Sitzungsberichte

der

königl. bayer. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Jahrgang 1863. Band II.

München.
Druck von F. Straub (Wittelsbacherplatz 3).
1863.

In Commission bei G. Franz.

sen Discussionen geschieht meiner inzwischen erschienenen Arbeit über Magnolia keine Erwähnung.

Herr Seidel hielt einen Vortrag

„Ueber eine Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung bezüglich auf die Schwankungen in den Durchsichtigkeitsverhältnissen der Luft".

In meiner Abhandlung „Resultate photometrischer Messungen an 208 Fixsternen", welche im 3. Bande der Abhandlungen unserer Classe kürzlich veröffentlicht worden ist, habe ich am Ende die Frage in Betracht gezogen, ob solche Variationen in der Durchsichtigkeit der Luft, die etwa in Zusammenhang stünden mit den Ablesungen unserer meteorologischen Instrumente, in den Beobachtungen erkennbar sind. Die kleinen Untersuchungen, welche in Betreff des Luftdruckes und des Feuchtigkeitsgehaltes dort angestellt worden sind, haben ein negatives Resultat ergeben: ich hätte beifügen können, dass auch eine Anordnung der controlirten Beobachtungen nach den Monaten, welchen sie angehören, kein Vorherrschen stärkerer oder schwächerer Extinctionen des Lichtes in gewissen Jahreszeiten erkennen lässt [1]), wonach also der Einfluss der Temperatur auf die Grösse der Licht-Absorption ebenfalls sich der Wahrnehmung entzieht. An der betreffenden Stelle in §. 16 meiner Schrift ist noch eine Betrachtung von etwas allgemeinerem Charakter beigefügt: nachdem nämlich die Fehler der einzelnen Messungs-

(1) In Bezug auf meine ältesten, 1852 publicirten Messungen ist dies bereits p. 41 meiner ersten Abhandlung erwähnt: die analoge Untersuchung für das jetzt vorliegende viel grössere Material liefert das gleiche Ergebniss.

resultate, (d. h. ihre Abweichungen von aus mehrfacher Bestimmung hervorgehenden Mittelwerthen) in meinen Tabellen als positiv oder als negativ erscheinen, je nachdem eine Beobachtung auf das Stattfinden einer stärkeren oder einer schwächeren als der durchschnittlichen Extinction des Lichtes hinweist, so bot sich die Bemerkung dar, dass überhaupt jede Ursache, welche während eines Zeitraumes, der mehrere Beobachtungen umfasst, die Extinctionen im Allgemeinen vergrössert oder verkleinert, dahin wirken muss, die Aufeinanderfolge von Fehlern gleichen Vorzeichens wahrscheinlicher zu machen, als den Zeichenwechsel; die Abzählung der nach der Zeit geordneten Fehler in der Tabelle gibt aber kein Vorherrschen der Zeichenfolgen, sondern im Gegentheil 247 Wechsel der Zeichen auf 239 Zeichenfolgen, wornach der Schluss begründet wird, dass überhaupt in solchen Nächten, welche man für die Beobachtungen brauchbar findet, die gesetzmässigen Einflüsse, welche für einen Zeitabschnitt von einiger Dauer am ganzen Firmamente die Grösse der Extinction in einerlei Sinn abändern, nur von untergeordneter Bedeutung sind gegenüber den rein lokalen Trübungen, die nur gewisse Gegenden des Himmels treffen, oder sonstigen unerkannten Fehlerquellen. Die Hoffnung, welche man zu hegen geneigt sein mochte, dass die Berücksichtigung des Standes der meteorologischen Instrumente erlauben würde, die jedesmal gerade stattfindende Extinction theoretisch wesentlich genauer zu berechnen, als sie jetzt aus meinen Tafeln zu entnehmen ist, und darnach die Beobachtungen in einer vollkommneren Weise zu reduciren, wird dadurch, wenn nicht geschwächt, doch wenigstens auf ein späteres Stadium in der Photometrie des Himmels zurückgewiesen. Der von uns gezogene Schluss hat aber offenbar nur einen bestimmten Grad von Wahrscheinlichkeit für sich: man wird nämlich eine bestimmte Probabilität für die Annahme erhalten, dass der erkennbaren Gesetzen folgende Theil des ganzen Fehlers einer Beobachtung im grossen Durchschnitte nicht mehr als einen gewissen aliquoten Theil des überhaupt zu befürchtenden Fehlers ausmacht; je kleiner man diesen aliquoten Theil wählt, desto gewagter wird offenbar die Annahme, oder desto kleiner die ihr zur Seite stehende Probabilität. Die genauere Einsicht von der Tragweite unserer Folgerung erfordert also die Lösung einer Wahrscheinlichkeits-Aufgabe, und diese ist es, mit der ich mich hier beschäftigen will, da sie mir einiges theoretisches Interesse zu besitzen scheint, und zugleich ein Beispiel abgeben kann von der vollständigen Durchführung eines Probabilitätsproblems an einem durch die beobachtende Wissenschaft dargebotenen schon etwas complicirteren Falle. Es bedarf nicht der Erörterung, dass beinahe alle Schlüsse, die sich auf Beobachtung gründen, ebenfalls nur Wahrscheinlichkeitsschlüsse sind, und dass strenge genommen für uns der wahre Inhalt der Erfahrung immer in der Feststellung gewisser Probabilitäten seinen adäquaten Ausdruck finden würde, obwohl bisher wenige Untersuchungen bis zu diesem Abschluss verfolgt worden sind.

1.

Denkt man sich, bei einer ganzen Anzahl von $N + 1$ Beobachtungen, die N Uebergänge immer von Einer zu der der Zeit nach nächstfolgenden gemacht, so möge in $M' = \frac{N}{m}$ Fällen dieser Uebergang einen Sprung von einem Zeitabschnitt zu einem andern darstellen, in welchem die auf die Durchsichtigkeitsverhältnisse der Luft bezüglichen meteorologischen Verhältnisse sich ganz neu geordnet haben; in den

$$M = N\frac{m-1}{m}$$

übrigen Fällen hat man alsdann eine Folge zweier solcher Beobachtungen, welche unter dem Einflusse analoger Verhältnisse gemacht sind. Wenn nun alle Messungen reducirt werden unter Anwendung einer Tafel für die Extinction des Lichtes, welche für einen gewissen mittleren Durchsichtigkeitszustand der Luft gilt, so wird in jedem der Fälle, in welchem die beiden auf einander folgenden Beobachtungen durch einen Sprung in der Epoche geschieden sind, mit gleicher Wahrscheinlichkeit jede der beiden Annahmen aufgestellt werden können, entweder, dass in den zwei Epochen die Abweichung der wirklichen Durchsichtigkeit der Luft von dem mittleren Zustande in einerlei Sinn stattfindet, oder im Gegentheil, dass die Durchsichtigkeit das Einemal erhöht und das andremal vermindert war. Versteht man also die Zeichen der Fehler der einzelnen, mittelst der Tafel reducirten Beobachtungsresultate so, wie vorhin angegeben worden ist, so wird in den $M' = \frac{N}{m}$ Fällen unserer ersten Art eine Aufeinanderfolge von Fehlern gleichen Vorzeichens weder grössere noch geringere Wahrscheinlichkeit haben, als der Wechsel des Zeichens, d. h. jeder dieser beiden Möglichkeiten entspricht die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$; wenn man daher die Anzahl der hier wirklich vorkommenden Zeichenfolgen nennt

$$\tfrac{1}{2}\, M' + y \sqrt{M'}$$

und die der entsprechenden Zeichenwechsel

$$\tfrac{1}{2}\, M' - y \sqrt{M'}$$

(die Quadratwurzel hier, so wie später in den analogen Fällen, als positiv gedacht), so wird y ebenso leicht einen positiven als den gleich grossen negativen Werth haben können; und unter Voraussetzung, dass M' eine einigermaassen grosse Zahl ist, wird nach dem vervollständigten Bernoulli'schen Satze die Wahrscheinlichkeit, dass y zwischen zwei Grenzen α, β liegt (von welchen ich hier, wie später in den analogen Fällen die zuletzt genannte als die algebraisch grössere voraussetze) sich ausdrücken durch das bestimmte Integral

$$\text{I.} \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\alpha\sqrt{2}}^{\beta\sqrt{2}} e^{-tt}\, dt$$

So oft man dagegen einen von den $M = \frac{m-1}{m} N$ Fällen in Betrachtung zieht, in welchen innerhalb einer unserer meteorologischen Epoche zwei Beobachtungen sich folgen, ist die Wahrscheinlichkeit, dass ihre Fehler gleiches Vorzeichen haben, grösser als die Wahrscheinlichkeit eines Zeichenwechsels zwischen den Fehlern: denn wenn überhaupt innerhalb einer besondern Epoche p' die Probabilität eines Fehlers vom Einen, q' die eines solchen vom andern Vorzeichen darstellt, so wird innerhalb dieser Epoche die Wahrscheinlichkeit der Zeichenfolge offenbar sein $= p'^2 + q'^2$, dagegen wird diejenige eines Wechsels der Zeichen $= 2\,p'\,q'$, folglich die erstere grösser als die zweite um $(p' - q')^2$, so oft, in Folge einer Abweichung des allgemeinen Durchsichtigkeitszustandes der Luft von dem mittleren, ein Unterschied zwischen p' und q' besteht. Da also in allen einzelnen Epochen die Differenz beider Wahrscheinlichkeiten immer in demselben Sinne liegt, so muss auch dann noch die Wahrscheinlichkeit (p) einer Aufeinanderfolge gleicher Zeichen der Fehler grösser sein als diejenige (q) eines Zeichenwechsels, wenn die Wahl der beiden auf einander folgenden Beobachtungen irgendwo innerhalb einer nicht vorausbezeichneten Epoche frei steht, d. h. wenn das Paar in der ganzen Reihe der Beobachtungen an jedem Orte, nur mit Ausschluss der $\frac{N}{m}$ schon zuerst betrachteten Stellen der Sprünge, herausgegriffen werden kann.

Ich werde nun unter der ganzen Zahl $N\frac{m-1}{m} = M$ derjenigen Fälle, auf welche sich die neue Betrachtung bezieht, die thatsächlich vorkommende Anzahl von Aufeinanderfolgen gleicher Vorzeichen der Fehler bezeichnen durch

$$p\, M + x \sqrt{M}$$

Man hat alsdann (weil $p + q = 1$ ist) diejenige der Zeichenwechsel gleich

$$q\, M - x \sqrt{M};$$

Dabei lässt sich, unter Voraussetzung der Kenntniss der Werthe von p, q, wieder nach dem Bernoullischen Satze die Probabilität angeben, welche a priori dafür besteht, dass x zwischen die Grenzen γ, δ hineinfällt; sie stellt sich (wenn $\delta > \gamma$) durch das Integral dar:

$$\text{II.} \qquad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\gamma : \sqrt{2pq}}^{\delta : \sqrt{2pq}} e^{-tt}\, dt$$

Nach den eingeführten Bezeichnungen ist nunmehr die gesammte Anzahl s von Zeichenfolgen, welche bei unseren $N + 1 = M + M' + 1$ Beobachtungen stattfinden, ausgedrückt durch die Formel

$$s = pM + \tfrac{1}{2} M' + x \sqrt{M} + y \sqrt{M'}$$

oder auch, vermittelst der Substitutionen

$y = x' \sqrt{\frac{M}{M'}} = x' \sqrt{m-1}$ und $x + x' = \sigma$ durch die folgende Formel:

$$(1) \quad s = pM + \tfrac{1}{2} M' + \sigma \sqrt{M}$$

Dabei stellt das Integral I. die Wahrscheinlichkeit dar, dass $y = x' \sqrt{m-1}$ zwischen den Grenzen α, β liegt; es wird daher die Probabilität, dass x' selbst einen Werth hat, der zwischen zwei Grenzen μ, ν eingeschlossen ist, gleich sein dem Ausdrucke

$$\text{III.} \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mu \sqrt{2(m-1)}}^{\nu \sqrt{2(m-1)}} e^{-tt} \, dt$$

Man kann aber aus den beiden Formeln II. und III., welche sich auf die einzelnen Grössen x und x′ beziehen, sogleich auch die Probabilität dafür herstellen, dass ihre Summe σ (die in dem Ausdrucke (1) allein vorkommt), zwischen vorgegebene Grenzen fällt. Der Satz, welcher hier zur Anwendung kommt, (und der aus den Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung leicht abgeleitet wird) ist derselbe, durch welchen in der Theorie der kleinsten Quadrate der wahrscheinliche Fehler einer Summe gefunden wird, wenn die wahrscheinlichen Fehler der einzelnen Summanden gegeben sind, und der so formulirt werden kann: „Wenn die Wahrscheinlichkeit, dass eine Grösse x zwischen den Grenzen a und b liegt, ausgedrückt wird durch $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{a : \sqrt{\varkappa}}^{b : \sqrt{\varkappa}} e^{-tt} \, dt$, und die Wahrscheinlichkeit, dass eine andere x′ zwischen a′ und b′ liegt, analog durch $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{a' : \sqrt{\lambda}}^{b' : \sqrt{\lambda}} e^{-tt} \, dt$, so wird die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe x + x′ zwischen g und h fällt, dargestellt durch $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{g : \sqrt{\varkappa + \lambda}}^{h : \sqrt{\varkappa + \lambda}} e^{-tt} \, dt$.“

Giebt man hier den Grössen $\varkappa$ und λ etc. die Werthe, wie sie den Formeln II. und III. entsprechen, so folgt unmittelbar, dass die Wahrscheinlichkeit, σ werde zwischen die Grenzen g und h fallen, in unserem Falle repräsentirt wird durch den Ausdruck

$$\text{IV.} \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{g:\omega}^{h:\omega} e^{-tt}\, dt$$

in welchem gesetzt ist

$$(2.) \quad \omega^2 = \frac{1}{2(m-1)} + 2pq.$$

Man erkennt, dass unsere Wahrscheinlichkeit verschiedene Werthe annimmt, je nach dem diejenigen von p, q beschaffen sind. Denkt man sich also jetzt, wie es in unserer Anwendung der Fall ist, dass die letzteren Werthe noch unbekannt seien, und dass man aus der Erfahrung constatirt habe, dass σ zwischen gegebenen Grenzen eingeschlossen ist, so hat man das Stattfinden eines Ereignisses beobachtet, dessen Eintreten die Folge der Existenz sehr verschiedener Ursachen (nämlich aller möglichen Werthe von p, q) sein konnte, nur mit verschiedenem Grade von Wahrscheinlichkeit. Es findet daher der bekannte Satz Anwendung, nach welchem auf die relative Wahrscheinlichkeit der verschiedenen Erklärungsarten eines beobachteten Ereignisses geschlossen wird. In unserem Falle wird durch das Ergebniss der Abzählung zunächst ermittelt, dass s zwischen gewissen Grenzen liegt, (die man so nahe als man will zusammenrücken kann, weil der genaue Werth bekannt ist); denkt man sich nur, dass die Distanz dieser Grenzen klein sei gegen $\sqrt{M}$, so werden jedenfalls die beiden Schranken, zwischen welchen in Folge dessen der aus Gl. (1.) sich ergebende Werth von σ eingeschlossen liegt, und welche ich jetzt σ und $\sigma + \triangle$ nennen will, sich sehr nahe fallen; wenn man diese beiden Werthe in IV. statt g und h substituirt, so wird daher, in Folge der Kleinheit von $\triangle$, der Ausdruck sich vereinfachen, welcher die Probabilität vorstellt, die dem constatirten Ereigniss unter Voraussetzung gewisser Werthe von p und q a priori zukommt; er wird nämlich übergehen in

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\triangle}{\omega} e^{-\frac{\sigma^2}{\omega^2}}$$

Dieser Ausdruck muss nun, nach dem erwähnten Satze der Wahrscheinlichkeitsrechnung, multiplicirt werden mit demjenigen, welcher die Probabilität des benützten Werthes von p und des zugehörigen von q a priori darstellt. In Betreff der letztern werde ich voraussetzen, man habe die Wahrscheinlichkeit, wie sie vor unserer Abzählung dafür vorhanden ist, dass p zwischen zwei Grenzen p_1, p_2 hineinfällt ($p_2 > p_1$) durch die Form ausgedrückt

$$(3.) \quad \psi(p_2) - \psi(p_1) = \int_{p_1}^{p_2} \frac{d\psi}{dp} dp$$

wonach die Probabilität, dass der Werth der mit p bezeichneten Grösse zwischen p und p + dp hineintrifft, die Form annimmt $\frac{d\psi}{dp}$ dp. Unser Produkt wird hiermit zum Element eines Integrales, und die Wahrscheinlichkeit, wie sie in F o l g e d e r A b z ä h l u n g dafür besteht, dass der wirkliche Werth von p liegt zwischen r und r', wird nach dem Satze ausgedrückt (da $\frac{\triangle}{\sqrt{\pi}}$ sich aufhebt) durch einen Quotienten zweier Integrale der Form $\int dp \frac{d\psi}{dp} \frac{e^{-\sigma^2 : \omega^2}}{\omega}$

von welchen das des Zählers zu erstrecken ist zwischen den Grenzen r und r', das des Nenners über den ganzen Umfang der möglichen Werthe von p. Dabei ist σ die durch Gleichung (1) bestimmte Function von p; der Werth von ω ist aus (2) zu entnehmen; der Zusammenhang zwischen ψ und p aber, welcher bei (3) nur erst definirt, noch nicht wirklich ausgedrückt ist, bedarf einer genaueren Feststellung, zu welcher die Betrachtungen der folgenden Paragraphen führen werden. Sogleich kann man indess noch bemerken, dass unsere Endintegrale sich bequemer, durch Einführung von ψ selbst als Integrations-Buchstabe, in die Form stellen lassen

$$\text{V.} \qquad \int d\psi \; \frac{e^{-\sigma^2 : \omega^2}}{\omega}$$

wobei die Grenzen des Integrales im Zähler diejenigen sind, welche zu den Werthen r und r' von p gehören, dagegen im Nenner die den beiden extremen p entsprechenden.

2.

Es ist nunmehr nothwendig, etwas eingehender die Umstände zu betrachten, welche die Entstehung von Fehlern des einen oder des andern Vorzeichens in unsern Messungsresultaten bedingen: nicht allein um die noch fehlende Verbindung zwischen ψ und p herzustellen, sondern besonders, um von den durch die Abzählung ermittelten Wahrscheinlichkeiten gewisser Werthe von p, q (die an sich kein besonderes Interesse haben), übergehen zu können auf die Wahrscheinlichkeiten derjenigen physikalischen Verhältnisse, welche vorhanden sein müssen, wenn jene besonderen Werthe Giltigkeit haben sollen.

Insoferne die Fehler unserer reducirten Beobachtungsresultate aus den variabelen Extinctionen des Lichtes in der Atmosphäre entspringen, entstellen sie offenbar die einzelnen aus den Messungen abgeleiteten Zahlen deshalb, weil die letzteren unter Voraussetzung eines gewissen mittleren Durchsichtigkeitsgrades der Luft abgeleitet werden, der sich zu den verschiedenen Beobachtungszeiten nicht wirklich eingehalten findet. Die Verminderung, welche der Logarithmus der Helligkeit eines Himmelskörpers erfährt, während sein Licht die Atmosphäre passirt, kann nach der Theorie von Lambert oder von Laplace approximativ dargestellt werden durch die Formel α Sec z (wo z die Zenitdistanz vorstellt); meine empirisch gebildete Tafel setzt an die Stelle des Factors Sec z eine etwas verschiedene Funktion, schliesst sich aber der aufgestellten Formel (die ich wegen des einfachen mathematischen Ausdruckes hier der Betrachtung zu Grunde lege) noch sehr nahe an, so lange man nur nicht in die unmittelbare Nähe des Horizontes kommt.[2]) Der Hauptgrund ihrer Abweichung, in den einzelnen Fällen, von der Natur, besteht ohne Zweifel darin, dass sie nur die Abhängigkeit der Extinction von der Zenitdistanz berücksichtigt, also dem Factor α einen Ein für allemal festen Werth beilegt, während derselbe in Wirklichkeit etwas variabel ist, weil einerseits in einem bestimmten Zeitabschnitt unserer Beobachtungen die Durchsichtigkeit der Luft im Allgemeinen grösser oder geringer als in einem andern sein kann, und ausserdem noch in der bestimmten Richtung, in welcher ein Stern observirt wird, durch vorübergehende lokale Ursachen eine Abweichung im einen oder im andern Sinne veranlasst werden kann. Ich bezeichne mit α_0 den festen Werth, wie er unserer dermaligen Reduction der Beobachtungen zu Grunde liegt, und mit $\alpha_0 + u_1 + u_2$ denjenigen, welcher zu gewisser Zeit bei dem Durchgang des Lichtes von einem bestimmten Sterne in der That in Betracht kommt; dabei soll, conform der soeben bezeichneten Unterscheidung, u_1 den

(2) Vergleiche hierüber §. 6 meiner Abhandlung von 1852.

während einer gewissen Epoche constanten und innerhalb derselben für alle Richtungen geltenden Theil der Differenz vorstellen: u_2 hingegen den ganz regellos oder zufällig bei dem augenblicklichen Visiren nach einer besonderen Richtung noch hinzutretenden Bestandtheil. Für einen zweiten Stern (von der Zenitdistanz z'), welcher mit dem ersten photometrisch verglichen wird, wird also u_1 seinen Werth behalten, u_2 aber einen neuen u_2' annehmen. Leitet man nun aus der Messung den Logarithmus des Helligkeitsverhältnisses der beiden Sterne ab (wobei ich mir hier die Helligkeit des ersten in den Zähler gesetzt denken will), so wird zu demselben wegen Extinction des Lichtes die Correction addirt

$$+ \alpha_0 \operatorname{Sec} z - \alpha_0 \operatorname{Sec} z'$$

während dieselbe eigentlich heissen sollte

$$+ (\alpha_0 + u_1 + u_2) \operatorname{Sec} z - (\alpha_0 + u_1 + u_2') \operatorname{Sec} z';$$

der Fehler des logarithmisch dargestellten Beobachtungsresultates wird also (insoferne er aus den hier besprochenen Ursachen entspringt) sein die Grösse

$$(4.) \qquad \pm \left\{ u_1 (\operatorname{Sec} z - \operatorname{Sec} z') + u_2 \operatorname{Sec} z - u_2' \operatorname{Sec} z' \right\}$$

und zwar muss nach der in meinen Abhandlungen eingeführten Unterscheidung der Vorzeichen [3]) (nach welcher immer der positive Fehler einer Beobachtung auf eine vergrösserte Extinction des Lichtes zur Zeit derselben hinweist) das obere oder untere Zeichen vor der Klammer angewendet werden, je nachdem der Stern, für welchen die nicht accentuirten Grössen gelten, tiefer oder höher stand als der andere.

Von der Grösse u_2, welche den Unterschied des momentan in einer besondern Richtung geltenden α von dem gleichzeitig giltigen durchschnittlichen Werthe repräsentirt,

(3) Vgl. p. 52 f. der Eingangs erwähnten Arbeit.

muss man voraussetzen, dass sie ebenso leicht auf die positive als auf die negative Seite fällt; und da sie einen Gesammteffect unendlich vieler, einzeln unendlich kleiner Elementarwirkungen darstellt, so werden wir, so lange die Entstehung der letzteren für uns als eine zufällige erscheint, zu der weiteren Annahme genöthigt, dass die Wahrscheinlichkeit, ihr absoluter Werth werde eine gewisse Grösse erreichen, durch dieselbe Funktion dargestellt wird, deren Giltigkeit für das Zustandekommen zufälliger Beobachtungsfehler unter analogen Voraussetzungen über die Bildung derselben aus der Summirung einzelner sehr kleiner Bestandtheile bewiesen ist. Nennt man also u (entsprechend dem „wahrscheinlichen Fehler") diejenige absolute Grösse, welche u_2 und u'_2 ebenso leicht überschreiten, als nicht erreichen, so wird die Probabilität, dass die eine oder die andere dieser Grössen einen Werth annimmt zwischen δ u und dem algebraisch grösseren ε u, sich ausdrücken durch das Integral

$$\text{VI.} \qquad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\delta\varrho}^{\varepsilon\varrho} e^{-tt}\, dt$$

in welchem der bekannte Zahlenwerth $\varrho = 0{,}4769360$ durch die Bedingung fixirt ist, dass die Probabilität $= 1/2$ werden muss, wenn $\delta = -1$, $\varepsilon = +1$ gesetzt wird. [4]) Das nämliche Integral drückt dann auch die Wahrscheinlichkeit aus, dass der Werth von

$$u_2 \operatorname{Sec} z - u'_2 \operatorname{Sec} z'$$

zwischen den Grenzen liegt.

$\delta\, u \sqrt{\operatorname{Sec} z^2 + \operatorname{Sec} z'^2}$ und $\varepsilon\, u \sqrt{\operatorname{Sec} z^2 + \operatorname{Sec} z'^2}$
wie diess aus der bekannten Anwendung des schon oben

(4) Vergl z. B. Encke im Astron. Jahrbuche für 1834, p. 269 ff.

(zur Herstellung des Ausdruckes IV.) benützten Satzes in der Theorie der kleinsten Quadrate unmittelbar folgt.

Soll nun bei einer bestimmten Beobachtung, zu welcher die Zenitdistanzen z und z' concurriren, ein positiver Fehler zu Stande kommen, so muss nach dem Ausdrucke (4.), wenn $\mathrm{Sec}\, z > \mathrm{Sec}\, z'$ ist, die Grösse $u_2 \,\mathrm{Sec}\, z - u'_2 \,\mathrm{Sec}\, z'$ einen Werth haben, welcher liegt zwischen den Grenzen $- u_1 (\mathrm{Sec}\, z - \mathrm{Sec}\, z')$ und $+ \infty$; dagegen wenn $\mathrm{Sec}\, z < \mathrm{Sec}\, z'$ ist, einen Werth zwischen den Grenzen $- \infty$ und $- u_1 (\mathrm{Sec}\, z - \mathrm{Sec}\, z')$; die Wahrscheinlichkeit, dass das eine oder das andere wirklich der Fall sei, kann nach den soeben gemachten Aufstellungen hingeschrieben werden. Ist aber ganz im Allgemeinen von irgend einer Beobachtung die Rede, so können noch z und z' selbst alle Werthe haben zwischen o und $\frac{\pi}{2}$; die Wahrscheinlichkeit eines positiven Fehlers ist also dann diejenige des Zusammentreffens zweier beliebigen Werthe von z und z' mit einem geeigneten Werth von $u_2 \,\mathrm{Sec}\, z - u'_2 \,\mathrm{Sec}\, z'$. Bezeichnet man einen Augenblick mit $P(z)\,dz$ die Probabilität, dass bei einer willkührlich herauszugreifenden Messung die Zenitdistanz des ersten Sternes zwischen z und $z + dz$ hineinfällt, und also mit $P(z')\,dz'$ die analoge Probabilität für den zweiten Stern, so ergibt sich demnach aus den Grundsätzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, dass die Probabilität eines positiven Fehlers dargestellt wird durch folgende Summe zweier dreifachen Integrale: [5])

---

(5) Die Trennung in zwei Theile, je nach dem $z' \lessgtr z$ ist, wird bedingt durch das Doppelzeichen in (4).

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dz\, P(z) \int_0^{z} dz'\, P(z') \int e^{-tt}\, dt$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dz\, P(z) \int_z^{\frac{\pi}{2}} dz'\, P(z') \int e^{-tt}\, dt$$

wo die Integration nach t zu erstrecken ist im ersten Gliede von $-\frac{u_1\,\varrho}{u} \frac{\operatorname{Sec} z - \operatorname{Sec} z'}{\sqrt{\operatorname{Sec} z^2 + \operatorname{Sec} z'^2}}$ bis $+\infty$, und im zweiten von $-\infty$ bis $+\frac{u_1\,\varrho}{u} \frac{\operatorname{Sec} z' - \operatorname{Sec} z}{\sqrt{\operatorname{Sec} z^2 + \operatorname{Sec} z'^2}}$, die Wurzel immer positiv verstanden. Die letzteren Grenzen lassen sich aber auf die ersteren zurückführen, wenn man im letzten Integrale statt t den entgegengesetzten Werth zur Variabeln macht, und (weil in diesem Integrale $z' > z$ ist) jetzt fest setzt, dass das Vorzeichen der Wurzel in der unteren Grenze jedesmal so eingerichtet werden soll, dass der Ausdruck $\frac{\operatorname{Sec} z - \operatorname{Sec} z'}{\sqrt{\operatorname{Sec} z^2 + \operatorname{Sec} z'^2}}$ positiv wird.

Nach dieser neuen Anordnung vereinigen sich dann die beiden Glieder unserer Summe, und es kann der Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit der Entstehung eines positiven Fehlers einfach so geschrieben werden:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dz \int_0^{\frac{\pi}{2}} dz'\, P(z)\, P(z') \int_{-\frac{u_1}{u}\varrho \frac{\operatorname{Sec} z - \operatorname{Sec} z'}{\sqrt{\operatorname{Sec} z^2 + \operatorname{Sec} z'^2}}}^{\infty} e^{-tt}\, dt$$

3.

Der mathematische Ausdruck für den Factor P (z), welchem die Probabilität proportional ist, dass in der Beobachtung die Zenitdistanz des ersten Sternes zwischen z und z + dz eingeschlossen sei. wird natürlich von dem Plane der Beobachtungen abhängig sein. In jedem Falle muss man haben $\int_0^{\frac{\pi}{2}} dz\, P(z) = 1$; ferner sind bei unseren Messungen Zenitdistanzen in der unmittelbaren Nähe von o unendlich unwahrscheinlich, weil sie nur dem Abschnitte des Firmamentes in der unmittelbaren Nähe eines blossen Punktes (des Zenits) zukommen; die Wahrscheinlichkeit des Vorkommens von Werthen sehr nahe bei $\frac{\pi}{2}$ ist aber gleicher Weise verschwindend klein, weil Messungen in der Nähe des Horizontes wegen der Unsicherheit ihrer Resultate zu vermeiden waren, und solche im Horizonte selbst wegen des grossen Lichtverlustes gar nicht ausführbar gewesen wären. Es muss also P (z) = o werden für z = o und für z = $\frac{\pi}{2}$; als die natürlichste Annahme, welche den verschiedenen Forderungen zugleich entspricht, bietet sich dar, zu setzen P (z) = Sin 2 z. Ich habe näher untersucht, in wie ferne diese Formel geeignet ist, die relative Häufigkeit der verschiedenen Zenitdistanzen in unseren Beobachtungen darzustellen, und zu diesem Ende die Zusammenstellung benützt p. 69 f. meiner Eingangs erwähnten Abhandlung, aus welcher direct zu ersehen ist, wie oft Zenitdistanzen zwischen 0 und 5°, zwischen 5 und 10°, &c. in den Messungen thatsächlich vorkamen; das Ergebniss dieser Untersuchung ist gewesen, dass die empirische Vertheilung, wenn man zufällige Unregelmässigkeiten ihres Ganges durch eine Art von Interpolationsverfahren ausgleicht, von selbst fast genau in diejenige übergeht, welche nach der Annahme $P(z) = \mathrm{Sin}\, 2z$ die wahrscheinlichste wird. Die Aufstellung dieser Gleichung ist also für unsere Beobachtungen vollkommen legalisirt.

Wenn man diese Substitution ausführt, und zugleich statt z, z' die beiden Secanten η, ζ als Variable einführt, so nimmt unser letztes Integral die Gestalt an:

$$\frac{4}{\sqrt{\pi}} \int\limits_1^\infty \int\limits_1^\infty \frac{d\eta\, d\zeta}{\eta^3\, \zeta^3} \int\limits_{-\frac{u_1}{u} \varrho \frac{\eta-\zeta}{\sqrt{\eta^2+\zeta^2}}}^{\infty} e^{-tt}\, dt$$

Um dieselbe zu vereinfachen, kann man zuerst bemerken, dass der nach η und ζ zu integrirende Ausdruck vermöge unserer Bestimmung über das Vorzeichen der Wurzelgrösse eine symmetrische Funktion von η und ζ ist. Denkt man sich also etwa η, ζ als rechtwinklige Coordinaten in einer Ebene, und die nach diesen Variabeln zu integrirende Grösse als dritte senkrechte Coordinate im Raum, so wird der Körper, dessen Volumen unser Integral darstellt, symmetrisch halbirt durch diejenige Ebene, welche die Ebene $\eta\,\zeta$ nach der Geraden $\eta = \zeta$ senkrecht durchschneidet; man braucht also die Integration nur auf der einen Seite der halbirenden Ebene auszuführen (z. B. auf der Seite $\zeta > \eta$), wenn man das hiernach sich ergebende Resultat verdoppelt. Unser Integral steht also auch so:

$$\frac{8}{\sqrt{\pi}} \int\limits_1^\infty \frac{d\eta}{\eta^3} \int\limits_\eta^\infty \frac{d\zeta}{\zeta^3} \int\limits_{-\frac{u_1}{u} \varrho \frac{\zeta-\eta}{\sqrt{\eta^2+\zeta^2}}}^{\infty} e^{-tt}\, dt$$

Die Variable η verschwindet aus der Grenze der Integration nach t, sobald man anstatt ζ das Verhältniss $\frac{\zeta}{\eta}$ als neue Variable einführt. Man kann alsdann nach η ohne Weiteres integriren. Am vortheilhaftesten scheint es, zu setzen $\frac{\zeta}{\eta} = \vartheta^{-1/2}$; durch diese Substitution wird die Formel folgende:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 d\vartheta \int_{-\frac{u_1}{u}\varrho\,\Theta}^{\infty} e^{-tt}\, dt$$

worin zur Abkürzung gesetzt ist

$$\text{(5.)} \qquad \Theta = \frac{1 - \sqrt{\vartheta}}{\sqrt{1 + \vartheta}}$$

(die Wurzeln positiv verstanden).

Mittelst der Bemerkung, dass

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 d\vartheta \int_0^{\infty} e^{-tt}\, dt = {}^1/_2$$

kann man noch unseren Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit des positiven Fehlers so stellen

$$\text{VII.} \qquad {}^1/_2 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 d\vartheta \int_0^{\frac{u_1}{u}\varrho\,\Theta} e^{-tt}\, dt$$

$$= {}^1/_2 + J;$$

die Probabilität eines negativen Fehlers ist dann ${}^1/_2 - J$, und J selbst wird, wie es sein muss, positiv oder negativ, je nachdem u_1 das eine oder das andere Vorzeichen hat. Man kann endlich noch, indem man nach ϑ theilweise integrirt, (wobei zu bemerken ist, dass für $\vartheta = 1$ $\Theta = o$ wird) das auf t bezügliche Integralzeichen in dem Ausdrucke J wegbringen, und also diese Grösse durch eine einfache Quadratur darstellen; indessen werde ich die Form in VII. beibehalten, weil man von ihr aus leichter zu derjenigen Gestalt der Endausdrücke gelangt, welche für die Zahlenanwendung die geeignetste ist.

Die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Fehler gleichen Vorzeichens nach einander auftreten, stellt sich nun $= (^1/_2 + J)^2 + (^1/_2 - J)^2 = {}^1/_2 + 2 J^2$, und diejenige, dass Verschiedenheit des Vorzeichens beider Fehler bestehe $= {}^1/_2 - 2 J^2$. Man muss indess bemerken, dass diese Werthe, weil bei ihrer Ableitung u_1 als Constante behandelt worden ist, nur innerhalb desjenigen Zeitintervalles gelten, für welches der dabei angenommene Werth von u_1 statt hat; die so eben aufgestellten Grössen $^1/_2 + 2 J^2$, $^1/_2 - 2 J^2$ sind daher noch nicht die in §. 1. mit p, q bezeichneten, für den ganzen Umfang der Beobachtungen giltigen Werthe. Um die letzteren zu finden, muss man berücksichtigen, dass u_1 selbst, mit verschiedenem Grade von Wahrscheinlichkeit, alle möglichen Werthe annehmen kann. Man muss nach der Bedeutung dieser Grösse bei ihr ebenso wie bei u_2 die Voraussetzung machen, dass sie ebenso leicht auf die positive als auf die negative Seite fällt, indem sie einen gewissen (absolut gedachten) Mittelwerth v (ihren „wahrscheinlichen Werth") der Grösse nach ebenso leicht übertrifft, als nicht erreicht; auch ist man, analog wie bei u_2, und aus denselben Gründen, auf die Annahme gewiesen, dass die Wahrscheinlichkeit, es werde der innerhalb einer besonderen Epoche giltige Werth von u_1 zwischen zwei Grenzen δ v und ε v eingeschlossen sein, gleich sei dem Integrale:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\delta\varrho}^{\varepsilon\varrho} e^{-tt}\, dt$$

Dies vorausgesetzt, wird nun, im allgemeinen Durchschnitt über alle unsere Zeitabschnitte, die gesuchte Wahrscheinlichkeit einer Zeichenfolge zwischen den Fehlern zweier zu derselben Epoche gehörigen Beobachtungen das Aggregat (Integral) sein aus allen einzelnen Werthen des Productes, dessen einer Factor die Probabilität ist eines Werthes von u_1 zwischen den Grenzen u_1 und $u_1 + du_1$, während der zweite die Wahrscheinlichkeit einer Zeichenfolge, unter Voraussetzung eines solchen Werthes von u_1 darstellt. Der letztere Factor ist, wie vorhin erörtert, $\frac{1}{2} + 2 J^2$; der erstere folgt aus unserer Annahme $= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\varrho}{v} du_1\, e^{-\frac{u_1^2 \varrho^2}{v^2}}$; im Ganzen ist also die geforderte Wahrscheinlichkeit

$$p = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\varrho}{v} \int_{-\infty}^{\infty} du_1 \,.\, e^{-\left(\frac{u_1\varrho}{v}\right)^2} \left(\tfrac{1}{2} + 2 J^2\right)$$

oder, wenn man setzt $\frac{u_1 \varrho}{v} = \varphi$:

$$\text{VIII.} \quad p = {}^1/_2 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi\, e^{-\varphi^2} J^2$$

$$= {}^1/_2 + K,$$

wobei natürlich auch in dem Werthe von J (s. Gl. VII.) φ statt u_1 eingeführt gedacht werden muss, so dass J als Function von φ erscheint. Der analoge Ausdruck für die Probabilität eines Zeichenwechsels zwischen den Fehlern ist natürlich

$$\text{VIII.}^* \quad q = {}^1/_2 - K$$

Denkt man für J den Ausdruck in VII. gesetzt, so involvirt derjenige von K zunächst fünf Integralzeichen; er ist aber bedeutender Reductionen fähig. Wenn man vorerst in dem Quadrate J J den Integrationsbuchstaben des zweiten Factors (ϑ, t) andere Benennungen gibt als denjenigen des ersten (sie durch Accente unterscheidet, welche Marquirung ich analog auch bei Θ anwende), so stellt sich K in der Form dar:

$$K = \frac{2}{\pi^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi\, e^{-\varphi^2} \int_0^1 d\vartheta \int_0^{\varphi\Theta\lambda} e^{-t^2} dt \int_0^1 d\vartheta' \int_0^{\varphi\Theta'\lambda} e^{-t'^2} dt'$$

wobei zur Abkürzung geschrieben ist

$$(6.) \quad \frac{v}{u} = \lambda$$

Man kann nun φ aus den Grenzen der nach t, t′ genommenen Integrale wegbringen, indem man setzt $t = \varphi\, w$, $t' = \varphi\, w'$; man erhält hierdurch

$$K = \frac{2}{\pi^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi\,.\,e^{-\varphi^2} \varphi^2 \int_0^1 d\vartheta \int_0^{\lambda\Theta} e^{-w^2\varphi^2} dw \int_0^1 d\vartheta' \int_0^{\lambda\Theta'} e^{-w'^2\varphi^2} dw'$$

und erkennt, dass die Integration nach φ sich ausführen lässt, indem sie ein Integral verlangt von der Form $\int_{-\infty}^{\infty} d\varphi\, \varphi^2\, e^{-\gamma\varphi^2}$,

welches gleich ist $-\frac{d}{d\gamma} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi\, e^{-\gamma\varphi^2} = -\frac{d}{d\gamma}\sqrt{\frac{\pi}{\gamma}} = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{\pi}}{\gamma^{\frac{3}{2}}}$

Dabei stellt in unserem Falle γ das Trinom dar $1 + w^2 + w'^2$; wird dieser Werth substituirt, so findet man, dass in Folge der Integration nach φ auch diejenigen nach w und w' ausführbar geworden sind, und erhält als Resultat

$$\text{IX.}\quad K = \frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^1 d\vartheta\, d\vartheta'\ \text{Arc. Sin.}\left\{\frac{\lambda\,\Theta}{\sqrt{1+\lambda^2\,\Theta^2}}\ \frac{\lambda\,\Theta'}{\sqrt{1+\lambda^2\,\Theta'^2}}\right\}$$

Diese Form scheint unter den verschiedenen, in welchen man den Ausdruck darstellen kann, für die numerische Benützung desshalb die bequemste, weil in ihr die von ϑ und von ϑ' abhängigen Bestandtheile (unter dem Arcus) sich in zwei Factoren sondern. Sie verdient aus diesem Grunde namentlich auch den Vorzug von einer andern, bei welcher die zweimal zu integrirende Function eine algebraische wird, und zu welcher man gelangt, wenn man die Grösse J, sowie vorhin angedeutet, durch ein einfaches Integral darstellt. — Für den Ausdruck von K hat man die Controle, dass derselbe für $\lambda = o$ verschwinden, und für $\lambda = \infty$ in $1/2$ übergehen muss, weil im ersten Falle (d. h. wenn der regelmässig wirkende Bestandtheil in der Abweichung des Durchsichtigkeitscoëfficienten der Luft gegen den rein zufälligen Theil verschwindet) $p = q = \frac{1}{2}$, dagegen im letztern Falle (wenn der dauernd wirkende Bestandtheil allein in Betracht kommt) $p = 1$ und $q = o$ werden muss. Beiden Bedingungen entspricht der Ausdruck wirklich. Um nach demselben für andere Werthe von λ K in Zahlen zu berechnen, dient wohl am bequemsten eine zweimalige Anwendung mechanischer Quadratur; setzt man einen der besonderen Werthe von ϑ, für welche dabei der Arcus zu berechnen ist, $= (\text{tg A})^2$, so wird $\Theta = \sqrt{2} \text{ Sin} \left(\frac{\pi}{4} - \text{A}\right)$, und wenn man ferner setzt $\lambda\, \Theta = \text{tg a}$, und analog auch die von ϑ' abhängigen Hilfswinkel A,' a' einführt, so stellt sich der Bogen einfach dar als

$$\text{Arc. Sin. (Sin a. Sin a')};$$

Die Rechnung wird erleichtert durch den Umstand, dass A, A' für alle verschiedenen λ dieselben bleiben, und namentlich noch abgekürzt durch die vollkommne Symmetrie des Integralausdruckes in Bezug auf die beiden Variabeln ϑ, ϑ'. Die Zusammenstellung einer Reihe der approximirten Zahlenwerthe von K, wie ich sie, unter Anwendung der vierten Gaussischen Quadraturformel [6]) für jede der beiden Integrationen, erhalten habe, findet sich in der Tabelle weiter unten.

4.

Nachdem durch die Formeln am Ende des vorigen §. der Zusammenhang zwischen λ und p, q hergestellt ist, so ist es nur noch nöthig, sich darüber aufzuklären, welche Wahrscheinlichkeiten man a priori (vor den Abzählungen an den Zeichen unserer Fehler) den verschiedenen Werthen von λ zuerkennen muss, um damit zugleich die Probabilitäten er-

(6) S. d. Göttinger Commentationen, Bd. 3 der math. Classe. — Die 16 Glieder, deren Summe nach der bezeichneten Formel den genäherten Werth des Doppelintegrales darstellen würde, lassen sich in Folge der Symmetrie zusammenziehen auf zehn.

mittelt zu haben, welche in gleicher Weise a priori denjenigen p, q zugehören, welche jenen λ entsprechen. Denn es ist klar, dass die Wahrscheinlichkeit, p falle zwischen gewisse Grenzen, identisch ist mit derjenigen, dass λ einen Werth hat, welcher ein in diese Grenzen fallendes p ergibt; es wird also einerseits die am Ende von §. 1 in die Betrachtung eingeführte Grösse ψ bestimmt, sobald die relative Wahrscheinlichkeit der verschiedenen λ, wie sie a priori stattfindet, erkannt ist; und andrerseits gewinnt durch dieselbe Bemerkung der Quotient der beiden Integrale von der Form V., welcher nach der Abzählung die Probabilität vorstellt, dass p zwischen gewisse Grenzen fällt, nunmehr seine eigentliche Bedeutung dadurch, dass er zugleich das Mass der Wahrscheinlichkeit ist, welche in Folge jener gemachten Erfahrung dafür besteht, dass λ in der Wirklichkeit einen Zahlenwerth hat, der zwischen gegebenen Grenzen eingeschlossen ist. Diese Grösse λ bezeichnet das Verhältniss desjenigen absoluten Betrages v, welchen der innerhalb einer unserer Beobachtungsepochen constante Theil in der Abweichung des Absorptionscoëfficienten ebenso leicht überschreitet, als nicht erreicht, zu dem andren absoluten Betrage u, welchem der bei jeder einzelnen Visirung noch hinzutretende zufällige Theil jener Abweichung seinerseits ebensoleicht überschreitet als nicht erreicht. Alle Werthe von λ zwischen o und ∞ sind a priori zulässig, und da man vor gemachten Erfahrungen noch keinen Grund hat, die eine der beiden Grössen v u, für die grössere zu halten, so sind die Werthe von λ zwischen o und 1 zusammen ebenso wahrscheinlich als diejenigen zwischen 1 und ∞. Diesen Bedingungen ist es entsprechend, vor den Abzählungen die Wahrscheinlichkeit eines Werthes von v : u der zwischen o und einem bestimmten λ eingeschlossen ist, gleich zu setzen, $\frac{\lambda^2}{1 + \lambda^2}$ oder gleich $\frac{v^2}{v^2 + u^2}$; einem

Ausdrucke, welcher in der That 1 wird für $\lambda = \infty$, $1/2$ für $\lambda = 1$, und in welchem nach bekannten Grundsätzen $v^2 + u^2$ das Quadrat derjenigen Grösse vorstellt, welche die ganze Abweichung des Extinctionscoefficienten von seinem Mittelwerthe bei grossen Anzahlen nahe ebenso oft übertreffen als nicht erreichen wird. Wenn man diese mathematische Form, auf welche alle Analogien hinweisen, als den adäquaten Ausdruck für unsre Beurtheilung der Wahrscheinlichkeiten vor den gemachten Erhebungen annimmt, so würde man also, um für jedes p die nach der Gl. (3.) in §. 1 zugehörige Function ψ zu erhalten, nur das nach den Gleichungen VIII. und IX dem p entsprechende λ zu ermitteln, und dann zu setzen haben:

$$(7.) \qquad \psi\,(p) = \frac{\lambda^2}{1+\lambda^2}\,;\ ^{7)}$$

umgekehrt kann man aus dieser Gleichung zu jedem Werthe von ψ das zugehörige λ rechnen, und erhält dann p aus den Formeln des vorigen Paragraphen. Dieser letztere Uebergang ist der bequemere von beiden; er ist zu machen, wenn man die Form V. des Integrales wählt, welches den Zähler und Nenner des Ausdruckes für unsere aus der Abzählung gewonnene Wahrscheinlichkeit liefert. Zugleich ist es klar, dass die extremen Werthe von ψ, oder diejenigen, welche als Grenzen im Nenner auftreten, die Werthe o und 1

---

(7) Die drei Grössen λ, ψ, p, nehmen, (da die erste von ihnen immer positiv zu nehmen ist), jederzeit alle drei zugleich zu, oder alle drei zugleich ab, wie dies für λ und ψ evident ist, und für λ und p nach der Bedeutung dieser Grössen sein muss, und auch an den Formeln leicht nachgewiesen wird. Giebt man daher einer der drei Grössen einen Werth, der zwischen zwei Grenzen eingeschlossen ist, so ist man sicher, dass derjenige Werth, welchen eine der andern dadurch erhält, zwischen die beiden Grenzen fällt, welche vermöge des Zusammenhangs zwischen ihnen jenen zwei Grenzen entsprechen. Wenn dies nicht mit Nothwendigkeit so wäre, so würde die Betrachtung sich etwas compliciren.

sind, entsprechend den extremen Werthen $\lambda = o$ und $\lambda = \infty$. Das Integral V. selbst wird wieder durch mechanische Quadratur gefunden; da man seinen approximativen Werth für verschiedene Werthe seiner Grenzen kennen muss, so scheint es am vortheilhaftesten, für eine Anzahl solcher Werthe von ψ, die eine arithmetische Reihe bilden, die Function unterm Integralzeichen zu berechnen (indem man erst λ, dann K, und hiermit die Werthe von p, q ableitet, welche in die Grössen σ und ω nach den Gleichungen (1.) und (2.) eintreten), und alsdann das von Gauss herrührende Verfahren für die Quadratur zu benützen, welches von Encke im astron. Jahrbuch für 1837 dargelegt worden ist.[8])

Was diejenigen Grössen betrifft, welche auf das spezielle Ergebniss der statistischen Abzählung an unserem Beobachtungsmateriale Bezug haben, und welche für die Berechnung des Wahrscheinlichkeitsausdruckes V. nöthig sind, so habe ich ihre Zahlenwerthe angenommen wie folgt. Es sind eigentlich, (s. p. 183 meiner Eingangs erwähnten Abhandlung) bei 494 der Zeit nach geordneten Beobachtungen (oder 493 Aufeinanderfolgen je zweier) gefunden worden 239 Folgen gleicher Zeichen der Fehler und 247 Zeichenwechsel (zusammen etwas weniger als 493, weil ein Ausfall in der Ziffer stattfindet, so oft Null im Fehlerverzeichniss vorkommt): ich habe so gerechnet, als wären unter 500 Folgen von Beobachtungen 250 Zeichenfolgen und eben so viele Zeichenwechsel erhalten worden. Die durchschnittliche Anzahl m solcher Beobachtungen, welche Einer unsrer meteorologischen Epochen angehören, habe ich angenommen = 5, weil diese Zahl von mir als die normale der vollständigen Messungen Eines Abends betrachtet wurde: zwar ist sie nicht jedesmal wirklich erreicht worden, und eine Verminderung

(8) S. besonders die Formel (11), p. 264 daselbst. In meiner Rechnung habe ich die fünften Differenzen der Funktionalwerthe vernachlässigt.

wäre auch desshalb indicirt, weil die Messungen an nur einmal beobachteten Sternen für uns nicht zählen (indem die Vorzeichen ihrer Fehler unbekannt sind); es sind aber auf der andern Seite häufig an zwei oder mehr auf einanderfolgenden, oder sonst sich sehr nahe liegenden Abenden Beobachtungen bei vollkommen ähnlicher Beschaffenheit der Luft angestellt worden, die man mit allem Grunde zu Einem Abschnitte zu rechnen hat. Mit $m = 5$ erhält man $M = {}^4/_5 . 500 = 400$, und da die Anzahl der Zeichenfolgen s angenommen ist $= {}^1/_2 (M + M')$, so wird ferner aus Gleichung (1.), wenn auch für p sein Werth ${}^1/_2 + K$ gesetzt wird:
$$\sigma = - K \sqrt{M} = - 20 K$$

Gleichzeitig findet sich aus (2.) die Hilfsgrösse ω bestimmt, wie folgt:
$$\omega^2 = {}^1/_8 + 2 ({}^1/_2 + K) ({}^1/_2 - K) = {}^5/_8 - 2 K^2$$
so dass der Exponent in Formel V. wird
$$- \frac{400 K^2}{{}^5/_8 - 2 K^2}$$
oder $= - 200 (\operatorname{tg} x)^2$, wenn man die Substitution gebraucht $\operatorname{Sin} x = \frac{4}{\sqrt{5}} K$, durch welche zugleich wird $\omega = \sqrt{{}^5/_8} \cos x$. ($x$ wird immer reell, weil K höchstens den Werth ${}^1/_2$ erreichen kann.) Den Divisor $\sqrt{{}^5/_8}$, welcher hiernach in V. unterm Integralzeichen auftritt, kann man natürlich wegwerfen, weil er im Quotienten der beiden Integrale sich aufhebt.

Die nachstehende kleine Tabelle (in welcher jede Zeile von zusammengehörigen Grössen eingenommen wird), enthält die von mir berechneten Zahlenwerthe; in der Columne, welche überschrieben ist „Integral", steht der durch die Quadratur gefundene Werth des mit $\sqrt{{}^5/_8}$ multiplicirten Integrales in V. d. i. der Werth von
$$\int d\psi \; e^{-200 (\operatorname{tg} x)^2} \operatorname{Sec} x$$

immer genommen von $\psi = o$ bis zu dem ψ der betreffenden Zeile; die vorletzte Columne (mit W überschrieben) gibt den Werth dieses Integrales, dividirt durch das vollständige, von 0 bis 1 genommene Integral, oder mit andern Worten: die Wahrscheinlichkeit, wie sie nach der Abzählung dafür besteht, dass $\frac{v}{u} = \lambda$ keinen grössern Werth hat, als den in der gleichen Zeile unter der Ueberschrift λ angesetzten: eine Wahrscheinlichkeit, welche vor der Abzählung durch die in derselben Zeile stehende Grösse ψ gemessen wird.

ψ	λ	K	$e^{-\frac{200\,\mathrm{tg}\,x^2}{\mathrm{Sec}\,x}}$	Integral	W	Differenzen. I.	Differenzen. II.
0	0	0	1,000 00	0	0		0
						1831	
0,1	0,33333	0,003 780	0,990 92	0,0997	0,1831		−35
						1796	
0,2	0,50000	0,007 881	0,961 10	0,1975	0,3627		83
						1713	
0,3	0,65465	0,012 908	0,899 02	0,2908	0,5340		149
						1564	
0,4	0,81647	0,018 998	0,794 00	0,3759	0,6904		242
						1322	
0,5	1,00000	0,026 607	0,635 76	0,4479	0,8226		342
						980	
0,6	1,22478	0,036 459	0,426 46	0,5013	0,9206		407
						573	
0,7	1,52739	0,049 955	0,200 70	0,5325	0,9779		373
						200	
0,8	2,00000	0,071 416	0,036 51	0,5434	0,9979		179
						·21	
0,9	3,00000	0,108 016	0,000 44	0,5445	1,0000		21
						0	
1	∞	0,500 000	0,000 00	0,5445	1,0000		0

Diese Tabelle enthält die Antwort auf die verschiedenen Fragen, welche man aufwerfen kann in Betreff des Gewichtes der Folgerungen, die durch das Resultat unserer Abzählung indicirt sind. Man sieht z. B., dass in Folge dieser Abzählung die Wahrscheinlichkeit, es werde λ den Werth 1 nicht erreichen, oder die Probabilität, dass der gesetzmässig wirkende Bestandtheil in der Abweichung des Extinctionscoëfficienten im Durchschnitt kleiner ist als der rein zufällige, den Werth 0,8226 erreicht (nämlich den zu $\lambda = 1$ gehörigen Werth von W), oder dass die Chancen für diese Annahme sich zu den entgegenstehenden nahe wie 14 : 3 verhalten, während vor unsrer Erfahrung ihr Verhältniss 1 : 1 zu setzen war. Ebenso erkennt man, dass man nach der Abzählung noch die Wahrscheinlichkeit $^1/_2$ für die Annahme hat, es werde das durchschnittliche Verhältniss der Grösse des gesetzmässigen Theiles der Abweichung zu derjenigen des zufälligen nicht den Werth 0,6224 übertreffen: es wird nemlich $W = {^1/_2}$ für $\psi = 0{,}2793$, zu welchem Werthe sich ergibt $\lambda = \sqrt{\frac{\psi}{1-\psi}} = 0{,}6224$. Sogar die Wahrscheinlichkeit, dass λ nicht grösser als $^1/_2$ sei, ist nach der Abzählung noch immer $= 0{,}3627$ (s. die 3. Zeile der Tabelle), oder sie steht noch nahe wie 4 gegen 7, während sie a priori nur auf $^1/_5$ oder 1 gegen 4 stand. — Will man endlich etwa noch die Frage beantworten, wie man λ annehmen muss, um noch 2 gegen 1 wetten zu können, dass der gewählte Werth nicht kleiner ist, als der in der Natur stattfindende, so hat man das zu $W = {^2/_3}$ gehörige λ aufzusuchen; man findet durch Interpolution, dass $W = {^2/_3}$ wird für $\psi = 0{,}3840$, und hiermit ergibt sich der verlangte Werth von $\lambda = 0{,}7896$.

Die ganze wahrscheinliche Abweichung im Extinctionscoefficienten, d. h. diejenige Grösse, welche die Summe $u_1 + u_2$ im Grossen nahe ebenso oft überschreiten als nicht erreichen wird, ist in Folge unserer Annahmen $\sqrt{v^2 + u^2}$, und sie würde herabgehen auf u, oder reducirt werden im Verhältniss von $\sqrt{1 + \lambda^2} : 1$, wenn es gelänge, die gesetzmässig wirkenden Einflüsse, oder genauer gesagt, diejenigen, welche die Durchsichtigkeit der Luft am ganzen Himmel und für eine etwas längere Zeit alteriren, in die Theorie aufzunehmen, und hierdurch die Resultate von ihrem Effekt unabhängig zu machen. Da es nun, in Folge unserer Abzählung, bereits als unwahrscheinlich sich herausstellt, dass λ einen Werth überschreitet, der um beliebig wenig grösser genommen wird als 0,6224 (d. i. als derjenige Werth, welcher $W = {}^1/_2$ macht), so muss man es bereits als unwahrscheinlich bezeichnen, dass eine Vervollkommnung der Theorie im angedeuteten Sinne bei dermaliger Lage der Sache die durchschnittliche Abweichung des bei der Reduction benützten Extinctionscoefficienten von dem eben stattfindenden wahren Werthe in stärkerem Verhältniss vermindern könnte, als in demjenigen von $\sqrt{1 + (0{,}6224)^2} : 1$, oder von $1 : 0{,}849$. Dieses Verhältniss gibt zugleich eine Vorstellung von der Verkleinerung des wahrscheinlichen Fehlers der logarithmischen Beobachtungsresultate, welche man von der angedeuteten Vervollständigung der Theorie etwa hoffen könnte.[9]) Wenn man sich die jedenfalls der Wahrheit nahe kommende Annahme gestattet, dass der wahrscheinliche Fehler in dem gleichen Verhältniss verringert werden würde, wie die Abweichung des Extinctionscoefficienten von dem theoretischen Werthe, so ist es als unwahrscheinlich zu bezeichnen, dass der wahrscheinliche Fehler eines aus einmaliger Messung bestimmten Briggischen Logarithmen eines Helligkeitsverhältnisses von seinem dermaligen Werthe 0,0244 (siehe pag. 125 der grösseren Abhandlung) durch jene Verbesserung auf eine kleinere Zahl als 0,207 könnte herabgebracht werden. Darauf, dass er auf diesem Wege nicht weiter als bis 0,192 sich würde vermindern lassen, könnte man, den analogen Betrachtungen nach, bereits 2 gegen 1 wetten.

(9) Um von der einen dieser Verkleinerungen strenge auf die andere den Schluss zu machen, müsste man eigentlich wieder auf die Betrachtungsweise von §. 2 zurückgehen.

Was also das praktische Resultat unserer Wahrscheinlichkeitsuntersuchung für die physikalische Frage angeht, welche den Stoff unserer Aufgabe geliefert hat, so bestätigt die mathematische Diskussion, indem sie ihn zugleich näher präcisirt und den Grad seiner Zuverlässigkeit feststellt, den Schluss, welcher in der Abhandlung auf das Ergebniss unsrer Abzählung gebaut worden ist, dass nämlich unter den Fehlerursachen, welche zur Zeit die Ergebnisse unsrer photometrischen Messungen am Himmel afficiren, die gesetzmässig wirkenden Schwankungen in der Durchsichtigkeit der Luft nur eine untergeordnete Rolle spielen. Die Bestrebungen, welche sich die Verbesserung der Beobachtungsresultate zum Ziele setzen, werden also, wie die Sache jetzt liegt, zunächst auf andere Richtungen verwiesen.

Herr Jolly legte einen Aufsatz vor des Herrn Dr. von Bezold

„Ueber die mathematischen Beziehungen zwischen den krystallographischen Grundgesetzen".

Die folgenden Zeilen haben den Zweck, den Ideengang und die Hauptresultate einer Arbeit darzustellen, deren Ziel dahin gesteckt war, die Scheidung zwischen eigentlichen Fundamentalthatsachen und rein mathematischen Folgesätzen in der Krystallographie strenger durchzuführen, als diess bisher geschehen war.

Desshalb war, nachdem in möglichster Kürze die Beziehungen zwischen Kanten- und Coëfficientengesetz dargelegt worden, das Hauptaugenmerk darauf gerichtet, das Symmetriegesetz in einer Weise zu formuliren, die streng mathematischer Behandlung zugänglich und geeignet schien, einen tieferen Blick in das Wesen der Symmetrie zu ge-