd die Lage der erwähnten Punkte zu ermitteln an, dass alle die Drucklinien einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt hätten, und berechnet aus den Gleichungen derselben nach der Methode der kleinsten Quadrate die wahrscheinlichsten Coordinaten (x^0 und y^0) dieses Punktes, so erhält man

$$x^0 = 2989 \text{ Ruthen rhld.} \quad y^0 = 92{,}26 \text{ Fuss rhld.}$$

Bezeichnet man die wahrscheinlichen Fehler resp. mit $w(x^0)$ $w(y^0)$, so ist

$$w(x^0) = 38{,}8 \text{ Ruthen rhld.} \quad w(y^0) = 0{,}687 \text{ Fuss rhld.}$$

Die wahrscheinlichen Fehler werden etwas geringer, wenn man die Beobachtungsreihe II. auslässt. Bei dieser Reihe, deren einzelne Messungen unter sich sehr gut übereinstimmen*) zeigt sich (vergl. die Tabelle auf pag. 56) die auf den ersten Blick sehr auffallende Erscheinung, dass der Druck an den unteren Hähnen geringer war, als bei der Reihe III., obgleich bei letzterer die mittlere Geschwindigkeit einen kleineren Werth hatte. Dieses rührt wahrscheinlich daher, dass in dem nicht vollständig mit Wasser gefüllten Theile des Rohres abwärts vom 4ten Lufthahne (zwischen U und o) eine Verdünnung der über dem Wasser befindlichen Luft und in Folge davon eine Senkung der Drucklinie an dem oberen Theile der Leitung stattgefunden hatte, indem der Druck an allen Hähnen um eine der Verminderung des Luftdruckes entsprechenden Grösse geringer geworden war**). Bei einer von mir selbst etwas später ausgeführten Druckmessung (den 24. April 1871), wo sich dieselbe Erscheinung zeigte, konnte das Vorhandensein des negativen Druckes direct constatirt werden, indem bei Oeffnung des bis dahin verschlossen gewesenen 4ten Lufthahnes ein heftiges Einsaugen der äusseren Luft unter einem zischenden Geräusche stattfand.

Unter Weglassung der Reihe II. erhält man

$$x^0 = 30{,}08 \text{ Ruthen rhld.} \quad y^0 = 92{,}38 \text{ Fuss rhld.}$$
$$w(x^0) = 35{,}16 \text{ ,, ,,} \quad w(y^0) = 0{,}591 \text{ ,, ,,}$$

Die Stelle des Rohres, welche diesen Coordinaten entspricht, liegt wie die Tabelle auf pag. 55 zeigt, nahezu in der Mitte zwischen dem 4ten und 5ten Lufthahne und fällt mit dem höchsten Punkte des Rohrstranges zwischen dem Ober- und Unterwasser zusammen. Aus der erheblichen Grösse der Fehler von x_0 folgt, dass die Lage des Durchschnittspunktes der Drucklinien mit dem Rohre, wo der Seitendruck Null wird, keine unveränderliche ist.

Die bisher angeführten Druckmessungen bezogen sich nur auf den oberen Theil der Leitung zum Punkte U, der eine bei weitem grössere Länge (3008 Ruth. rhld.) hat als der untere (743 Ruth. rhld.). Da ich hauptsächlich den Zweck verfolgte, die Abhängigkeit der Geschwindigkeit von dem ralativen Gefälle zu er-

*) Dieselbe wurde von Herrn Ingenieur Müller und Baumeister Kawerau ausgeführt. Vergl. das Vorwort. **) Vergl. Anhang Nr. 4.

mitteln, so habe ich an dem unteren Theile der Leitung, bei dem der Druck nur an zwei um 104 Ruthen von einander entfernten Lufthähnen (No. 2 und 3, N.-P.) beobachtet werden konnte und ausserdem die Krümmungen verhältnissmässig starke waren, nur wenige Messungen ausgeführt, und auch diese nur zu dem Zwecke, um die von dem Oberingenieur Herrn Müller vorhergesagte und nach ihren Gründen im Architekten-Verein erörterte Erscheinung zu constatiren: dass jeder Drucklinie im oberen Theile (z. B. $O'U$ im N.-P.) der Leitung eine zweite ihr (sehr nahe) parallele (ou) im untern Theile entspricht, deren Endpunkt (u) natürlich mit dem Wasserspiegel im Bassin zusammenfällt*). Ich habe dieses in zwei Fällen festgestellt. In diesen betrug das relative Gefälle im obern Theile der Leitung

a) 0,002131 b) 0,001689

im untern Theile der Leitung

a) 0,00195 b) 0,00177

Die Winkel der entsprechenden Drucklinien mit dem Horizonte waren

für den oberen Theil der Leitung	a) 7′ 19″	b) 5′ 48″
für den untern Theil der Leitung	a) 6′ 42″	b) 6′ 5″
Differenz	+ 37″	— 17″

Die Differenzen sind dadurch erklärlich, dass das relative Gefälle im untern Theile nur mit geringer Genauigkeit bestimmt werden konnte.

Ich habe nur noch die Anwendung der Druckmessungen zur Bestimmung des täglich durch die Leitung strömenden Wasserquantums zu erläutern und die Ergebnisse der auf diese Weise angestellten Messungen anzugeben. Da die mittlere Geschwindigkeit des Wassers unter übrigens gleichen Umständen nur von dem relativen Gefälle abhängt, so muss sich dieselbe, falls das Gesetz dieser Abhängigkeit bekannt ist, berechnen lassen, wenn das Gefälle durch Druckbeobachtungen ermittelt wird. Zu genauen Resultaten kann diese Methode indessen nur führen, wenn einige directe Messungen der Geschwindigkeit und des zugehörigen Druckes vorangegangen sind und aus diesen eine Interpolationsformel hergeleitet ist, welche wenigstens innerhalb der Grenzen, zwischen welchen der Druck resp. die Ergiebigkeit des Rohres schwankt, sich den Beobachtungen gut anschliesst. Wie im ersten Theile (pag. 44) nachgewiesen, erfüllt die Gleichung β auf pag. 44 diese Forderung in ausreichendem Masse.

Legt man bei der Berechnung der Werthe von r' und z nur die letzten drei Beobachtungen zu Grunde, da dieselben genauer sind als die ersten und ein für die practische Anwendung hinreichend grosses Intervall umfassen, so erhält man folgende wahrscheinlichste Werthe der zu bestimmenden Constanten

$$r' = 0{,}00026718 \quad z = 0{,}86714$$

also

$$P = 0{,}00026718\ c^{1{,}86714}$$

Berechnet man nach dieser Formel aus den (auf pag. 56 in der Tabelle angegebenen) beobachteten Gefällen (P) die zugehörigen mittleren Geschwindigkeiten, so zeigt sich, dass dieselben mit den durch directe Messung ermittelten recht be-

*) Siehe das Nähere im Anhange No. 2.

friedigend übereinstimmen, wie aus der folgender Zusammenstellung hervorgeht:

Beobachtetes Gefälle. P	Wasserquantum qro 24 Stunden berechnet Q' Kub.-Fuss.	beobachtet Q
0,001630	317800	317400
0,001376	290200	290500
0,0005915	184700	184700

Zur Ermittelung des relativen Gefälles genügt es nun, wie die Erfahrung gezeigt hat, den Druck an zwei möglichst weit von einander entfernten Stellen zu messen. Bezeichnen wir durch y_1 und y_2 resp. x_1 und x_2 die Coordinaten der Drucklinie für die beiden Beobachtungspunkte, so ist das relative Gefälle

$$P = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

Nehmen wir an, dass der Druck an zwei Lufthähnen gemessen wurde und bezeichnen wie oben durch h' und h'' die Höhen der den Druck messenden Wassersäulen vom Rande des Koffers ab gerechnet, ferner die Coordinaten der letzteren durch x', x'' resp. y' und y'', so ist

$$y_1 = y' - h' \quad ; \quad y_2 = y'' - h'' \quad ; \quad y_1 - y_2 = y' - y'' + h'' - h'$$

folglich

$$P = \frac{y' - y'' + h'' - h'}{x_1 - x_2}$$

Die Differenzen $y' - y''$ und $x_1 - x_2$ sind constant und können für zwei beliebige Lufthähne aus der Tabelle auf pag. 55 entnommen werden. Die Druckhöhen h'' und h' müssen beobachtet werden. Als Beobachtungsstationen sind bei unserer Leitung die Lufthähne No. 24 und 25 gewählt, für welche $x_1 - x_2 = 2484{,}41$ R. rhld. $= 29812{,}9$ Fss. rh.; $y' - y'' = 30{,}39$ Fss. rh. ist. An Lufthahn No. 5 darf wegen des schwachen und wenig veränderlichen Druckes derselbe nur von Zeit zu Zeit mittelst Gummischlauch und Glasröhre gemessen werden*). Am 24ten Lufthahn, wo seit nunmehr einem Jahre der Druck täglich gemessen wird, ist das oben angedeutete einfache Verfahren nur zeitweise (während des Sommers) anwendbar. Es ist deshalb dort in einem Häuschen ein Quecksilbermanometer, dessen Einrichtung oben**) beschrieben wurde, fest aufgestellt und durch ein Bleirohr mit der Leitung verbunden. Der Nullpunkt desselben ist um den Betrag der Quecksilberdepression (durch Wasserhöhe ausgedrückt 1,06 Zoll, vergl. pag. 53) unter dem Rande des Koffers angebracht, wodurch die betreffende Correction fortfällt. Um die Bestimmung der Ergiebigkeit der Leitung möglichst zu erleichtern, habe ich nach der obigen Formel eine Tabelle berechnet, durch welche sich aus der beobachteten Differenz der Druckhöhen $h'' - h'$ das entsprechende Wasserquantum pro 24 Stunden vermittelst einer einfachen Interpolation bestimmen lässt. Zur Erläuterung der Einrichtung dieser Tabelle habe ich im Anhange No. 10 ein kleines Bruchstück derselben beigefügt.

---

*) Es ist dabei zweckmässig eine möglichst weite Glasröhre mit enger Mündung zum Aufstecken des Gummischlauches zu wählen. Bei Anwendung eines solchen werden die sonst sehr störenden stossweise erfolgenden Schwankungen des Druckes fast unmerklich.

**) Vergl. pag. 52 und 53 sowie Fig. 5 Taf. II.

Nicht unerwähnt lassen will ich, dass die Druckmessungen unter Umständen auch noch in anderer Beziehung von practischer Wichtigkeit sein können. Sollte z. B. im Laufe der Jahre durch Niederschläge oder Oxydation das Lumen des Rohres an irgend einer Stelle eine erhebliche Verengung erleiden, so liesse sich dieselbe durch Druckmessungen längs der ganzen Linie wenigstens annähernd ermitteln, da sich vor derselben eine Steigerung, dahinter eine Verminderung des Seitendruckes zeigen müsste. Handelt es sich ferner darum, das von der Leitung gelieferte Wasserquantum durch Anschliessung von Zweigleitungen um einen bestimmten Betrag zu vermehren, so ist die Messung des Seitendruckes an der betreffenden Stelle zur Bestimmung der Höhe erforderlich, in welcher man das Bassin (resp. wenn es sich um Zuführung von Quellen handelt, die Sammelstube derselben) anzulegen hat.

Ich theile nun zum Schlusse die Resultate der bisher über die Ergiebigkeit der Leitung angestellten Messungen mit. Von den seit Juli vorigen Jahres fortlaufend angestellten Messungen habe ich, wenigstens in den Zeitabschnitten, wo sich nur geringe Aenderungen des täglichen Wasserquantums zeigten, nur die Mittel genommen. Die Ablesungen des Manometers sind von dem in Prangenau wohnenden Aufseher der Leitung gemacht. Von den allerdings sehr mangelhaften nur auf Schätzung beruhenden meteorologischen Bemerkungen, welche derselbe laut Instruction seit Ende vorigen Jahres seinen wöchentlichen Berichten beigefügt hat, habe ich das Wesentlichste mitgetheilt.

R. bedeutet Regen, R. R. starken Regen, S. Schnee.

Jahr	Datum der Messung.	Wasserquantum pro 24 Std. in Kubikfuss rhld.	Bemerkungen.	Jahr	Datum der Messung.	Wasserquantum pro 24 Std. in Kubikfuss rhld.	Bemerkungen.
1869	17.10	362000	Directe Messung.	1871	14.10— 2.11	273200	
1870	8.10	290500	do.		3.11—12.11	272650	
	13.11	291300	Durch Druck-		13.11—22.11	269700	R. u. S.
			messung ermittelt		23.11— 2.12	271400	
1871	19.3	317400	Directe Messung.		3.12—12.12	271700	
	23.4	323700	Durch Druck-		17.11—21.12	271700	Thauwetter.
			messung ermittelt		23.12— 1. 1	270900	Schw. Frost.
	27.5	292500	do.		2.1 —11. 1	269200	Schw. Frost und
	24.6	283000	do.				Thauwetter.
	14.7	280000	do.		12. 1—21. 1	265100	Frost, am 17. 3
	26. 7— 4. 8	282500	Anfang d. regelm.				war das Wasser
			fortgesetzten				wegen Reparatur
			Druckmessungen.				eines Rohrbruch.
	5. 8—14. 8	278600					abgesperrt.
	15. 8—24. 8	273900			22. 1—31. 1	265100	R. u. S.
	25. 8— 3. 8	272400			1. 2—10. 2	264300	1. 2—7. 2 starker
	4. 9—13. 9	272500					Frost.
	14. 9—23. 9	276400			11. 2—20. 2	262500	Bis z. 20. 2 schw.
	24. 9— 3.10	275900					Frost, am 17. 2
	4.10—13.10	275400					Schnee.
	14.10—23.10	274500		1872	21. 2—29. 2	266000	Beginn d. Thauw.

R. bedeutet Regen, R. R. starker Regen, S. Schnee.

Jahr	Datum der Messung.	Wasserquantum pro 24 Std. in Kubikfuss rhld.	Bemerkungen.	Jahr	Datum der Messung.	Wasserquantum pro 24 Std. in Kubikfuss rsld.	Bemerkungen.
1872		308000	Schneeschmelze und Regen.	1872	22. 4	288000	
					23. 4–25. 4	281100	
	2. 3	283600			26. 4—25. 4	277600	
	3. 3	283600			29. 4— 6. 5	274900	
	4. 3	284500			7. 5— 9. 5	279100	R. R.
	5. 3	294900			10. 5—11. 5	289100	R. R.
	6. 3	296100	Bis zum 28. 3 am Tage meistens Thauwetter, Nachts schwacher Frost.		12. 5	284300	
	7. 3	302800			13. 5	279800	
	8. 3	292200			14. 5	275400	
	9. 3	290100			15. 5	275400	
	10. 3.	283000			16. 5	275400	R.
	11. 3	276500			17. 5	276300	R.
	12. 3—21. 3	272400			18. 5	277200	
	22. 3 - 25. 3	272000			19. 5	280300	
	26. 3—27. 3	274000			20. 5	280700	R.
	28. 3	282500			21. 5	280300	
	29. 3	**404000**	Regen u. Thauw.		22. 5	275400	R.
	30. 3	373500			23. 5	274500	R.
	31. 3	355202			24. 5	274000	R.
	4. 4	317400	R. R.		25. 5	280000	R.
	2. 4	348600	R.		26. 5	280300	
	3. 4	346700	R.		27. 5	275800	
	4. 4	334400			28. 5	275000	
	5. 4	331800			29. 5	273900	
	6. 4	329900	Nachts strk. Frost		30. 5	273100	
	7. 4	306000			31. 5— 1. 6	272700	
	8. 4	296400	R.		2. 6	284300	R.
	9. 4	300600	R.		3. 6	281800	R.
	10. 4	298700			4. 6	279800	R.
	11. 4—12. 4	293600			5. 6	277300	
	13. 4	292100			6. 6— 8. 6	273100	
	14. 4	289600			9. 6—12. 6	273000	
	15. 4—16. 4	288000			13. 6—15. 6	271200	
	17. 4—18. 4	285300			16. 6—22. 6	268200	d. 16., 17., 18. R.
	19. 4—21. 4	282400			23. 6—29. 6	265200	d. 23. u. 28. R.
					30. 6— 6. 7	266300	R. R.

Die Durchsicht der obigen Zahlen zeigt:

1) dass durch Regengüsse und Schmelzung des Schnees im Frühling nur eine sehr bald verschwindende Steigerung des Zuflusses bewirkt wird,

2) dass abgesehen von dem Einflusse des Tagwassers die Ergiebigkeit der Quellen bisher in einer zwar langsamen aber stetigen Abnahme begriffen ist.

Anhang.

1) Verzeichniss der im Vorhergehenden citirten Schriften. — In den Citaten abgekürzt bezeichnet durch

a. Abhandlungen von G. Hagen

I. Ueber die Bewegung des Wassers in engen cylindrischen Röhren. Poggendorf's Annalen Bd., 46. pag. 423 u. ff. . . . . H. I.

II. Ueber den Einfluss der Temperatur auf die Bewegung des Wassers in Röhren. Eine in der Kgl. Akademie der Wissenschaften gelesene Abhandlung. Berlin 1854. . . . . H. II.

III. Ueber die Bewegung des Wassers in cylindrischen, nahe horizontalen Leitungen. Mit einem Anhange über die Bewegung des Wassers in vertikal abwärts gerichteten Röhren. Abhandlung der Kgl. Akademie der Wissenschaft zu Berlin 1869. (Berlin 1870.) . . . . H. III.

IV. Wasserbaukunst erste Ausgabe . . . . H. Wbk.

b. Poiseuille. Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très petites diametres par le docteur Poiseuille, tome IX. des savantes étrangers, academie des Sciences, Paris MDCCCXLIV. . . . . P.

(In den Citaten ist nicht die Seitenzahl, sondern die Nummer der Paragraphe, in welche die Abhandlung getheilt ist, angegeben.

c. Ed. Hagenbach, Ueber die Bestimmung der Zähigkeit einer Flüssigkeit durch den Ausfluss aus Röhren. Poggendorf Ann. Bd. CIX. (1860) pag. 386 bis 426. . . . . Hbch.

d. Abhandlungen von Dr. Heinrich Jacobson in Königsberg in Reichert's und Dubois Reymond's Archiv, unter dem Titel: Beiträge zur Hämodynamik.

I. Beitrag 1. und 2. im Jahrgang 1860. pag. 80 und ff. . . . . . . J. I.

II. Beitrag 3. im Jahrgang 1861; auch mitgetheilt auf der Naturforscher-Versammlung in Königsberg, September 1860. . . . . J. II.

III. Beitrag 4. im Jahrgang 1862. pag. 683 u. ff. . . . . J. III.

IV. Beitrag 5. im Jahrgang 1867 (auch in Virchow's Archiv für pathologische Anatomie und Physiologie 1866) Bd. XXXVI. pag. 80 u. ff. . . . . . . J. IV.

e. Darcy (inspecteur général des ponts et des chaussées.) Recherches expérimentales relatives au mouvement de l'eau dans les tuyaux. Memoires présentées par divers savants etc. Paris 1857 . . . . D.

f. J. Weissbach. Experimental-Hydraulik; Freiberg 1855. Verlag von J. G. Engelhardt. . . . . W.

2) Darstellung der Druckverhältnisse durch Drucklinien; ad pag. 55 ff.

Denkt man sich die Rohrlänge als Abscisse (x), den zu jedem Punkte des Rohres gehörigen Seitendruck (gemessen durch die Höhe der entsprechenden Wassersäule) als Ordinate (y) aufgetragen, so erhält man eine Linie, durch welche die Veränderungen des

Seitendruckes im Verlaufe des Rohres anschaulich dargestellt werden, die man daher passend „Drucklinie" nennt. Ist in einem cylindrischen Rohre ein stationärer Zustand der Bewegung eingetreten, kann ferner die Bewegung für die verschiedenen Theile desselben als eine vollkommen gleichartige betrachtet werden, so wird die Drucklinie eine Gerade sein. Sie senkt sich im Allgemeinen nach der Mündung des Rohres hin und fällt hier (wenigstens bei weiten Röhren, bei denen die Capillarität keine Rolle spielt) mit der Seitenwandung des Rohres zusammen, wenn der Strahl frei in die Luft austritt. Dass in diesem Falle der Druck an der Ausflussmündung in der That Null ist, geht, wie es auch Hagen bemerkt hat, aus der Thatsache hervor, dass der Strahl bei seinem Austritte denselben Durchmesser wie die Mündung hat. Nach den Versuchen von Hagen, Darcy, Jacobson und von mir selbst hängt der Druckverlust für eine gewisse Rohrlänge ceteris paribus nur von der mittleren Geschwindigkeit des Wassers, nicht aber von dem absoluten Werthe des an der Mündung auf das austretende Wasser wirkenden Druckes ab. Findet daher der Ausfluss unter Wasser statt und bezeichnet k die (constante) Höhe desselben über der Ausflussmündung, so steigt der Seitendruck längs des ganzen Rohres um die Grösse k. Die Drucklinie wird daher zu sich zelbst parallel um die Grösse k gehoben. Umgekehrt wird sie also auch um ebensoviel sinken als der Druck an der Ausflussöffnung vermindert wird. Wenn also z. B. der Ausfluss in verdünnter Luft stattfindet, deren Druck um k geringer ist als der Atmophärendruck, so wird der Seitendruck im letzten Theile des Rohres und zwar auf einer der Grösse k proportionalen Strecke negativ. Es stelle nun in Fig. 2 Taf. II. ac das das Rohr dar, $a'c$ und $a''c$ seien zwei Drucklinien, welche den mittleren Geschwindigkeiten v' und v'' entsprechen mögen, wenn das Wasser c unter dem Atmosphärendrucke steht. Dann wird also die zu $a''c$ parallele Linie $a''''\,c''''$ eine ebenfalls zu v'' gehörige Drucklinie darstellen, wenn der Ausfluss unter Wasser stattfindet, dagegen $a'''\,c'''$ eine derselben Geschwindigkeit v'' entsprechende Drucklinie, wenn der Ausfluss bei c in verdünnter Luft stattfindet. Auf der Strecke oc des Rohres wird dann negativer Druck vorhanden sein. Denkt man sich also z. B. bei d und c senkrecht herabgehende Piezometerröhren angebracht, deren untere Enden in Wasser eintauchen (dessen Niveau durch $m'n'$ bezeichnet ist), so wird das letztere in ihnen um Höhen $d'\,e'$ und $d''\,e''$ steigen, welche gleich den Abständen $d\,e$ resp. $c\,c'''$ der Drucklinie von den zugehörigen Punkten des Rohres sind. Denkt man sich endlich von dem Punkte q, wo die beiden Drucklinien $a'''\,c''$ und $a'\,c$ sich schneiden, ein Loth qp auf ac gefällt, so ist offenbar auf der Strecke po der zu der grösseren Geschwindigkeit v'' gehörige Druck kleiner als der zu der geringeren Geschwindigkeit gehörige z. B. $b\,h''' < bh$, während auf der Strecke oberhalb $p\,q$ das Verhältniss umgekehrt ist, also hier wie gewöhnlich zu der grösseren Geschwindigkeit auch ein höherer Druck gehört.

3) Ableitung des Poiseuille'schen Gesetzes nach Neumann (J. II. p. 88 ff.) ad. pag. 18. u. f.

Eine Flüssigkeit bewege sich durch eine horizontale, cylindrische Röhre und zwar finde die Bewegung nur parallel zur Axe der Röhre (der x Axe) statt. Alle auf concentrischen Schichten befindlichen Theilchen der Flüssigkeit sollen gleiche Geschwindigkeit haben. Es bezeichnen ferner:

x die Entfernung eines Querschnittes vom Anfange der Röhre,
r die Entfernung eines Punktes desselben von der Axe,
p den Druck an einer beliebigen Stelle,
u die Geschwindigkeit „ „
δ die Dichtigkeit der Flüssigkeit.

Nach den obigen Voraussetzungen soll u die Richtung von x haben und nur von r abhängig sein.

Die Kräfte, welche auf die Flüssigkeit wirken sind Druck und Reibung. Betrachten wir ein ringförmiges Element der Flüssigkeit, dessen Masse ausgedrückt ist durch $2\pi\delta r dr . dx$, so ist die Summe der Druckkräfte auf die beiden um dx von einander abstehenden Flächen, welche senkrecht zur x Axe sind

$$2\pi r\, dr\, p - 2\pi r\, dr\left(p + \frac{dp}{dx}dx\right) = -2\pi r\, dr\, dx\,\frac{dp}{dx}$$

Nach pag. 18 ist die Reibung auf die Seitenfläche des Elementes, welche die Grösse $2r\pi dx$ hat, ausgedrückt durch $2\pi dx\, r\eta\,\frac{du}{dr}$; folglich ist die Summe der Reibungskräfte auf die beiden um dr von einander abstehenden Flächen

$$-2\pi\eta r\frac{du}{dr}dx + 2\pi\eta\left[r\frac{du}{dr} + \frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right)dr\right]dx = 2\pi\eta\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right)dr\, dx$$

Die Bewegungsgleichung des Elementes wird demnach

$$2\pi\delta r\, dr\, dx\frac{du}{dt} = -2\pi r\, dr\, dx\frac{dp}{dx} + 2\pi\eta\, dr\, dx\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right)$$

oder

a) $$\delta r\frac{du}{dt} = -r\frac{dp}{dx} + \eta\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right)$$

Nimmt man nun an, dass ein stationärer Zustand der Bewegung eingetreten sei, wie es bei den Beobachtungen der Fall war, so ist $\frac{du}{dt} = o$, und die vorstehende Gleichung verwandelt sich in folgende:

b) $$\frac{dp}{dx} = \frac{\eta}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right)$$

Da die rechte Seite nach den obigen Voraussetzungen von x unabhängig ist, so muss $\frac{dp}{dx} =$ const. sein, also wenn a und b zwei Constante bezeichnen

c) $$p = a + bx$$

Bezeichnen wir, wie im Texte durch p^0 den Druck am Anfange der Röhre, durch P den Druck der Atmosphäre, so ist

d) $$p = P + p^0 + bx$$

Tritt die Flüssigkeit aus der Röhre in die Luft über, so ist

$$\text{für } x = l \ldots\ldots \qquad p = P \quad ; \qquad b = -\frac{p^0}{l}$$

Demnach erhalten wir aus Gl. (b)

e) $$-\frac{p^0}{l} = \frac{\eta}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right)$$

und daraus, wenn wir mit α und β zwei neue Constante bezeichnen, durch Integration

f) $$\alpha - \frac{p^0}{2\eta l}r^2 = r\frac{du}{dr}$$ g) $$\beta + \alpha\log r - \frac{p^0}{4\eta l}r^2 = u$$

Da für $r = o$ die Geschwindigkeit (u) nicht unendlich werden darf, so muss $\alpha = o$ sein, mithin wird

h) $$\beta - \frac{p^0}{4\eta l}r^2 = u$$

Zur Bestimmung von β betrachten wir die Bewegung der mit der Wandung des Rohres in Berührung stehenden Flüssigkeitsschicht; die Geschwindigkeit derselben sei u'. Um den allgemeinsten Fall zu behandeln, nehmen wir an, dass die Wand selbst eine Geschwindigkeit (v) habe. Dann ist, wenn wir die Bewegung eines Elementes von der Oberfläche do betrachten, nach pag. 18 die Bewegungsgleichung für dasselbe

i) $$\delta\, do\, dr\, \frac{du'}{dr} = do \left[E\,(v - u') - \eta\, \frac{du'}{dr} \right]$$

wo E also den Coefficienten der äusseren (zwischen Wandung und Flüssigkeit stattfindenden) Reibung bezeichnet. Diese Gleichung kann aber nur bestehen, wenn

k) $$E\,(v - u') - \eta\, \frac{du}{dr} = o \quad \text{oder} \quad E\,(v - u) = \eta\, \frac{du}{dr}$$

ist, da $\frac{du}{dt}$ nicht ∞ werden darf. Ist, wie in unserm speziellen Falle $v = o$, so ergiebt sich also folgende Grenzbedingung, wenn ϱ wiederum den Radius der Röhre bezeichnet:

l) $$\text{für } r = \varrho \; \ldots \quad Eu' + \eta\, \frac{du'}{dr} = o$$

Substituiren wir hierin die Werthe von u und $\frac{du}{dr}$ für $r = \varrho$ aus Gleichung (h), so folgt

m) $$\beta = \left(1 + \frac{2\eta}{E\varrho}\right) \frac{p^0}{4\eta l}\, \varrho^2$$

n) $$u = \frac{p^0}{4 l \eta} \left[\varrho^2 \left(1 + \frac{2\eta}{E\varrho}\right) - r^2 \right]$$

Haftet die Flüssigkeit an der Wandung, so ist $E = \infty$ zu setzen, und die vorstehende Gleichung wird

o) $$u = \frac{p^0}{4\eta l} \left(\varrho^2 - r^2\right)$$

Führen wir statt u die mittlere Geschwindigkeit c ein, so haben wir

p) $$\varrho^2 \pi c = 2\pi \int_0^\varrho u\, r\, dr$$

oder mit Benutzung von Gl. (o)

q) $$c = \frac{\varrho^2 p^0}{8\eta l}$$

Ich bemerke hier noch, dass Jacobson in einer späteren Arbeit (J. III.) nachgewiesen hat, dass das Poiseuille'sche Gesetz auch gültig bleibt, wenn man das Wasser aus einer weiten in eine engere Röhre übertreten lässt. Abgesehen von der Uebergangsstelle, wo natürlich ein Sprung in der Abnahme des Druckes (verbunden mit einer Contraction des Strahles) stattfindet, ist derselbe in beiden Strombahnen eine lineäre Funktion der Länge des Rohres und die aus der verlorenen Druckhöhe berechneten Werthe von η stimmen mit den sonst für dieselbe Temperatur ermittelten überein, so dass also das Gesetz für beide Strombahnen gilt. Liess Jacobson das Wasser aus der engeren in die weitere Röhre und aus dieser in die Luft übertreten, so zeigt sich, dass wenn überhaupt ein positiver Druck (keine Aspiration) vorhanden ist, derselbe im ganzen Verlaufe der weiteren Röhre so gering ist, dass er innerhalb der Wanddicke der Röhre lag, d. h. kaum 2 mm. betrug. Vergl. J. III. p. 686 und 696 ff.

4) Ableitung der Gleichung (17) pag. 23, nach Jacobson. Vergl. J. III. pag. 688 und 689. Ausserdem J. II. pag. 319 ff.

Nach einem allgemeinen Prinzipe der Mechanik ist

„der in einem Zeitelemente in jedem Theile der bewegten Flüssigkeitsmasse entstehende Gewinn oder Verlust an lebendiger Kraft gleich der in derselben Zeit geleisteten Arbeit, welche erstens von den auf die freie Oberfläche dieser Masse wirkenden Druckkräften, zweitens von den äusseren Kräften (hier der Schwere), drittens von den innern Kräften (hier der Reibung) herrührt.“

Ist ein stationärer Zustand eingetreten, so kann man bekanntlich den Gewinn oder Verlust an lebendiger Kraft der betrachteten Masse gleichsetzen dem Unterschiede der an ihren freien Grenzschichten thätigen lebendigen Kräfte. Nennt man dieselben T und T^0, P und P^0 die daselbst stattfindenden Drucke, A und J die Arbeit der äusseren und inneren Kräfte, so ist demnach

a) $$T - T^0 = \frac{P^0 - P}{\delta} \mu + A + J$$

worin μ die im Zeitelemente in Bewegung befindliche Masse bezeichnet. Man betrachte zuerst den Theil der Wassermasse der vom Niveau des Reservoirs und einem beliebigen Querschnitte der darin mündenden horizontalen Röhre begrenzt ist. Dann ist T^0 verschwindend klein, $A = \mu g h'$ $P^0 =$ Atmosphärendruck, $P = p \pm P^0$ (wenn p wiederum den Drucküberschuss über den Atmosphärendruck an einer beliebigen Stelle der Röhre bezeichnet); also geht Gl. (a) über in

b) $$T = \frac{-p\mu}{\delta} + \mu g h + J$$

Ferner betrachtet man den Theil, der von der Einmündungsstelle bis zu demselben Querschnitt der Röhre heranreicht, so wird in (a) $T = T^0$, $P^0 - P = p^0 - p$, $A = o$ zu setzen sein und J denselben Werth haben wie in (b), weil die inneren Kräfte nur in der Röhre wirken; folglich

c) $$o = \frac{p^0 - p}{\delta} \mu + J$$

Zieht man hieraus den Werth von J und substituirt ihn in (b) so entsteht

d) $$\frac{T}{\mu g} = h - \frac{p^0}{g\delta}$$

und wenn h_0 den Manometerstand an der Einmündungsstelle der Röhre bezeichnet, d. h. also

e) $$\frac{p^0}{g\delta} = h_0$$

gesetzt wird, so folgt

f) $$\frac{T}{\mu g} = h - h_0$$

Der Werth von T lässt sich mit Hülfe der Gl. o in No. 3 des Anhanges berechnen. Nach dieser erhält man nämlich

g) $$T = \tfrac{1}{2} \int U^2 d\mu = c^2 \mu$$

und wenn man dieses in (f) substituirt, so erhält man die Gl. (17) auf pag. 23

h) $$h = \frac{c^2}{g} + \frac{8 \eta l}{g \delta \varrho^2} c$$

Die Gl. (f) lässt sich, wenn man h_0 die Widerstandshöhe nennt, folgendermassen in Worten aussprechen:

„Die Differenz zwischen der Druckhöhe (im Speisebassin) und der Widerstandshöhe ist gleich dem Quotienten aus der lebendigen Kraft durch das Gewicht der in Bewegung befindlichen Masse.

In dem Vorhergehenden ist angenommen, dass an der Einmündung des Rohres kein Verlust an lebendiger Kraft stattfinde. Findet ein solcher statt, so lässt sich derselbe (nach Neumann) mit Hülfe des Carnot'schen Theorems berechnen, wenn man annimmt, dass der Strahl sich beim Eintritte in das Rohr contrahire und wieder an die Wandung derselben anlege. Wir betrachten der Einfachheit wegen nur ein Ansatzrohr. Es bezeichne c_0 die Geschwindigkeit in dem Querschnitte des Bassins, c diejenige im vollständig ausgefüllten Querschnitte des Ausflussrohres und c_1 in dem Querschnitte der grössten Contraction, so ist nach dem Carnot'schen Satze

i) $$c^2 - c_0^2 + (c_1 - c)^2 = 2\,g\,h$$

Bezeichnet man die entsprechenden Querschnitte resp. durch Q_0, Q und Q_1 so verwandelt sich die Gl. (i) in folgende:

k) $$c^2 \left[1 - \left(\frac{Q}{Q_0}\right)^2 + \left(\frac{Q}{Q_1} - 1\right)^2\right] = 2\,g\,h$$

Vernachlässigen wir Q gegen Q_0 und bezeichnen den Contractionscoefficienten $\frac{Q_1}{Q}$ durch γ, so erhalten wir aus der vorstehenden Gleichung

l) $$\frac{c^2}{2g}\left[1 + \left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right)^2\right] = \lambda$$

Nimmt man an, dass der Strahl beim Eintritte in ein langes und enges Rohr (wie es nach den Versuchen von Jacobson wahrscheinlich ist, vergl. pag. 24 u. 25) ebenso wie in einem Ansatzrohre contrahire und wieder ausbreite, so erkennt man ohne Weiteres, dass der Coefficient von c^2 in derselben Weise modificirt werden muss, so dass man statt der Gl. (h) erhält:

m) $$h = \frac{1}{g}\left[1 + \left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right)^2\right] c^2 + \frac{8\eta l}{g\delta\varrho^2}\,c$$

5) Bezugsquellen der Röhren. — Die Röhren sind aus der Fabrik von Cochrane Grove & Comp., New-Castle (p. Middlesborough) bezogen. Die Composition des Lacküberzuges wird geheim gehalten; seine Hauptbestandtheile sollen nach Mittheilung des Herrn Ingenieur Müller eingedickter Steinkohlentheer und Leinöl sein. Zur Imprägnirung mit demselben wurden die angewärmten Röhren in senkrechter Stellung in passende mit der Mischung angefüllte Tröge eingetaucht. Vor der Verladung wurde jede Röhre auf einen viel stärkeren Druck (ca. 11 Atmosphären) geprüft, als sie später in der Leitung auszuhalten hatte. Nichtsdestoweniger sind mehrere (im Laufe von zwei Jahren vier) gebrochen und zwar auffallender Weise alle ringförmig (also der Quere nach.) Nach der Ansicht des Herrn Müller hätten sich unbedeutende beim Transport entstandene, schwer sichtbare Risse in Folge des Druckes, dem die Röhren in der Leitung ausgesetzt waren, allmählig erweitert und auf diese Weise wäre der Bruch entstanden.

6) Einrichtung der Lufthähne. Taf. I. Fig. 2. — L bedeutet den Querschnitt des sechszehnzölligen Hauptrohres. Mit demselben ist mittels eines, in die durchbohrte Wandung des Rohres bei m eingeschraubten Ansatzstückes von Messing ein Bleirohr von $^3/_4$ Zoll lichter Weite und ca. 4 Fuss Länge verbunden, das durch einen Hahn c, welcher an seinem Ende bei b mittels eines Conus mit Schraubenmutter eingefügt ist, abgeschlossen werden kann. An letzterem ist bei k eine senkrecht nach oben bis zur Erdoberfläche gehende eiserne Stange $k\,l$ befestigt, auf deren vierkantiges Ende bei l ein Schlüssel auf-

gesetzt werden kann, der zum Oeffnen resp. Schliessen des Hahnes c dient. An diesen ist nun ferner ein rechtwinklig nach oben umgebogenes Kniestück angeschraubt, in welches bei l ein ebenfalls senkrecht nach oben gehendes Rohr lf von denselben Dimensionen wie das Bleirohr $a\,b$ eingesetzt ist, das bei f mündet. Hier ist eine mit einem Schraubengewinde versehene Hülse f aufgesetzt, in welche der Hahn eingeschraubt werden konnte, welcher zur Herstellung der Verbindung mit dem Manometer diente. In das zwischen dem untern Hahne c und dem am untern Ende des Rohres $f\,c$ befindliche Kniestück war an der äusseren Umbiegung bei d eine kleine Oeffnung eingefeilt, zum Abfluss des nach Schliessung des Hahnes in dem Rohre $e\,f$ noch befindlichen Wassers. Da durch diese Oeffnung während der Druckmessungen natürlich auch fortwährend Wasser ausfloss, so geht ein Theil des Druckes verloren. (Ueber die Grösse des dadurch hervorgebrachten Fehlers siehe weiter unter No. 8 des Anhanges.)

Es möge hier bemerkt werden, dass ein Entweichen von Luft aus den geöffneten Hähnen nur kurze Zeit nach dem Anlassen des Wassers sich bemerkbar machte. Nach wenigen Wochen jedenfalls war die im Rohre ursprünglich etwa angesammelte Luft von dem Wasser, welches in dem grössten Theile der Leitung einem starken Drucke (an einigen Stellen fast vier Atmosphären) ausgesetzt war, absorbiert und fortgeführt, so dass das aus der Mündung der Lufthähne hervorquellende Wasser sich gänzlich blasenfrei zeigte.

7) Dimensionen des Hochbassins und Niederschläge in demselben; ad p. 48. Bei Besichtigung und Reinigung des Bassins, während welcher das Wasser abgelassen war, hatte ich Gelegenheit die Dimensionen desselben zu messen. Vermittelst zweier Latten, deren Länge ich nach einem genau getheilten Metallmaassstabe zu resp.

96,28 Zoll rhld. und 102,62 Zoll rhld.

bestimmt hatte, ergab sich für die

Länge der einen Seitenwandung	. . . . .	125,12 Fuss rhld.
„ „ andern „	. . . . .	125,06 „ „

Da ich bei meinen ersten Messungen, welche ich bereits berechnet hatte, als ich die Prüfung der Dimensionen des Bassins unternahm, die Länge zu 125 Fuss angenommen hatte, so habe ich dieselbe wegen der geringen Abweichung der obigen Zahlen von diesem Werthe beibehalten. Der dadurch hervorgebrachte Fehler (er beträgt nur $^1/_{780}$ ca. vom gesammten Quadratinhalte des Bassins) ist so gering, dass er innerhalb der Grenze der überhaupt bei den Messungen erreichbaren Genauigkeit fällt. Die Messung der Winkel der beiden Seitenwände bot einige Schwierigkeit, da das Innere des Bassins dunkel und ausserdem die Messung der Diagonalen wegen der die Gewölbe tragenden Pfeiler nicht ausführbar war. Da kleine Abweichungen im Winkel, wie eine einfache Betrachtung lehrt, den Quadratinhalt nicht merklich verändern, so überzeugte ich mich mit Hülfe eines sehr genau geschliffenen rechtwinklichen Spiegelprismas davon, dass die Wände sehr nahe rechte Winkel mit einander bildeten. Das Prisma wurde zu diesem Zwecke in der Nähe einer Ecke aufgestellt und seine Entfernung von den beiden Seitenwänden gemessen. In denselben Abständen von den entsprechenden Seitenwänden wurden in möglichst grosser Entfernung zwei Lichtflammen gehalten und beobachtet, ob das Bild der einen sich mit der andern direct gesehenen deckte. Die Abweichung war sehr gering.

Die Dimensionen der Pfeiler zeigten nicht unerhebliche Abweichungen. Die Länge des Querschnittes variirte nämlich von 2,92 Fuss bis 3,04 Fuss rhld., die Breite von 1,74 bis 1,82. Da diese Abweichungen aber theils positiv theils negativ waren und im Vergleiche zu den Dimensionen des Bassins geringfügig sind, so habe ich sie ganz vernachlässigt und den gesammten Quadratinhalt aller Pfeiler zu 480 Quadratfuss angenommen, wie er sich nach den oben angegebenen vorschriftsmässigen Dimensionen berechnet.

Die Niederschläge, welche, wenn das Bassin mehrere Monate nicht gereinigt war, in der Nähe der Mündung des Hauptrohres mehrere Zoll hoch den Boden bedeckten, bestanden nach der Untersuchung des Herrn Apotheker Helm in den unteren Schichten aus vielem groben und feinen Sand, Eisenoxyd, wenig Schwefeleisen, kohlensaurem Kalk und faserigen Pflanzenkörperchen; die oberen Schichten bestanden aus denselben Substanzen, nur war der Gehalt an Sand geringer, derjenige an organischen Substanzen dagegen grösser.

8) Ueber die durch Undichtigkeit des Lufthahnes hervorgebrachten Fehler der gemessenen Druckhöhen; pag. 53 und 54. — Aus der beobachteten Zeit, während welcher die auf die Mündung bei f (Fig. 2 Taf. I.) gesetzte Flasche durch den Ausfluss bei d entleert wurde, lässt sich zunächst die mittlere Geschwindigkeit in dem Rohre df berechnen, wie sie sich unter dem constanten Drucke herstellt, welcher durch eine Wassersäule von der Höhe des Rohres $df = 4{,}3$ Fuss rhld. gemessen wird. Da das Bleirohr ab denselben lichten Durchmesser und sehr nahe dieselbe Länge (1,4 m.) wie das Eisenrohr fd hat, so lässt sich mit hinreichender Annäherung annehmen, dass unter demselben Drucke im ersteren dieselbe Ausflussgeschwindigkeit wie im letzteren stattgefunden haben würde. Daraus lässt sich wieder berechnen, welche Geschwindigkeit sich in demselben Rohre unter dem an dem betreffenden Hahne bei Vernachlässigung des Ausflusses aus d doch jedenfalls annähernd richtig beobachteten Drucke hergestellt haben würde, und aus dieser endlich der entsprechende Druckverlust.

Nun ergab die Beobachtung, dass unter einem Drucke von 4,3 Fuss rhld. (Länge der Röhre df) an den Lufthähnen

No. 5 ;	6 ;	14 ;	17 ;	20 ;	21 ;	23

der Ausfluss bei d unter einer mittleren Geschwindigkeit (v) von resp.

0,072 m. ;	0,017 ;	0,017 ;	0,10 ;	0,111 ;	0,0095 ;	0,0444 m.

stattfand. Bezeichnen M', v', resp. das Ausflussquantum pro Secunde und die mittlere Geschwindigkeit bei einer grössern Druckhöhe h', so ist jedenfalls angenähert nach dem Gesetz für den Ausfluss aus einer kleinen Oeffnung (d) in einer dünnen Wand

$$\frac{M}{M'} = \frac{v}{v'} = \sqrt{\frac{h}{h'}}$$

folglich

$$v' = v\sqrt{\frac{h'}{h}}$$

h' bedeutet hier den bei der jedesmaligen Beobachtung vorhandenen Wasserdruck über der kleinen Oeffnung bei d; dieser ergiebt sich (jedenfalls annähernd richtig) aus den Manometerablesungen. Er betrug z. B. bei der 2ten Beobachtungsreihe (am 9. 10. 70), auf welche die obigen Werthe von v sich beziehen, durch Wasserhöhe ausgedrückt:

8,8	18,7	52,8	43,6	40,3	18,9 Fuss rhld.

Daraus berechnen sich nach der obigen Gleichung für v' folgende Werthe

0,1024	0,034	0,058	0,319	0,029	0,093 Fuss rhld.

Nun ist nach Hagen für Metermaas und eine Temperatur von 10° R. das relative Gefälle

$$P = 0{,}000004\,\frac{v}{D^2} + 0{,}0012\,\frac{v^2}{D}$$

folglich da bei unserer Röhre $D = 0{,}02^{m \cdot}$ für dieselbe

$$P = 0{,}01\ v + 0{,}06\ v^2$$

Setzt man hierin $v' = 0{,}3^{m \cdot}$, welches der höchste vorkommende Werth ist, während die übrigen Werthe von v' erheblich kleiner sind, so erhält man

$$P = 0{,}0084.$$

Da ferner $h = Pl$ (wenn h die Druckhöhe und l die Länge der Röhre bezeichnet) und für unsern Fall $h = 1{,}4^{m}$ ca. ist, so ergiebt sich also als höchster Werth des durch den Ausfluss aus der kleinen Oeffnung im Lufthahnrohre hervorgebrachte Druckverlust 0,0118^cm Wasserhöhe. Dieses ist aber eine Grösse, welche gänzlich innerhalb der bei diesen Messungen überhaupt erreichbaren Grenze der Genauigkeit liegt und daher zu vernachlässigen ist.

9) Auftreten zweier paralleler Drucklinien. Negativer Druck bei Lufthahn No. 4; ad pag. 58 und 59. — Fällt der Lauf eines geradlinigen Rohres mit der Drucklinie zusammen, so muss nach der Definition der letzteren (vergl. d. Anh. No. 2) der Seitendruck an allen Stellen gleich Null sein. Hat das Rohr von einem bestimmten Punkte ab eine stärkere Neigung gegen den Horizont, so muss entweder der Druck in dem unteren Theile des Rohres negativ werden oder derselbe wird, wenn die Luft durch eine — etwa an der Umbiegungsstelle angebrachte — Oeffnung in das Innere eintreten kann, nicht vollständig angefüllt sein, das Wasser in ihm vielmehr wie in einem offenen Gerinne fliessen. Dieser Fall tritt nun bei der Prangnauer Leitung abwärts vom Lufthahn No. 4 ein, wo das Gefälle, wie die Betrachtung des Nivellementsplanes lehrt, stärker ist als die Neigung der Drucklinien gegen den Horizont. In Fig. 6 Taf. II. ist eine schematische Darstellung der hier in Betracht kommenden Verhältnisse gegeben. Ou stellt eine Leitung vor, welche wie die Prangnauer sich an einem Punkte U (entsprechend etwa Lufthahn No. 4) über die Gefällslinie $(O\,P\,p\,u)$ erhebt, unmittelbar hinter demselben ein starkes Gefälle hat, nach der Mündung u hin aber wieder ansteigt. $O\,U$ sei die, einer bestimmten mittleren Geschwindigkeit entsprechende Drucklinie für den oberen Theil des Rohres, welche, wenn bei U die Luft freien Zutritt hat, hier die Leitung berühret. Zwischen U und o ist das Rohr nicht gefüllt, während in dem unteren Theile eine zweite Drucklinie ou auftritt, welche zu der ersteren parallel sein muss, weil durch jeden Querschnitt in dem unteren Theile des Rohres dieselbe Wassermenge fliesst wie in dem oberen, die Neigung der Drucklinien aber nur von der mittleren Geschwindigkeit abhängt.

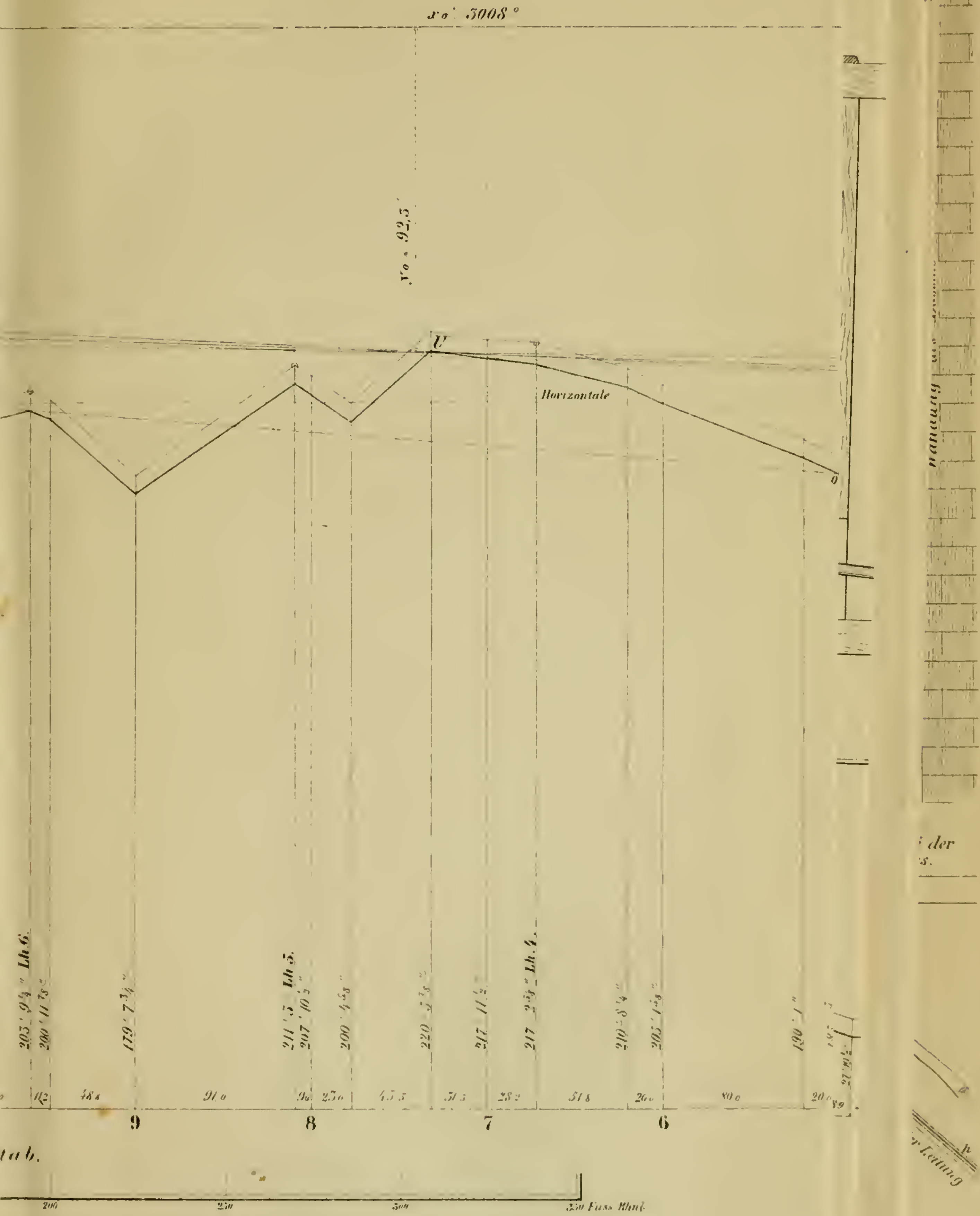
Nehmen wir nun ferner, um die Entstehung der am Lufthahn No. 4 der Prangnauer Leitung beobachteten negativen Druckes zu erläutern, für den Augenblick an, es sei die Mündung u des in Fig. 6 dargestellten Rohres verschlossen, so lange bis sich auch der Theil ou desselben vollständig mit Wasser gefüllt hat. Schliesst man jetzt die Oeffnung bei U und hebt zugleich den Verschluss an der Mündung u auf, so werden — unter der Annahme, dass die Menge des zufliessenden Wassers, (also in unserem Falle die Ergiebigkeit der Quellen) unverändert geblieben ist — nachdem die zunächst eingetretene Beschleunigung des Abflusses in einen stationairen Zustand übergegangen ist, sich wiederum zwei zu den früheren parallele Drucklinien bilden, (da die Neigung derselben wie erwähnt nur von der mittleren Geschwindigkeit abhängt.) Der Theil $o\,U$ des Rohres aber wird, wenn die senkrechte Höhe derselben $o'u'$ in Fig. 6 mehr als 32 Fuss (Höhe der Wassersäule, welche gleich dem Atmosphärendruck ist) beträgt, jetzt bis zu einem Punkte l gefüllt sein, welcher dadurch bestimmt ist, dass $l'o'$ gleich dem Atmosphärendrucke plus der Widerstandshöhe für das Stück lo des Rohres sein muss. Dabei ist im Punkte o der Druck gleich Null, von o bis l negativ. Von l bis U wird das Rohr wiederum nicht ganz gefüllt und über dem herabrinnenden Wasser ein luftleerer Raum vorhanden sein. Daraus folgt nach dem in No. 2 des Anhanges Gesagten, dass die Drucklinie in dem oberen Theile der Leitung um ca. 32 Fuss sinken wird, während sie dieselbe Neigung gegen den Horizont behält. Denkt man sich bei U ein senkrecht herabgehendes, luftleeres Rohr abgezweigt, dessen Mündung bei mn im Wasser taucht, so wird letzteres durch den äusseren Luftdruck um ca. 32 Fuss, etwa bis l'' emporgetrieben werden. In Wirklichkeit fand nun bei der Prangenauer Leitung abwärts vom Lufthahn No. 4, zwar keine vollständige Evacuirung, wohl aber, wie es bereits oben (vergl. pag. 58 und Anhang No. 2 im Schlusse) bemerkt wurde, eine starke Luftverdünnung statt, wenn das zufliessende Wasserquantum plötzlich stark wuchs und gleich darauf wieder abnahm, was, wie die Uebersicht auf pag. 61 und 62 zeigt, sich im Frühling zur Zeit der Schneeschmelze mehrfach wiederholte. Dann wird wahrscheinlich die zwischen U und o in der Leitung befindliche Luft von dem heftig zuströmenden Wasser zum Theil mitgerissen, zum Theil wegen des vergrösserten Druckes absorbirt und ein grösserer Theil des Rohres von o aufwärts füllt sich vollständig mit Wasser. Nimmt der Zufluss wieder schnell ab, so muss also eine Verdünnung der unterhalb U noch vorhandenen Luft eintreten. Dass bei einer solchen die Drucklinie im oberen Theile der Leitung um eine dem Grade der Verdünnung entsprechenden Grösse parallel zu sich selbst nach unten verschoben wurde, zeigt sich aufs Deutlichste bei der am 19. März 1871 ausgeführten Druckmessung (No. II. der Tabelle auf pag. 56), bei welcher der Druck an Lufthahn No. 5 z. B. um ca. 1 Fuss (Wasserhöhe) geringer war, als bei der Reihe No. III., obgleich bei letzterer das Wasserquantum erheblich geringer war. Auch im Frühjahre dieses Jahres wurde dieselbe Erscheinung mehrfach beobachtet.

10) Bruchstück der Tabelle zur Berechnung des von der Prangenauer Leitung gelieferten Wasserquantums aus den an Lufthahn No. 24 und No. 5 gemessenen Druckhöhen; ad pag. 59 und 60. —

Die Tabelle ist nach der auf pag. 59 angegebenen Formel berechnet; ihr Gebrauch nach den auf pag. 60 gegebenen Erläuterungen ohne weitere Erklärung verständlich.

Differenz der der Druckhöben an Lufthahn No. 24 u. No. 5. $h'' - h'$ in rhld. Fuss.	Entsprechendes Wasserquantum pro 0,24 Stunden. $Q:100$ in Kubikfuss rhld.	Differenzen zur Interpolation für die Zehntel-Fusse.								
		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9 Fuss.
1	2509.4									
2	2552.0	4.26	8.52	12.78	17.04	21.30	25.56	29.82	34.08	38.34 Kubikf.
3	2595.0	4.21	8.42	13.63	16.84	21.05	25.26	29.47	33.68	37.89 ..

ung,



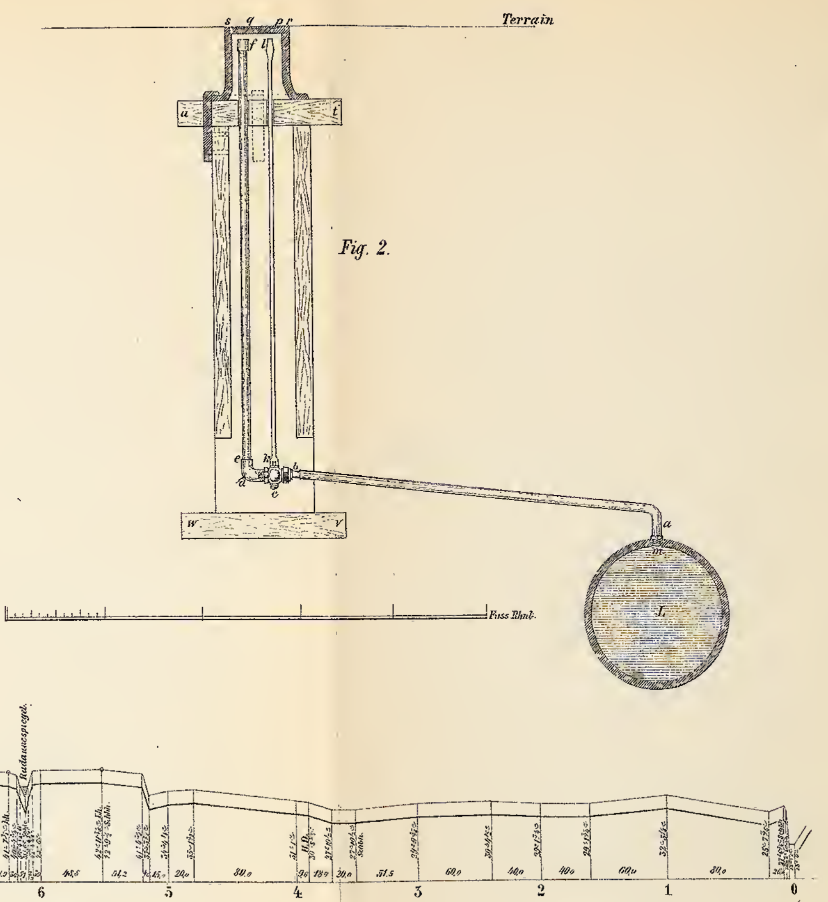
x_o = 3008°
y_o = 92,5'
U
Horizontale
Lh 6.
Lh 5.
Lh 4.
9
8
7
6
0
der
Leitung
Fuss Rhnl.

Fig. 1.

Nivellements-Plan zur Danziger Wasserleitung,

nebst Darstellung der Druckverhältnisse nach den Beobachtungen des Verfassers.

Fig. 2.



Aufgenommen u. nivellirt im November 1869 durch Buhse.

Lith. Anst. v. R. Emmendoerffer. Danzig

Taf. II.

Fig. 1.

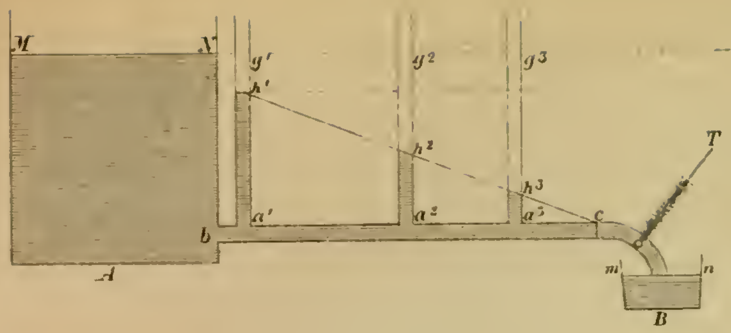


Fig. 2.

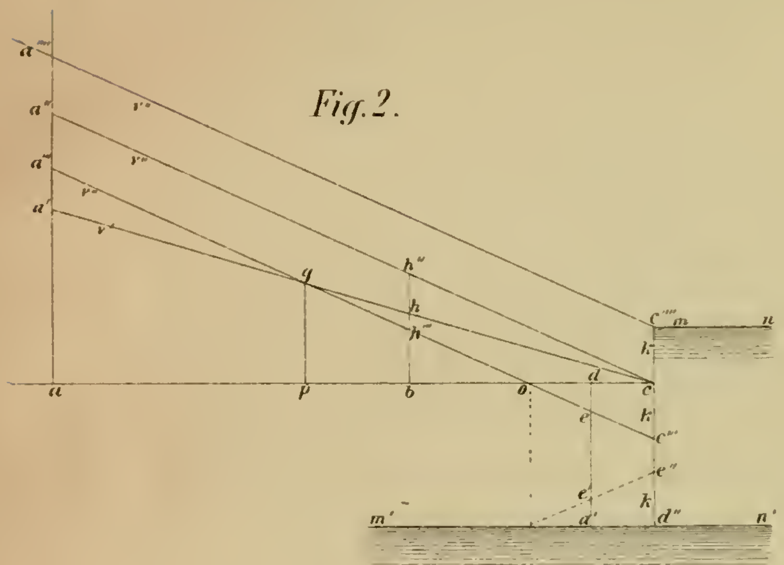


Fig. 3.

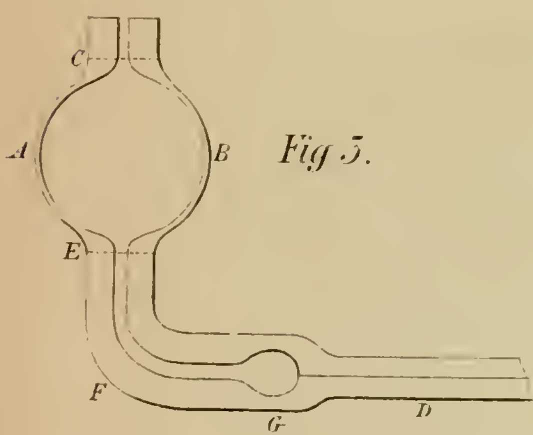


Fig. 4.

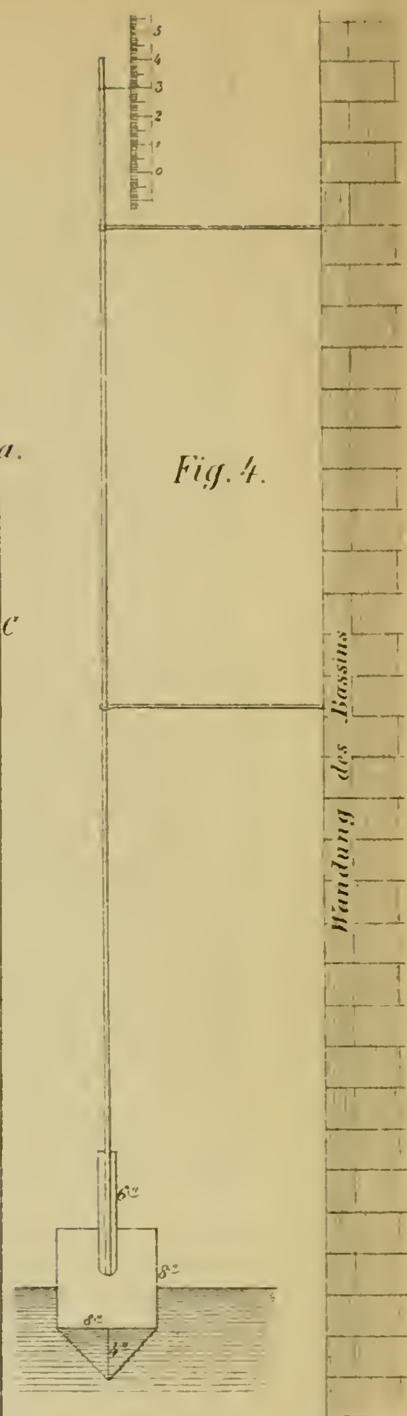


Fig. 5, a.

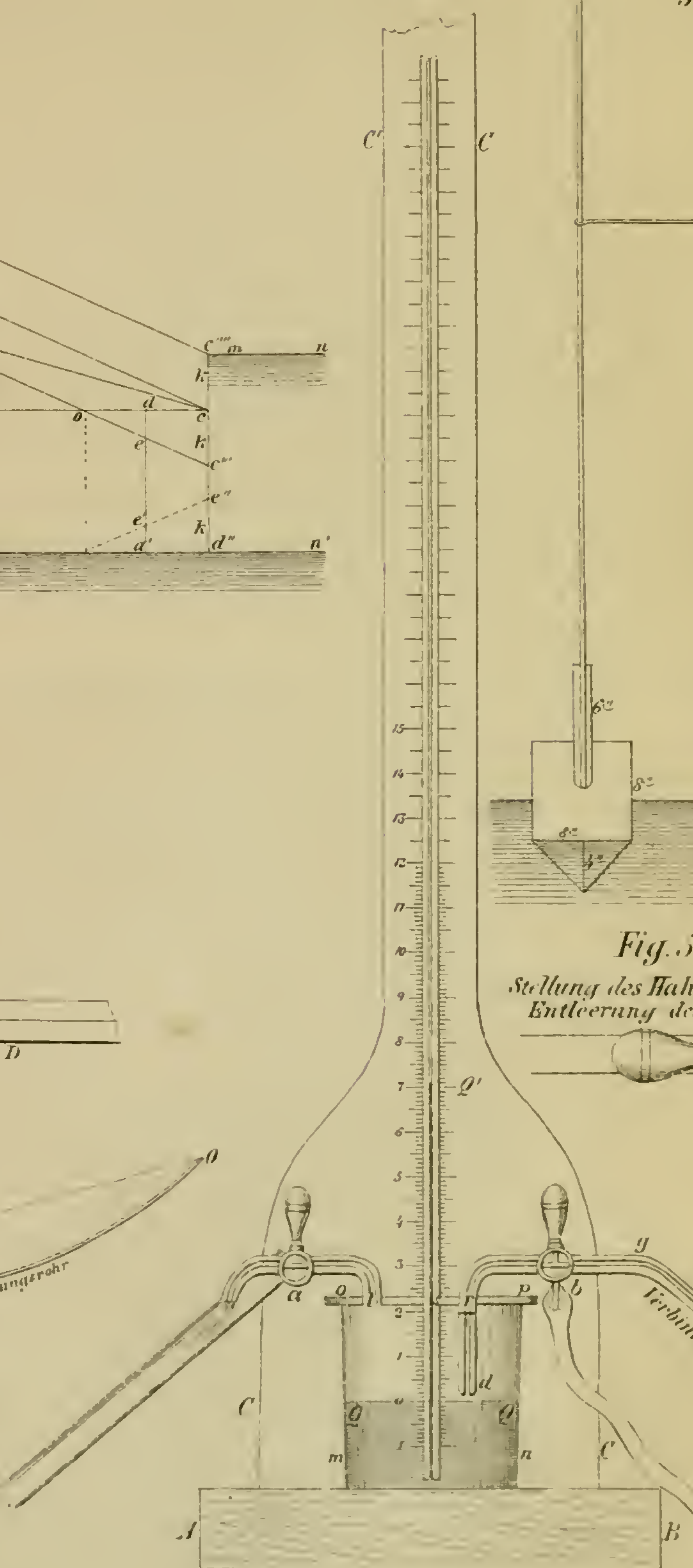


Fig. 5, b.

Stellung des Hahnes b bei der Entleerung des Gefässes.

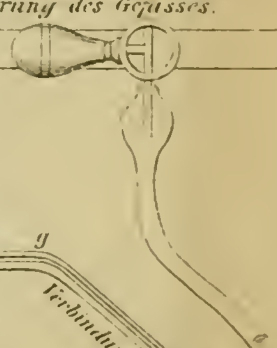
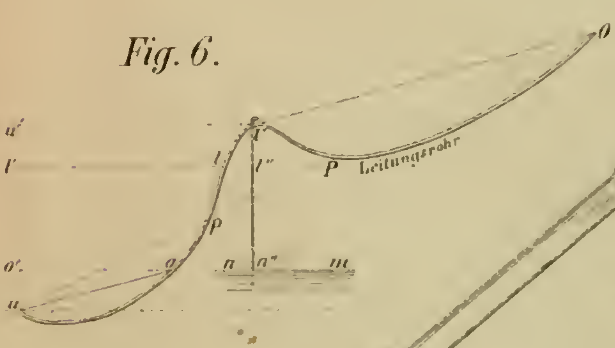


Fig. 6.



Lith. Anst. v. R. Emmendörffer Danzig