Sitzungsberichte

der

königl. bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München.

Jahrgang 1862. Band II.

München.
Druck von J. G. Weiss, Universitätsbuchdrucker.
1862.

In Commission bei G. Franz.

Kohlensäure	Wasser	Wasserstoff	Grubengas
417,3	426,9	6,4	3,7
	drei Tage später		
427,8	626,6	4,3	4,5

Man sieht, wie die Wasserstoffausscheidung abnimmt, wenn die Stärke durch Fett ersetzt wird, während die Menge des Grubengases sich ziemlich constant erhält. Wie weit der Wasserstoff bei dieser Diät nach und nach zurücktritt, werden fortgesetzte Versuche lehren.

Gegen diese Zahlen kann man nur den einzigen Einwurf noch machen, dass vielleicht die in den Apparat einströmende Luft schon etwas Wasserstoff enthalte, der von dem im Apparat entwickelten abzuziehen wäre. Um diesem zu begegnen, wird eben eine vierte Untersuchungspumpe aufgestellt, welche auch die Untersuchung der fortwährend einströmenden Luft auf Wasserstoff und Grubengas gestattet. Aller Wahrscheinlichkeit nach werden diese Grössen verschwindend klein sein, doch erfordert das Princip der Differenzbestimmungen, welches meiner ganzen Untersuchungsmethode zu Grunde liegt, auch diese Rücksicht, und werde ich in Bälde im Stande sein, hierüber in entscheidender Weise berichten zu können.

Herr Seidel sprach

„Ueber die Verallgemeinerung eines Satzes aus der Theorie der Potenzreihen.“

Wenn man zwei nach steigenden Potenzen derselben Grösse x geordnete Reihen hat, welche für alle Werthe von x zwischen o und h convergiren und übereinstimmende Werthe annehmen, so hat man den für die ganze Analysis fundamentalen Satz, dass diese beiden Reihen identisch sein müssen. Der Beweis desselben, wie er von Cauchy in exacter Weise gegeben ist, beruht wesentlich auf der Betrachtung kleiner Werthe von x; er erfordert dabei keinen andern Hilfssatz, als den vorausgegangenen Nachweis, dass es möglich ist, in der convergirenden Potenzreihe x so klein anzunehmen, dass das Verhältniss der in's Unendliche sich erstreckenden Summe aller Glieder, von einem bestimmten angefangen, zu dem vorausgehenden einzelnen Gliede, kleiner wird als eine beliebig kleine Grösse. — Die Frage hat sich wohl schon Vielen aufgedrängt, ob man die Identität der beiden Reihen, deren Summen übereinstimmen, auch dann nachweisen kann, wenn die Grenzen g und h von x, innerhalb deren man dieser Uebereinstimmung gewiss ist, die Null ausschliessen; kürzlich ist diese Frage von Herrn H. Laurent in dem Journale von Terquem und Gérono aufgeworfen worden. Dass ihre Beantwortung affirmativ ausfallen muss, daran wird nicht leicht Jemand zweifeln; es scheint aber nicht uninteressant, sich davon Rechenschaft zu geben, wie der strenge Beweis zu führen ist. Derselbe liegt darum nicht ganz so nahe, als man erwarten möchte, weil die Eigenschaften, welche wir gewohnt sind mit der Natur von Potenzreihen als unzertrennlich verknüpft zu denken, zum Theile aus der Betrachtung erwiesen werden, dass alle Reihen dieser Art unter das Taylor'sche (oder Maclaurin'sche) Theorem fallen: man muss aber bemerken, dass die Identität irgend einer convergirenden Potenzreihe mit einer Taylor'schen Reihe unseren Satz selbst schon zur Voraussetzung hat, und a priori nicht feststeht, wenn man von den Werthen der Ersteren nur Kenntniss hat für solche x, die zwischen Grenzen g und h liegen, welche entweder beide positiv und von Null verschieden oder beide negativ und von Null verschieden sind. — Offenbar kann man das zu erweisende Theorem auch so aussprechen: wenn eine nach Potenzen von x geordnete Reihe convergirt und Null zur Summe hat für alle Werthe von x zwischen g und h, so müssen alle ihre einzelnen Glieder identisch Null sein. Der an diese letztere Formulirung sich anschliessende Beweis, den ich im Folgenden andeuten werde, beruht auf der Idee, zunächst das Intervall der Grenzen von x, innerhalb deren die Summe Null wird, nach unten zu erweitern, so lange bis der Werth $x = o$ hineinfällt, wo dann der Cauchy'sche Beweis zutrifft; um jedoch diese Erweiterung vornehmen zu können, sind, soviel ich sehe, einige Hilfssätze nöthig, die ich bezeichnen werde, und die übrigens Eigenschaften aussprechen, welche auch sonst von wesentlicher Bedeutung für die Potenzreihen sind:

1) Man zeigt, dass wenn eine vorgelegte nach Potenzen von x geordnete Reihe convergirt für $x = h$, sie auch convergiren muss, und zwar abgesehen von den Vorzeichen ihrer Glieder, für alle x die der Null näher liegen als h. Desgleichen zeigt man, dass die Reihe für diese letzteren Werthe von x nothwendig eine continuirliche Function von x vorstellt.

2) Wenn man eine abgeleitete Reihe dadurch bildet, dass man in der vorgelegten Reihe Glied für Glied nach x Einmal differentiirt, — oder eine zweite abgeleitete dadurch, dass Glied für Glied zweimal nach x differentiirt wird, — u. s. w., so wird bewiesen, dass auch die m^{te} abgeleitete Reihe noch convergirt für alle Werthe von x, die der Null näher liegen als h. (Nach Satz 1. ergibt sich dann, dass auch jede dieser Reihen eine continuirliche Function von x ist).

3) Man zeigt, dass diese abgeleiteten Reihen zu Summen die wahren Differential-Verhältnisse der durch die ursprüngliche Reihe vorgestellten Function von x haben. (Diese Behauptung bedarf eines Beweises, weil man bekanntlich keinen Satz hat, nach welchem es erlaubt wäre, unendliche Reihen im Allgemeinen zu differentiiren, und weil die Identität der vorgelegten Reihe mit einer Taylor'schen, die differentiirt werden darf, noch nicht erwiesen ist.)

Nach diesen Sätzen würde man also jetzt wissen: die durch unsere Reihe dargestellte Function ist continuirlich sammt allen ihren Differential-Verhältnissen nicht allein für alle x zwischen g und h, sondern auch für alle x zwischen o und h[1]. Ferner weiss man (nach der Voraussetzung), dass sie constant gleich Null ist für alle x in den engeren Grenzen g und h, woraus von selbst folgt, dass innerhalb *dieser* Grenzen auch alle Differential-Verhältnisse Null sind. Es handelt sich darum, aus der letzteren Eigenschaft mit Hilfe der jetzt erwiesenen Continuität der Function und ihrer sämmtlichen Differential-Verhältnisse zu erweisen, dass auch die Fortsetzung der Function über das letztere Intervall hinaus, nämlich für Werthe von x zwischen o und g, noch constant gleich Null bleibt. Wenn eine Function, die zwischen $x = g$ und $x = h$ stetig gegeben ist, und von der man weiss dass sie jenseits $x = g$ sammt allen ihren Differential-Coefficienten continuirlich bleibt, überhaupt nur auf Eine Art fortgesetzt werden könnte, so wäre es klar, dass die unsrige auch von $x = g$ bis $x = o$ constant und gleich Null bleiben müsste; die angeführten Data genügen indessen nicht, um zu diesem Schlusse zu berechtigen[2]. Man kann denselben aber für den uns vorliegenden Fall strenge legalisiren, indem man auf die zu behandelnde Function den Taylor'schen Satz *mit dem Ergänzungsgliede* anwendet. In dieser Form gilt der Satz bekanntlich immer, so lange nur die sämmtlichen in seiner Entwicklung aufgenommenen Glieder continuirliche Functionen bleiben: setzt man für x einen Werth zwischen g und h, dem g sehr nahe liegend, für Δx einen Werth dessen Vorzeichen mit demjenigen von $g - h$ übereinstimmt, so verschwinden für unseren Fall alle Glieder bis auf das Ergänzungs-

---

(1) Man könnte auch gleich sagen, zwischen $-h$ und h. — Ich setze voraus, dass g zwischen o und h liegt. —

(2) Es sei Fx ein Ausdruck, welcher für Werthe von x die kleiner als g sind eine den angeführten Bedingungen entsprechende Fortsetzung einer zwischen $x = g$ und $x = h$ gegebenen Function darstellt. Alsdann wird auch $Fx + \varphi(x)\, e^{\frac{1}{x-g}}$ denselben Bedingungen genügen, wenn $\varphi(x)$ eine willkührliche Function vorstellt, die aber zugleich mit allen ihren Differential-Verhältnissen continuirlich bleibt zwischen o und g.

glied, von dem letzteren aber kann man beweisen, dass es sich bei wachsendem Index ebenfalls der Null als seiner Grenze nähert, vorausgesetzt dass $\frac{\Delta x}{h - x}$ ein ächter Bruch ist. Indem man Δx dieser Bedingung entsprechend annimmt, erweitert man also, gegen Null zu, die Grenzen des anfänglich gegebenen Intervalles innerhalb dessen die Reihe constant den Werth Null hat: indem man sich nöthigenfalls eine solche Erweiterung mehrmals wiederholt denkt, bringt man den Werth $x = o$ selbst in das neue Intervall hinein, und reducirt dadurch die Betrachtung auf den bekannten Fall, für welchen schon demonstrirt ist, dass alle Glieder der Reihe identisch verschwinden müssen.

Was die Beweise der unter 1), 2), 3) gedachten Sätze und ebenso denjenigen für die unendliche Abnahme des Ergänzungsgliedes bei fortwährendem Wachsen des Index betrifft, so beruhen sie alle auf der nämlichen Betrachtung, nach welcher gezeigt wird, dass in der convergirenden Potenzreihe die Ergänzung beliebig viel kleiner gemacht werden kann als das einzelne ihr vorangehende Glied. Um bei den Thesen 1) nicht zu verweilen (deren Beweis besonders nahe liegt), so wird z. B. die Convergenz der sämmtlichen nach 2) abgeleiteten Reihen (welche abgesehen von den Vorzeichen stattfindet) durch folgende Bemerkung dargethan: Weil die ursprüngliche Reihe noch convergirt für $x = h$, so gibt es eine endliche Grösse M, welche die Eigenschaft hat grösser zu sein, als irgend ein einzelnes Glied der Reihe dann wird, wenn man h für x setzt. Nimmt man daher jetzt für x einen kleineren Werth, so wird das mit x^r multiplicirte Glied kleiner sein als $\left(\frac{x}{h}\right)^r M$, d. h. kleiner als das allgemeine Glied der geometrischen Reihe, deren Glieder sämmtlich positiv sind, und welche $\frac{M}{1 - \frac{x}{h}}$ zur Summe hat. Wenn man nun die einzelnen Glieder der erstern Reihe mit denjenigen Zahlenfactoren multiplicirt, welche bei ihnen durch die successiven Differentiationen hinzutreten, und zugleich die entsprechenden Erniedrigungen der Potenzen von x vornimmt, so werden die einzelnen Glieder noch immer kleiner sein, als die auf dieselbe Art veränderten Glieder der geometrischen Reihe. Die letzteren haben aber, wenn m mal differentiirt worden ist, zur Grenze ihrer Summme die Grösse $M \frac{d^m}{dx^m}\left(1 - \frac{x}{h}\right)^{-1} = \frac{1.2.3 \ldots m.M}{h^m\left(1 - \frac{x}{h}\right)^{m+1}}$ welche endlich bleibt für alle Werthe von x die kleiner als h sind; es wird daher auch der Zahlenwerth der Reihe, welche durch m malige Differentiation der einzelnen Glieder der ursprünglich vorgelegten Reihe entsteht, den Werth des letzteren Ausdruckes selbst dann nicht überschreiten können, wenn man allen Gliedern gleiche Zeichen gibt, — womit die Behauptung 2) erwiesen ist [3].

Um endlich zu beweisen, dass die convergirende Reihe, welche man durch Differentiation der einzelnen Glieder der vorgelegten Reihe erhält, zu ihrer Summe wirklich das Differential-Verhältniss der durch die erste Reihe dargestellten Function hat (— unsere Behauptung 3), die offenbar für m malige Differentiation von selbst folgt, wenn sie erst für die einmalige erwiesen ist —), bildet man zuerst den Unterschied der beiden Werthe, welche die vorgelegte Reihe annimmt für $x = \alpha$ und für $x = \beta$ (ich nehme an $\beta^2 > \alpha^2$), und dann, durch wirkliche Division der einzelnen Glieder, das Verhältniss dieses Unterschiedes zur Differenz $\beta - \alpha$. Man hat zu zeigen, dass dieses Differenzen-Verhältniss bei fortwährender Annäherung von β an α sich einem Werthe nähert, der kein anderer ist, als die Summe der Reihe, die man durch Einmalige Differen-

---

(3) Der eben aufgestellte Werth, welchen die Summe der m mal differentiirten Reihe nie überschreiten kann, dient auch für den Beweis, dass das Ergänzungsglied der Taylor'schen Reihe, wie es in der oben weiter angedeuteten Betrachtung auftritt, unter Voraussetzung der dort angeführten Bedingung sich bei wachsendem Index der Null als Grenze nähern muss.

tiation der einzelnen Glieder und durch die Substitution $x = \alpha$ aus der vorgelegten Reihe ableitet; zu dem Ende zieht man die differentiirte Reihe von dem Differenzen-Verhältniss ab, und ordnet nach den Dimensionen der Grössen α und β. Den Zahlenwerth der Reihe, welche den Unterschied zwischen dem Differenzen-Verhältniss und der ersten abgeleiteten Reihe vorstellt, vergrössert man, indem man erstens statt der etwa vorkommenden negativen Coefficienten ihre absoluten Zahlenwerthe setzt, dann statt des allgemeinen Coefficienten vom Index r den Werth Mh^{-r} schreibt, den er, wie vorhin erörtert, nicht überschreiten kann, und indem man noch drittens in den additiven Theilen der Aggregate, welche mit diesen Coefficienten multiplicirt sind, überall β statt α nimmt. Nach diesen Veränderungen lässt sich die Reihe summiren, und der Ausdruck, welcher sich ergibt, zeigt eine Form, an welcher man sogleich erkennt, dass er sich der Null nähert, wenn β sich dem α ohne Ende nähert. Das Differenzen-Verhältniss der vorgelegten Reihe hat also wirklich zu seiner Grenze die Reihe, welche durch Differentiation der einzelnen Glieder aus der ersten abgeleitet wird. — Auf diese Art ergeben sich also leicht die verschiedenen Lemmen, welche man für den Beweis des Eingangs erwähnten fundamentalen Satzes nach dem hier vorgeschlagenen Gange der Betrachtung nöthig hat.

Historische Classe.

Sitzung vom 21. Juni 1862.

Herr Muffat sprach über

„Wolfher, Patriarchen von Aquileja, einen gebornen Bayern.“