Sitzungsberichte

der

königl. bayer. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Jahrgang 1866. Band II.

München.
Akademische Buchdruckerei von F. Straub.
1866.

In Commission bei G. Franz.

Herr Seidel referirte über seinen Aufsatz:

„Trigonometrische Formeln für den allgemeinsten Fall der Brechung des Lichtes an centrirten sphärischen Flächen."

Die zum Gemeingut gewordenen mathematischen Formeln, nach welchen man (durch eine trigonometrische Rechnung) den Weg eines Lichtstrahles durch ein System centrirter Kugelflächen genau zu verfolgen im Stande ist, und von welchen der praktische Optiker Gebrauch macht, wenn er in der Rechnung die letzte Hand anlegen will zur Verbesserung der bereits annäherungsweise gefundenen Constructionen, — fassen bekanntlich das geometrische Problem nicht in seiner ganzen Allgemeinheit, sondern schränken sich ein auf die Betrachtung solcher Lichtstrahlen, die mit der optischen Axe ursprünglich in Einer Ebene liegen, und in Folge dessen auch alle successiven Brechungen in dieser festen Ebene erleiden. Sie begreifen hiemit alle Strahlen des von einem Punkte ausgehenden Lichtkegels nur dann in sich, wenn dieser Punkt in der Mitte des Gesichtsfeldes (d. i. in der verlängerten optischen Axe) liegt; in jedem andern Falle genügen den besondern Voraussetzungen jener Formeln nur mehr die Strahlen, welche der den Kegel halbirenden Ebene angehören, d. h. der Ebene, die durch die Spitze des Kegels und durch die optische Axe gelegt wird. Denkt man zum Beispiel diese Axe horizontal gerichtet und den leuchtenden Punkt irgendwo gerade über ihr befindlich, so kann man nach den seither vorliegenden trigonometrischen Formeln Strahlen nicht verfolgen, welche von ihm aus entweder auf die rechte oder auf die linke Hälfte der Oeffnungsfläche des Apparates treffen, sondern allein diejenigen, deren Auffallspunkte genau in der Scheidungslinie beider Hälften sich befinden. Diese letzteren mussten bisher als die ausgewählten Repräsentanten des ganzen Lichtkegels gelten; schwerlich ist jemals (vor der ganz neuen Anwendung, welche die hernach mitzutheilenden Rechnungsvorschriften im Steinheil'schen Institute gefunden haben) der genaue Weg eines einzigen andern Strahls auch nur durch eine einfache Linse mittelst des Calculs verfolgt worden. Zwar genügt das Fraunhofer'sche Fernrohr-Objektiv einer Bedingung der grössten Leistung auch in Bezug auf die Strahlen ausserhalb der Axen-Ebene (wie ich an anderem Orte nachgewiesen habe), aber da es derselben Gleichung auch schon genügen musste, um jene repräsentativen Strahlen in der Axenebene möglichst gut zur Vereinigung zu bringen, und da nach Berücksichtigung dieser letzteren an dem einfachen Doppelobjectiv überhaupt nichts mehr disponibel blieb, so konnte es gefunden werden, ohne dass eine Erweiterung der Rechnung auf den Raum nothwendiges Erforderniss war. Selbst Bessel's meisterhafte theoretische Diskussion über die dioptrische Wirkung des Heliometer-Objektivs der Königsberger Sternwarte hat die Strahlen ausserhalb der Axenebene bei Seite gelassen[1]; andrerseits geht Gauss bei der Ableitung seiner Näherungsformeln (in den „dioptrischen Untersuchungen“) zwar aus von Gleichungen, welche Allgemeinheit mit Strenge verbinden, aber er giebt keine Anweisung für die Berechnung dreier in denselben auftreten-

1) Astronomische Untersuchungen, Bd. I, Abh. II, §. 18.

den Winkel (Θ, λ, λ'), weil es für das Ziel seiner Untersuchung und unter den Voraussetzungen derselben genügte, zu constatiren, dass der Cosinus des ersten und die Sinus der beiden andern von der Einheit nur um kleine Grössen zweiter Ordnung verschieden seien. In ähnlicher Weise waren auch in meiner (Astronom. Nachrichten Nr. 1027 ff. veröffentlichten) Untersuchung, welche für den allgemeinsten Fall die Entwicklung der Glieder von der Ordnung der sogenannten sphärischen Abweichung zum Gegenstand hat, nur Näherungswerthe für die trigonometrischen Functionen jener Winkel zu Grunde zu legen. Es versteht sich, und ist auch von Bessel am oben angeführten Orte ausgesprochen worden, dass die Entwerfung strenger Formeln, durch welche für jede Lage des auffallenden Strahles die entsprechende des gebrochenen bestimmt wird, keine wirkliche mathematische Schwierigkeit bietet; man erhält aber bei einer nicht ganz angemessenen Wahl der Grössen, mit Hilfe deren diese Lage bestimmt wird, die Rechnungsvorschriften leicht in einer Gestalt, die ganz geeignet ist, von ihrer wirklichen Benützung selbst einen ausdauernden Rechner zurückzuschrecken, (um so mehr, da die Verfolgung einzelner Strahlen im Raume überhaupt nur angezeigt ist, wenn man über eine etwas grössere Anzahl von Brechungen verfügt) — z. B. in solcher Form, dass bei jeder einzelnen Ablenkung, die der Strahl erleidet, entweder ein unbequemes sphärisches Dreieck aufgelöst, oder durch successive Näherung vorgegangen werden muss. Nachdem indessen die steigenden Anforderungen an Oeffnung und Gesichtsfeld, namentlich bei Photographen-Objektiven, nicht mehr erlauben, die Strahlen ausser der Axenebene zu ignoriren, so hoffe ich, einigen denkenden Optikern einen Dienst zu leisten durch die Mittheilung der folgenden Rechnungsvorschriften, welche die Probe der Anwendbarkeit bereits vielfach bestanden haben. Den nächsten Anlass, sie definitiv zusammenzustellen, hat mir der Wunsch des Hrn. Ministerialraths Dr. Steinheil gegeben. Für die Zwecke des von Ihm begründeten optischen Instituts hat seit einem Jahre Dr. Ad. Steinheil, der Sohn, meine Formeln zum öftern benützt: er findet nach denselben die Mühe der Berechnung Eines Strahles ausserhalb der Axen-Ebene nur sehr wenig grösser als diejenige, unter analoger Vorsicht gegen Irrungen des Calculs zwei Strahlen in der Axen-Ebene zu verfolgen. Hiernach scheinen die Formeln das Maximum der erreichbaren Bequemlichkeit sehr nahe darzubieten; denn nicht nur erfordert nach der Natur der Sache die Bestimmung der Lage im Raume überall zwei Projektionen, wo in der Ebene Eine genügt, sondern der allgemeine Fall ist auch deshalb verwickelter, weil auf jede einzelne Grösse eine grössere Anzahl von einander unabhängiger Variabeln Einfluss erhält.

Handelt es sich um die Berechnung eines Apparates, der ausgeführt werden soll, so wird man der Sicherheit halber genöthigt sein, für jeden Strahl, der theoretisch verfolgt wird, entweder nach den Gleichungen, welche zur Bestimmung der gesuchten Stücke aufgestellt worden sind und ausreichen, die ganze Rechnung zweimal unabhängig zu führen, oder neben diesen Gleichungen noch besondere Controlformeln zur Prüfung der erhaltenen Zahlenwerthe zu benützen. Die letztere Art der Verification (natürlich unter der Voraussetzung, dass die Controlen erschöpfend für die einzelnen Acte der Rechnung sind) verdient unter den beiden Wegen den Vorzug, falls Ein Rechner die ganze Arbeit zu machen hat, weil ein solcher bekanntlich leicht an gleicher Stelle wieder in den gleichen Fehler verfällt; ich habe deshalb bei der Entwerfung der nachstehenden Vorschriften ein besonderes Augenmerk auf die Herstellung geeigneter Probeformeln gerichtet. Das Princip, nach welchem man erkennt, welche Theile einer numerischen Rechnung durch die richtige Erfüllung einer bestimmten Control-Gleichung verificirt sind und welche nicht, ist einfach und fliesst aus der Natur der Sache. Wenn zur Berechnung einer Anzahl von Unbekannten eine gleich grosse Anzahl von Gleichungen einmal aufgestellt ist, so ist dadurch die Art der Abhängigkeit jener gesuchten Grössen von den gegebenen mathematisch vollkommen fest gelegt: dieselben Variabeln (oder einige von ihnen) können nicht noch einer weiteren überzähligen Bedingung sich unterwerfen, welche nicht aus ihrer bereits fixirten mathematischen Functionsform von selbst folgt. Jede sich darbietende überzählige Gleichung (Controlformel) für die Unbekannten muss also aus einigen der Gleichungen, die schon zur Bestimmung dieser Unbekannten benützt sind (oder aus ihnen allen zusammen), als eine identische Folgerung sich ableiten lassen, auch wenn vielleicht die Betrachtung, durch welche wir zunächst auf sie gestossen sind, ursprünglich eine andere Richtung eingeschlagen hätte. Man wird also auch in dem letzteren Falle, (der ziemlich häufig bei Grössen sich ergiebt, die für unsere Anschauung eine Bedeutung darbieten) nur zu untersuchen haben, welche unter den Bestimmungsgleichungen der Unbekannten nothwendig und ausreichend sind, um die überzählige (d. i. Control-) Gleichung aus ihnen abzuleiten: es ist klar, dass das richtige numerische Eintreffen der Controle nur eine Probe für die richtige Erfüllung derjenigen Bestimmungsgleichungen abgiebt, aus welchen sie selbst mathematisch hervorgeht, und nicht auch für die übrigen, die keinen Antheil an ihr haben.

Der geradlinige Strahl, welcher an einer der sphärischen Flächen eines centrirten optischen Apparates gebrochen wird, möge diese Fläche treffen im Punkte P. Durch den Mittelpunkt M der Kugelfläche denken wir uns senkrecht zur optischen Axe eine Ebene gelegt: der auffallende Strahl (nöthigenfalls vor- oder rückwärts verlängert) durchdringe dieselbe in Q, der gebrochene aber in Q′ [2]). Der eine wie der andere wird nach seiner Lage im Raume vollkommen bestimmt durch je vier Stücke, die sehr verschieden gewählt werden können; wir nehmen dafür zwei Coordinaten, welche in der durch M gelegten Transversal-Ebene die Lage des Punktes Q (oder resp. Q′) fixiren, und zwei Winkel, durch welche die Richtung definirt wird, unter der der Strahl (oder seine virtuelle Fortsetzung) den Punkt Q (resp. Q′) passirt. Es ist die Aufgabe, aus den gegebenen vier Stücken für den auffallenden Strahl zu berechnen die vier ähnlichen für den gebrochenen, — natürlich unter Voraussetzung der Kenntniss des Brechungsverhältnisses und der Krümmung der brechenden Sphäre. Weil ferner, wenn mehrere Brechungen auf einander folgen, bei dem Uebergang von der Einen zur andern jedesmal der Punkt M ein anderer wird, und also die durch ihn gelegte Transversal-Ebene sich zugleich verrückt, so muss auch der Zusammenhang hergestellt werden zwischen den Coordinaten, welche sich auf die Eine beziehen, und denjenigen in der nächstfolgenden.

Die Ebene des Dreiecks PQM enthält den auffallenden Strahl PQ und das Einfallsloth PM: folglich nach dem Gesetze der Brechung auch den gebrochenen Strahl PQ′. Oder mit andern Worten: die beiden Ebenen PQM und PQ′M coincidiren. Folglich haben sie auch eine gemeinschaftliche Durchschnittslinie mit der durch M gelegten Tranversal-Ebene, d. h. die drei Punkte Q, Q′, M liegen in einer Geraden, oder die beiden Radienvectoren, welche von M aus nach Q

2) Die Benennungen werden hier, soweit es thunlich ist, conform gewählt denjenigen bei Gauss.

und Q′ gezogen werden, haben einerlei Richtung[3]. Bedient man sich also zur Bestimmung der Lage von Q und Q′ innerhalb unserer Transversalebene der Polarcoordinaten, nehmlich der eben gedachten Radienvectoren MQ = u, MQ′ = u′, und der von diesen mit einer festen Richtung gebildeten Winkel, so hat man den Vortheil, dass die anguläre Coordinate durch die Brechung sich nicht verändert.

Die feste Richtung, von der aus die Polarwinkel zählen, ist an sich ganz willkührlich, sie soll aber in allen nach einander zur Betrachtung kommenden Transversal-Ebenen dieselbe sein, d. h. in diesen verschiedenen Ebenen bezeichnet durch unter sich parallele und von der optischen Axe aus in gleichem Sinne Einseitig gezogene Gerade. Der Bequemlichkeit des Ausdrucks halber mag sie für uns die Richtung von M aus nach oben heissen: (wobei die Vorstellung horizontaler Lage der optischen Axe zu Grunde liegt); — von ihr an werden die Winkel, welche verschiedene aus M gezogene (und nie rückwärts über M verlängerte) Radienvectoren mit ihr einschliessen, alle in Einem festgesetzten Sinne („rechts herum" sei er genannt) durchgezählt von 0 bis 360 Grad[4]. In dieser Weise gerechnet

---

3) Im Falle die sphärische Fläche eine spiegelnde statt einer brechenden wäre, würden beide Richtungen einander diametral entgegengesetzt sein: von diesem besondern und zugleich besonders einfachen Fall werde ich im Folgenden nicht weiter reden.

4) Es ist übrigens erlaubt, von dem so gerechneten Winkel 360° abzuziehen, also z. B. statt der Winkel im 3. und 4. Quadranten negative stumpfe oder spitze Winkel einzuführen, — überhaupt beliebige Vielfache der ganzen Kreisperipherie zu addiren oder zu subtrahiren, — weil dadurch weder die durch die Winkel bestimmten Richtungen noch die goniometrischen Functionen der ganzen Winkel sich ändern, halbirte oder sonst getheilte Winkel aber in unseren Ausdrücken nicht auftreten.

bezeichne U den gemeinschaftlichen Winkel unserer beiden Radienvectoren MQ, MQ′ mit der Richtung nach oben, während u, u′ die (nothwendig positiven) Längen dieser Radienvectoren vorstellen.

Durch diese Polarcoordinaten u, U und resp. u′, U werden die Durchschnittspunkte Q, Q′ des Strahles, vor und nach der Brechung, mit der festen Transversalebene fixirt. Die Winkel, welche wir noch gebrauchen zur Bestimmung der Richtung, aus welcher er auf jene Punkte gelangt, kann man, in der Sprache der sphärischen Astronomie, kurzweg bezeichnen als die scheinbare Distanz (w) desjenigen Punktes am Himmel, auf welchen der rückwärts verlängerte Strahl weist, von der Mitte des Gesichtsfeldes, und als den Positionswinkel (p) eben dieses Punktes am Himmel, genommen an der Mitte des Gesichtsfeldes und von der Richtung nach oben aus. Ohne diese technische Ausdrucksweise definirt man dieselben Grössen wie folgt: Denkt man sich von Q aus nach derjenigen Seite zu, von welcher her ursprünglich das Licht kommt, eine Parallele mit der optischen Axe gezogen, so wird dieselbe mit dem auf der nehmlichen Seite unserer Transversal-Ebene liegenden Stück des auffallenden Strahles (oder seiner Verlängerung) einen Winkel bilden, den wir w nennen (und welcher klein ist in den zunächst wichtigen Fällen); projecirt man ferner das eben bezeichnete Stück unseres Strahles in unsere durch M gelegte Transversalebene, so schliesst seine (von Q aus einseitig fortgehende) Projection mit der aus Q nach o b e n führenden Richtung einen Winkel p ein, welcher von der letzteren Richtung aus genau so, wie vorhin U, nehmlich rechts herum bis zu 360° gezählt werden soll[5]). Für den ge-

---

5) Man kann auch w, p analog dem u, U definiren, nehmlich w als den a n g u l ä r e n Werth des Radiusvectors, p als den Polarwinkel

brochenen Strahl treten zwei analoge Winkel w', p' (deren Scheitel in Q' liegen) an die Stelle von w, p.

Um den Uebergang von den Grössen u, w, p zu den durch die Brechung veränderten Werthen u', w', p' in einer für die Zahlenrechnung angemessenen Weise herzustellen, ist noch die Einführung von einigen Hilfswinkeln nöthig. Wir bezeichnen mit λ den (inneren) Winkel bei Q im Dreieck PQM, mit λ' den analogen bei Q' im Dreiecke PQ'M, ferner mit S den Winkel bei P im ersteren Dreiecke, d. h. den Einfallswinkel des Strahls, mit S' den ähnlichen im zweiten Dreiecke, oder den Brechungswinkel.

Das Verhältniss der Sinus der beiden letzteren Winkel ist nach dem Brechungsgesetz für Strahlen irgend einer bestimmten Farbe eine von der Natur der beiden Medien abhängige Constante; wir setzen, nach der üblichen Bezeichnung

$$\text{Sin S} : \text{Sin S}' = \frac{1}{n} : \frac{1}{n'}$$

Der Radius der brechenden Kugelfläche, ausgedrückt in derselben Längeneinheit, deren man sich für die Radienvectoren u, u' bedient, sei mit R bezeichnet. Wir nehmen hier diese Grösse immer als positiv an, und halten die beiden Fälle, in welchen die Sphäre ihre Convexität oder Concavität gegen diejenige Seite wendet, von welcher her ursprünglich das Licht kommt, in den Formeln durch Doppelzeichen auseinander. Ueberall bezieht sich im Folgenden, wo ein solches Doppelzeichen steht, das obere auf den ersten, das untere auf den zweiten der so eben bezeichneten Fälle. Man könnte beide durch ein und dieselbe Formel umfassen, wenn man an R selbst (wie es

---

des Punktes, in welchem der Strahl eine auf der Axe senkrechte Ebene trifft, welche auf derjenigen Seite, von der das Licht kommt, in unendlicher Entfernung gedacht wird.

gewöhnlich geschieht) ein Vorzeichen unterscheiden und zugleich die Definition der Winkel λ, λ' etwas anders einrichten wollte, als wir sie aufgestellt haben: für den Gebrauch in numerischer Rechnung, und besonders für die mit derselben zu verbindende geometrische Vorstellung scheint mir aber die hier getroffene Anordnung etwas bequemer.

Zu den gegebenen Grössen w, p, U wird zuerst λ berechnet. Wir denken uns um den Punkt Q unserer Transversalebene, und zwar auf derjenigen Seite der letzteren, von welcher her ursprünglich das Licht kommt, mit beliebigem Radius eine Halbkugel beschrieben: auf der Oberfläche derselben werde momentan mit α der Punkt bezeichnet, in welchem sie von einer durch Q parallel zur optischen Axe gelegten Geraden getroffen wird: mit σ der Punkt, in welchem sie von Strahl PQ (oder dessen Verlängerung) durchdrungen wird: mit μ (in unserer Transversalebene gelegen) der Punkt, in welchem der über Q hinaus verlängerte Radiusvector MQ sie trifft. Im sphärischen Dreiecke $\alpha\sigma\mu$ ist Seite $\alpha\mu = 90^0$, Seite $\alpha\sigma$ = w; der Winkel bei α hat einen der Werthe U—p oder p—U; endlich ist Seite $\mu\sigma$ gleich dem äusseren oder dem inneren Winkel bei Q im ebenen Dreiecke PQM, also gleich 180^0-λ oder λ, je nachdem der Punkt P auf derselben Seite der Transversalebene liegt, auf welcher unsere Halbkugel gedacht wird, oder auf der entgegengesetzten, d. h. je nachdem die Convexität der brechenden Fläche nach der Seite gerichtet ist, von welcher her ursprünglich das Licht kommt, oder nach der andern. Man erhält daher, mit der oben angegebenen Bedeutung des Doppelzeichens:

$$1) \qquad \cos \lambda = \mp \operatorname{Sin} w \cos (p-U)$$

Die Bestimmung von λ durch seinen cosinus ist frei von Zweideutigkeit, weil der Winkel seiner Definition nach zwischen 0 und 180^0 liegen muss. Zugleich ist sie günstig für die numerische Rechnung, weil in den zunächst wichtigen Fällen λ von 90^0 wenig verschieden ist.

Man kennt jetzt im ebenen Dreieck PQM die Seiten PM = R, QM = U und den Winkel λ bei Q; man kann also rechnen den Winkel bei P, d. h. den Einfallswinkel S des Strahles:

$$2)\qquad \mathrm{Sin}\ S = \frac{u\ \mathrm{Sin}\ \lambda}{R}$$

und mit ihm sogleich den analogen Winkel im Dreiecke PQ'M, nehmlich den Brechungswinkel:

$$3)\qquad \mathrm{Sin}\ S' = \frac{n}{n'}\ \mathrm{Sin}\ S$$

Im letzteren Dreiecke ist nun auch der Winkel bei Q', oder λ', bekannt, weil der dritte Winkel, bei M, den beiden Dreiecken gemeinschaftlich und also $\lambda' + S' = \lambda + S$ ist:

$$4)\qquad \lambda' = \lambda + (S - S')$$

Ferner findet man die Seite MQ' = u' desselben Dreiecks:

$$5)\qquad u' = \frac{R\ \mathrm{Sin}\ S'}{\mathrm{Sin}\ \lambda'} = u\,\frac{n}{n'}\,\frac{\mathrm{Sin}\ \lambda}{\mathrm{Sin}\ \lambda'}$$

Rechnet man diesen Werth nach den beiden angesetzten Formeln, die ihn genau übereinstimmend ergeben müssen, so controlirt sich zugleich die richtige Bildung von Sin S und Sin S' gemäss den Gleich. 2) und 3). Der Quotient $\frac{\mathrm{Sin}\ \lambda}{\mathrm{Sin}\ \lambda'}$ wird ohnediess noch gebraucht.

Der Punkt Q' ist jetzt durch seine Polarcoordinaten u' U bestimmt. Es fehlen noch für den gebrochenen Strahl die Grössen w', p'. Die Eine der nöthigen Gleichungen ergiebt sich ohne Weiteres aus 1), wenn man die Zeichen λ, w, p mit Accenten versieht (und U beibehält); weil natürlich für den gebrochenen Strahl ein sphärisches Dreieck völlig analoger Bedeutung mit dem vorhin betrachteten existirt. Die zweite Gleichung erhält man am direktesten durch die Bemerkung, dass (nach der vorhin angewandten Bezeichnung) der Winkel bei μ im ersteren Dreieck übereinstimmen muss mit dem entsprechenden im zweiten. Denn die Ebene des grössten Kreises $\sigma\mu$ geht durch den auffallenden Strahl und durch den Mittelpunkt M: sie bleibt also nach dem Brechungsgesetz unverändert, wenn man den gebrochenen Strahl statt des auffallenden nimmt; die Ebene des grössten Kreises $\alpha\mu$ aber (welche mit jener den Winkel μ einschliesst) enthält die beiden Geraden $Q\mu$, die über Q verlängert die Axe in M schneidet, und $Q\alpha$ die der Axe parallel ist: sie enthält also selbst die Axe, oder sie ist die durch die Axe und durch den Radiusvector MQ gelegte Ebene. Da nun MQ′ und MQ in der Richtung auf einander fallen, so bleibt auch diese Ebene unverändert, wenn man Q′ an die Stelle von Q setzt, — und die aufgestellte Behauptung ist hiemit evident.

Der Ausdruck für Sin μ, wie er aus dem ersten sphärischen Dreiecke sich ergiebt, nehmlich $\frac{\text{Sin w Sin (p-U)}}{\text{Sin } \lambda}$, muss sonach gleich sein dem ähnlichen, welchen das zweite Dreieck liefert, und in welchem w′, p′, λ' statt w, p, λ auftreten. Man hat daher jetzt zur Berechung von w′, p′ die zwei Gleichungen:

$$6) \qquad \text{Sin w}' \text{ Sin}(\text{p}'-\text{U}) = \frac{\text{Sin } \lambda'}{\text{Sin } \lambda} \text{ Sin w Sin}(\text{p}-\text{U})$$

$$7) \qquad \text{Sin w}' \cos(\text{p}'-\text{U}) = \mp \cos \lambda'$$

Weil w′ einen spitzigen Winkel vorstellt, dessen Sinus nothwendig positiv ist, so kennt man die Vorzeichen von Sin und cos (p′—U), kann also in keinem Zweifel sein wegen des Quadranten. Was w′ angeht, so ist zu bemerken, dass der Winkel selbst in der weiteren Rechnung nicht gebraucht wird, sondern neben dem Sinus nur noch die Tangente; diese letztere kann man auch d i r e c t berechnen. Wenn man nehmlich aus den beiden sphärischen Dreiecken statt des Sin μ den cos μ bestimmt, so findet man ihn aus dem ersten $= \frac{\cos w}{\sin \lambda}$ aus dem zweiten $= \frac{\cos w'}{\sin \lambda'}$; man hat also auch

$$\cos w' = \frac{\sin \lambda'}{\sin \lambda} \cos w$$

Diese Gleichung würde vor Nr. 6 den Vorzug grösserer Einfachheit haben, sie liefert aber für die numerische Rechnung in den praktisch wichtigsten Fällen, in welchen w und w′ klein sind, eine ungünstigere Bestimmung des Winkels. Verbindet man sie dagegen mit 6, so erhält man noch

$$8) \qquad \operatorname{tg} w' = \operatorname{tg} w \frac{\sin (p-U)}{\sin (p'-U)}$$

so dass der Rechner die Wahl hat, den Logarithmus der Tangente (welcher beim Uebergang zur folgenden Brechung jedenfalls gebraucht wird) entweder zum vorher gefundenen des Sinus aus der Tafel zu nehmen, oder ihn selbständig aus Zahlen zu bilden, die bereits vorliegen. Für die Controle der Rechnung hätte übrigens die Uebereinstimmung der beiderlei Werthe wenig Gewicht, weil die Gl. 8 aus der ohnedies benützten Gl. 6 direkt mit Hilfe der Gl. für cos w′ hervorgeht, diese letztere aber (in der nur Grössen vorkommen die nahe $= 1$ sind) durchaus kein empfindliches Kriterium abgiebt. Ein ungleich besseres liefert die folgende Gleichung:

$$\mathrm{I}) \qquad \pm \frac{\sin (S-S')}{\sin (p-p')} = \frac{\sin \lambda \sin w'}{\sin (p-U)} = \frac{\sin \lambda' \sin w}{\sin (p'-U)}$$

vorausgesetzt, dass man nicht bloss die Zahlenwerthe der beiden (nach Gl. 6 identischen) letzten Ausdrücke, sondern auch den des erstern dabei zuzieht. Man überzeugt sich von ihrer Richtigkeit, indem man links Zähler und Nenner mit Sin w Sin w′ multiplicirt, im Zähler gemäss Gl. 4 $\lambda'-\lambda$ statt $S-S'$ setzt, im Nenner aber $\sin (p-p') = \sin[(p-U)-(p'-U)]$ auflöst, und für die einzelnen Produkte

19*

Sin w cos (p—U), Sin w′ cos (p′—U), Sin w′ Sin (p′—U) nach den Gleichungen 1), 7), 6), ihre Werthe setzt. Hieraus erkennt man zugleich, dass das richtige Eintreffen der Gleichung I, (vorausgesetzt, dass der substituirte Zahlenwerth Sin (S—S′) mit Sin (λ'—λ) übereinstimmt) als eine blosse Consequenz aus den Gleichungen 1), 6), 7) sich ergiebt und nichts als diese controlirt. Andrerseits sind (unter Voraussetzung, dass die Constanten R und $\frac{n}{n'}$ nicht fehlerhaft sind) die Werthe von Sin S und Sin S′ selbst zugleich mit u′ durch die doppelte Berechnung dieser letzteren Grösse nach Gl. 5 geprüft: es wäre aber noch möglich, dass entweder S oder S′ zum richtigen Sinus falsch aufgeschlagen, und dadurch, oder durch ein Versehen in der Bildung ihrer Differenz selbst, S—S′ und in Folge dessen auch λ' fehlerhaft geworden wäre, ohne dass sich dieser Irrthum durch die bisherigen Controlen verriethe[6]). Eine weitere Controle für die angedeuteten Uebergänge muss desshalb erwünscht sein; ich halte die nachstehende für die bequemste. Man hat

$$\frac{\operatorname{Sin} S}{\operatorname{Sin} S'} - \frac{\operatorname{Sin} S'}{\operatorname{Sin} S} = \frac{n'}{n} - \frac{n}{n'}$$

Wenn also gesetzt wird

ad II) $$\frac{n}{n'} = \operatorname{tg} \omega$$

so ergiebt sich

$$\frac{(\operatorname{Sin} S)^2 - (\operatorname{Sin} S')^2}{\operatorname{Sin} S \ \operatorname{Sin} S'} = \operatorname{cotg} \omega - \operatorname{tg} \omega,$$

das ist

II) $$\frac{\operatorname{Sin} (S-S') \ \operatorname{Sin} (S+S')}{\operatorname{Sin} S \ \operatorname{Sin} S'} = 2 \operatorname{cotg} 2\omega$$

---

6) Wäre S—S′ noch richtig und erst λ' selbst fehlerhaft, so würde die Probe I. den Fehler anzeigen. Ebenso auch, wenn zu richtigem cos λ und Sin λ ein falsches λ wäre aufgeschrieben worden, dessen Fehler sich auf λ' mit übertragen hätte.

Die Grösse zur Rechten ist constant für alle Strahlen gleicher Farbe, welche zwischen denselben beiden Medien gebrochen werden. Hat man die Rechnung für mehrere solche Strahlen gleichzeitig zu führen, so ist es nicht nöthig, die Constante wirklich zu bilden, sondern man hat nur zuzusehen, ob die Grösse links für diese verschiedenen Strahlen einerlei Werth annimmt. Wer selten Fehler begeht und deshalb die Gefahr, eventuell einen grössern Theil des Calculs wiederholen zu müssen, nicht hoch anschlägt, kann überhaupt das Aufschlagen von ω und $\operatorname{cotg} 2\omega$ ersparen, so ferne er mit dem gewöhnlichen Falle zu thun hat, in welchem der Strahl an zwei auf einander folgenden Flächen übertritt aus einem Medium A in B und aus diesem wieder in A, z. B. aus Luft in eine Glaslinse und aus dieser direct wieder in Luft. In diesem Falle ist nehmlich der Werth von $2 \operatorname{cotg} 2\omega = \frac{n'}{n} - \frac{n}{n'}$ an den zwei aufeinander folgenden Brechungen der entgegengesetzte, so dass es genügt, sich zu überzeugen, ob auch der Bruch zur Linken in Gl. II. entgegengesetzte numerische Werthe annimmt.

Andrerseits könnte man auch, wenn die Constante $2 \operatorname{cotg} 2\omega$ berechnet ist, dafür das Aufschlagen von $\operatorname{Sin}(S-S')$ für die Gleichungen I. und II. ersparen, indem man den Ausdruck dieser Grösse aus der Gl. II. in I. substituiren und so die beiden Controlen in Eine verschmelzen würde. Indessen werden die meisten Rechner vorziehen, ihre Verificationen schon nach den kürzeren Abschnitten evident zu halten [7].

Wenn es in besonderen Fällen ein Interesse hat (etwa

7) In keinem Falle kann die Gleichung II. die Prüfung entbehrlich machen, welche man für Sin S aus der doppelten Berechnung von u' (Gl. 5.) erhält: denn jene controlirt ihrer Entstehung nach den Sin S überhaupt nicht.

zur Bestimmung der Oeffnung irgend einer brechenden Fläche) den (spitzen) Winkel Θ zu kennen, welchen das Einfallsloth PM mit der Axe einschliesst, — der übrigens nach dem hier vorgeschlagenen Rechnungsgange sonst nicht gebraucht wird, — so findet man ihn wohl am bequemsten durch die Betrachtung, dass die Distanz des Punktes P von unserer durch M gelegten Transversal-Ebene gemessen wird einerseits durch R cos Θ, andererseits auch durch $\widehat{PQ} \cdot \cos w$. Es ist also $\cos \Theta = \frac{\widehat{PQ}}{R} \cos w$. Setzt man hier statt des Verhältnisses $\frac{\widehat{PQ}}{R}$ zweier Seiten im Dreiecke PMQ das Verhältniss der Sinus ihrer gegenüberliegenden Winkel, so ergiebt sich

$$\cos \Theta = \frac{\operatorname{Sin}(\lambda + S)}{\operatorname{Sin} \lambda} \cos w = \frac{\operatorname{Sin}(\lambda' + S')}{\operatorname{Sin} \lambda'} \cos w'$$

Die Identität der beiden angesetzten Ausdrücke (eine nothwendige Folge des Umstandes, dass die Normale PM für den gebrochenen Strahl dieselbe Bedeutung hat, wie für den auffallenden) lässt sich auch direct erweisen aus Gl. 4), verbunden mit derjenigen, welche schon oben zur Ableitung von Gl. 8) gedient hat. — Die Bestimmung des kleinen Winkels Θ durch seinen cosinus ist zwar etwas ungünstig für die numerische Präcision, man wird aber nicht leicht in den Fall kommen, ihn genau kennen zu müssen, wesshalb ich es unterlasse, hier, wo er weiter nicht vorkommt, eine der minder eleganten Formeln aufzuführen, die zu seiner schärferen Berechnung dienen könnten.

Die bisher aufgestellten Gleichungen enthalten Alles, was auf die Wirkung der einzelnen brechenden Fläche Bezug hat. Trifft nun der bereits gebrochene Strahl auf eine neue solche Fläche, so haben für den Vorgang an dieser letzteren unsere w', p' dieselbe Bedeutung, welche Anfangs den w und p zukam. Bezeichnen wir also durch Buchstaben mit unten angefügten Indices 1, 2, . . . die Grössen, welche für die zweite, dritte etc. Brechung die nehmliche Rolle spielen, wie die gleichnamigen ohne Index für die erste, so wird man haben

$$9) \quad \begin{aligned} w_1 &= w' \\ p_1 &= p' \end{aligned}$$

(dazu auch $n_1 = n'$). Hingegen sind u_1, U_1 nicht identisch mit u' und $U' = U$, weil diese letztern Coordinaten noch zählen in der Transversalebene, welche durch den Mittelpunkt M der ersten brechenden Sphäre gelegt ward, und welcher Q' sowie Q angehört, — während nunmehr der Durchschnittspunkt Q_1 des einmal gebrochenen Strahles mit der Transversalebene des Mittelpunktes M_1 der zweiten brechenden Kugel in Betracht kommt. Die Distanz der letzteren Ebene von der ersten, oder des Punktes M_1 von M, (natürlich ausgedrückt in gleichem Maasse wie R und wie die u, u') werde hier mit D bezeichnet: positiv im Falle M auf derjenigen Seite von M_1 liegt, von welcher her ursprünglich die Strahlen kommen, und negativ im entgegengesetzten. Will man statt ihrer die (in der Axe gemessene) Dicke d der zwischen den beiden brechenden Flächen gelegenen Schicht einführen, so hat man

$$D = d \mp R \pm R_1$$

wo vor jedem einzelnen der Halbmesser R, R_1 das obere oder untere Zeichen anzuwenden ist (je nach Lage der Fläche zu welcher er gehört) conform unserer allgemeinen Regel.

Die bequemste Form für die Berechnung der Grössen u_1 U_1 erhält man am directesten auf die Art, dass man sich den Punkt Q' und das ganze zwischen ihm und Q_1 liegende Stück des einmal gebrochenen Strahles der Axe parallel projicirt denkt in die neue durch M_1 gelegte

Transversalebene. Die Länge der Projection dieses Stückes ist (abgesehen vom Vorzeichen) D tg w'; wenn man also innerhalb der eben gedachten Ebene Abscissen dieser Länge parallel und Ordinaten senkrecht auf ihr rechnet, so ist auch D tg w' der Unterschied der Abscissen beider Endpunkte unseres Stückes, während ihre beiden Ordinaten gleich sind. Aus dieser Betrachtung erhält man die Gleichungen:

$$10) \left\{ \begin{array}{l} u_1 \operatorname{Sin}(p'-U_1) = u' \operatorname{Sin}(p'-U) \\ u_1 \cos(p'-U_1) = u' \cos(p'-U) - D \operatorname{tg} w' \end{array} \right.$$

zur Bestimmung von u_1 und U_1. (Weil erstere Grösse positiv sein muss, ist der Quadrant von $p'-U_1$ fest gelegt.) Zur Controle kann man die aus beiden abgeleitete Formel benützen:

$$\text{III.} \quad \frac{D \operatorname{tg} w'}{\operatorname{Sin}(U-U_1)} = \frac{u_1}{\operatorname{Sin}(p'-U)} = \frac{u'}{\operatorname{Sin}(p'-U_1)}$$

Sind hiernach u_1 U_1 gefunden, und also w_1, p_1, u_1, U_1 nunmehr bekannt, so wiederholen sich in Bezug auf die zweite Brechung alle Rechnungen, welche in Bezug auf die erste nach den Gleichungen 1) bis 7) vorzunehmen waren: man findet so der Reihe nach Grössen λ_1, S_1, S'_1 (mit Hilfe von $n_1 = n'$ und $n'_1 = n_2$), λ'_1, u'_1, $w'_1 = w_2$, $p'_1 = p_2$, und wird ganz in derselben Weise auch noch weitere Brechungen verfolgen, wenn solche vorkommen. Zuletzt wird es sich dann darum handeln, zu untersuchen, wo der definitiv gebrochene Strahl die Ebene durchdringt, in welcher das Bild betrachtet werden soll. Zu dem Ende kommen wieder die Formeln 10) in Anwendung; wenn nehmlich in denselben unter w', p' die letzten Werthe dieser Grössen, unter u', U die Polarcoordinaten des Punktes verstanden werden, in welchem er, in seiner schliesslichen Lage, die Transversalebene des letzten Mittelpunktes durchdringt, und wenn jetzt D die Distanz der Bildebene von diesem letzten Mittelpunkte bezeichnet (positiv im Falle die Strahlen bei ihrer ursprünglichen Richtung später auf die Bildebene als auf die Mittelpunktsebene treffen würden), so werden u_1 U_1 übergehen in die Polarcoordinaten des Punktes der Bildebene, den der austretende Strahl trifft, — und zwar, wie immer, der Radiusvector gerechnet von der Axe aus, und der Polarwinkel rechts herum gezählt aus der Richtung nach oben.

Auch dann sind die Gleichungen 10) anzuwenden, wenn in der ursprünglichen Lage des auffallenden Strahles neben w und p nicht direkt sein Durchschnittspunkt mit der Ebene des ersten Mittelpunktes gegeben wäre, sondern statt des letztern der Punkt, in welchem er durch irgend eine andere auf der Axe senkrechte Ebene passirt, etwa durch diejenige des Kreises, der die erste sphärische Fläche begrenzt, oder auch durch die Ebene eines anvisirten Objectes. Nennen wir v, V die Polarcoordinaten in einer solchen Ebene, $\triangle$ den Abstand der letzteren von der Ebene unseres ersten Mittelpunktes M, und rechnen wir letztere Grösse positiv in dem Falle, der in der Anwendung der gewöhnlichere sein wird, nehmlich von M aus nach der Seite, von welcher die Strahlen ursprünglich kommen, so spielen hier die gegebenen Grössen w, p, v, V, $\triangle$ und die gesuchten u, U der Reihe nach genau dieselben Rollen, wie die Grössen w′, p′, u′, U, D, u_1, U_1 in der vorigen Betrachtung; man wird also haben:

$$u \operatorname{Sin}(p-U) = v \operatorname{Sin}(p-V)$$
$$u \cos(p-U) = v \cos(p-V) - \triangle \operatorname{tg} w$$

und die Controle

$$\frac{\triangle \operatorname{tg} w}{\operatorname{Sin}(V-U)} = \frac{v}{\operatorname{Sin}(p-U)} = \frac{u}{\operatorname{Sin}(p-V)}$$

Bei dem wirklichen Gebrauche der Formeln wird der Rechner von selbst darauf aufmerksam sein, dass sehr viele der vorkommenden Grössen in ganz gleicher Weise in mehreren Gleichungen auftreten, wodurch die Arbeit bedeutend verringert wird. Wenn z. B. nach den letzten Gleichungen cos. und Sin (p—U) gefunden worden sind, so dient der cosinus direct wieder in Gl. 1), der Sinus in Gl. 6) und in 8); ebenso kommen die nach 6) und 7) berechneten Sin. und cos. von p′—U wieder vor in 10), der Sinus auch noch in 8); die Differenz S—S′ in Gl. 4) und ihr Sinus in den Controlgleichungen I. und II.; das Verhältniss $\frac{\text{Sin } \lambda}{\text{Sin } \lambda'}$ in 5), und sein reciproker Werth in 6), sowie auch in der Gl. für cos w′, und dergleichen mehr. —

Es giebt einen Ausnahmsfall, in welchem die von uns gewählte Art, die Lage des Strahles zu bestimmen, nicht anwendbar ist, nehmlich den Fall einer brechenden Planfläche. Hier würde die zugehörige Mittelpunktsebene ins Unendliche fallen, und damit den Dienst versagen. Dafür bietet sich von selbst die Aushilfe dar, hier unsere Transversalebene mit der brechenden Ebene coincidiren zu lassen, d. h. für u, U die Polarcoordinaten desjenigen Punktes zu wählen, in welchem die Planfläche vom Strahle getroffen wird. Sind dieselben nicht im Voraus gegeben, so werden sie, wenn noch keine Brechung vorausgegangen ist, nach den letzten Gleichungen, im andern Falle nach den Gleichungen 10) berechnet: natürlich muss jetzt für $\triangle$ oder D derjenige Werth genommen werden, welcher der Distanz von der vorher betrachteten Transversalebene bis an die brechende Ebene selbst entspricht. Durch die Brechung an dieser werden dann u, U beide nicht verändert, weil der Auffallspunkt auch dem gebrochenen Strahle angehört; man hat also hier u′ = u. Auch die übrigen Gleichungen der Brechung vereinfachen sich. Weil nehmlich das Einfallsloth der Axe parallel wird, so ist hier S = w und S′ = w′; man hat daher einfach

$$\text{Sin } w' = \frac{n}{n'} \text{Sin } w$$

und dazu $p' = p$

weil die Brechungsebene, welche der Strahl nicht verlässt, hier selbst durch die in seinem Auffallspunkte der Axe parallel gezogene Gerade geht. Es sind also die vier Bestimmungsstücke für die Lage des gebrochenen Strahles bekannt (w', $p' = p$, $u' = u$, U); hat man Anlass, seinen Weg noch weiter zu verfolgen, und zu dem Ende eine neue Transversalebene einzuführen, so dienen abermals die Gleichungen 10) in der Weise, dass der eine Endpunkt der Distanz D in der brechenden Planfläche selbst liegt.

Die vorstehenden Rechnungsvorschriften (welche natürlich auch den speciellen Fall eines in der Axenebene gelegenen Strahles mit umfassen) schliessen sich in ihrer Gestalt sehr nahe denjenigen an, welche für den eben gedachten besondern Fall im allgemeinen Gebrauch sind. Ich muss indessen zum Schlusse bemerken, dass ich für die eigentlich angemessene (d. h. der Natur der Aufgabe am besten entsprechende) Art, in oder ausser der Axenebene den Gang des Lichtes durch optische Apparate rechnerisch zu verfolgen, eine wesentlich andere halte, nach welcher man direkt nicht die ganzen Grössen sucht, welche die Lage eines Strahles nach beliebig viel Brechungen bestimmen, sondern nur ihre Abweichungen von denjenigen Werthen, die nach den Näherungsformeln (ersten Grades) stattfinden würden. Nach diesem Verfahren hat man nur mit kleinen Grössen zu agiren, die durch wenige Decimalen genau genug gefunden werden, weil sie unmittelbar Das repräsentiren, was uns im optischen Bilde als Fehler erscheint. Auch diese Behandlung der Aufgabe ist eleganter Ausdrücke fähig, welche in einer ganz analogen Beziehung zu denjenigen der früher von mir entwickelten Fehler dritter Ordnung (im allgemeinen Falle des Raumes) stehen, wie die „Gleichungen mit endlichen Differenzen" zu den Differentialformeln. Indessen entfernt sich das angedeutete Verfahren ziemlich stark von der rechnerischen Gewohnheit der Optiker, deren praktisches Bedürfniss ich bei der gegenwärtigen Publikation zunächst im Auge habe; ich verspare daher das Nähere für eine andere Gelegenheit.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1866

Band/Volume: 1866-2

Autor(en)/Author(s): Seidel Philipp Ludwig Ritter von

Artikel/Article: Trigonometrische Formeln für den allgemeinsten Fall der Brechung des Lichtes an centrirten sphärischen Flächen 263-283