Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

1872. Heft III.

München.
Akademische Buchdruckerei von F. Straub.
1872.

In Commission bei G. Franz.

Herr G. Bauer theilt mit:

„Bemerkungen über einige Determinanten geometrischer Bedeutung."

Diese Bemerkungen haben zum Zweck nachzuweisen, dass die Sätze über Producte von Dreiecksflächen und Tetraedervolumina, und polygonometrischen Relationen, welche von Staudt, Joachimsthal, Kronecker, Cayley u. a. gegeben wurden, eine wesentliche Verallgemeinerung zulassen, welche darin besteht, dass an die Stelle der Punkte gleichsam Kugeln treten und an die Stelle der den Tetraedern umschriebenen Kugeln die Orthogonalkugeln der Systeme von Kugeln.

1. Ist $A_1 A_2 A_3$ die Basis eines Tetraeders, dessen Seitenkanten r_1, r_2, r_3 sind und dessen Volumen V ist, so ist bekanntlich die Determinante

$$R = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & r_1^2 \\ 1 & d_{21}^2 & 0 & d_{23}^2 & r_2^2 \\ 1 & d_{31}^2 & d_{32}^2 & 0 & r_3^2 \\ 1 & r_1^2 & r_2^2 & r_3^2 & 0 \end{vmatrix}$$

in welcher $d_{ik} = d_{ki}$ die Seite des Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ ist, welche den i^{ten} Eckpunkt mit dem k^{ten} verbindet, $= 288\, V^2$ oder wenn $\triangle$ die Fläche des Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ ist und h die Höhe des Tetraeders, so ist $R = +32 h^2 \triangle^2$. Sind nun aber die Strecken r_1, r_2, r_3 nicht derart, dass sie die Seitenkanten eines Tetraeders bilden, so wird die Tetraederhöhe imaginär und die Determinante erhält einen negativen Werth. In diesem Falle ist die Bedeutung der Determinante

$$R = -32 \,.\, \varrho^2 \triangle^2 \qquad \text{(I.}$$

wo ϱ den Halbmesser des Orthogonalkreises der drei Kreise bezeichnet, welche mit den Halbmessern r_1, r_2, r_3 um die Punkte $A_1\, A_2\, A_3$ in der Ebene der Punkte beschrieben sind. Die zwei Fälle ergänzen sich gegenseitig, indem ϱ immer reell ist, ausser wenn die Halbmesser r die Seitenkanten eines Tetraeders bilden können.

Diese einfache Formel für die Bestimmung des Halbmessers des Orthogonalkreises dreier Kreise, welche bisher unbemerkt geblieben ist, lässt sich sogleich ausdehnen auf die Orthogonalkugel von vier Kugeln. Sind nämlich A_1, A_2, A_3, A_4 die Centren der vier Kugeln deren Halbmesser r_1, r_2, r_3, r_4 und V das Volumen des von den Centren gebildeten Tetraeders, so ist der Halbmesser ϱ der Orthogonalkugel durch die Formel bestimmt

$$24^2 \,.\, V^2 \,.\, \varrho^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & d_{14}^2 & r_1^2 \\ 1 & d_{21}^2 & 0 & d_{23}^2 & d_{24}^2 & r_2^2 \\ 1 & d_{31}^2 & d_{32}^2 & 0 & d_{34}^2 & r_3^2 \\ 1 & d_{41}^2 & d_{42}^2 & d_{43}^2 & 0 & r_4^2 \\ 1 & r_1^2 & r_2^2 & r_3^2 & r_4^2 & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{(II.}$$

2. Ich habe diese Formeln zuerst direkt abgeleitet, und es ergab sich dabei für die i^{te} Coordinate p_i des Mittelpunkts der Orthogonalkugel, d. i. für die senkrechte Entfernung desselben von der Seitenfläche $\triangle_i$ des Tetraeders, welche dem i^{ten} Eckpunkt A_i gegenüberliegt

$$q_i = \frac{-\alpha_i}{96 \,.\, \triangle_i\, V}$$

wo α_i den Coefficienten des Elements r_i^2 der letzten Reihe in der Determinante II.) bezeichnet.

Ebenso hat man für die Bestimmung des Mittelpunkts des Orthogonalkreises dreier Kreise, wenn q_i dessen Entfernung von der dem Punkte A_i gegenüber liegenden Seite l_i des Dreiecks $A_1\, A_2\, A_3$ ist

$$q_1 = \frac{+\alpha_1'}{8 l_1 \Delta}$$

wo α_1' nun aus der Determinante I.) zu entnehmen ist.

3. Ich übergehe die direkte Ableitung der Gln. I) und II) weil sich dieselben als specielle Fälle allgemeinerer Sätze aus folgenden einfachen Betrachtungen ergeben.

Es seien zwei Systeme von je n Punkten im Raume gegeben, d_{ik} die Distanz des i^{ten} Punkts des 1^{ten} Systems vom k^{ten} Punkt des 2^{ten} Systems, ferner seien

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & .\,. & 1 & 1 \\ 1 & d_{11}^2 & d_{12}^2 & .\,. & d_{1n}^2 & r_1^2 \\ 1 & d_{21}^2 & d_{22}^2 & .\,. & d_{2n}^2 & r_2^2 \\ . & . & . & . & . & . \\ 1 & d_{n1}^2 & d_{n2}^2 & .\,. & d_{nn}^2 & r_n^2 \\ 1 & \mathfrak{r}_1^2 & \mathfrak{r}_2^2 & .\,. & \mathfrak{r}_n^2 & d_{n+1,n+1}^2 \end{vmatrix} = R^{(n)},$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & .\,. & 1 \\ 1 & d_{11}^2 & d_{12}^2 & .\,. & d_{1n}^2 \\ 1 & d_{21}^2 & d_{22}^2 & .\,. & d_{2n}^2 \\ . & . & . & . & . \\ 1 & d_{n1}^2 & d_{n2}^2 & .\,. & d_{nn}^2 \end{vmatrix} = D^{(n)}, \qquad \begin{vmatrix} d_{11}^2 & d_{12}^2 & .\,. & d_{1n}^2 \\ d_{21}^2 & d_{22}^2 & .\,. & d_{2n}^2 \\ . & . & . & . \\ d_{n1}^2 & d_{n2}^2 & .\,. & d_{nn}^2 \end{vmatrix} = E^{(n)}$$

Sind nun die Grössen r und $\mathfrak{r}$ der Art, dass in jedem System ein $n+1^{\text{ter}}$ Punkt bestimmt werden kann, so dass den Gleichungen Genüge gethan wird

$$\left.\begin{aligned} d_{1,n+1}^2 - r_1^2 &= d_{2,n+1}^2 - r_2^2 = .\,. = d_{n,n+1}^2 - r_n^2 = \varrho^2 \\ d_{n+1,1} - \mathfrak{r}_1^2 &= d_{n+1,2}^2 - \mathfrak{r}_2^2 = .\,. = d_{n+1,n} - \mathfrak{r}_n^2 = \varrho'^2 \end{aligned}\right\} \quad (a.$$

so ergiebt sich sogleich

$$R^{(n)} = (\varrho^2 + \varrho'^2)\, D^{(n)} + D^{(n+1)}$$

oder auch, wenn $R_0^{(n)}$ das bedeutet, was $R^{(n)}$ wird, wenn man darin das letzte Element $d_{n+1,n+1}$ durch Null ersetzt

$$R_0^{(n)} = (\varrho^2 + \varrho'^2 - d_{n+1,n+1}^2)\, D^{(n)} + D^{(n+1)} \qquad (1.$$

Die Gleichungen a) sind erfüllt, wenn die r und $\mathfrak{r}$ Halbmesser von Kugeln sind, welche resp. um die Punkte des

1^{jen} und 2^{ten} Systems als Mittelpunkte beschrieben sind, und die n Kugeln jedes Systems eine gemeinsame Orthogonalkugel haben. ϱ und ϱ' sind dann die Halbmesser dieser Orthogonalkugeln des 1^{ten} und 2^{ten} Systems. Der Mittelpunkt O der Orthogonalkugel des 1^{ten} Systems ist als ein $(n+1)^{\text{ter}}$ Punkt des 2^{ten} Systems, der Mittelpunkt O' der Kugel ϱ' als ein $n+1^{\text{ter}}$ Punkt des 1^{ten} Systems aufzufassen, und es ist $d_{n+1,\,n+1} = OO'$.

4. Nun ist, für $n > 4$, $D^{(n)} = 0$ *), folglich ist auch

$$R_0^{(n)} = 0, \text{ wenn } n > 4. \qquad (2.$$

Gehen die Kugeln jedes Systems durch einen Punkt, in welchem Falle $\varrho = \varrho' = 0$ ist, so reducirt sich die Gleichung auf $D^{(n+1)} = 0$. Sind sämmtliche Halbmesser r und $\mathfrak{r}$ Null, so geht $R_0^{(n)}$ in $-E^{(n)}$ über und es ist mithin $E^{(n)} = 0$ für $n > 4$, wenn die zwei Systeme von Punkten auf Kugelflächen liegen**).

5. Ist $n = 4$, so hat man vermöge des bekannten Werths von $D^{(4)}$

$$R_0^{(4)} = (\varrho^2 + \varrho'^2 - OO'^2) \,.\, 288\, VV' \qquad (3.$$

wo V und V' die Volumina der von den vier Punkten jedes Systems gebildeten Tetraeder sind; oder auch wenn sich die zwei Orthogonalkugeln unter dem Winkel Θ schneiden

$$R_0^{(4)} = 24^2\, VV' \,.\, \varrho\varrho' \cos\Theta. \qquad (3'$$

Reduciren sich die Kugeln sämmtlich auf Punkte, so gehen die Orthogonalkugeln in die den Tetraedern V, V' umschriebene Kugeln ϱ_0, ϱ_0' über und zugleich $R_0^{(4)}$ in $-E^{(4)}$; man hat sodann die von Siebeck***) gegebene Gleichung

$$E^{(4)} = -24^2 \,.\, VV'\, \varrho_0 \varrho_0' \cos\Theta.$$

Fallen die zwei Systeme von Kugeln zusammen, so geht

---

*) Kronecker, Bemerkungen zur Determinanten-Theorie IV. Borchardt J. Bd. 72. 1870.

**) Ebendas. IV. 7.

***) Siebeck „Ueber die Determinanten etc. Borchardt J. Bd. 62.

die Gleichung 3.) in II.) über; liegen zugleich die Centren der vier Kugeln in einer Ebene, so folgt aus dieser Gleichung für die Bedingung, dass die vier Kugeln eine Linie gleicher Potenzen gemein haben oder vier Kreise r_1, r_2, r_3, r_4 in der Ebene einen gemeinsamen Orthogonalkreis haben

$$[R_0^{(4)}] = 0 \qquad (4.$$

wenn durch $[R_0^{(4)}]$ das Zusammenfallen der zwei Systeme in $R_0^{(4)}$ bezeichnet wird.

Es ist jedoch zu bemerken, dass wenn die vier Punkte eines Systems in einer Ebene liegen $R_0^{(4)}$ in zwei Faktoren zerfällt. Denn ist a_{ik} irgend eines seiner Elemente, so ist nach einer bekannten Formel

$$R \frac{d^2 R}{da_{55}\, da_{66}} = \frac{dR}{da_{55}} \cdot \frac{dR}{da_{66}} - \frac{dR}{da_{56}} \cdot \frac{dR}{da_{65}}; \qquad (b.$$

aber $\frac{dR}{da_{66}} = D^{(4)}$, also in diesem Falle $= 0$, während

$\frac{d^2R}{da_{55}\, da_{66}} = D^{(3)}$. Hieraus folgt, dass in Gleichung 4.)

$$[R_0^{(4)}] = \frac{1}{(4\triangle)^2} \left(\frac{dR}{da_{56}}\right)^2 = \frac{\alpha_4^2}{(4\triangle)^2}$$

ist, wo $\triangle$ das von den 3 Centren $A_1\, A_2\, A_3$ gebildete Dreieck ist, und α die in $n^0 2$ gegebene Bedeutung hat. Liegen also keine drei der Centren in einer Graden, so kann die Gleichung $\alpha_4 = 0$, oder überhaupt eine der Gleichungen

$$\alpha_i = 0, \qquad i = 1, 2, 3, 4 \qquad (5.$$

die Gleichung 4.) ersetzen.

6. Wir haben in $n^0 4$ gesehen, dass $E^{(5)} = 0$, wenn die Systeme von Punkten auf Kugelflächen liegen. Es lässt sich nun aber auch die Bedeutung dieser Determinante finden, wenn die Lage der Punkte willkürlich ist. Nehmen wir an, dass die Kugeln r des 1^{ten} Systems sich in einem Punkte schneiden, so ist $\varrho = 0$, und dieser Punkt O der fünfte des 2^{ten} Systems, also $r_1 = d_{15}$, $r_2 = d_{25}$, . . Nennen wir also

die Punkte des ersten Systems $A_1, A_2, \ldots$, die Punkte des 2^{ten} Systems $B_1, B_2, \ldots$, so wird in diesem Falle

$$R_0^{(4)} = (\varrho'^2 - B_5O'^2) \, . \, 288\, VV' = - P'_5 \, . \, 288\, VV'$$

wo P'_5 die Potenz des Punktes B_5 in Bezug auf die Orthogonalkugel der Kugeln $\mathfrak{r}$ ist.

Für $\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r}_2 = \mathfrak{r}_3 = \mathfrak{r}_4 = 0$ geht dann $R_0^{(4)}$ in eine Unterdeterminante $\delta^{(5)}$ von $D^{(5)}$ über; und man hat

$$\delta_{61}^{(5)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ d_{11}^2 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & d_{14}^2 & d_{15}^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ d_{41}^2 & d_{42}^2 & d_{43}^2 & d_{44}^2 & d_{45}^2 \end{vmatrix} = 288\, VV' \, . \, P'_5 \qquad (6.$$

wo P'_5 die Potenz von B_5 in Bezug auf die Kugel $B_1 B_2 B_3 B_4$ ist.

Wendet man ferner auf $R_0^{(5)}$ die Zerlegung b.) an, so ist da $\frac{dR_0^{(5)}}{da_{77}} = D^{(5)} = 0$ ist, $\frac{d^2R_0^{(5)}}{da_{66}\, da_{77}} = D^{(4)}$,

$$D^{(4)} \, . \, R_0^{(5)} = - \frac{dR}{da_{67}} \, . \, \frac{dR}{da_{76}}$$

Mithin, wenn sämmtliche r und $\mathfrak{r}$ Null sind,

$$E^{(5)} \, . \, D^{(4)} = \delta_{61}^{(5)} \, . \, \delta_{16}^{5}$$

oder

$$E^{(5)} = 288\, VV' \, . \, PP' \qquad (7.$$

wo P, P' die Potenzen der fünften Punkte in Bezug auf die den Tetraedern V, V', gebildet von den vier andern Punkten jedes Systems, umschriebenen Kugeln sind.

Liegen die 5 Punkte eines Systems z. B. des 2^{ten} auf einer Kugel, so ist $P' = 0$, also $E^{(5)} = 0$ zugleich aber auch $\delta_{61}^{(5)} = 0$ oder überhaupt

$$\delta_{i1}^{(5)} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots 6.$$

Fallen die zwei Systeme zusammen, so wird

$$[\delta_{61}^{(5)}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & d_{14}^2 & d_{15}^2 \\ d_{21}^2 & 0 & d_{23}^2 & d_{24}^2 & d_{25}^2 \\ d_{31}^2 & d_{32}^2 & 0 & d_{34}^2 & d_{35}^2 \\ d_{41}^2 & d_{42}^2 & d_{43}^2 & 0 & d_{45}^2 \end{vmatrix} = 288\, V^2 P'_5 \qquad (6'.$$

und

$$[E^{(5)}] = 288\, V^2 P^2 \qquad (7').$$

In letzterer Gleichung ist es offenbar gleichgültig, welcher Punkt als der 5^{te} angesehen wird, und ist mithin VP_i, abgesehen vom Zeichen, constant für $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

Die Entwicklung von $[D^{(5)}]$ nach den δ_{ii} gibt $\Sigma V^2 P = 0$; und da $V^2 P^2$ einen constanten Werth hat, so folgt noch die Relation

$$\Sigma_1^5 \frac{1}{P_i} = 0 \qquad (8.$$

wo immer P_i die Potenz des i^{ten} Punkts in Bezug auf die durch die vier andern beschriebene Kugel ist.

7. Ist $n = 3$, so kann man für O und O' irgend welche Punkte auf den Linien der gleichen Potenzen in den beiden Systemen wählen; ϱ, ϱ' sind dann die diesen Punkten entsprechenden Radien der Orthogonalkugeln und man hat vermöge des Werths von $D^{(3)}$ (Baltzer, Determ. 3^{te} Aufl. § 16 n° 13)

$$\begin{aligned} R_0^{(3)} = & - (\varrho^2 + \varrho'^2 - OO'^2) \,.\, 16 \triangle\triangle' \cos\varphi \\ & + 288\, A_1 A_2 A_3 O' \,.\, B_1 B_1 B_2 B_3 O. \end{aligned} \qquad (9.$$

wo $\triangle, \triangle'$ die Flächen der zwei Dreiecke $A_1 A_2 A_3$, $B_1 B_2 B_3$ und φ den von ihren Ebenen gebildeten Winkel bezeichnen. Den Fall $\varphi = 90^0$ ausgenommen, in welchem das erste Glied verschwindet, lässt sich das zweite Glied immer zum Verschwinden bringen, indem man für O, O' die Punkte wählt in welchen die Linie der gleichen Potenzen des einen Systems die Ebene der Centren des andern Systems trifft.

Liegen die zwei Systeme von Punkten in derselben Ebene, und nimmt man die Centren O, O' in dieser Ebene an, so erhält man die den Gleichungen 3.), 3'.) entsprechenden Sätze, nämlich

$$R_0^{(3)} = - (\varrho^2 + \varrho'^2 - OO'^2) \,.\, 16 \triangle\triangle' \qquad (10.$$

für zwei Systeme von je drei Kreisen in der Ebene, oder auch

$$R_0^{(3)} = -\,32\,\varrho\varrho' \cos\Theta\,.\,\triangle\triangle' \qquad (10'.$$

wo Θ der Winkel ist, unter dem sich die zwei Orthogonalkreise ϱ, ϱ' schneiden.

Die Bedingung

$$R_0^{(3)} = 0 \qquad (11.$$

ist erfüllt demnach, sowohl wenn die drei Kreise des einen Systems sich in einem Punkte des Orthogonalkreises des andern Systems schneiden, als auch wenn die zwei Orthogonalkreise sich senkrecht durchschneiden. Es ist also die Gleichung 11.) überhaupt die Bedingung, dass der Orthogonalkreis des einen Systems zum Kreisnetz gehört, das durch die drei Kreise des andern Systems bestimmt ist. Aehnliches gilt für $R_0^{(4)} = 0$ im Raume.

Fallen die zwei Systeme ganz zusammen, so geht die Gl. 10.) in die Gleichung I. über; sie wird nämlich, nach der hier benutzten Bezeichnung, $[R_0^{(3)}] = -\,32\varrho^2\triangle^2$. Liegen die Centren der drei Kreise in einer Graden, so ist nach n°5, $[R_0^3]$ ein vollständiges Quadrat. Die Bedingung $[R_0^3] = 0$ kann dann durch eine der einfacheren $\alpha'_1 = \alpha'_2 = \alpha'_3 = 0$ ersetzt werden wo α'_i die ihm in n°2 beigelegte Bedeutung hat; letztere Gleichungen entwickelt, geben als Bedingung, dass drei Kreise eine Linie gleicher Potenzen gemein haben, die Relation

$$A_2A_3\,r_1^2 + A_3A_1\,r_2^2 + A_1A_2\,r_3^2 + A_1A_2\,.\,A_2A_3\,.\,A_3A_1 = 0$$

wo auf die Zeichen der Strecken zu sehen ist. (Vergl. Baltzer, Geometrie p. 109 u. 120).

8. Nimmt man an, dass die drei Kugeln r sich in einem Punkte B_4 schneiden und nimmt den Mittelpunkt O' des 2ten Systems in der Ebene $A_1A_2A_3$ an, so erhält man analog der Gl. 6.), wenn $\delta^{(4)}$ eine Unterdeterminante von $D^{(4)}$ bezeichnet

$$\delta_{51}^{(4)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ d_{11}^2 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & d_{14}^2 \\ d_{21}^2 & d_{22}^2 & d_{23}^2 & d_{24}^2 \\ d_{31}^2 & d_{32}^2 & d_{33}^2 & d_{34}^2 \end{vmatrix} = 16\,\triangle\triangle'\cos\varphi\,.\,P'_4 \qquad (12.$$

wo P'_4 die Potenz von B_4 in Bezug auf diejenige $B_1 B_2 B_3$ umschriebene Kugel ist, deren Mittelpunkt in der Ebene $A_1 A_2 A_3$ ist. Es verschwindet also diese Determinante, wenn B_4 auf dieser Kugel liegt, wie schon Siebeck bemerkt hat*).

Aus Gleichung b.) folgt weiter, wenn darin die r und r sämmtlich Null gesetzt werden

$$E^{(4)} D^{(3)} = D^{(4)} E^{(3)} + \delta^{(4)}_{51} . \delta^{(4)}_{15}$$

Ist $D^{(4)} = 0$, was voraussetzt, dass wenigstens in einem System die vier Punkte in einer Ebene liegen, so wird

$$E^{(4)} = -16 \triangle \triangle' \cos \varphi . P P' \qquad (13.$$

Liegen die Systeme von Punkten in Ebenen, so sind P, P' die Potenzen der 4^{ten} Punkte in Bezug auf die durch die drei andern Punkten, welche die Dreiecke $\triangle, \triangle'$ bilden, beschriebenen Kreise. Die hier erhaltene Gleichung für $E^{(4)}$ ist eine Ergänzung der in n°5 für dieselbe Determinante gefundenen Gleichung; indem die Gleichung 13.) den Werth von $E^{(4)}$ gerade in den Fällen bestimmt, in welchen der in n°5 angeführte Werth durch das Verschwinden der Tetraedervolumina V, V' oder eines derselben unbestimmt wird.

Fallen die zwei Systeme in eine Ebene zusammen so wird

$$[E^{(4)}] = -16 \triangle^2 P^2 \qquad (13.$$

zur Bestimmung der Potenz des 4^{ten} Punktes in Bezug auf den durch die drei andern Punkte beschriebenen Kreis. Aus der Constanz dieses Werthes $\triangle^2 P^2$ für jeden der vier Punkte folgt sodann die Gl. 8.) analoge Gleichung für die Ebene

$$\Sigma_1^4 \frac{1}{P_i} = 0 \qquad (14.$$

Liegen die vier Punkte aber nicht in einer Ebene, so gibt die Entwicklung von $[D^{(4)}]$ nach den $\delta^{(4)}_{i1}$

$$288 V^2 = \Sigma 16 \triangle^2 P_i,$$

(* „Ueber die Determinanten etc." Borchardt's J. Bd. 62. p. 156.

wo P_i die bei Gleichung 12.) angegebene Bedeutung hat. deutung hat. Führt man sodann statt der Potenzen P_i der Ecken des Tetraeders $A_1 A_2 A_3 A_4$ die Potenzen p_i der Fusspunkte der Höhen ein, so erhält man folgenden Satz für ein beliebiges Tetraeder

$$18 V^2 = - \Sigma \triangle_i^2 p_i \tag{15.}$$

wo V das Volumen des Tetraeders, $\triangle_1$, $\triangle_2$ . . seine Seitenflächen, p_1, p_2 . . die Potenzen der in denselben liegenden Fusspunkte der Höhen in Bezug auf die dem Tetraeder umschriebene Kugel ist.

9. Besteht jedes System nur aus zwei Punkten und den ihnen umschriebenen Kugeln, so ist zu bemerken, dass $D^{(2)} = 2 A_1 A_2 . B_1 B_2 . \cos \omega$ ist, wo ω den Winkel bedeutet, den die zwei Geraden $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ mit einander bilden. (S. Baltzer, Determ. 3. Aufl. p. 212.) Die Formeln werden jedoch bei allgemeiner Lage der Punkte weniger einfach; bei passender Specialisirung erhält man den frühern analoge Formeln und erwähne ich hievon nur noch die den Gleichungen 7.) und 13.) analoge Formel für $E^{(3)}$. Liegen nämlich die zwei Systeme von je drei Punkten $A_1 A_2 A_3$, $B_1 B_2 B_3$ je in einer Geraden, so ist

$$E^{(3)} = 2 A_1 A_2 . A_1 A_3 . A_2 A_3 . B_1 B_2 . B_1 B_3 . B_2 B_3 . \cos \omega$$

wo ω den Winkel bezeichnet, welchen die zwei Geraden mit einander bilden.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1872

Band/Volume: 1872

Autor(en)/Author(s): Bauer Gustav

Artikel/Article: Bemerkungen über einige Determinanten geometrischer Bedeutung 345-354