Sitzungsberichte

der

königl. bayer. Akademie der Wissenschaften

zu **München.**

Jahrgang 1863. Band II.

München.
Druck von F. Straub (Wittelsbacherplatz 3).
1863.

In Commission bei G. Franz.

Was also das praktische Resultat unserer Wahrscheinlichkeitsuntersuchung für die physikalische Frage angeht, welche den Stoff unserer Aufgabe geliefert hat, so bestätigt die mathematische Diskussion, indem sie ihn zugleich näher präcisirt und den Grad seiner Zuverlässigkeit feststellt, den Schluss, welcher in der Abhandlung auf das Ergebniss unsrer Abzählung gebaut worden ist, dass nämlich unter den Fehlerursachen, welche zur Zeit die Ergebnisse unsrer photometrischen Messungen am Himmel afficiren, die gesetzmässig wirkenden Schwankungen in der Durchsichtigkeit der Luft nur eine untergeordnete Rolle spielen. Die Bestrebungen, welche sich die Verbesserung der Beobachtungsresultate zum Ziele setzen, werden also, wie die Sache jetzt liegt, zunächst auf andere Richtungen verwiesen.

Herr Jolly legte einen Aufsatz vor des Herrn Dr. von Bezold

„Ueber die mathematischen Beziehungen zwischen den krystallographischen Grundgesetzen".

Die folgenden Zeilen haben den Zweck, den Ideengang und die Hauptresultate einer Arbeit darzustellen, deren Ziel dahin gesteckt war, die Scheidung zwischen eigentlichen Fundamentalthatsachen und rein mathematischen Folgesätzen in der Krystallographie strenger durchzuführen, als diess bisher geschehen war.

Desshalb war, nachdem in möglichster Kürze die Beziehungen zwischen Kanten- und Coëfficientengesetz dargelegt worden, das Hauptaugenmerk darauf gerichtet, das Symmetriegesetz in einer Weise zu formuliren, die streng mathematischer Behandlung zugänglich und geeignet schien, einen tieferen Blick in das Wesen der Symmetrie zu gewähren. Eine Anwendung dieses Gesetzes auf Gebilde, die dem Coëfficientengesetze gehorchen, führte zu dem Beweise, dass Zahl und Art der Krystallsysteme durch diese Gesetze vollständig und unzweideutig bestimmt sind, und zur Auffindung dieser Systeme. Ebenso ergaben sich das Gesetz der Combinationen und das der sogenannten Hemiëdrienbildung als einfache Consequenzen der genannten Fundamentalsätze ohne irgend weitere Annahme nur dadurch, dass alle mit diesen Sätzen verträglichen Gestalten gesucht wurden.

Es muss hier noch eines Aufsatzes von Möbius[1]) gedacht werden, der einen grossen Theil der hier berührten Fragen in höchst eleganter Weise behandelt; da jedoch diese Untersuchung, abgesehen davon, dass sie dem Verfasser erst bekannt wurde, nachdem er die seinige der Hauptsache nach vollendet hatte, mit ganz anderen Hülfsmitteln und in viel geringerer Ausdehnung geführt wurde, so konnte sie auf die vorliegende nur geringen Einfluss äussern.

I.

Das erste Grundgesetz, das der constanten Kanten,[2]) wollen wir folgendermaassen formuliren: „Die Begrenzungsflächen eines Krystalls sind Ebenen. An einer bestimmten Species kann jede einer solchen Fläche parallele Ebene als Krystallfläche auftreten, und ebenso jede durch zwei nicht parallele Kanten gelegte Ebene oder deren Parallelebenen.“

Wählt man ein beliebiges durch drei sich schneidende

---

(1) Möbius: Ueber das Gesetz der Symmetrie der Krystalle und über die Anwendung dieses Gesetzes auf die Eintheilung der Krystalle in Systeme. Ber. d. k. sächs. Gesellsch. d. Wissenschaften. 1849.

(2) Romé de l'Isle. Krystallographie éd. 2. 1783. Tom. I. p. 92. Theor. VII.

Ebenen gebildetes recht- oder schiefwinkliches Coordinatensystem, so wird ein Krystall durch einen Complex von Gleichungen repräsentirt von der Form:

$$\frac{x}{A} + \frac{y}{B} + \frac{z}{C} = 1 \text{ oder } Hx + Ky + Lz = 1.$$

Der erste Theil des Kantengesetzes sagt nun aus, dass statt einer solchen Ebene alle vorkommen können, welche in der Formel

$$\mathfrak{H}x + \mathfrak{K}y + z = \frac{1}{L}$$

enthalten sind, wo $\mathfrak{H} = \frac{H}{L}$ und $\mathfrak{K} = \frac{K}{L}$ constante Werthe haben, während L alle möglichen reellen Werthe annehmen kann. Mithin ist durch $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{K}$ eine Krystallfläche ihrem Wesen nach vollkommen charakterisirt.

Statt der wirklich am Krystalle auftretenden Ebenen kann man desshalb andere diesen parallele Ebenen (Reductionsebenen) betrachten, welche sämmtlich dasselbe L, etwa L = 1 besitzen, d. h. durch einen Punkt R (Reductionsmittelpunkt) der ZAxe gehen, der um die Einheit vom Coordinatenursprunge absteht.

Für den Durchschnitt einer solchen Ebene mit der XYEbene (Projektionsebene) erhält man die Gleichung einer Geraden

$$\mathfrak{H}x + \mathfrak{K}y = 1,$$

da diese die Grössen $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{K}$ enthält, so charakterisirt diese Gerade (Sectionslinie) die entsprechende Krystallfläche vollkommen.

Die Anwendung dieses von Neumann[3]) stammenden, von Quenstedt[4]) weiter verfolgten Gedankens, statt des Krystalles ein solches Reductionsgebilde zu betrachten, und

(3) Neumann, Beiträge zur Krystallonomie. Berlin und Posen 1823.

(4) Quenstedt, Methode der Krystallographie. Tübingen 1840.

das letztere wieder durch die Schnittfigur (schematische Projection) mit einer Ebene zu ersetzen, gewährt bei einer rein geometrischen Behandlung dieselben Vortheile, welche bei einer analytischen die Beachtung des Umstandes bietet, dass man es in allen nur auf die Richtung bezüglichen Fragen eigentlich nur mit zwei Coordinaten zu thun habe.

Der zweite Theil des Kantengesetzes lehrt, dass „jede durch zwei Zonenaxen gelegte Ebene eine Reductionsfläche sei“ und giebt mithin ein Mittel an die Hand, um Reductionsflächen zu finden, welche neben oder anstatt der vorhandenen auftreten können.

Diese Methode, neue Flächen zu finden, die man dann als Abstumpfungs- oder Zuschärfungs-Flächen betrachtet, nennt man Deduction. Im Schema liefert das Verbinden noch nicht verbundener Zonenpunkte die Sectionslinien solcher Flächen.

Diese Methode ist nicht etwa ein blosses mathematisches Hülfsmittel, es versteht sich durchaus nicht von selbst, dass man nur so abstumpfen und zuschärfen kann, sondern sie ist der Ausfluss eines Erfahrungssatzes, den man wohl am Besten, wie hier geschehen, als zweiten Theil dem Kantengesetze beifügen kann.

Die geringste Zahl von Reductionsflächen, welche nöthig ist, um die Deduction darauf anzuwenden, ist 4, deren keine 3 in einer Zone liegen. Diese 4 Ebenen schneiden sich in 6 Zonenaxen, und zwischen diesen sind wieder 3 neue Ebenen möglich. Wählt man die XYEbene (zugleich Projectionsebene) einer dieser 3 Ebenen parallel, die beiden anderen als XZ und YZEbene, so ist die schematische Projection ein Parallelogramm, mit dem Coordinatenursprunge als Mittelpunkt, und mit den Coordinatenaxen als Diagonalen.

Die Gleichungen der Sectionslinien, welche den 4 gegebenen Reductionsflächen entsprechen, sind in der Formel enthalten

$$\pm \mathfrak{H}x \pm \mathfrak{K}y = 1 \qquad [1]$$

Die Gleichungen sämmtlicher Sectionslinien, welche hieraus durch Deduction erhalten werden können, haben die Form

$$\frac{h}{l}\,\mathfrak{H}x + \frac{k}{l}\,\mathfrak{K}y = 1 \text{ oder } m\,\mathfrak{H}x + n\,\mathfrak{K}y = 1, \quad [2]$$

wo h, k, l, beliebige positive oder negative ganze Zahlen, m und n beliebige rationale Zahlen bedeuten.

Denn die Durchschnittspunkte von Geraden, deren Gleichungen die Form [2] haben, haben solche von der Form

$$x = \mu\,\frac{1}{\mathfrak{H}} \text{ und } y = \nu\,\frac{1}{\mathfrak{K}} \qquad [3]$$

wo μ und ν rational sind, und die Gleichung einer Geraden, welche solche Punkte verbindet, hat wieder die Form [2], mithin auch alle aus den in [1] enthaltenen Linien deducirbaren Sectionslinien. Die ihnen entsprechenden Ebenen werden durch Gleichungen von der Gestalt

$$h\,\mathfrak{H}x + k\,\mathfrak{K}y + lz = \frac{1}{L} \text{ oder } hHx + kKy + lLz = 1 \quad [4]$$

repräsentirt, wo h, k, l beliebige positive oder negative ganze Zahlen sein können.

Aus [3] folgt, dass alle Zonenpunkte auf den Eckpunkten eines Netzes (Gitters) von Parallelogrammen liegen, deren Seiten den Coordinatenaxen parallel sind. Die Sectionslinien, welche ja immer wenigstens durch zwei Zonenpunkte gehen, werden daher bei gehöriger Erweiterung des Netzes immer nach gleichen Entfernungen wieder auf solche Eckpunkte stossen, und es müssen desshalb alle auf ein und derselben Sectionslinie liegenden Zonenpunkte um ganze Vielfache einer Grundgrösse von einander, also auch von einem derselben abstehen. Die Grundgrösse ist für parallele Sectionslinien die gleiche, für nicht parallele im Allgemeinen verschieden.

Wählt man demnach einen beliebigen Zonenpunkt als Coordinatenursprung, zwei beliebige durch ihn gehende Sectionslinien, nebst der von R nach ihm gezogenen Zonenaxe als Coordinatenaxen, so müssen die Sectionslinien, auch auf dieses Coordinatensystem bezogen, Gleichungen von der Form [2], die Krystallflächen solche von der Form [4] haben, mit ganzzahligen Werthen von h k l und festen Werthen für $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{K}$.

Nennt man h k l die Indices der Fläche, so findet man demnach:

„Bei jedem durch Deduction[5]) entstandenen Gebilde sind die Indices aller Flächen für drei als Coordinatenaxen gewählte Zonenaxen ganze Zahlen."

Fasst man die sogenannten Parameter $\frac{1}{H}, \frac{1}{K}, \frac{1}{L}$, ins Auge, so erhält man das Gesetz in der anderen allbekannten Form.

Dieser von Haüy entdeckte und durch alle Messungen bestätigte Satz, das sogenannte „Coëfficientengesetz" zeigt, dass man jeden Krystall durch Deduction aus einer Grundgestalt von den obenerwähnten Eigenschaften entstanden ansehen kann. Er enthält mithin nicht nur das Kantengesetz in sich, sondern ist allgemeiner als dieses. Es scheint desshalb besser und naturgemässer, diesen Satz als Grundlage für die weiteren Entwickelungen zu benützen. [6])

Eine aufmerksame Betrachtung des von uns eingeschlagenen Weges gibt sofort den Satz für die sogenannte Axentransformationen, und zwar in einer Form, die ihn geeignet

---

(5) Aus 4 Flächen, deren keine 3 in einer Zone liegen.

(6) Der hier gegebene Beweis kann zwar nicht den Anspruch auf den Namen eines gänzlich neuen machen, da er, wenn diess auch nicht ausdrücklich bemerkt ist, gewissermaassen doch schon in den Entwicklungen enthalten ist, welche Kupffer (Rechn. Kryst.) auf S. 482 ff., oder Miller (Krystallographie) §. 23 u. a. geben; aber er zeichnet sich wenigstens durch Einfachheit aus, und war hier nicht zu umgehen, ohne den Zusammenhang des Ganzen zu stören.

scheinen lässt, an die Spitze der rechnenden Krystallographie gestellt zu werden.

Ist die Projektionsebene, wie oben stets vorausgesetzt war, einer der Reductionsebenen parallel, so werden, wenn man diese als XY Ebene wählt, d. h. den Coordinatenursprung von O nach R verlegt, sowohl sämmtliche Zonenaxen, welche in dieser Ebene liegen, mithin Sectionslinien parallel sind, sowie die nach den Zonenpunkten gehenden Zonenaxen Axen sein, für welche das Coëfficientengesetz giltig ist, und deren Parameter den Entfernungen zweier Zonenpunkte auf parallelen Sectionslinien, beziehungsweise denen der Zonenpunkte vom neuen Coordinatenursprunge oder rationalen Multiplen dieser Grössen gleich sind. Trägt man nun diese Werthe der Parameter auf den Axen vor- und rückwärts von R(O) aus auf, und nennt man diese die Grössen der Axen, so führt ein Blick auf die Methode der Deduction zu dem Satze:

„Sind zwei krystallographische Axen nach Richtung und Grösse gegeben, so ist die Diagonale des aus diesen Stücken gebildeten Parallelogrammes auch eine krystallographische Axe nach Richtung und Grösse.“ Bei drei nicht in einer Ebene gelegenen Axen hat die Diagonale des darausgebildeten Parallelepipedons die analoge Eigenschaft.

Mithin sind alle Formeln der rechnenden Krystallographie, sei es, dass sie sich auf Axen und deren Parameter, sei es, dass sie sich auf die Winkel beziehen, welche Kanten oder Flächen miteinander bilden, in den Formeln enthalten, welche die Relationen zwischen den einzelnen Stücken eines Parallelepipedons darstellen.

II.

Um das zweite Grundgesetz, das Symmetriegesetz scharf fassen zu können, müssen einige Definitionen vorausgeschickt werden.

1) Ebenen, welche ein räumliches Gebilde so theilen, dass jede ihrer Normalen auf beiden Seiten in gleichen Entfernungen vom Fusspunkte von Flächen geschnitten wird, sollen Symmetralebenen erster Klasse heissen. Der auf rechtwinklige Coordinaten bezogene analytische Ausdruck für das Gebilde bleibt bei einer Vertauschung von $-x$ mit $+x$ unverändert, wenn die XY Ebene eine solche Ebene ist, und ein solches Gebilde wird durch Perversion [7]) einer Dimension (x) nicht geändert.

2) Kann ein Gebilde durch Drehung von φ^0 um eine Axe mit sich selbst, d. h. mit dem in der alten Stellung verbliebenen zur Deckung gebracht werden, so sollen zwei durch diese Axe gelegte Ebenen, die den Winkel φ miteinander bilden, gleichartige Symmetralebenen zweiter Klasse nach φ heissen.

3) Stehen auf einer krystallonomisch möglichen Ebene eine oder mehrere solche senkrecht, ohne dass die erstere eine Symmetralebene erster Klasse ist, so soll sie eine der dritten Klasse heissen.

Diess vorausgesetzt, kann man das Symmetriegesetz folgendermaassen aussprechen:

„Es können an einer Species verschiedene Flächencomplexe vorkommen, aber die Symmetralebenen bleiben stets dieselben nach Charakter und Lage.“[8]) Oder mehr mit der von Möbius gegebenen Fassung übereinstimmend:

„Alle an einer Species möglichen Flächencomplexe können immer auf gleichviele und gleiche Arten mit sich selbst zur Deckung gebracht werden.“ Diejenigen Stücke, Flächen, Kanten, Axen und Ecken, welche nach Ausführung der durch die Definitionen bestimmten Operationen einander decken,

---

(7) S. Listing, Vorstudien zur Topologie. Göttinger Studien vom Jahre 1847.

(8) Vgl. W. Sauber. Ueber die Entwicklung der Krystallkunde S. 21. München 1862.

heissen gleichartig. Gleichartige Axen haben gleiche Parameter und Axen mit solchen sind gleichartig. Gleichartige Stücke verhalten sich in gleicher Weise gegen äussere Einflüsse, und Stücke, die sich so verhalten, sind gleichartig, d. h. durch Symmetralebenen verbunden.

Diese beiden Sätze bilden eine unerlässliche, bisher jedoch noch nicht in ihren Consequenzen genügend beachtete Ergänzung des Symmetriegesetzes.

Auf die Betrachtung gleichartiger Stücke stützt sich die gewöhnliche Form des Symmetriegesetzes, welche bei der Deduction für gleichartige Stücke immer gleichartige und gleichzeitige Veränderung vorschreibt.

Das Symmetriegesetz führt auf die Definition der Krystallform als Inbegriff der nothwendig coëxistirenden Flächen und auf den der Combination von solchen Formen, es zeigt unter Berücksichtigung des Coëfficientengesetzes, welche Formen, und wie dieselben miteinander in Combination treten können.

Der Inbegriff aller Formen, welche gleichviele und beziehungsweise gleichartige Symmetralebenen haben, soll ein Krystallsystem genannt werden. Anzahl und Art der denkbaren Krystallsysteme ist durch Anzahl und Art der mit dem Coëfficientengesetz verträglichen Anordnungen von Symmetralebenen bedingt.

Die Untersuchung über diesen Gegenstand wird erleichtert, wenn man vor der Hand wieder ein Reductionsgebilde betrachtet, und dann zuerst noch den in einer Zone (Z) möglichen Anordnungen fragt. Auch ist es von Vortheil, zu berücksichtigen, dass die schematische Projektion in einer auf Z senkrechten Ebene stets ebenso viele entsprechende Symmetrallinien enthält, als Symmetralebenen in Z liegen, wenn man nämlich für erstere analoge Definitionen wie für die letzteren aufstellt.

Nun kann man aber beweisen, dass die Symmetralebenen erster Klasse und gleichartige zweiter immer fächerförmig so um eine gemeinschaftliche Zonenaxe herumliegen, dass je zwei benachbarte stets den gleichen Winkel φ mit einander bilden. Dabei sind die Symmetralebenen erster Klasse sämmtlich gleichartig, wenn $\varphi = \frac{2\,n\,\pi}{2\,m + 1}$, sie zerfallen in 2 Gruppen von untereinander gleichartigen, von denen zwei benachbarte den Winkel 2 $\varphi = \varphi'$ miteinander bilden, wenn $\varphi = \frac{2\,n\,\pi}{2\,m}$ ist. Zu jedem Systeme von Symmetralebenen erster Klasse, bei welchem die gleichartigen den Winkel φ' mit einander bilden, gehören unendlich viele Systeme von solchen zweiter Klasse nach φ' in derselben Zone. Für $\varphi' = \frac{2\,n\,\pi}{2\,m}$ soll die Gruppirung geradzahlig, für $\varphi' = \frac{2\,n\,\pi}{2\,m + 1}$ ungeradzahlig heissen.

Ferner findet man, dass in krystallonomisch möglichen Reductionsgebilden sämmtliche Symmetralebenen erster Klasse Reductionsflächen sein können, und dass unter den unendlich vielen zusammengehörigen Gruppirungen von solchen zweiter Klasse stets solche vorkommen, bei welchen sämmtliche gleichartige mit Reductionsflächen zusammenfallen.

Auch die auf der gemeinschaftlichen Zonenaxe Z in R senkrechte Ebene A ist eine mögliche Reductionsfläche, und zwar wenn die Gruppirung geradzahlig, und nur dann eine Symmetralebene erster Klasse.

Daraus folgt, dass die Durchschnitte der Symmetralebenen (bei solchen zweiter Klasse wenigstens die einer der zusammengehörigen Gruppirungen) mit der Ebene A Zonenaxen sind, wobei selbstverständlich gleichartigen Symmetralebenen auch gleichartige Zonenaxen entsprechen. Bilden nun zwei solche miteinander den Winkel 2 φ' so muss auch (s. S. 356) die Halbirungslinie dieses Winkels, d. h. die Diagonale des aus beiden gebildeten Parallelogrammes eine Zonenaxe sein, und zwar muss sie, da φ' der Winkel ist, den zwei benachbarte gleichartige Symmetralebenen mit einander bilden, denselben Parameter haben, d. h. die Diagonale muss zu den Seiten in rationalem Verhältnisse stehen, d. h. cos φ' muss rational sein. Da aber $\varphi' = \frac{2\,n\,\pi}{l}$ wo n und l ganze Zahlen sind, so kann φ' nur die Werthe π, $\frac{\pi}{2}$; $\frac{2\,\pi}{3}$ und $\frac{\pi}{3}$ annehmen, während φ oder der Winkel, welchen zwei benachbarte Symmetralebenen erster Klasse ohne Rücksicht auf Gleichartigkeit mit einander bilden, nur die Werthe $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ und $\frac{\pi}{6}$ haben kann.[9]) Symmetralebenen dritter Klasse können einander nur unter rechten Winkeln schneiden.

Die Resultate dieser Untersuchung überblickt man in folgender Tabelle, welche die in krystallonomisch richtigen Reductionsgebilden in einer Zone möglichen Anordnungen von Symmetralebenen enthält. Hiebei sind die Symmetralebenen erster Klasse durch s_1 s_2 s_3 . . . und durch s' s'' s''' . . . bezeichnet, wobei alle in gleicher Weise durch Indices ausgezeichneten untereinander gleichartig sind, die Numerirung aber in der Ordnung vorgenommen ist, in welcher gleichartige Hälften gleichartiger Symmetralebenen von einem Kreise, den man um O beschreibt, getroffen werden. In analoger Weise seien σ_1 σ_2 σ_3 . . . gleichartige der zweiten Klasse

(9) Diess kann man auch ohne Kenntniss der Rationalität oder Irrationalität der Formel cos $\frac{2\,n\,\pi}{l}$ finden, wenn man die Zahl der in schematischen Projectionen möglichen Symmetrallinien sucht, und dabei beachtet, dass solche Projectionen Figuren sind, deren Durchschnittspunkte sämmtlich auf den Eckpunkten eines Parallelogrammennetzes liegen müssen, so dass die Frage auf die nach den Symmetrieverhältnissen solcher Netze zurückgeführt wird.

nach $\varphi' = \widehat{\sigma_1 \sigma_2}$. Für $\widehat{\sigma_1 \sigma_2} = \pi$ fallen die zwei Ebenen in eine zusammen; desshalb ist statt $\sigma_1 \; \sigma_2$ nach $\widehat{\sigma_1 \sigma_2} = \pi$ nur σ geschrieben worden. $\mathfrak{s}_1$ und $\mathfrak{s}'$ bezeichnet Symmetralebenen dritter Klasse. Die Beifügung von A drückt aus, dass die in R auf Z senkrechte Ebene eine Symmetralebene erster Klasse sei. Bei der Numerirung der einzelnen Gruppen wurde aus einem später einzusehenden Grunde mit II. begonnen.

II. α) $s_1 \; s' \; s_2 \; s''$; $\sigma_1 \; \sigma_2$; $\widehat{s_1 s'} = \frac{\pi}{4}$; $\widehat{\sigma_1 \sigma_2} = \frac{\pi}{2}$; A.

β) $\sigma_1 \; \sigma_2$; $\widehat{\sigma_1 \sigma_2} = \frac{\pi}{2}$; A.

γ) $s_1 \; s_2$; σ; $\widehat{s_1 s'} = \frac{\pi}{2}$; A.

III. α) $s_1 \; s'$; σ; $\widehat{s_1 s'} = \frac{\pi}{2}$; A.

β) $\mathfrak{s}_1 \; \mathfrak{s}'$; σ A.

γ) σ A.

IV. α) $s_1 \; s' \; s_2 \; s'' \; s_3 \; s'''$; $\sigma_1 \; \sigma_2 \; \sigma_3$; $\widehat{s_1 s'} = \frac{\pi}{6}$; $\sigma_1 \; \sigma_2 = \frac{\pi}{3}$ A.

β) $\sigma_1 \; \sigma_2 \; \sigma_3$; $\widehat{\sigma_1 \sigma_2} = \frac{\pi}{3}$ A.

IV.' α) $s_1 \; s_2 \; s_3$; $\sigma_1 \; \sigma_2 \; \sigma_3$; $\widehat{s_1 s_2} = \frac{2\pi}{3}$; $\widehat{\sigma_1 \sigma_2} = \frac{2\pi}{3}$

β) $\sigma_1 \; \sigma_2 \; \sigma_3$; $\widehat{\sigma_1 \sigma_2} = \frac{2\pi}{3}$

V. α) s

β) $\mathfrak{s}_1 \; \mathfrak{s}'$

Diese Tabelle, welche die in einer Zone denkbaren Anordnungen von Symmetralebenen enthält, gibt zugleich die in schematischen Projectionen möglichen Anordnungen von Symmetrallinien. Um die in Reductionsgebilden überhaupt möglichen Symmetrieverhältnisse zu untersuchen, hat man nur zu beachten, dass die Durchschnitte von Symmetralebenen, welche zu den eben betrachteten Gruppirungen hinzutreten, wieder unter diese Gruppen fallen müssen.

Man findet, dass die gegebene Tabelle bereits sämmtliche möglichen Anordnungen enthält, mit Ausnahme von zwei, die als I α und I β figuriren sollen.

Bei I α scheiden sich die Symmetralebenen in $3 + 4 + 6 = 13$ Zonenaxen; die drei ersten, die U heissen mögen, sind den Kanten, die vier anderen (V) den Diagonalen eines Würfels parallel, die sechs letzten (W) endlich den Diagonalen der Würfelflächen. Bei I β kommen dieselben Axen U und V vor. Man hat mithin der Tabelle nur noch die folgenden beizufügen, um sämmtliche in Reductionsgebilden denkbaren Symmetrieverhältnisse überblicken zu können.

I α.)	In	U	herrscht	die	Anordnung	II α
	„	V	„	„	„	IV′ α
	„	W	„	„	„	III α
I β.)	„	U	„	„	„	II γ
	„	V	„	„	„	IV′ β

Eine aufmerksame Betrachtung dieser Tabelle zeigt, dass die mit β und γ bezeichneten Anordnungen stets aus den unter α stehenden, sowie IV′ aus IV und V aus III erhalten werden können, indem man ganze Gruppen von Symmetralebenen weglässt.

III.

Es erübrigt, die bisher am Reductionsgebilde geführten Untersuchungen auf wirkliche Körper zu übertragen.

Nach dem Kantengesetze entsprechen jedem Reductionsgebilde unendlich viele Körper; unter diesen hat man zwei Gruppen zu unterscheiden: entweder kommt jede Fläche mit einer ihr parallelen verbunden vor, d. h. zwei parallele Flächen des Körpers entsprechen einer Reductionsfläche, oder es entspricht einer Reductionsfläche immer nur eine

Fläche des Körpers, d. h. man hat zwischen parallelflächigen und geneigtflächigen Körpern zu unterscheiden. Da alle Flächen, welche zu einer Form gehören, gleichartig sind, mithin stets gleichzeitig vorkommen, so folgt, dass die beiden einen Blätterbruch bildenden Flächen bei parallelflächigen Krystallen gleichartig, bei geneigtflächigen ungleichartig sind. Die Structurverhältnisse eines geneigtflächigen Körpers könnte man sich demgemäss etwa durch einen Stoss auf einer Seite gefärbten Papieres versinnlichen, in welchem alle farbigen Seiten nach oben oder alle nach unten gerichtet sind. Diesen Unterschied zwischen den beiden Seiten einer Ebene kann man mathematisch dadurch merkbar machen, dass man von einer positiven und von einer negativen Seite spricht. Nach Einführung solcher Vorzeichen lässt sich auch noch im Reductionsgebilde ein geneigtflächiger Körper von einem parallelflächigen unterscheiden. Diess lässt sich sogar noch auf die schematische Projection übertragen, indem man ja auch den beiden Seiten der Sectionslinien verschiedene Vorzeichen geben kann.

Nennt man den Uebergang vom Reductionsgebilde zum wirklichen Körper Entfaltung, und nimmt man diese Entfaltung bei Gebilden aus gleichartigen nothwendig coëxistirenden Flächen so vor, dass sämmtliche Flächen gleichweit von einem als Centrum gewählten Punkte abstehen, so kann man beweisen:

1) Dass bei der parallelflächigen Entfaltung der Körper genau dieselben Symmetrieverhältnisse hat, wie das Reductionsgebilde.

2) Dass der durch geneigtflächige Entfaltung resultirende Körper stets andere Symmetrieverhältnisse hat, als der entsprechende parallelflächige, dass er aber dieselben hat, wie das entsprechende Reductionsgebilde mit ungleichnamigen Flächen, wenn man so entfaltet, dass der Körper nur gleichnamige Seiten nach aussen kehrt.

Dieser zweite Satz ermöglicht, auch die Symmetrieverhältnisse der geneigtflächigen Körper am Reductionsgebilde beziehungsweise am Schema zu studiren.

Die Resultate dieser Untersuchung findet man in der beigegebenen Tabelle zusammengestellt, die sämmtliche in derartig entfalteten Körpern oder in Reductionsgebilden mit Berücksichtigung allenfallsiger Ungleichnamigkeit krystallonomisch möglichen Anordnungen von Symmetralebenen enthält, und vermöge der eingeführten Bezeichnungen gestattet, die Symmetrieverhältnisse der zugehörigen Formen, d. h. die Art und Weise, wie die einzelnen Stücke einer Form mit einander zur Deckung gebracht werden können, bis in's Einzelnste zu übersehen.

Die am Anfange der Zeilen stehenden römischen Ziffern mit beigeschriebenen arabischen dienen zur Numerirung der einzelnen Anordnungen. Die darauffolgenden Buchstaben π und $\varkappa$ bedeuten, dass die der betreffenden Gruppirung entsprechenden Formen beziehungsweise als parallelflächige oder geneigtflächige Hemiëdrien von Formen betrachtet werden können, welche zu der darüberstehenden durch o bezeichneten Anordnung gehören. Die nächsten vertikalen Columnen enthalten die in den einzelnen Axen herrschenden Gruppirungen in den auf S. 360 eingeführten Bezeichnungen. Am Ende jeder Zeile, also in der letzten vertikalen Columne findet man den Namen der Form mit der höchsten Flächenzahl, welche zu der betreffenden Anordnung gehört nach Naumann und die Flächenzahl dieser Form.

Bei den Anordnungen I bis V hat man Axen in einer Ebene A und eine darauf senkrechte Z; die unter A stehende Zahl bezeichnet die Klasse von Symmetralebenen, welcher das A angehört. Ein * vor der Zeile soll sagen, dass die auf derselben stehende Anordnung noch nicht beobachtet worden ist.

Demgemäss ergibt sich folgende schematische Zusammenstellung sämmtlicher in Krystallen möglichen Anordnungen von Symmetralebenen.

I. Drei aufeinander senkrechte Axen U, vier trigonale Zwischenaxen V, sechs Axen W. (Vgl. S. 362). (Tesseralsystem.)

	U	V	W		
I_0	$II\alpha$	$IV'\alpha$	$III\alpha$	Hexakisoktaëder	48
$I_1\,\pi$	$II\gamma$	$IV'\beta$	$V\alpha$	Dyakisdodekaëder	24
$I_2\,\varkappa$	$III\beta$	$IV'\alpha$	$V\alpha$	Hexakistetraëder	24
$^*I_3\,\varkappa_1$	$II\beta$	$IV'\beta$	$III\beta$	Pentagonikositetraëder	24
$I_4\,\pi\varkappa_1$	$III\beta$	$IV'\beta$	$V\beta$	Tetraëdrische Pentagondodekaëder	12.

II. Eine Hauptaxe Z, darauf senkrecht zwei gleichartige Axen a_1 a_2 und zwei gleichartige intermediäre a' a'';

$\widehat{a_1 a_2} = \widehat{a' a''} = \frac{\pi}{2}$, $\widehat{a_1 a'} = \frac{\pi}{4}$. (Tetragonalsystem.)

	Z	a_1	a'	A		
II_0	$II\alpha$	$III\alpha$	$III\alpha$	I	Ditetragonale Pyramide	16
$II_1\,\pi$	$II\beta$	$V\alpha$	$V\alpha$	1	Tritopyramide	8
$II_2\,\varkappa$	$II\gamma$	$\begin{Bmatrix} III\alpha \\ III\beta \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} III\beta \\ III\alpha \end{Bmatrix}$	2	Tetragonales Skalenoëder	8
$^*II_3\,\varkappa_1$	$II\beta$	$III\beta$	$III\beta$	2	Trapezoëder	8

III. Drei aufeinander senkrechte ungleichartige Axen Z, a_1, a' (Rhombisches System).

	Z	a_1 u. a'	A		
III_0	$III\alpha$	$III\alpha$	1	Rhombische Pyramide	8
$III_1\,\pi$	$III\beta$	$V\alpha$	1	Monoklinoëdrische Meroëdrie	4
$III_2\,\varkappa$	$III\beta$	$III\beta$	2	Sphenoïd.	4
$^*III_3\,\varkappa\pi$	$V\beta$	$V\alpha$	1		2
$III_4\,\pi'\pi$	$V\beta$	$V\beta$	3		2

IV. Eine Hauptaxe Z, darauf senkrecht drei gleichartige Axen a_1 a_2 a_3 und drei unter einander gleichartige a' a'' a''';

$\widehat{a_1 a_2} = \widehat{a' a''} = \frac{\pi}{3}$; $\widehat{a_1 a'} = \frac{\pi}{6}$. (Hexagonalsystem.)

	Z	a_1 u. a'	A		
IV_0	$IV\alpha$	$III\alpha$	1	Dihexagonale Pyramide	24
$IV_1\,\pi$	$IV\beta$	$V\alpha$	1	Tritopyramide	12
$IV_2\,\varkappa$	$IV\beta$	$III\beta$	2	Hexagonales Trapezoëder	12
$^*IV_3\,\varkappa_1$	$IV'\alpha$	$\widehat{III\alpha\, V\alpha}$	1		12
$^*IV_4\,\pi\varkappa_1$	$IV'\beta$	$V\alpha$	1		6

IV′ Dieselben Axen Z, a_1 a_2 a_3 wie bei IV.

	Z	a_1	A		
IV′0	IV′α	IIIβ	2	Skalenoëder	12
IV′1 π	IV′β	—	2	Tritorhomboëder	6
IV′2 ϰ	IV′β	IIIβ	2	Trigonales Trapezoëder	6

V. Eine Axe Z senkrecht auf den beiden anderen a_1 a′ (Monoklinoëdrisches System).

	Z	a_1 a′	A	
V0	IIIγ	Vα	1	4
V1	—	Vα	1	2

VI. Die Axen sind die Durchschnitte von drei Ebenen, deren zwei auf einander senkrecht stehen (Durchschnittslinie Z), während die dritte beide unter schiefen Winkeln schneidet. (Diklinoëdrisches System).

	Z	
VI0	Vβ	2
VI1 ϰ	Vβ	1

VII. Drei ungleiche unter schiefen Winkeln sich schneidende Axen. (Triklinoëdrisches System).

VI0	2
VI1 ϰ	1

Ausser den hier angeführten Anordnungen von Symmetralebenen sind noch eine Anzahl von solchen denkbar, nämlich Anordnungen, die sich aus den unter II bis V stehenden ergeben, bei denen A eine Symmetralebene erster Klasse ist. Behält man nämlich hei allen diesen Gruppirungen die in der Zone Z liegenden Symmetralebenen bei, während man A in eine dritter Klasse übergehen lässt, also auch in den Zonen a die entsprechenden Aenderungen vornimmt, so erhält man neue Anordnungen, die den Grundgesetzen nicht widersprechen. Die zugehörigen Formen sind sämmtlich offene Formen (offene Pyramiden). Da dem Verfasser nicht bekannt ist, dass je eine solche Form beobachtet wurde[10]), die

(10) Eines eigenen Urtheils über solche Fragen muss sich der Verf. enthalten, da er durchaus nicht Mineraloge ist.

Tabelle aber dadurch an Ausdehnung gewonnen und an Uebersichtlichkeit verloren hätte, so wurden diese Anordnungen nicht mit aufgenommen. Fügt man sie noch hinzu, so hat man sämmtliche mit den Grundgesetzen vereinbaren Anordnungen.

Jede der obigen Anordnungen entspricht nach der oben gegebenen Definition einem Krystallsystem. Diese Zusammenstellung zeigt, dass es in Körpern sehr verschiedene Symmetrieverhältnisse gibt, welche mit den krystallographischen Grundgesetzen vereinbar sind, und dass die entsprechenden Formen an Krystallen grösstentheils wirklich beobachtet worden sind, während niemals Gestalten beobachtet wurden, die nicht unter den aufgeführten enthalten wären. Fasst man jedoch vorzugsweise die Zonenaxen, in denen sich die Symmetralebenen schneiden, in's Auge, so sieht man, dass sich ihre Anordnungen auf wenige Typen bringen lassen. Diese 7 Typen sind es, welche man bisher für die Eintheilung der Krystalle in Systeme als maassgebend angesehen hat. Schon oben wurde erwähnt, dass man einzelne Anordnungen von Symmetralebenen aus anderen durch Weglassen ganzer Gruppen erhalten könne. Diess gilt in der Tabelle von allen Anordnungen, welche nicht unter 1 stehen und von sämmtlichen unter IV′ in Bezug auf IV. Man nennt deshalb die Formen, welche unter die Rubriken 1 fallen, holoëdrische, während man die übrigen hemiëdrische (meroëdrische) heisst, und aus den holoëdrischen durch Verschwinden einer Hälfte oder von drei Viertheilen der Flächen entstanden denkt.

Unsere Entwicklungen zeigen, dass diese Anschauung nur dieser rein mathematischen Operation entnommen ist, dass es ihr aber an einer tieferen Begründung durch die Fundamentalgesetze gebricht. Die oben aufgestellte Definition für „Krystallsystem“ beansprucht diesen Namen für jede besondere Anordnung von Symmetralebenen; sie gestattet zwar von hemiëdrischen Systemen zu sprechen, indem man eben durch den Namen an die **rein mathematische** Operation des Wegnehmens von Flächen aus einer mathematisch verwandten Gestalt erinnert, aber niemals erlaubt sie, von Hemiëdrien in einem Systeme zu reden.

Im ersten Augenblicke mag es scheinen, als bringe diese Anschauung eine unnöthige Complication in die Sache, und deshalb mögen Zweifel auftauchen, ob es überhaupt passend war, ein System so zu definiren. Trotzdem wagen wir es, sie als die einfachere zu empfehlen. Sie lässt uns nämlich zwei Sätze als einfache Consequenzen des Symmetriegesetzes erkennen, die sonst als besondere Erfahrungssätze aufgestellt werden müssen: das Gesetz über Hemiëdrinenbildung, und das Gesetz über die Combinationen zwischen verschiedenen Formen, insbesondere zwischen holoëdrischen und hemiëdrischen. Nach unserer Auffassung können die Formen, welche einer bestimmten Anordnung von Symmetralebenen entsprechen, nur mit solchen combinirt vorkommen, welche unter dieselbe Rubrik der Tabelle fallen. Freilich können unter verschiedenen Rubriken Formen vorkommen, welche scheinbar dieselben sind, ich brauche z. B. nur an den Würfel zu erinnern, der sowohl unter I, 1 als auch unter die übrigen unter I stehenden, etwa unter I 3 fallen kann. Aber es dürfte wohl kaum eine kühne Behauptung genannt werden, wenn man sagt, dass der Würfel, der als Abstumpfungsform der Octaëderecken auftritt, andere Symmetrieverhältnisse habe, als der Würfel, der die Kanten eines Tetraëders abstumpft, fällt es doch auch Niemanden ein, die Flächen des Gegentetraëders, welches die Ecken eines Tetraëders abstumpft, als gleichartig mit den Flächen des letzteren anzusehen, oder die ganze Combinationsgestalt als ein Octaëder aufzufassen.

Lässt man diese Anschauungen gelten, so zeigt sich, dass man die Formen des holoëdrischen hexagonalen Systemes nicht durch **symmetrische** Deduction aus einer Form erhalten kann, wie sie auf S. 355 für die Anwendung dieser Methode gefordert wurde, sondern dass dann bereits die einzelnen Stücke der Grundgestalt (z. B. hexagonale Pyramide) durch das Coëfficientengesetz verbunden sein müssen. Diese Betrachtung lässt mithin den Unterschied zwischen Kanten- und Coëfficientengesetz und die grössere Allgemeinheit des letzteren noch deutlicher als oben erkennen.

Wir glauben, es als willkürlich bezeichnen zu dürfen, bei physikalischen Ebenen, d. h. bei den Begrenzungsflächen von Körpern, also etwa von Krystallen jene Gleichartigkeit der beiden Seiten, oder der verschiedenen Richtungen auf einer Seite einer Fläche von vorneherein vorauszusetzen, welche man sonst mit dem Begriffe der mathematischen Ebene verbindet. Lässt man aber eine solche Ungleichartigkeit nach verschiedenen Richtungen in ein und derselben Ebene zu, wie sie ja durch Streifungen u. s. w. aufs handgreiflichste sich manifestirt, so fällt das scheinbare Paradoxon, dass geometrisch gleiche Formen doch verschiedene Symmetrieverhältnisse haben können, sofort. Aetzversuche wie sie von Leydolt, [11]) oder die höchst interessanten Untersuchungen über Asterismus, wie sie von Brewster [12]) und v. Kobell [13]) angestellt worden sind, können zu einer endgiltigen Entscheidung über die Richtigkeit dieser Ansichten führen.

Schliesslich möge es gestattet sein, noch ein Wort über die Gründe zu sprechen, welche die Aufstellung der oben gegebenen Definitionen für Symmetralebenen bedingten. Schon Weiss belegte jene Ebenen, welche wir Symmetralebenen erster Klasse nannten, mit dem Namen von Symmetralebenen. [14])

---

(11) Sitzungsber. der k. k. Akademie d. Wissensch. B. XV. 1855.
(12) Phil. Mag. Vol. 5. Ser. 4.
(13) Diese Sitzungsber. vom Jahre 1862.
(14) Kupffer, Handb. d. rechnend. Krystallon. S. 72.

Ihnen entspricht eine Gleichnamigkeit der Structur nach vor- und rückwärts in den zu den Ebenen normalen Richtungen. Will man jedoch alle Symmetrieverhältnisse auf die Betrachtung von Symmetralebenen zurückführen, so sind die Ebenen erster Klasse allein nicht hinreichend, wie man z. B. bei jenen Hemiëdrien sieht, deren Combinationen alle möglichen Orientirungen um eine gemeinschaftliche Axe haben können. Hiedurch ist die Einführung von Symmetralebenen zweiter Klasse geboten, bei ihnen muss man ähnlich wie bei den Flächen der geneigtflächigen Körper eine positive und eine negative Seite unterscheiden, so zwar, dass man beim Umlaufen der Axe im einen Sinne nur auf positive, im anderen Sinne nur auf negative Seiten der zusammengehörigen gleichartigen Ebenen trifft.[14])

Diese Anschauung, welche man sich demgemäss von der Structur solcher Körper machen muss, passt sehr gut zu der Vorstellung, welche man sich vom Zustandekommen der Circularpolarisation macht. Die Einführung endlich des Begriffes der Symmetralebenen dritter Klasse stützte sich auf folgende Betrachtung, in der auch der auf Seite 358 erwähnte Zusatz zum Symmetriegesetz seinen Grund hat. Es ist bekannt, dass alle Krystalle der Ausdehnung durch die Wärme unterworfen sind, und zwar viele davon nach verschiedenen Richtungen in verschiedenem Maasse, dadurch müssen sowohl die Parameterverhältnisse der einzelnen Axen als auch die Winkel zwischen diesen geändert werden. Ist es nun schon äusserst unwahrscheinlich, dass ohne tieferen Grund die Parameter zweier Axen oder zweier Winkel auch nur für eine ganz bestimmte Temperatur einander gleich wären, so ist es vollends undenkbar, dass eine solche Gleichheit auch für verschiedene Temperaturen erhalten bliebe, wenn nicht in den

(15) Vergl. übrigens Weiss, Abhandl. d. Berl. Akad. v. J. 1816 und 1817. S. 314 ff.

innersten Structurverhältnissen eine gewisse Gleichartigkeit der entsprechenden Stücke bedingt wäre. Um dieser einen präcisen Ausdruck zu verschaffen, wurde die Definition für Symmetralebenen dritter Klasse aufgestellt. In dieser Betrachtung liegt es begründet, dass in der Tabelle das von manchen Krystallographen nicht besonders aufgeführte monoklinoëdrische und diklinoëdrische System vorkommt, sowie dass die von Naumann als möglich angeführte rhombotype Hemiëdrie des tetragonalen Systemes umsonst darin gesucht wird.

Stellt man sich die Frage, welche Anordnungen bei einem Systeme von Molekülen denkbar sind, dessen einzelne Stücke durch Parallelverschiebung mit einander zur Deckung gebracht werden können, wie diess bei einer molekularen Constitution der Krystalle unbedingt der Fall sein müsste, und beachtet man, dass die einzelnen Theile eines Krystalles doch im Allgemeinen unter gleichen Bedingungen entstanden sein müssen, so dass Flächen, welche in solchen Systemen geometrisch homolog wären, stets gleichzeitig als Begrenzungsflächen auftreten müssten, so kommt man von selbst zu denselben Definitionen für Symmetralebenen, und findet auch ohne Kenntniss des Coëfficientengesetzes sämmtliche und nur die in der Tabelle gegebenen Symmetrieverhältnisse als möglich in solchen Systemen.

Das Symmetriegesetz ist mithin bei der Annahme einer molekularen Constitution der Körper einfach ein Ausdruck der „Gleichartigkeit des Gestaltungsaktes," wie schon Weiss es nennt, während das Coëfficientengesetz durch eine solche Annahme wenigstens äusserst plausibel gemacht wird.

Doch eine weitere Ausführung dieses Gedanken, die übrigens im Anschluss an die auf S. 360 in der Anmerkung angedeutete Betrachtung ungemein einfach ist, überschreitet die hier gebotenen Grenzen und unser ursprüngliches Programm.

Unsere Aufgabe war es nur, zu zeigen, dass die zwei

Grundgesetze in der hier gewählten Fassung vollkommen hinreichend sind, um alle bisher beobachteten Formen und deren Combinationen unter einen Gesichtspunkt bringen, und den Zusammenhang zwischen denselben klar erkennen zu lassen.

Herr Gümbel übersandte seine Abhandlung:

„Ueber die Clymenien in den Uebergangsgebilden des Fichtelgebirges".

und bemerkt in seinem Schreiben u. A. folgendes:

Ich hoffe um so eher Grund zur Entschuldigung zu finden dafür, dass ich die Aufmerksamkeit der Classe für meine vorliegende Abhandlung: Die Clymenien in den Uebergangsgebilden des Fichtelgebirges in Anspruch nehme, als das monographisch beschriebene paläolithische Kephalopodengeschlecht der Clymenien gerade in Bayern erhöhte Beachtung verdient, weil kein Landstrich der Erde auf so kleinem Umfange eine so grosse Anzahl wohl unterscheidbarer Arten dieses Geschlechts aufzuweisen hat. Dazu kommt, dass dasselbe für die jüngsten Stufen der devonischen Uebergangsformation höchst charakteristisch und zugleich weit über die Erde verbreitet, für die Bestimmung gleichaltriger Schichten grosse Wichtigkeit erlangt hat. Den Ausgangspunkt für diese Vergleichung bilden immer die Clymenien-Arten unseres Fichtelgebirges. Nun hat zwar Graf v. Münster, der Entdecker dieser Versteinerungs-Formen, die in unserem Gebirge vorkommenden Arten monographisch beschrieben und abgebildet; aber Beschreibung und Abbildung sind so wenig scharf, dass es mit geringen Ausnahmen selten gelingt, an andern Orten gefundene Exemplare sicher und genau auf eine v. Münster'sche Species zu beziehen. Es ist bereits eine förmliche Verwirrung in der Deutung der durch Graf Münster aufgestellten Arten hereingebrochen. Um diesem