Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band I. Jahrgang 1871.

München.
Akademische Buchdruckerei von F. Straub.
1871.

In Commission bei G. Franz.

Herr W. Beetz legt die Abhandlung des Herrn Wilhelm von Bezold vor:

„Die Theorie des Elektrophor's."

In einer kürzlich erschienenen Abhandlung[1]) habe ich eine Reihe von Versuchen veröffentlicht, aus welchen hervorgeht, dass die Theorie des Elektrophor's sich vollständig auf Grundlage ganz bekannter Erfahrungssätze aufbauen lässt, und dass es vollkommen überflüssig ist, für diesen Zweck besondere Hypothesen aufzustellen. Die Erklärung wurde jedoch dort nur in Worten gegeben, aber dabei bemerkt, dass sie sich leicht in streng mathematische Form bringen lasse. Diess soll in den folgenden Zeilen geschehen.

Ehe ich jedoch mit der mathematischen Entwickelung wirklich beginne, muss ich noch einmal an die Erfahrungssätze erinnern, welche als Grundlage dienen sollen. Diese sind:

Erstens: Die Fernwirkung elektrisirter Körper aufeinander wird durch Zwischenschieben eines vollkommenen und vollkommen unelektrischen Isolators nicht gestört.

Zweitens: Ein geladener Leiter entladet sich gegen einen benachbarten Leiter oder Nichtleiter, sobald eine hinreichend grosse elektrische Kraft gegen diesen Körper zu thätig ist. Findet die Entladung gegen einen Isolator statt, so wird nur ein Theil der vorhandenen Elektricität übergehen, und demnach ein der ursprünglichen Ladung gleichnamiger Rückstand bleiben.

---

1) Diese Ber.-Sitz. vom 2. Juli 1870.

Diese beiden Annahmen dürften wohl kaum auf Widerspruch stossen. Jedenfalls stimmt die aus ihnen abgeleitete Theorie des Elektrophor's in allen Punkten mit der Erfahrung überein, so dass eben die Versuche am Elektrophor wiederum als Bestätigung der Voraussetzungen dienen.

Um die Entwicklungen nicht unnöthig zu compliciren, sollen sie nur für den idealen Fall durchgeführt werden, wo Kuchen, Bodenplatte und Schild bei endlicher Dicke und endlichen Entfernungen von einander eine unendliche Ausdehnung besitzen. Die Fehler, welche durch diese Annahme bei einem Elektrophor mit einem Schilde vom Durchmesser R, und vom Abstande δ zwischen Schild und Bodenplatte begangen werden, sind nur von der Ordnung $\frac{\delta}{R}$. Man sieht hieraus, dass die unter dieser Voraussetzung aufgestellte Theorie als erste Annäherung vollkommen zulässig ist.

Die Entwicklung und das Verständniss dieser Theorie wird wesentlich erleichtert durch die Kenntniss einiger allgemeinen Sätze, welche für ein System von beliebig vielen unendlich grossen parallelen mit Elektricität bedeckten Ebenen gelten. Ich schicke diese Sätze deshalb hier voraus.

Wählt man eine auf den sämmtlichen Ebenen senkrechte Gerade als X Axe eines rechtwinkligen Coordinatensystemes, dessen Ursprung in einem beliebigen Punkte dieser Geraden liegen mag, so erhält man für die von den sämmtlichen Elektricitätsmengen herrührende Potentialfunction die Gleichung

$$V = fx$$

da wegen der unendlichen Ausdehnung der Flächen die Coordinaten y und z gar nicht in Betracht kommen.

Es geht demnach die bekannte für jeden Punkt ausserhalb der elektrisirten Flächen gültige Grundgleichung

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0$$

in die Form über

$$\frac{d^2V}{dx^2} = o.$$

Hieraus folgt

$$X = \frac{dV}{dx} = C \tag{1}$$

wenn X die Kraft bedeutet, welche auf die Einheit der positiven Electricität im Sinne der X Axe ausgeübt wird.

Die Constante C hat im Allgemeinen zwischen jedem Paare der betrachteten Ebenen und ausserhalb sämmtlicher Flächen verschiedene Werthe.

Aus der letzten Gleichung folgt:

$$V = Cx + K \tag{2}$$

Es ist demnach der Verlauf der Potentialfunction allenthalben linear, und da diese Function selbst ihrer Natur nach stetig ist, so wird der Gang derselben in einer durch die X Axe gelegten Ebene im Allgemeinen durch eine gebrochene Linie dargestellt, deren Ecken in den Flächen liegen.

Man kann nun bei einer der beiden äussersten Flächen zu zählen anfangen und dieselben der Reihe nach durch S_1 S_2 .... S_n bezeichnen. Dann wird man consequenter Weise die Werthe der Potentialfunction in diesen Flächen durch V_1 V_2 ... V_n und die Dichtigkeiten der Elektricität in denselben durch ϱ_1 ϱ_2 ... ϱ_n darstellen müssen. Der Werth, welchen die Potentialfunction V ausserhalb S_1 besitzt, soll V^0 heissen, jener zwischen S_1 und S_2 aber V' u. s. w. die Abstände der einzelnen Flächen von einander δ' δ'' .... δ^{n-1} und die Kräfte im Sinne der X Axe X^0 X' X'' ... X^n.

Verlegt man nun den Ursprung der Coordinaten nach S_1 so hat man die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} V' &= V_0 + X'x \\ V'' &= V_1 + X''(x-\delta') \\ \ldots & \quad \ldots\ldots\ldots \\ V^n &= V_n + X''(x-\delta' \ldots . - \delta^{n-1}) \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

und demnach auch

$$\begin{aligned} V_1 &= V_0 + X'\delta' \\ V_2 &= V_0 + X'\delta' + X''\delta'' \\ \ldots &\quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ V_n &= V_0 + X'\delta' + \ldots X^{n-1}\delta^{n-1} \end{aligned} \tag{4}$$

Ausserdem folgen aus dem bekannten Satze:

$$\frac{dV}{dn_{n=+0}} - \frac{dV}{dn_{n=-0}} = 4\pi\varrho,$$

wenn man unter ϱ die Dichtigkeit der Elektricität auf einer Fläche und unter dn das Element der Normalen auf dieselbe versteht, die Gleichungen[2]):

$$\begin{aligned} 4\pi\varrho_1 &= X' - X^0 \\ 4\pi\varrho_2 &= X'' - X' \\ \ldots &\quad \ldots\ldots \\ 4\pi\varrho_n &= X^n - X^{n-1} \end{aligned} \tag{5}$$

Aus diesen verschiedenen Gleichungen ergibt sich nun die Folgerung:

Wenn V_n einen endlichen Werth hat, so ist V^n eine Constante und $X^n = 0$; denn es ist

$$\begin{aligned} V^n &= V_n + X^n(x - \delta' \ldots - \delta^{n-1}) \\ &= V_n + X^n x - X^n(\delta' + \delta'' + \ldots \delta^{n-1}), \end{aligned}$$

hätte nun X^n einen endlichen Werth, so würde für $x = \infty$ auch $V^n = \infty$ d. h. die Potentialfunction nähme in unendlicher Entfernung von den wirkenden Massen einen unendlich grossen Werth an, was unmöglich ist.

V_n hat aber einen endlichen Werth, so oft irgend einer der Werthe $V_1 \ldots V_{n-1}$ einen solchen besitzt, und die Dichtigkeit ϱ auf keiner der Flächen unendlich gross ist.

---

2) Im Einklange mit Clausius gebe ich der Potentialfunction positiv elektrischer Mengen das negative Vorzeichen und man trifft deshalb in den folgenden Formeln häufig das entgegengesetzte Vorzeichen, welches man bei der Attraction ponderabler Massen zu finden gewohnt ist.

Da man mit dem Zählen gerade so gut bei der Fläche S_n beginnen könnte, als bei S_1, so gilt dasselbe, was vorhin für V^n bewiesen wurde unter den nämlichen Bedingungen auch für V^0 und es ist mithin alsdann auch $X^0 = o$.

Diese Sätze, welche zugleich die allgemeinste Grundlage für die Theorie des Condensators, der Franklin'schen Tafel u. s. w. bilden, sollen nun für die des Elektrophor's verwerthet werden. Wir betrachten zu dem Ende nur vier von diesen Flächen und verstehen unter S_1 die Bodenplatte (beziehungsweise die dem Kuchen zugewendete Seite derselben) unter S_2 die nicht geriebene und unter S_3 die geriebene Fläche des Kuchens, unter S_4 den Schild. Wenn wir den Kuchen für sich allein uutersuchen wollen, denken wir uns ganz einfach die Flächen S_1 und S_4 hinweggenommen oder was dasselbe ist, mit Elektricität von der Dichtigkeit o bedeckt, und betrachten alsdann nur die Flächen S_2 und S_3.

Reibt man den Kuchen in freier Luft ohne dass aus der Nachbarschaft Elektricität auf denselben übergehen kann so hat man die Bedingungen: ϱ_3 hat irgend einen endlichen Werth, und ϱ_2 ist gleich o; dann ist

$$4\pi\varrho_3 = X''' - X''$$

dabei müssen X'' und X''' ihrem absoluten Werthe nach gleich sein, da zu beiden Seiten der einzigen elektrisirten Fläche vollkommene Symmetrie herrscht.

Es ist demnach

$$X'' = -2\pi\varrho_3$$

$$\text{und} \qquad X''' = +2\pi\varrho_3$$

d. h. die Kraft ist auf beiden Seiten gleich gross aber entgegengesetzt gerichtet. (Erster Versuch.)

Liegt nun derKuchen auf der abgeleiteten Bodenplatte, während er gerieben wird, und ist noch keine Elektricität von der Bodenplatte auf den Kuchen übergegangen, so hat man die Bedingungen:

$$V_1 = 0$$
$$\varrho_2 = 0$$

und demnach auch

$$X^0 = 0$$

und $$X''' = 0.$$

Die in der Einleitung aufgestellten Gleichungen gehen demnach über in

$$4\pi\varrho_1 = X'$$
$$4\pi\varrho_2 = X'' - X' = 0$$
$$4\pi\varrho_3 = -X''.$$

Hieraus folgt:

$$\varrho_1 = -\varrho_3$$

d. h.: So lange noch kein Elektricitätsübergang zwischen Bodenplatte und Kuchen stattgefunden hat, ist die Elektricität der ersteren der primär erregten ungleichnamig. Ihre Dichtigkeit jener der primären (nahezu) gleich.

Die Kraft X' aber, welche zwischen Bodenplatte und Kuchen wirksam ist, ergibt sich als

$$X' = 4\pi\varrho_1 = -4\pi\varrho_3 \qquad (6)$$

Indem nun diese Kraft zur Wirkung gelangt, so geht ein Theil der Elektricität von S_1 auf S_2 über, und man hat demnach

$$4\pi\varrho_1 = X'$$
$$4\pi\varrho_2 = X'' - X'$$
$$4\pi\varrho_3 = -X''$$

woraus durch Summation folgt:

$$\varrho_1 - \varrho_2 = \varrho_3 = 0$$

oder $$\varrho_3 = -\varrho_1 - \varrho_2$$

Da das Zeichen von ϱ_1 durch den hier betrachteten Vorgang nicht umspringen kann, demnach ϱ_1 seinem absoluten Werthe nach kleiner sein muss als ϱ_3, so hat ϱ_2 dasselbe Vorzeichen wie ϱ_1, und man kann demnach schreiben

$$\varrho_2 = -\varepsilon\varrho_3 \text{ und } \varrho_1 = -(1-\varepsilon)\varrho_3 \qquad (7)$$

wo ε ein positiver ächter Bruch ist.

Während vorher die Kraft $X' = -4\pi\varrho_3$ war, so wirkt jetzt zwischen Bodenplatte und Kuchen nur mehr die Kraft

$$X' = -4\pi(1-\varepsilon)\varrho_3.$$

Hebt man nun den Kuchen ab, so erhält man

$$X'' = -2\pi(\varrho_3 + \varrho_2) = -2\pi(1-\varepsilon)\varrho_3$$

und $$X''' = 2\pi(\varrho_3 + \varrho_2) = 2\pi(1-\varepsilon)\varrho_3$$

Die Kraft hat also zu beiden Seiten des Kuchens in diesem Falle die gleiche Richtung wie zuerst, wo sich nur auf der geriebenen Seite Elektricität befunden hatte, sie ist jedoch bei gleicher Intensität der primären Elektricität schwächer als im ersteren Falle. (Dritter Versuch).

Gehen wir jetzt zur Hauptsache über, und nehmen wir an, der Kuchen habe während des Reibens auf der abgeleiteten Bodenplatte gelegen und sei dann mit dem abgeleiteten Schilde bedeckt worden. Dabei mache ich zuerst die Hypothese, dass kein Uebergang zwischen Kuchen und Schild stattgefunden habe. Nach Entwickelung der Theorie unter dieser Annahme wird man alsdann erst einsehen, warum ein solcher Uebergang im Allgemeinen nicht statt findet.

Man hat also jetzt die Bedingungsgleichungen:

$$\varrho_2 = -\varepsilon\varrho_3$$
$$V_1 = 0$$
$$V_4 = 0,$$

woraus $X^0 = 0$ und $X^4 = 0$ folgt.

Dann gehen die Gleichungen (5) in die folgenden über

$$\begin{aligned} 4\pi\varrho_1 &= X' \\ 4\pi\varrho_2 &= X'' - X' \\ 4\pi\varrho_3 &= X''' - X'' \\ 4\pi\varrho_4 &= -X''' \end{aligned} \tag{8}$$

woraus man durch Addition die Gleichung

$$\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \varrho_4 = 0 \tag{9}$$

erhält, welcher man unter Berücksichtigung der ersten Bedingungsgleichung auch die Form

$$\varrho_1 + (1-\varepsilon)\varrho_3 + \varrho_4 = 0 \tag{10}$$

geben kann.

Die Gleichungen (3) aber verwandeln sich unter den gegebenen Bedingungen in:

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= 0 \\ V_2 &= X'\delta' \\ V_3 &= V_2 + X''\delta'' \\ V_4 &= V_3 + X'''\delta''' = 0 \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

oder

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= 0 \\ V_2 &= X'\delta' \\ V_3 &= -X'''\delta''' = X'\delta' + X''\delta'' \\ V_4 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

woraus schliesslich

$$X'\delta' + X''\delta'' + X'''\delta''' = 0 \qquad \text{folgt.}$$

Hieraus erhält man unter Berücksichtigung der Gleichungen (8):

$$\varrho_1\delta' + (\varrho_1 + \varrho_2)\delta'' - \varrho_4\delta''' = 0 \tag{13}$$

Unsere Hauptaufgabe ist es nun die Dichtigkeiten ϱ_1 und ϱ_4 d. h. der auf Bodenplatte und Schild befindlichen Elektricität als Functionen von ϱ_3 darzustellen.

Diess erreichen wir mit Hülfe der Gleichungen (7) (10) und (13) durch ein einfaches Eliminationsverfahren, und zwar ergeben sich die Endresultate:

$$\varrho_1 = \varrho_3 \frac{\varepsilon\delta'' - (1-\varepsilon)\delta'''}{\delta' + \delta'' + \delta'''} \tag{14}$$

und

$$\varrho_4 = -\varrho_3 \frac{\delta'' + (1-\varepsilon)\delta'}{\delta' + \delta'' + \delta'''}. \tag{15}$$

Diese Formeln bieten Gelegenheit zu interessanten Folgerungen:

Da nämlich ε immer kleiner als 1 ist, so hat ϱ_4 immer das nämliche Vorzeichen, wie man auch die Entfernungen δ' δ'' und δ''' wählen mag. Das Vorzeichen von ϱ_1 hingegen springt um, wenn δ''' von o anfangend allmälig zunimmt. So lange $\delta''' < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\delta''$ ist, hat ϱ_1 das nämliche Vorzeichen wie ϱ_3, wenn $\delta''' = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\delta''$ so wird $\varrho_1 = 0$, und wenn endlich δ''' noch mehr wächst, so werden ϱ_1 und ϱ_3 ungleichnamig.

Anders gefasst, heisst dieses Ergebniss:

Auf der leitenden Platte, welche der primär elektrisirten Fläche zugewandt ist, ist die Elektricität mit der primär erregten ungleichnamig.

Auf jener leitenden Platte, welche der nicht geriebenen Fläche des Kuchens zugewandt ist, hat die Elektricität verschiedenes Vorzeichen je nachdem die Entfernung der primär elektrisirten Fläche von der ihr benachbarten Fläche grösser oder kleiner ist. Wenn die letztere sehr klein ist, so ist die Elektricität der genannten Fläche mit der primären gleichnamig, bei grösseren Werthen aber ungleichnamig. Wählt man die untersuchte Fläche jederzeit als Schild, da es ja ganz gleichgültig ist, ob man S_1 oder S_4 als Bodenplatte betrachtet, so lassen sich diese Sätze auch folgendermassen aussprechen:

Bei normaler Lage ist die im Schilde aufgesammelte Elektricität der primär erregten ungleichnamig.

Kehrt man dagegen den Kuchen um, nachdem man ihn auf der abgeleiteten Bodenplatte gerieben hat, so erhält man im Schilde Elektricität, welche der primären bald gleichnamig bald ungleichnamig ist. Sie ist gleichnamig, wenn der Kuchen während der Ableitung des Schildes unmittelbar auf der Bodenplatte liegt, ungleichnamig, wenn Kuchen und Bodenplatte durch einen grösseren Zwischenraum von einander getrennt sind.

Diesen merkwürdigen Zeichenwechsel habe ich schon auf experimentellem Wege gefunden und a. a. O. als vierten Versuch beschrieben.

Es lässt sich aber auch noch eine zweite interessante Consequenz aus diesen Formeln ziehen.

Oben wurde nämlich gefunden, dass die Bodenplatte der primären Elektricität gleichnamig elektrisch wird, wenn der Kuchen während des Reibens auf dieser Platte liegt und kein Schild aufgelegt ist.

Legt man hingegen den Schild auf, so springt bei hinreichend kleinem δ''' das Vorzeichen der in der abgeleiteten Bodenplatte befindlichen Elektricität um, und wird der primären gleichnamig. Indem man nach der Ableitung die Bodenplatte isolirt, und dann den Kuchen sammt Schild abhebt, kann man die Richtigkeit dieses Schlusses durch den Versuch nachweisen.

Noch ein Wort muss über die Kraft gesprochen werden, welche zwischen Kuchen und Schild wirksam ist. Diese Kraft ist:

$$\begin{aligned} X''' &= -4\pi\varrho_4 \\ &= 4\pi\varrho_3 \frac{\delta'' + (1-\varepsilon)\,\delta'}{\delta' + \delta'' + \delta'''} \end{aligned} \tag{16}$$

Die Kraft hingegen, welche bei einer Dichtigkeit ϱ_3 der primären Elektricität vor Auflegen des Schildes und vor dem Elektricitätsaustausche zwischen Kuchen und Bodenplatte thätig war und einen solchen Uebergang bewirken musste, ergab sich nach Gleichung (6) als

$$X' = -4\pi\varrho_3$$

also jedenfalls grösser als die eben gefundene.

Um auch noch den Einfluss zu untersuchen, welchen das Abheben des isolirten Schildes auf die Spannung der daselbst befindlichen Elektricität hat, benützen wir die Formeln (4). Nimmt man an, dass die Bodenplatte stets mit der Erde verbunden, also $V_1 = o$ sei, so liefern sie die Gleichung

$$V_4 = 4\pi\varrho_1\,\delta' + 4\pi(\varrho_1 + \varrho_2)\,\delta'' - 4\pi\varrho_4\,\delta'''$$

Betrachtet man nun in dieser Formel δ''' als Variable so ist die Aufgabe gelöst, man kann dann schreiben

$$V_4 = c - 4\pi\varrho_4 \delta''' \tag{17}$$

Für einen bestimmten Werth von δ''' d. h. für jenen Werth, welcher dem Momente der Ableitung entspricht, wird dieser Ausdruck gleich Null. Sowie nun δ''' zunimmt, so wächst die Potentialfunction (Spannung) linear mit dieser Entfernung und zwar ist das Vorzeichen gleichnamig mit der Dichtigkeit ϱ_3 der primären Elektricität d. h. ein mit dem Schilde verbundenes Elektroskop divergirt mit einer der primären entgegengesetzten Elektricität.

Hat man nun den Kuchen umgekehrt aufgelegt, so braucht man nur S_1 als Schild zu betrachten und nun den Werth von V_1 zu bestimmen, während man $V_4 = o$ setzt. Man findet

$$\begin{aligned} V_1 &= 4\pi\varrho_4 \delta''' - 4\pi(\varrho_1 + \varrho_2)\delta'' - 4\pi\varrho_1 \delta' \\ &= c' - 4\pi\varrho_1 \delta', \end{aligned} \tag{18}$$

welche Gleichung wohl keiner weiteren Discussion mehr bedarf.

Es lassen sich somit alle Versuche, welche man am Elektrophor anstellen kann, aus den einfachen Annahmen, welche den Entwicklungen zu Grunde gelegt wurden, vollkommen erklären.

Die hier entwickelte Theorie ist freilich nur eine erste Annäherung, da sie sich auf die Annahme unendlich grosser Flächenausdehnung stützt. Dennoch darf diese Annäherung als vollkommen genügend bezeichnet werden, da man ja auch bei einer schärfer durchgeführten mathematischen Theorie immer die Hypothese machen müsste, dass die Dichtigkeit der primär erregten Elektricität auf der geriebenen Fläche allenthalben dieselbe sei, eine Voraussetzung, die sich bei den Versuchen niemals mit Schärfe erfüllen lässt.