Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band I. Jahrgang 1871.

München.
Akademische Buchdruckerei von F. Straub.
1871.

In Commission bei G. Franz.

Sitzung vom 6. Mai 1871.

Mathematisch-physikalische Classe.

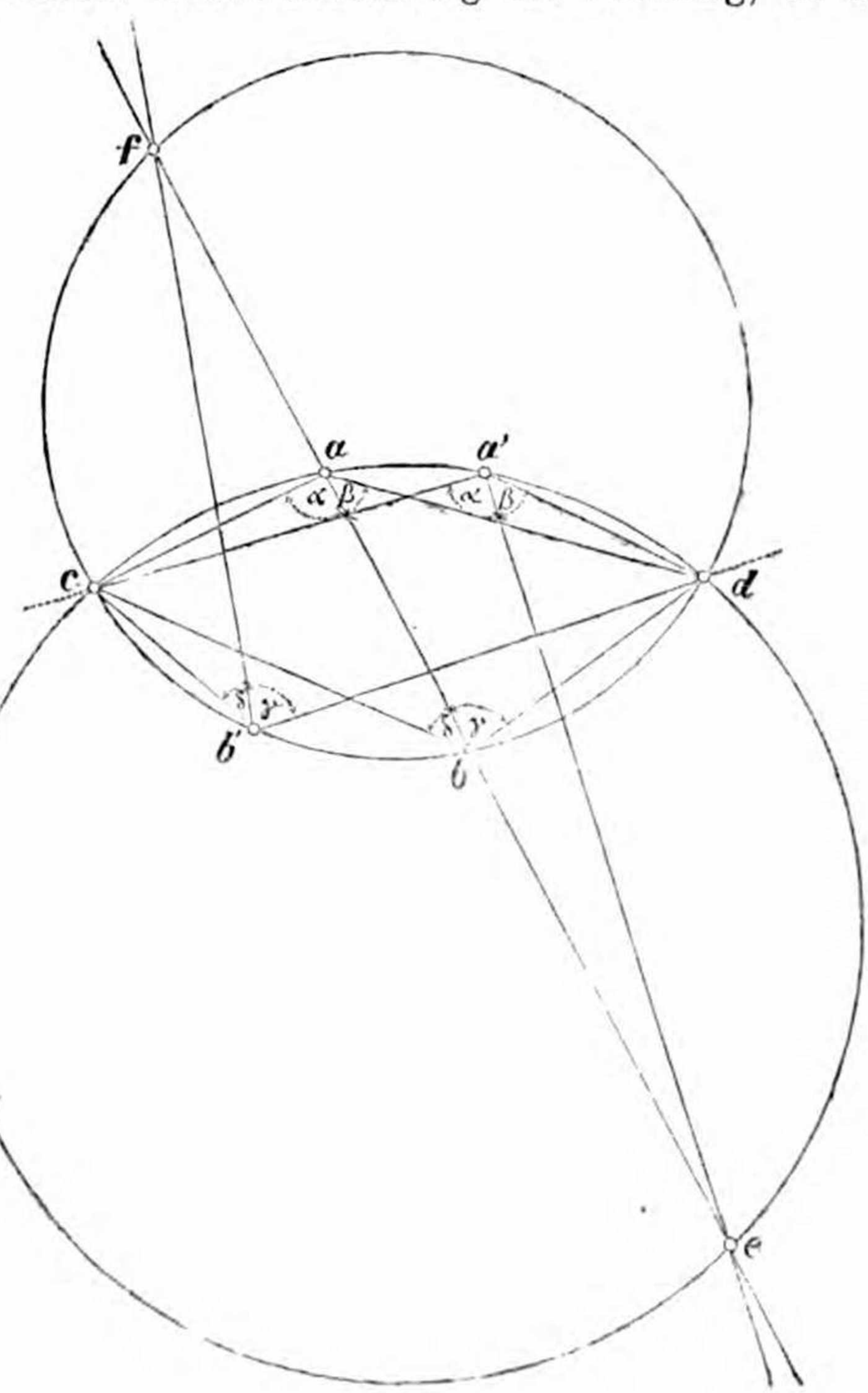
Herr Bauernfeind spricht:

„Ueber ein neues graphisches und mechanisches Verfahren, die Lage zweier Standorte des Messtisches an den daselbst gemessenen scheinbaren Grössen der Verbindungslinien dieser Orte mit zwei anderen gegebenen Punkten zu bestimmen."

In der Sitzung der mathematisch-physikalischen Classe der k. Akademie vom 4. März d. Js. habe ich über ein von mir erfundenes Instrument berichtet, welches ohne jede Construction einen Kreis zu beschreiben gestattet, der entweder durch drei Punkte oder durch eine Sehne und einen Peripheriewinkel bestimmt ist, und womit sich die Pothenot'sche Aufgabe, nämlich einen Standort des Messtisches aus den daselbst aufgenommenen Gesichtswinkeln der drei Seiten eines gegebenen Dreiecks zu bestimmen, auf mechanischem Wege leicht und sicher lösen lässt.

Dasselbe ist der Fall mit einer anderen wichtigen geodätischen Aufgabe, welche die Lagenbestimmung zweier Standorte des Messtisches gegen zwei andere gegebene Punkte betrifft.

Diese Aufgabe wird gewöhnlich nach Hansen benannt, weil sie dieser berühmte Astronom und Geodät in Nr. 419, S. 165 der Astronomischen Nachrichten trigonometrisch aufgelöst und als neu bezeichnet hat. Ich selbst habe vielleicht am meisten zur Verbreitung dieser Benennung beigetragen, indem ich jene Aufgabe in meinen „Elementen der Vermessungskunde" (I. Auflage, 2 Bd. S. 228, II. Auflage, S. 586, III. Auflage, S. 610) als die „Hansen'sche" bezeichnete. Allein diese Bezeichnung ist unrichtig, da dieselbe



Aufgabe lange vor Hansen schon von van Swinden in dessen „Elementen der Geometrie" (S. 321 der deutschen Uebersetzung von Jakobi) und von Gerling, in Nr. 62, S. 233 der Astronomischen Nachrichten trigonometrisch, von Schulz-Montanus aber in dessen „Handbuch der Land- und Erdmessung" (Bd. 2, S. 114) und von Pross in dessen „Lehrbuch der praktischen Geometrie" (S. 198) geometrisch gelöst wurde.

Meine Lösung dieser Aufgabe ist ebenfalls eine geometrische und kann entweder durch Construction mit Zirkel und Lineal auf graphischem Wege, oder aber ohne jede Construction durch meinen Einschneidezirkel auf mechanischem Wege so leicht und sicher ausgeführt werden, wie keine der bisher bekannten geometrischen Lösungen.

Sind nämlich A, B die gegebenen oder angenommenen zwei Standorte des Messtisches auf dem Felde und C, D zwei unzugängliche Signale, deren Entfernung CD jedoch bekannt und auf dem Messtische durch cd gegeben ist, so verlangt unsere Aufgabe, auf dem Messtisch ein Viereck $abcd$ zu bestimmen, welches dem Vierecke $ABCD$ auf dem Felde ähnlich ist.

Stellt man nun den Messtisch über dem Punkte A horizontal auf, projicirt den Punkt A auf das Blatt und stellt den Einschneidezirkel auf den Winkel $CAD = \alpha + \beta$ ein, so kann man mit dieser Einstellung über der Sehne cd sofort den Kreis $cade$ beschreiben. Nimmt man dann ferner den Winkel $CAB = \alpha$ in den Zirkel und legt den einen Schenkel desselben an c und seinen Scheitel in a' auf den eben beschriebenen Kreis, so schneidet der zweite Schenkel diesen Kreis in dem Punkte e. Wird hierauf der Messtisch nach B versetzt und horizontal aufgestellt, der Punkt B auf das Blatt projicirt und der Winkel $CBD = \gamma + \delta$ mit dem Einschneidezirkel aufgenommen, so lässt sich mit diesem über der Sehne cd der Kreis $cbdf$ beschreiben. Misst man endlich den Winkel $ABD = \gamma$ und legt ihn so auf den eben beschriebenen Kreis, dass der Scheitel irgend einen Punkt b' deckt und der Schenkel $b'd$ an dem Endpunkte d anliegt, so schneidet der andere Schenkel des Zirkels $b'f$ den Kreis $c\,b\,d\,f$ in dem Punkte f. Verbindet man nun die Schnittpunkte e und f durch eine gerade Linie, so schneidet diese die zwei Kreise $c\,a\,d\,e$ und $c\,b\,d\,f$ in zwei Punkten a und b, welches die gesuchten Punkte sind.

Der Beweis für die Richtigkeit dieses Verfahrens ist sehr einfach. Die Lage des Punktes a ist offenbar durch die scheinbaren Grössen α, β und $\alpha + \beta$, die des Punktes b durch γ, δ und $\gamma + \delta$ bestimmt, also muss der Kreis $c\,a\,d\,e$ ein geometrischer Ort von a und der Kreis $c\,b\,d\,f$ ein geometrischer Ort von b sein. Dadurch, dass man $c\,a'\,e = \alpha$ und folglich $d\,a'\,e = \beta$ macht, bestimmt man einen Punkt e, der die Eigenschaft hat, durch seine Verbindung mit den Punkten a, a' ... des Ortes von a alle auf der Sehne $c\,d$ stehenden Peripheriewinkel $c\,a\,d = c\,a'\,\mathrm{d} = \ldots = \alpha + \beta$ in ihre zwei Bestandtheile α und β zu zerlegen; jede von e ausgehende Sehne des Kreises $c\,a\,d\,e$ liefert folglich einen Punkt a, a' ..., welcher mit c, e, d die Winkel α, β, $\alpha + \beta$ bildet. Ebenso hat der durch den Winkel $d\,b'\,f = \gamma$ bestimmte Punkt f des Kreises $c\,b\,d\,f$ die Eigenschaft, durch seine Verbindung mit den Punkten b, b' ... des Ortes von b alle auf der Sehne $c\,d$ stehenden Peripheriewinkel $c\,b\,d$, $c\,b'\,d \ldots = \gamma + \delta$ in ihre zwei Bestandtheile γ und δ zu zerlegen, so dass jede von f ausgehende Sehne des Kreises $c\,b\,d\,f$ einen Punkt b, b' ... liefert, welcher mit d, f, c die Winkel γ, δ, $\gamma + \delta$ bildet. Wenn nun die Sehnen $e\,a'$, $e\,a$ ... in Bezug auf den Punkt a und die Sehnen $f\,b'$, $f\,b$ ... in Bezug auf den Punkt b allen Bedingungen der Aufgabe genügen, so ist klar, dass nur die zwei Sehnen $e\,a$ und $f\,b$, welche in eine Gerade $e\,f$ zusammenfallen, den Bedingungen der Aufgabe in Bezug auf die beiden Punkte

a und b genügen können. In der That liegen gleichzeitig nur an den Enden der Geraden $a\,b$ einerseits die scheinbaren Grössen α, β der Seiten $C\,B$, $B\,D$ und andererseits die scheinbaren Grössen γ, δ der Seiten $A\,D$, $A\,C$, während jene Enden selbst auf den Kreisen ruhen, welche durch die Gesichtswinkel $\alpha + \beta$ und $\gamma + \delta$ der Geraden $C\,D$ bestimmt sind.

Hat man auf diese Weise die Punkte a und b auf dem Messtische gefunden, so versteht sich die Centrirung und Orientirung desselben von selbst, sowie es keiner weiteren Erörterung bedarf, wie man in Ermangelung eines Einschneidezirkels das beschriebene mechanische Verfahren in ein rein graphisches dadurch überführt, dass man auf bekannte Weise die Kreise $c\,a\,d\,e$, $c\,b\,d\,f$ aus der Sehne $c\,d$ und den Peripheriewinkel $\alpha + \beta$, $\gamma + \delta$ construirt, dann an die Sehne $c\,a'$ den Winkel $c\,a'\,e = \alpha$ und an $c\,b'$ den Winkel $c\,b'\,f = \gamma$ anlegt, wodurch sich die Schnittpunkte e, f ergeben, deren Verbindung die gesuchten Punkte a, b auf den oben genannten Kreisen sofort abschneidet.

Sieht man von der Anwendung der vorstehenden Lösung für geodätische Zwecke ab, so besteht ihre rein geometrische Bedeutung darin, dass sie ein Viereck zu construiren gestattet, von dem die Länge einer Diagonale ($c\,d$) und die vier Winkel an der anderen Diagonale (α, β, γ, δ) gegeben sind.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1871

Band/Volume: 1871

Autor(en)/Author(s): Bauernfeind Carl Maximilian von

Artikel/Article: Ein neues graphisches und mechanisches Verfahren, die Lage zweier Standorte des Messtisches an den daselbst gemessenen scheinbaren Grössen der Verbindungslinien dieser Orte mit zwei anderen gegebenen Punkten zu bestimmen 157-161