Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band V. Jahrgang 1875.

München.
Akademische Buchdruckerei von F. Straub.
1875.

In Commission bei G. Franz.

Sitzung vom 3. Juli 1875.

Mathematisch-physikalische Classe.

Herr Bauer theilt mit:

„Bemerkungen über Reihen nach Kugelfunktionen und insbesondere auch über Reihen, welche nach Produkten oder Quadraten von Kugelfunktionen fortschreiten, mit Anwendung auf Cylinderfunktionen.

Bei den vielfachen Untersuchungen, welche in den letzten Jahren über die Bessel'schen oder Cylinder-Funktionen angestellt wurden, haben sich unter anderen auch sehr elegante Entwicklungen ergeben, welche nach Produkten oder Quadraten dieser Funktionen fortschreiten. *) Es lag daher nahe, auch bei den verwandten Kugelfunktionen nach Entwicklungen dieser Art sich umzusehen. Einzelnes, was sich mir unter diesem Gesichtspunkte dargeboten, findet sich in Folgendem zusammengestellt.

*) Lommel, „Studien über die Bessel'schen Funktionen." Leipzig 1868. § 12 u. 15.

C. Neumann, „Theorie der Bessel'schen Funktionen." Leipzig 1867. Letzterer hat diesem Gegenstand noch einen besonderen Aufsatz gewidmet, „Ueber die Entwicklung einer Funktion nach Quadraten und Produkten der Fourier-Bessel'schen Funktionen." Ber. d. kgl. sächs. Ges. d. Wiss. 1869, abgedruckt in den math. Anm. Bd. III. (1871). S. 531.

Die n^{te} Kugelfunktion von $x = \cos \Theta$ sei bezeichnet durch $P_n(x)$ oder $P_n(\cos \Theta)$ oder kurz durch P_n. Ebenso bezeichne Q_n die n^{te} Kugelfunktion 2^{te} Art von x, so ist

$$Q_n = \frac{1}{2} P_n \log \frac{x+1}{x-1} - R_n$$

In diesem Ausdruck bezeichnet R_n ein Polynom von x vom Grade $n - 1$, welches sich durch die Polynome P_n in der Form darstellen lässt

$$R_n = \frac{2n-1}{1 \cdot n} P_{n-1} + \frac{2n-5}{3(n-1)} P_{n-3} + \frac{2n-5}{5(n-2)} P_{n-5} + \cdots$$

die Reihe bis P_0 oder P_1 incl. fortgesetzt.

Es lässt sich aber noch eine andere Formel für R_n gewinnen, welche aus Produkten von je zwei P zusammengesetzt ist. Man findet nämlich für die erzeugende Funktion von R_n, d. i. die Summe $\sum R_n r^n$ den Ausdruck

$$\sum R_n r^n = (1 - 2rx + r^2)^{-\frac{1}{2}} \int_0^r (1 - 2rx + r^2)^{-\frac{1}{2}} \delta r .$$

Setzt man hierin für $(1-2rx+r^2)^{-\frac{1}{2}}$ die Reihe $\sum P_n r^n$ ein, so erhält man sofort die Gleichung *)

$$R_n = \frac{1}{n} P_0 P_{n-1} + \frac{1}{n-1} P_1 P_{n-2} + \frac{1}{n-2} P_2 P_{n-3} + \cdots + 1 \cdot P_{n-1} P_0$$

*) Diese Entwicklung von R_n ist, wie ich nachträglich bemerkte, schon in einer allgemeineren Formel von Herrn Christoffel, „Ueber die Gauss'sche Quadratur" Journ. v. Borchardt, Bd. 55 (1858) S. 72 inbegriffen, während die Formel für $\sum R_n r^n$, aus welcher sich diese Entwicklung unmittelbar ergibt, bereits in meiner Abhandlung „Von den Integralen gewisser Differentialgleichungen etc." München 1857. S. 13 sich findet, in welcher überhaupt mehrere von den Resultaten, zu welchen Herr Christoffel in seiner eben erwähnten Abhandlung gelangte, wie z. B. die Formel für die Coefficienten der Gauss'schen Quadratur (Gl. 37, S. 69 der Abh.) und ebenso auch die von Herrn Mehler in seinen „Be-

Diese Formel für R_n lässt sich nun benützen zur Bestimmung des Werthes des Integrals

$$\int_{-1}^{+1} P_m P_n P_p \, dx,$$

womit dann zugleich die Entwicklung des Produkts von zwei Kugelfunktionen $P_m P_n$ in eine Reihe von Kugelfunktionen gegeben ist.

Aus der ersten Formel für R_n folgt nach dem bekannten Gesetze von Reihenentwicklungen dieser Art, dass

$$\int_{-1}^{+1} R_n P_m \, dx = \frac{4}{(n-m)(n+m+1)}$$

wenn $m < n$ und m, n ungleichartig sind, während

$$\int_{-1}^{+1} R_n P_m \, dx = o$$

wenn $m \geqq n$ oder m, n gleichartig sind. Multiplicirt man demnach die zweite Gleichung für R_n nach und nach mit P_{n-1}, P_{n-3}, $\cdots$ und integrirt zwischen den Grenzen ± 1, so erhält man eine Reihe von Gleichungen zwischen Integralen obiger Form. Mit Hilfe dieser Gleichungen in Verbindung mit der bekannten Relation, welche drei aufeinanderfolgende P aneinander knüpft

$$(n+1)P_{n+1} - (2n+1) x P_n + n P_{n-1} = o,$$

ergibt sich vom spezielleren Falle zum allgemeineren aufsteigend, folgender Werth für obiges allgemeine Integral:

---

merkungen zur Theorie der mechanischen Quadratur" Journ. v. Borch. Bd. 63 (1864) S. 156 gefundene Entwicklung von R_n nach Potenzen von $x-1$, sowie dessen Darstellung von $P_n \log \frac{x+1}{x-1} - R_n$ als n^{ter} Differentialcoefficient von $(x^2-1)^n \log \frac{x+1}{x-1}$ bereits enthalten sind.

$$\int_{-1}^{+1} P_m P_n P_p \, dx =$$

$$2 \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots 2k+1} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 2k-2m-1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k-m} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 2k-2n-1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k-n} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 2k-2p-1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k-p}$$

wo k die halbe Summe der Indices, also $m + n + p = 2k$ ist. Hiebei ist vorausgesetzt, dass die Summe der Indices eine gerade Zahl ist, und keiner der Indices grösser ist, als die Summe der beiden anderen. Ist die Summe $m + n + p$ ungerade, so ist der Werth des Integrals selbstverständlich $= o$ und ebenso ist das Integral $= o$, sowie ein Index grösser ist, als die Summe der zwei anderen; denn denkt man sich $P_m P_n$ in eine Reihe nach Kugelfunktionen entwickelt, so ist das höchste Glied der Entwicklung P_{m+n} und das Integral muss mithin verschwinden, sowie $p > m + n$ ist, da bekanntlich $\int_{-1}^{+1} P_r P_s \, dx = o$ ist, ausser wenn $r = s$.

Setzt man $m = n$, $p = 2s$, so reducirt sich das Integral auf

$$\int_{-1}^{+1} P_n^2 P_{2s} dx = 2 \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 2s-1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots s} \right)^2 \cdot \frac{n-s+1 \cdot n-s+2 \cdots n+s}{2n-2s+1 \cdot 2n-2s+3 \cdots 2n+2s+1}$$

Mittelst dieser Integrale lassen sich nun die Produkte und Quadrate dieser Polynome P in eine Reihe solcher Polynome entwickeln und man hat z. B.

$$P_n^2 = \frac{1}{2n+1} P_0 + 5 \cdot \frac{n(n+1)}{2n-1 \cdot 2n+1 \cdot 2n+3} \cdot P_2 + \cdots$$

$$+ (4n+1) \left(\frac{1 \cdot 3 \cdots 2n-1}{1 \cdot 2 \cdots n} \right)^2 \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdots 2n}{3 \cdot 5 \cdots 4n+1} P_{2n} .$$

Man ersieht indessen, dass diese Entwicklungen für Produkte und Quadrate von Kugelfunktionen sich nicht einfach genug gestalten, um eine allgemeinere Anwendung zu gestatten und ich beschränkte mich desshalb auch in Bezug auf die Herleitung obigen Integrals auf die gegebenen Andeutungen, zumal diese Herleitung selbst keineswegs sehr einfach ist.

Immerhin kann obiges Integral dazu dienen, wenn für eine Funktion f(x) eine Entwicklung nach Produkten oder Quadraten von Kugelfunktionen P gefunden wurde, hieraus die Entwicklung derselben Funktion nach den Kugelfunktionen P selbst zu finden: denn es ist dann auch das Integral $\int_{-1}^{+1} f(x)\, P_n\, dx$ in Reihenform gegeben und somit die Coefficienten dieser Entwicklung bestimmt.

§ 2

Man kann nun aber auf anderem Wege sehr leicht aus einer gegebenen Entwicklung nach Kugelfunktionen P eine andere in gewissem Sinne allgemeinere Entwicklung derselben Art ableiten, welche nebenbei auch zu Entwicklungen nach Quadraten von Kugelfunktionen führt.

Ist $\cos\gamma = \cos\Theta \cos\Theta' + \sin\Theta \sin\Theta' \cos(\varphi - \varphi')$ mithin

$$(1 - 2\alpha\cos\gamma + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum P_n(\cos\gamma)\cdot\alpha^n$$

und Y_n irgend eine Kugelfunktion erster Art und n^{ter} Ordnung von den zwei Winkeln Θ, φ, so ist bekanntlich

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_n P_m(\cos\gamma) \sin\Theta d\Theta d\varphi = 0$$

wenn $m \gtrless n$, hingegen, wenn $m = n$

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_n P_n (\cos \gamma) \sin \Theta d\Theta d\varphi = \frac{4\pi}{2n+1} Y'_n$$

wo Y'_n das ist, was Y_n wird, wenn man darin Θ', φ' statt Θ, φ setzt. Ist mithin $f(\cos \Theta)$ irgend eine Funktion von $\cos \Theta$, für welche die Entwicklung statt hat

$$f(\cos \Theta) = \sum A_n P_n (\cos \Theta),$$

so hat man

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_n f(\cos \gamma) \sin \Theta d\Theta d\varphi = \frac{4\pi}{2n+1} A_n Y'$$

Nun gehört zu den Kugelfunktionen Y_n auch als spezieller Fall die Funktion einer Variablen $P_n (\cos \Theta)$. Substituirt man diese in die vorige Gleichung, so wird

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} P_n (\cos \Theta) \cdot f(\cos \gamma) \sin \Theta d\Theta d\varphi = \frac{4\pi}{2n+1} A_n P_n (\cos \Theta')$$

Hieraus und aus dem Gesetze, nach welchem in der Entwicklung einer Fnnktion nach Polynomen P_n die Coefficienten gebildet sind, geht hervor, dass

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\cos \gamma) d\varphi = \sum A_n P_n P'_n \qquad \text{(A}$$

wo P_n, P'_n für $P_n (\cos \Theta)$ und $P_n (\cos \Theta')$ gesetzt ist.

Setzt man in A.) $P_n (\cos \gamma)$ an die Stelle $f(\cos \gamma)$, so erhält man den schon von Legendre gegebenen Satz

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_n (\cos \gamma) d\varphi = P_n P'_n$$

Mittelst der Gl. A.) lässt sich aus jeder Entwicklung nach Polynomen P_n eine andere ableiten, welche nach

Produkten $P_n P'_n$ oder wenn man $\Theta' = \Theta$ setzt, nach Quadraten von P_n fortschreitet. Einige Entwicklungen, die sich auf diese Weise ergeben, mögen hier angeführt sein.

1. Setzen wir zunächst $f(\cos\gamma) = (1 - 2\alpha\cos\gamma + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$ so ist das Integral in A.) ein vollständiges elliptisches Integral erster Gattung und man erhält nach eiufachen Umformungen

$$\frac{2}{\pi\cdot\sqrt{a+b}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\psi}{\sqrt{1-\frac{2b}{a+b}\sin^2\psi}} = \sum P_n P'_n \alpha^n , \qquad (1.$$

wo

$$a = 1 - 2\alpha\cos\Theta\cos\Theta' + \alpha^2 \;,\quad a+b = 1 - 2\alpha\cos(\Theta - \Theta') + \alpha^2$$
$$b = \;\; - 2\alpha\sin\Theta\sin\Theta' \qquad ,\quad a-b = 1 - 2\alpha\cos(\Theta + \Theta') + \alpha^2$$

gesetzt wurde.

Setzt man $-\Theta'$ statt Θ', so ändert sich die rechte Gleichungsseite nicht, folglich hat dieses Integral denselben Werth wie das Integral

$$\frac{2}{\pi\sqrt{a-b}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\psi}{\sqrt{1+\frac{2b}{a+b}\sin^2\psi}}$$

d. h. wenn man

$$\frac{2b}{a+b} = \sin^2\lambda \;, \text{ also } \frac{2b}{a-b} = \operatorname{tg}^2\lambda \;, \quad \frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}} = \cos\lambda$$

setzt, es ist, wie bekannt

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\lambda\sin^2\varphi}} = \frac{1}{\cos\lambda}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\lambda\cdot\sin^2\varphi}}$$

Die Gleichung 1.) gilt ferner auch, wenn man α durch $-\alpha$ ersetzt, was darauf hinaus kömmt, Θ' durch $\pi + \Theta'$ zu ersetzen.

Da für $x = \cos\Theta = o\ P_{2n+1} = o,\ P_{2n} = (-1)^n \dfrac{1 \cdot 3 \cdots 2n-1}{2 \cdot 4 \cdots 2n}$

ist, so folgt für $\Theta' = \frac{\pi}{2}$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-2\alpha\sin\Theta\cos\varphi+\alpha^2}}$$

$$= \frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha\sin\Theta+\alpha^2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1+\frac{4\alpha\sin\Theta}{1-2\alpha\sin\Theta+\alpha^2}\sin^2\psi}}$$

$$= \sum (-1)^n \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdots 2n-1}{2 \cdot 4 \cdots 2n} \cdot \alpha^{2n} \cdot P_{2n} \tag{2.}$$

Setzt man aber $\Theta' = \Theta$, so kommt

$$\frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{1-\alpha} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1+\frac{4\alpha\sin^2\Theta}{(1-\alpha)^2}\sin^2\psi}} = \sum P_n^2\alpha^n. \tag{3.}$$

Die Reihenentwicklung 1.) bleibt im Allgemeinen auch convergent für $\alpha = \pm 1$. Für $\alpha = -1$ gibt Gleichung 3.) eine besonders einfache Entwicklung für das vollständige elliptische Integral erster Gattung mit dem Modul $\sin\Theta$, nach Quadraten der P fortschreitend

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1-\sin^2\Theta\sin^2\psi}} = \sum (-1)^n P_n^2 \tag{4.}$$

wo unter P_n immer $P_n(\cos\Theta)$ zu verstehen ist. Die Reihe ist convergent für jeden reellen Werth von Θ, ausser für $\Theta = o$, in welchem Falle dieselbe die Form $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ annimmt, also oscillirend wird, während der Werth der linken Gleichungsseite $= \frac{1}{2}$ ist, und für $\Theta = \frac{\pi}{2}$, in welchem Falle die Ausdrücke auf beiden Gleichungsseiten unendlich gross werden.

2. Setzt man $\alpha = e^{\beta i}$, wo $i = \sqrt{-1}$, so führt die Entwicklung von $(1 - 2\,\alpha\cos\Theta = \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$ sogleich zu den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\cos\frac{\beta}{2}}{\sqrt{\cos\beta-\cos\Theta}} &= \sum P_n\cos n\beta \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{-\sin\frac{\beta}{2}}{\sqrt{\cos\beta-\cos\Theta}} &= \sum P_n\sin n\beta \end{aligned}\right\}\ \text{wenn}\ \cos\beta>\cos\Theta$$

und 5.)

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\sqrt{\cos\Theta-\cos\beta}} &= \sum P_n\cos n\beta \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\cos\frac{\beta}{2}}{\sqrt{\cos\Theta-\cos\beta}} &= \sum P_n\sin n\beta \end{aligned}\right\}\ \text{wenn}\ \cos\Theta>\cos\beta$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich sodann ferner

$$\left.\begin{aligned} \sum P_n\sin\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\beta &= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\cos\Theta-\cos\beta}}, && \text{wenn}\ \cos\Theta>\cos\beta \\ &= o && \text{wenn}\ \cos\beta>\cos\Theta \end{aligned}\right\}\ 6$$

und

$$\left.\begin{aligned}\sum P_n \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\beta &= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\cos\beta-\cos\Theta}}, \quad \text{wenn } \cos\beta>\cos\Theta \\ &= o \quad, \text{wenn } \cos\Theta>\cos\beta\end{aligned}\right\} 7$$

Vermöge des Bildungsgesetzes der Coefficienten in der Entwicklung einer Funktion in eine Sinus- oder Cosinus-Reihe, stimmen diese Gleichungen überein mit Integralausdrücken für P_n, welche Herr **Mehler** aus den Dirichlet-schen Integralformen abgeleitet hat. *)

Integriren wir nun die letzte Reihe nach β von $\beta = o$ bis φ, und nehmen an, dass Θ zwischen o und π gegeben sei und dass $\varphi < \Theta$, so wird

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\varphi}\frac{d\beta}{\sqrt{\cos\beta-\cos\Theta}} = \int_0^{\frac{\varphi}{2}}\frac{d\psi}{\sqrt{\sin^2\frac{1}{2}\Theta-\sin^2\psi}}$$

oder wenn man $\sin\psi = \sin\frac{1}{2}\Theta\sin\omega$ setzt

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\varphi}\frac{d\beta}{\sqrt{\cos\beta-\cos\Theta}} = \int_0^{\sigma}\frac{d\omega}{\sqrt{1-\sin^2\frac{1}{2}\Theta\sin^2\omega}}$$

wo die Winkel φ und σ durch die Gleichung an einander gebunden sind

$$\sin\sigma\cdot\sin\frac{1}{2}\Theta = \sin\frac{1}{2}\varphi\,, \tag{8.}$$

so dass, wenn φ die Werthe von o bis Θ durchläuft, σ von o bis $\frac{\pi}{2}$ wächst.

Hiernach erhalten wir durch Integration nach β aus 7.) folgendes Resultat. Ist Θ ein Winkel zwischen o und π, so stellt die Reihe

$$\sum\frac{2}{2n+1}P_n\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi \tag{9.}$$

---

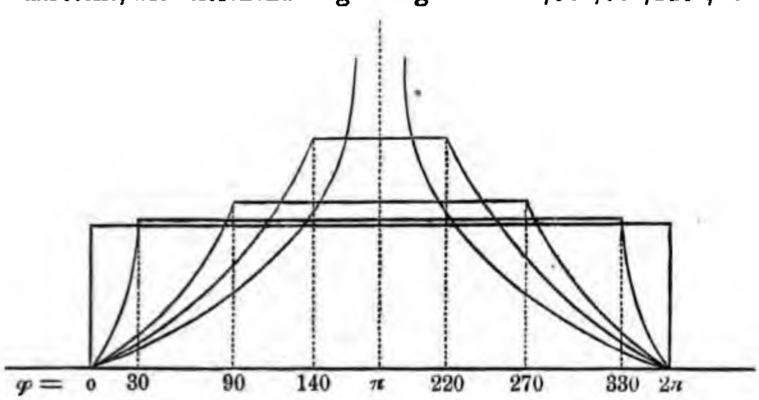
*) Notiz über die Dirichlet'schen Integralausdrücke für die Kugelfunktion P_n (cos δ). Math. Ann. Bd. V. (1872) S. 141.

so lange $\varphi < \Theta$ ist, die Werthe der elliptischen Funktion erster Art

$$\int_0^\sigma \frac{d\omega}{\sqrt{1-\sin^2\frac{1}{2}\Theta\sin^2\omega}} \tag{10.}$$

dar, deren Amplitude σ aus Gleichung 8.) bestimmt ist. Für $\varphi = \Theta$ erreicht die Reihe den Werth des vollständigen elliptischen Integrals 10.), indem $\sigma = \frac{\pi}{2}$ wird. Wächst φ über Θ hinaus, so ändert sich der Werth der Reihe 9.) nicht, wie aus den Gleichungen 7.) hervorgeht. Sie behält denselben Werth von $\varphi = \Theta$ bis $\varphi = 2\pi - \Theta$; worauf sie von $\varphi = 2\pi - \Theta$ bis $\varphi = 2\pi$ wieder dieselben Werthe wie von $\varphi = o$ bis $\varphi = \Theta$ in umgekehrter Ordnung durchläuft.

Geometrisch betrachtet stellt mithin die Reihe 9.) zwischen $\varphi = o$ und $\varphi = 2\pi$ eine Linie dar, zusammengesetzt aus zwei Curvenstücken (von $\varphi = o$ bis $\varphi = \Theta$ und von $\varphi = 2\pi - \Theta$ bis $\varphi = 2\pi$) deren Ordinaten die elliptische Funktion 10.) für die Amplituden $\sigma = o$ bis $\sigma = \frac{\pi}{2}$ repräsentiren und einer geraden Linie, welche die Endpunkte der beiden Bogen verbindend parallel zur Abscissenaxe der φ hinläuft und deren Ordinate das vollständige Integral darstellt, wie beistehende Figur zeigt für $\Theta = o, 30^\circ, 90^\circ, 140^\circ, \pi$.



Da die Reihe 9.) für $\varphi = \pi$ denselben Werth hat wie für $\varphi = \Theta$, nämlich das vollständige elliptische Integral 10.) darstellt, so hat man für dasselbe auch folgende sehr einfache Entwicklung nach Kugelfunktionen

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega}{\sqrt{1-\sin^2\frac{1}{2}\Theta\sin^2\omega}} = \sum (-1)^n \cdot \frac{2}{2n+1} P_n \quad (11.$$

wo wie oben P_n für $P_n(\cos\Theta)$ gesetzt ist.

Für $\Theta = \pi$, wird $P_n = (-1)^n$, mithin wird die Reihe 9.)

$$\sum (-1)^n \frac{2}{2n+1} \sin(n+\tfrac{1}{2})\varphi = \int_0^{\frac{\varphi}{2}} \frac{d\omega}{\cos\omega} = \log.\,\mathrm{tg}\,(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{4}\varphi)$$

für $\varphi < \pi$. Der geradlinige Theil in der geometrischen Darstellung der allgemeinen Reihe 9.) verschwindet in diesem Falle. Die Curve steigt von $\varphi = o$ bis $\varphi = \pi$ ins Unendliche, und fällt von $\varphi = \pi$ bis $\varphi = 2\pi$ vom Unendlichen bis zur Abscissenaxe der φ hinab.

Für $\Theta = o$ hingegen geht die Reihe 9.) in die bekannte Reihe

$$\sum \frac{2}{2n+1} \cdot \sin(n+\tfrac{1}{2})\varphi$$

über, welche von $\varphi = o$ bis $\varphi = 2\pi$ den constanten Werth $\frac{\pi}{2}$ hat. Hier verschwindet in der geometrischen Darstellung der Reihe 9.) der krummlinige Theil der sich in geradlinige Strecken an den Grenzen $\varphi = o$ und $\varphi = \pi$ senkrecht zur Abscissenaxe stehend verwandelt, indem der Werth der Reihe an diesen Grenzen $\varphi = o$ und $\varphi = 2\pi$

einen Sprung von o auf $\frac{\pi}{2}$ macht oder nach einer vielleicht richtigeren und mit dem allgemeinen Falle mehr übereinstimmenden Auffassung, *) in einem unendlich kleinen Intervall von φ die Werthe von o bis $\frac{\pi}{2}$ durchläuft.

3. Da $\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2} = -\alpha\int\frac{dx}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}}$ so erhält man mit Benützung der Formel

$$\int P_n \sin\Theta\, d\Theta = \frac{1}{2n+1}(P_{n-1} - P_{n+1})$$

sofort,

$$\sqrt{1-2\alpha\cos\Theta+\alpha^2} = 1-\alpha\cos\Theta - \sum_{n=1}\frac{1}{2n+1}(P_{n+1}-P_{n-1})\alpha^{n+1} \quad (12.$$

und hieraus

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sqrt{1-2\alpha\cos\gamma+\alpha^2}\cdot d\varphi = \frac{2}{\pi}\sqrt{a+b}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{2b}{a+b}\sin^2\psi}\, d\psi$$

$$= 1 - \sum_{n=0}\frac{\alpha^{n+1}}{2n+1}(P_{n+1}P'_{n+1} - P_{n-1}P'_{n-1}) \quad (13.$$

wo a, b dieselben Werthe haben wie in Formel 1.) und $P_{-1} = o$ zu setzen ist.

Für $\Theta = \Theta'$ wird

$$\frac{2}{\pi}(1-\alpha)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\frac{4\alpha\sin^2\Theta}{(1-\alpha)^2}\sin^2\psi}\cdot d\psi =$$

*) Vergl. Du Bois-Reymond „Ueber die sprungweise Aenderung analytischer Funktionen." Math. Ann. Bd. VII. (1874) S. 241.

$$\frac{2}{\pi}\sqrt{(1-\alpha)^2+4\alpha\sin^2\Theta}\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{4\alpha\sin\Theta}{(1-\alpha)^2+4\alpha\sin^2\Theta}\sin^2\psi}\cdot d\varphi$$

$$= 1 - \sum_{n=0}\frac{1}{2n+1}(P^2_{n+1}-P^2_{n-1})\alpha^{n+1} \qquad (14.$$

Je nach der Wahl der Constanten α, Θ' geben diese Gleichungen verschiedene Entwicklungen für das vollständige elliptische Integral zweiter Gattung, und gelten dieselben auch noch für $\alpha = \pm 1$.

Während die Gleichung 12.) für $\alpha = \pm 1$ ergibt

$$\frac{1}{2}\sin\frac{\Theta}{2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{1\cdot 5}P_1 - \frac{1}{3\cdot 7}P_2 - \frac{1}{5\cdot 9}P_3 - \cdots \qquad (15.$$

$$\frac{1}{2}\cos\frac{\Theta}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{1\cdot 5}P_1 - \frac{1}{3\cdot 7}P_2 + \frac{1}{5\cdot 9}P_3 - + \cdots \qquad (16.$$

folgt aus Gleichung 14.) für dieselben Werthe von α

$$\frac{1}{\pi}\sin\Theta = \frac{1}{3} - \frac{1}{1\cdot 5}P_1^2 - \frac{1}{3\cdot 7}P_2^2 - \frac{1}{5\cdot 9}P_3^2 - \cdots \qquad (17.$$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2\Theta\cdot\sin^2\varphi}\cdot d\varphi \qquad (18.$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{1\cdot 5}P_1^2 - \frac{1}{3\cdot 7}P_2^2 + \frac{1}{5\cdot 9}P_3^2 - + \cdot$$

welche Reihen sich von den voranstehenden 15.) 16.) nur dadurch unterscheiden, dass an die Stelle der P_n die Quadate dieser Polynome treten. Diese Gleichungen gelten auch noch für $\Theta = o$ und $\Theta = \frac{\pi}{2}$. Im letzteren Falle reduciren sich die beiden Gleichungen 17.) 18.) auf

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2 \cdot 4}\right)^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}\right)^2 + \cdots$$

Hiezu mag noch folgende Reihe angeführt werden, welche $\sin 2\Theta$ darstellt und erhalten wird, wenn man die Reihe 17.) mit $\cos \Theta$ multiplicirt und vermöge der Relation, welche drei aufeinanderfolgende P aneinanderknüpft, in den einzelnen Gliedern $P_n \cos \Theta$ durch P_{n+1} und P_{n-1} ausdrückt. Es ergibt sich sodann

$$\sin 2\Theta = \frac{1^2}{1 \cdot 3 \cdot 5} P_0 P_1 - \frac{2^2}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} P_1 P_2 - \frac{3^2}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} P_2 P_3 - \frac{4^2}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11} P_3 P_4 - \cdots \quad (19.$$

§ 3.

Auf demselben Wege kann man zu einer Entwicklung der Bessel'schen Cylinderfunktion $J_n(z)$ mittelst Kugelfunktionen gelangen. Ich habe früher gezeigt,*) dass die Entwicklung von $\cos(a \cos \Theta)$ und $\sin(a \cos \Theta)$ nach Kugelfunktionen ergibt

$$\left.\begin{aligned} \cos(a \cos \Theta) &= A_0 P_0 - A_2 P_2 + A_4 P_4 - + \cdots \\ \sin(a \cos \Theta) &= A_1 P_1 - A_3 P_3 + A_5 P_5 - + \cdots \end{aligned}\right\} \quad 1.$$

wo

$$A_0 = \frac{\sin a}{a} \quad (2.$$

und allgemein

$$A_n = \frac{2n+1}{a} (N_n \sin a - M_n \cos a) \quad (3.$$

ist, wenn M_n und N_n Zähler und Nenner des n^{ten} Näherungsbruches des folgenden Kettenbruchs sind:

---

*) „Von den Coefficienten der Reihen von Kugelfunktionen einer Variablen." Jour. v. Borchardt. Bd. 56 (1859) S, 106.

$$\frac{\sin a}{\cos a} = \operatorname{tg} a = \cfrac{1}{1/a - \cfrac{1}{3/a - \cfrac{1}{5/a - \cdots}}}$$

Es genügen mithin die M_n und N_n den Relationen

$$M_{n+1} - \frac{2n+1}{a} M_n + M_{n-1} = o$$

$$N_{n+1} - \frac{2n+1}{a} N_n + N_{n-1} = o$$

und die Funktionen A_n selbst, sind durch die Relation

$$A_n = a\left(\frac{1}{2n-1} A_{n-1} + \frac{1}{2n+3} A_{n+1}\right) \tag{4.}$$

aneinander gebunden.

Durch die Reihen 1.) sind die Funktionen A_n als Integrale gegeben, nämlich

$$(-1)^n A_{2n} = \frac{4n+1}{2} \int_{-1}^{+1} \cos ax \, . \, P_{2n} dx, \quad (-1)^n A_{2n+1} = \frac{4n+3}{2} \int_{-1}^{+1} \sin ax \cdot P_{2n+1} dx$$

woraus mittelst des bekannten Ausdrucks für P_n als n^{ter} Differentialquotient allgemein sich ergibt

$$\frac{2}{2n+1} \cdot A_n = \frac{a^n}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \int_0^\pi \cos(a \cos\varphi) \sin^{2n+1}\varphi \cdot \delta\varphi \tag{5.}$$

Endlich habe ich a. a. O. S. 119 auch nachgewiesen, dass die Funktion A_n durch die hypergeometrische Reihe dargestellt wird

$$\frac{1}{2n+1} A_n = \frac{a^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 2n+1}\left(1 - \frac{a^2}{2(2n+3)} + \frac{a^4}{2 \cdot 4 (2n+3)(2n+5} - + \cdots\right) \tag{6}$$

Da nun die Cylinderfunktion $J_n(z)$ durch das Integral

$$\frac{z^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 2n-1} \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(z \cos\varphi) \sin^{2n}\varphi \, d\varphi$$

oder auch durch die hypergeometrische Reihe

$$\frac{z^n}{2\cdot4\cdot\cdot2n}\left(1-\frac{z^2}{2\cdot(2n+2)}+\frac{z^4}{2.4\cdot(2n+2)(2n+4)}-+\cdot\cdot\right)$$

dargestellt wird, so ersieht man, dass wenn man Cylinderfunktionen mit gebrochenem Index zulassen will, die Funktion tion A_n nur durch einen Zahlenfaktor von der Funktion $a^{-\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(a)$ verschieden ist.*)

Setzen wir nun in den Gleichungen 1.) $\cos\gamma = \cos\Theta\cos\Theta' + \sin\Theta\sin\Theta'\cos\varphi$ an die Stelle von $\cos\Theta$ und integriren nach φ, so ergibt sich sogleich

$$\left.\begin{aligned}\cos(a\cos\Theta\cos\Theta')J_0(a\sin\Theta\sin\Theta') &= A_0P_0P'_0 - A_2P_2P'_2 + A_4P_4P'_4 - + \cdot\\ \sin(a\cos\Theta\cos\Theta')J_0(a\sin\Theta\sin\Theta') &= A_1P_1P'_1 - A_3P_3P'_3 + A_5P_5P'_5 - + \cdot\end{aligned}\right\} 7.$$

wo wie bisher P_n, P'_n für $P_n(\cos\Theta), P_n(\cos\Theta')$ gesetzt ist. Macht man hierin $\Theta' = \Theta$, so wird

$$\left.\begin{aligned}\cos(a\cos^2\Theta)J_0(a\sin^2\Theta) &= A_0P_0^2 - A_2P_2^2 + A_4P_4^2 - + \cdots\\ \sin(a\cos^2\Theta)J_0(a\sin^2\Theta) &= A_1P_1^2 - A_3P_3^2 + A_5P_5^2 - + \cdots\end{aligned}\right\} 7'$$

Setzt man aber $\Theta' = \frac{\pi}{2}$, so ergibt sich

$$\left.J_0(a\sin\Theta) = A_0P_0 + \frac{1}{2}A_2P_2 + \frac{1\cdot3}{2\cdot4}A_4P_4 + \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}A_6P_6 + \cdots\right\} 8.$$

Differentiirt man die erste der Gleichungen 7.) nach Θ und setzt sodann $\Theta' = \frac{\pi}{2}$, so erhält man, da

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(z\cos\varphi)\cos\varphi\, d\varphi = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(z\sin\varphi)\,\varphi\, d\varphi = J_1(z)$$

ist, **)

---

*) Diese Funktionen A_n sind seitdem mehrfach in Betracht gezogen worden, so von Heine, Journ. v. Borchardt. Bd. 69 (1868) S. 128; H. Weber ebendaselbst S. 233, Lommel, „Ueber die Bessel'schen Funktionen." (1868) und Math. Ann. Bd. II. (1870). S. 624.

**) Neumann, Bessel'schen Funktionen." S. 6.

$$\frac{1}{\sin\Theta} J_1(a \sin\Theta) = \sum \frac{1 \cdot 3 \cdots 2n-1}{2 \cdot 4 \cdots 2n} \frac{A_{2n}}{a} \frac{dP_{2n}}{x dx}$$

wo $x = \cos\Theta$. Diese Gleichung in Verbindung mit Gleichung 8.) verificirt sofort die Relation

$$J_1(z) = -\frac{dJ_0(z)}{dz}$$

Die für J_1 gefundene Reihe lässt sich auf folgende Weise umformen.

Setzen wir um abzukürzen im Folgenden immer

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 2n-1}{2 \cdot 4 \cdots 2n \cdot 2n+2 \cdot 2n+4 \cdots 2n+2k} = \alpha_{n,k}$$

wo k eine ganz positive Zahl und

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 2n-1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} = \alpha_{n,o};$$

dann wird die Gleichung für J_1, wenn wir für $\frac{A_{2n}}{a}$ seinen Werth aus der Relation 4.) einsetzen,

$$\frac{1}{\sin\Theta} J_1(a \sin\Theta) = \sum_{n=1} \alpha_{n,o} \left(\frac{A_{2n-1}}{4n-1} + \frac{A_{2n+1}}{4n+3}\right) \frac{dP_{2n}}{x dx}$$

oder wenn wir in dem ersten Theile der Reihe n+1 statt n setzen

$$\frac{1}{\sin\Theta} J_1(a \sin\Theta) = \sum_{n=o} \alpha_{n,1} \frac{A_{2n+1}}{4n+3} \left[(2n+1) \frac{dP_{2n+2}}{dx} + (2n+2) \frac{dP_{2n}}{dx}\right] \cdot \frac{1}{x}$$

Nun bestehen aber zwischen den Differentialquotienten derselben Ordnung von P_n, P_{n+1} und P_{n-1} eine ganz analoge Relation, wie zwischen diesen Funktionen selbst; man hat nämlich, wie sich leicht erweisen lässt, folgendes System von Relationen

$$(n+1-k) \frac{d^k P_{n+1}}{dx^k} + (n+k) \frac{d^k P_{n-1}}{dx^k} = (2n+1) x \frac{d^k P_n}{dx^k} \quad (9.$$

von $k = o$ bis $k = n$

Hiernach reducirt sich obige Entwicklung von J_1 auf folgende

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\sin\Theta} J_1(a\sin\Theta) &= \sum_{n=0} \alpha_{n,1} A_{2n+1} \frac{dP_{2n+1}}{dx} \\ -J_1(a\sin\Theta) &= \sum_{n=0} \alpha_{n,1} A_{2n+1} \frac{dP_{2n+1}}{d\Theta} \end{aligned}\right\} \quad 10.$$

Es ist nun nicht schwer nachzuweisen, dass für die Cylinderfunktion $J_k(a\sin\Theta)$ überhaupt, wo k irgend eine ganze positive Zahl ist, die Reihenentwicklung gilt

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\sin^k\Theta} J_k(a\sin\Theta) &= \sum_{n=0} \alpha_{n,k} A_{2n+k} \frac{d^kP_{2n+k}}{dx^k} \\ (-1)^k J_k a\sin\Theta) &= \sum_{n=0} \alpha_{n,k} A_{2n+k} \frac{d^kP_{2n+k}}{d\Theta^k} \end{aligned}\right\} \quad 11.$$

eine für reelle Werthe von a und Θ immer convergente Entwicklung. Um die allgemeine Gültigkeit derselben für jeden ganzen positiven Index k nachzuweisen, reicht es hin zu zeigen, dass, wenn sie für J_k und J_{k-1} besteht, auch für J_{k+1} gültig ist. Zu diesem Nachweis kann man sich der, der Relation 4.) analogen, Relation bedienen

$$J_{k+1}(z) = \frac{2k}{z} \cdot J_k(z) - J_{k-1}(z)$$

welche von $k=1$ an statt hat. Setzt man in derselben $z = a\sin\Theta$ und für J_k und J_{k-1} ihre Entwicklung aus 11.) ein, so erhält man

$$\frac{1}{\sin^{k-1}\Theta} J_{k+1}(a\sin\Theta) = \sum_{n=0} \alpha_{n,k} \frac{2kA_{2n+k}}{a} \frac{d^kP_{2n+k}}{dx^k}$$

$$- \sum_{n=0} \alpha_{n,k-1} A_{2n+k-1} \frac{d^{k-1}P_{2n+k-1}}{dx^{k-1}}$$

In der ersten Reihe ersetze man $\frac{A_{2n+k}}{a}$ durch seinen Werth aus der Relation 4.); in der zweiten Reihe ersetze man mittelst der Formel

$$P_n = \frac{1}{2n+1}\left(\frac{dP_{n+1}}{dx} - \frac{dP_{n-1}}{dx}\right) \tag{12.}$$

die $k-1^{ten}$ Differentialquotienten der P durch die k^{ten}, so geht die rechte Gleichungsseite über in

$$\sum_{n=0} -2n\,\alpha_{n,k}\frac{A_{2n+k-1}}{4n+2k-1}\frac{d^kP_{2n+k}}{dx^k} + \sum_{n=0}\alpha_{n,k}\frac{(2n+2k-1)A_{2n+k-1}}{4n+2k+3}\frac{d^kP_{2n+k}}{dx^k}$$

oder wenn man in der ersten Reihe, deren erstes Glied verschwindet, n+1 statt n setzt, in

$$\sum_{n=0}\alpha_{n,k}\frac{A_{2n+k+1}}{4n+2k+3}\left\{(2n+2k+1)\frac{d^kP_{2n+k}}{dx^k} - \frac{(2n+1)(n+1)}{n+k+1}\cdot\frac{d^kP_{2n+k+2}}{dx^k}\right.$$

Ersetzt man nun wieder die k^{ten} Differentialquotienten der P mittelst der Formel 12.) durch die $k+1^{ten}$ und reducirt mittelst der Relationen 9.) so geht der Ausdruck

$\frac{1}{4n+2k+3}\{\}$ über in

$$\frac{1-x^2}{2n+2k+2}\cdot\frac{d^{k+1}P_{2n+k+1}}{dx^{k+1}}$$

Hiemit wird nun, da $1-x^2 = \sin^2\Theta$,

$$\frac{1}{\sin^{k+1}\Theta}J_{k+1}(a\sin\Theta) = \sum_{n=0}\alpha_{n,k+1}A_{2n+k+1}\frac{d^{k+1}P_{2n+k+1}}{dx^{k+1}}$$

übereinstimmend mit der Entwicklung von $J_{k+1}(a\sin\Theta)$ nach der Formel 11.). Da nun vermöge der Gleichungen 8,) und 10.) diese Entwicklung gilt für k=o und k=1, so gilt sie auch für k=2, 3 u. s. f.

Für $\Theta=o$ wird $P_n=1$, für $\Theta=\frac{\pi}{2}$ wird $P_{2n+1}=o$, $P_{2n} = (-1)^n\alpha_{n,o}$ und man erhält somit aus den vorhergehenden Gleichungen folgende Entwicklungen nach Funktionen A_n:

$$\left.\begin{aligned}
\cos a &= \Sigma(-1)^n A_n \\
\sin a &= \Sigma(-1)^n A_{2n+1} \\
1 &= A_0 + \frac{1}{2} A_2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} A_4 + \cdots = \Sigma \alpha_{n,0} A_{2n} \\
J_0(a) &= \Sigma(-1)^n \alpha_{n,0}^2 A_{2n} \\
J_k(a) &= \sum (-1)^n \alpha_{n,0}^2 \frac{2n+1\cdot 2n+3 \cdots 2n+2k-1}{2n+2\cdot 2n+4 \cdots 2n+2k} A_{2n+k} \\
a^k &= \sum \frac{1\cdot 3\cdot 5 \cdots 2n+2k-1}{2\cdot 4\cdot 6 \cdots 2n} A_{2n+k}
\end{aligned}\right\} \quad 13.$$

alle Summen von $n=o$ an genommen.

Die Entwicklung von $J_k(a)$ ergibt sich aus 11) für $\Theta = \frac{\pi}{2}$, da

$$\left(\frac{d^k P_{2n+k}}{dx^k}\right)_{x=0} = (-1)^n \cdot \frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots 2n+2k-1}{2\cdot 4\cdot 6 \cdots 2n}$$

gefunden wird. Die Reihe für a^k ergibt sich aus derselben Gleichung für $\Theta = o$, da einerseits $\sin^{-k}\Theta J_k(a \sin\Theta)$ den Werth $\frac{a^k}{2.4..2k}$ annimmt, wie sogleich aus der Reihenentwicklung von $J_k(z)$ nach Potenzen von z folgt, andererseits

$$\left(\frac{d^k P_n}{dx^k}\right)_{x=1} = \frac{n-k+1\cdot n-k+2 \cdots n+k}{2\cdot 4\cdot 6 \cdots 2k},$$

also

$$\left(\frac{d^k P_{2n+k}}{dx_k}\right)_{x=1} = \frac{2n+1\cdot 2n+2 \cdots 2n+2k}{2\cdot 4 \cdots 2k}$$

ist, wie sich am leichtesten aus der Differentialgleichung, welcher P_n genügt und wiederholte Differentiation derselben ableiten lässt.

Ausser der Integralform 5.) für A_n, die sich aus der Reihenentwicklung 1.) ergibt, lässt sich noch eine andere aus der Reihe 8.) ableiten. Es ist nach den Gleichungen 8.) und 1.)

$$J_o(a\sqrt{1-x^2}) = \Sigma\alpha_{n,o} A_{2n}(a) P_{2n}$$
$$\cos bx = \Sigma(-1)^n A_{2n}(b) P_{2n}$$

wenn $\dot{A}(b)$ der Werth der Funktion A ist, wenn darin b statt a gesetzt wird. Da nun bekanntlich $\int P_m P_n dx = o$ ist, wenn $m \gtrless n$, $= \frac{2}{2n+1}$, wenn $m = n$, (das Integral zwischen den Grenzen $x = -1$ und $x = +1$ genommen), so folgt sofort durch Multiplication der beiden Reihen und Integration zwischen denselben Grenzen

$$\int_{-1}^{+1} \cos bx \cdot J_o(a\sqrt{1-x^2})\, dx = \sum (-1)^n \frac{13\cdots 2n-1}{2\cdot 4\ldots 2n} \cdot \frac{2}{2n+2} \cdot A_{2n}(a) A_{2n}(b) (1$$

Der Werth des Integrals ändert sich hienach nicht, wenn man a und b vertauscht, d. h. es ist

$$\int_{-1}^{+1} \cos bx . J_o(a\sqrt{1-x^2}) dx = \int_{-1}^{+1} \cos ax . J_o(b\sqrt{1-x^2}) dx \quad (15.$$

Auf ähnliche Weise lässt sich nachweisen, dass

$$a\int_{-1}^{+1} \sin bx \cdot J_o(a\sqrt{1-x^2}) dx = b\int_{-1}^{+1} \sin ax \cdot J_o(b\sqrt{1-x^2}) \cdot x dx \quad (16$$

ist.

Entwickelt man in der ersteren der beiden Gleichungen 15.) nach Potenzen von b, so kommt

$$\sum \frac{(-1)^n b^{2n}}{1\cdot 2\cdot\cdot 2n} \int_{-1}^{+1} x^{2n} J_o(a\sqrt{1-x^2}) dx = \sum \frac{(-1)^n b^{2n}}{(2\cdot 4\cdots 2n)^2} \int_{-1}^{+1} \cos ax \cdot (1-x^2)^n d$$

Die Gleichsetzung der Coefficienten von b^{2n} in den beiden Reihen gibt, da das Integral auf der rechten Seite für $x = \cos\Theta$ in das Integral 5.) übergeht

$$\frac{1}{1\cdot 3\cdot\cdot 2n-1} \int_{-1}^{+1} x^{2n} J_o(a\sqrt{1-x^2})\, dx = \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{A_n}{a^n} \quad (17.$$
$$= \frac{2}{a^{n+1}} (N_n \sin a - M_n \cos a)$$

Speziell erhält man für n=o

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} J_0(a\sqrt{1-x^2})\,dx = \frac{\sin a}{a}.$$

Das Integral in 17.) lässt sich noch in anderer Form durch die Funktionen A darstellen. Es ist nämlich*)

$$x^{2n} = \sum_{r=o}^{r=n} (4r+1)\frac{2n\cdot 2n-2\cdot\cdot 2n-2r+2}{2n+1\cdot 2n+3\cdots 2n+2r+1} P_{2r}$$

(das r=o entsprechende Glied der Reihe ist $\frac{1}{2n+1}$ P_0);

multiplicirt man diese Reihe mit der Reihe 8) für $J_0(a\sqrt{1-x^2})$ und integrirt zwischen den Grenzen $x=-1$ und $x=+1$, so erhält man sofort

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} x^{2n} J_0(a\sqrt{1-x^2})\,dx = \sum_{r=o}^{r=n} \alpha_{r,o}\frac{2n\cdot 2n-2\cdot\cdot 2n-2r+2}{2n+1\cdot 2n+3\cdot\cdot 2n+2r+1} A_{2r} \quad (18.$$

wo für das r=o entsprechende Glied der Summe $\frac{A_0}{2n+1}$ zu nehmen ist. Vergleicht man diesen Werth des Integrals mit dem in 17.), so ergibt sich

$$1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdot 2n-1\cdot\frac{A_n}{a^n} = \sum_{r=o}^{r=n} \alpha_{r,o}\frac{2n\cdot 2n-2\cdot\cdot 2n-2r+2}{2n+3\cdot 2n+5\cdot\cdot 2n+2r+1} A_{2r} \quad (19.$$

wo für das r=o entsprechende Glied A_0 zu nehmen ist. Dass $a^{-n} A_n$ sich durch eine Reihe der A von A_0 bis A_{2n} darstellen lasse, geht sogleich aus der Relation 4.) hervor. Die Gleichung 19.) gibt das Gesetz an, nach welchem die Coefficienten dieser Reihe gebildet sind.

§ 4.

Schliesslich möge hier noch eine Bemerkung Platz finden über die Entwicklung einer Funktion nach Kugelfunktionen.

*) „Reihen von Kugelfunktionen". Jour. v. Borchardt. Bd. 56, S. 113, oder Heine „Kugelfunktionen". S. 38.

Betrachten wir die endliche Reihe

$$1 \cdot P'_0 P_0 + 3 \cdot P'_1 P_1 + 5 P'_2 P_2 + \cdots + (2n+1) P'_n P_n$$

wo, wie bisher P_n für $P_n(x)$ oder P_n $(\cos \Theta)$, P'_n für $P_n(x')$ oder $P'_n (\cos \Theta')$ gesetzt ist. Die Summe dieser Reihe ist leicht zu finden. Denn multiplicirt man sie mit x und ersetzt $x\,P$ mittelst der bekannten Relation durch die benachbarten P, zieht hierauf dieselbe Reihe mit x' multiplicirt davon ab, so verschwinden, da zwischen den P' dieselbe Relation besteht wie zwischen den P, alle Glieder ausser den mit P_n und P_{n+1} behafteten, und man erhält das Resultat $(n+1)(P'_n P_{n+1} - P'_{n+1} P_n)$.

Bezeichnet man also das Polynom, wdlches durch obige Reihe dargesellt wird, mit $\pi_n(x,x')$, so ist

$$\Pi_n(x,x') = (n+1) \cdot \frac{P'_n P_{n+1} - P'_{n+1} P_n}{x - x'} \tag{1.}$$

Dieses Polynom ist schon von Herrn Christoffel in seiner oben angeführten Abhandlung über die Gauss'sche Quadratur *) betrachtet worden. Es soll nun aber gezeigt werden, wie dieses Polynom zur Entwicklung einer beliebigen Funktion nach Kugelfunktionen führt.

Sei $f(x)$ eine Funktion, die zwischen den Grenzen $x = -1$ und $x = +1$ nicht unendlich wird, und betrachten wir das Integral

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x') \,.\, \Pi_n (x,x') dx' \tag{2.}$$

so erhält man, wenn man darin für Π_n seine Entwicklung nach den P einsetzt

$$\sum_{n=0}^{n=n} \left(\frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x') P'_n dx' \right) \cdot P_n \tag{3.}$$

Man ersieht, dass das Gesetz dieser Reihe übereinstimmt mit dem Gesetz der Entwicklung der Funktion $f(x)$ nach Kugelfunktionen. Um nun den Werth der Reihe 3.)

---

*) Journ. von Borch. Bd. 55. S. 73.

zu finden, wenn wir dieselbe in's Unendliche fortsetzen, haben wir nur den Werth des Integrals 2.) zu suchen, wenn n über alle Grenzen hinaus wächst. Hiezu können wir uns des Poisson'schen Näherungswerthes von P_n für sehr grosse Werthe von n bedienen

$$P_n(\cos\Theta) = \left(\frac{2}{n\,\pi\sin\Theta}\right)^{\frac{1}{2}} \cos[(n+\tfrac{1}{2})\Theta - \tfrac{1}{4}\pi]$$

Führt man diesen Werth von P_n und die entsprechenden für P_{n+1}, P'_n, P'_{n+1}, sowie $\cos\Theta$ und $\cos\Theta'$ für x und x' in das Integral 2.) ein, so geht dasselbe nach einigen leichten Reduktionen in folgendes über:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi f(\cos\Theta')\sqrt{\frac{\sin\Theta'}{\sin\Theta}}\left\{\frac{\sin(n+1)(\Theta'-\Theta)}{\sin\frac{\Theta'-\Theta}{2}} - \frac{\cos(n+1)(\Theta'+\Theta)}{\sin\frac{\Theta'+\Theta}{2}}\right\}d\Theta',$$

dessen Werthbestimmung nach den Dirichlet'schen Betrachtungen über die Convergenz der Sinus- und Cosinus-Reihen (Crelle Journ. Bd. 4) sich ergibt. Mittelst des Integrals

$$\frac{1}{\pi}\int_g^h \varphi(\alpha)\cdot\frac{\sin k\,\alpha}{\sin\alpha}d\alpha$$

welches $= \varphi(o)$, wenn g und h verschiedenes Zeichen haben hingegen $= o$ ist, wenn g und h von gleichen Zeichen sind, k als eine unendlich grosse positive Zahl vorausgesetzt, beweisst man sofort, dass der erste Theil obigen Integrals sich auf $f(\cos\Theta)$ reducirt, während der andere verschwindet. Hiemit ist nachgewiesen, dass die Reihe 3.) ins Unendliche fortgesetzt, den Werth f(x) hat, es müsste denn sein, dass für ein bestimmtes x die Funktion f eine Unstetigkeit erleidet, in welchem Falle der Werth der Reihe nach Dirichlet'scher Auffassung $= \frac{1}{2}[f(x+o) + f(x-o)]$ ist.

Andererseits hat man das Resultat, dass wenn eine Funktion f(x) in eine Reihe nach Kugelfunktionen entwickelt gegeben ist

$$f(x) = c_0 P_0 + c_1 P_1 + c_2 P_2 + \cdots + c_n P_n + \cdots.$$

das Integral

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} f(x')\, \Pi_n(x, x')\, dx'$$

genau die Summe der n+1 ersten Glieder bis zu dem Gliede mit P_n incl. darsellt. Nebenbei folgt hieraus auch die bemerkenswerthe Eigenschaft der Funktion $\Pi_n(x, x')$, dass wenn $\varphi(x)$ eine ganze Funktion vom Grade $m < n$ ist, immer

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \varphi(x')\, \Pi_n(x, x')\, dx' = \varphi(x)$$

ist.

Bricht man die Reihe für $f(x)$ nach dem Gliede $c_n P_n$ ab, so ist der Rest der Reihe

$$R_n = f(x) - \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} f(x')\, \Pi_n(x, x')\, dx'$$

oder da

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \Pi_n(x, x')\, dx = 1,$$

$$R_n = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} [f(x) - f(x')]\, \Pi_n(x, x')\, dx'$$

$$= \frac{n+1}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{f(x) - f(x')}{x - x'} (P'_n P_{n+1} - P'_{n+1} P_n)\, dx'$$

Setzt man daher

$$\int_{-1}^{+1} \frac{f(x) - f(x')}{x - x'} P'_m dx = \varphi_m(x),$$

so wird der Rest der Reihe für $f(x)$ vom Gliede $c_{n+1}P_{n+1}$ an

$$R_n = \frac{n+1}{2}\left\{ \varphi_n(x)\, P_{n+1}(x) - \varphi_{n+1}(x) P_n(x) \right\}.$$