Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band VI. Jahrgang 1876.

München.

Akademische Buchdruckerei von F. Straub.

1876.

In Commission bei G. Franz.

Sitzung vom 5. Februar 1876.

Mathematisch-physikalische Classe.

Herr **Ludwig Seidel** hält einen Vortrag:

„**Ueber die Probabilitäten solcher Ereignisse, welche nur selten vorkommen, obgleich sie unbeschränkt oft möglich sind.**"

Das folgende Problem ist in der Theorie der Wahrscheinlichkeiten sehr vielfacher Einzel-Anwendungen fähig: *Ein Ereigniss A kann in einer unbeschränkt grossen, oder doch in einer sehr grossen und nicht näher bekannten Anzahl von Einzelfällen, die von einander unabhängig sind, und alle als gleich möglich gelten, möglicherweise zur Verwirklichung kommen; es bestehen aber dafür, dass es gar nicht, oder im Ganzen gerade Einmal, gerade zweimal, etc. realisirt wird, endliche und nicht der Einheit ganz nahe kommende Wahrscheinlichkeiten* y_0, y_1, y_2, ... *Eine dieser Grössen ist gegeben; wie bestimmen sich hiernach die übrigen?*

So zum Beispiel ist die Anzahl der Kometen, deren Helligkeit ein beliebig angenommenes Minimum überschreitet, und die in Einem Jahre zur Erscheinung kommen können, unseres Wissens durch nichts endlich begrenzt; die Probabilitäten für ganz mässige Zahlen solcher Erscheinungen in

Einem Jahre sind aber beträchtlich gross. Man kann die Frage aufwerfen: gesetzt man kennt die Wahrscheinlichkeit, dass *wenigstens* Einmal im vorgeschriebenen Zeitraum ein solches nicht voraus berechnetes Ereigniss sich begibt, wie stellen sich die Erwartungen dafür, dass es *nur* Einmal, oder dass es zweimal etc. geschehen wird. Oder umgekehrt: man kennt die Wahrscheinlichkeit, dass der Fall sich gerade Einmal ergeben wird, und fragt nach derjenigen, dass es zweimal etc., sowie nach der, dass es gar nicht stattfinden wird. Bei einer grossen Anzahl anderer Natur-Phänomene, die sehr oft hervortreten könnten, aber doch einen gewissen Grad von Seltenheit haben, findet die gleiche Betrachtung ihre Anwendung. Aehnlich könnte man denken, dass in einer Gegend, wo sehr viele Menschen wohnen und also möglicherweise auf einem bestimmten Wege angetroffen werden könnten, die Wahrscheinlichkeiten, innerhalb einer gewissen Zeit (z. B. bei Nacht) gar keinem, oder nur Einem, nur zweien etc. dort zu begegnen, beträchtlich gross sind und zu analogen Fragen wie zuvor Veranlassung geben; oder auch, dass in einem Staate von sehr bedeutender Einwohnerzahl gewisse Vorkommnisse, z. B. besondere Delicte, innerhalb eines Jahres doch nur vereinzelt sich ereignen, und dass daher die Probabilität eines n-maligen Vorkommens fast allein für die paar ersten Werthe von n. in Betracht kommt, und wieder zu solchen Fragen, wie oben gestellt wurden, Anlass gibt.

Die überaus vielseitige Anwendung, welche unsere Aufgabe finden kann, scheint die Mittheilung ihrer Lösung zu rechtfertigen, so einfach auch dieselbe auf demjenigen Wege sich ergibt, der im Nachstehenden eingeschlagen wird, und auf welchen man sich gewiesen sieht, sobald man diejenigen Anwendungen, bei welchen das Ereigniss unbeschränkt oft vorkommen kann, nicht für sich allein, sondern in Verbindung mit solchen betrachtet, bei welchen nothwendige aber sehr weite Schranken für die Häufigkeit von A existiren.

In der That bilden auch die Fälle dieser letzteren Kategorie, denen die beiden letzten der obigen Exemplificationen angehören, bereits eine Ausnahme von der allgemeinen Regel des Bernoulli'schen Satzes, weil nach dieser, wenn die ganze Anzahl der Fälle, in welchen A eintreten könnte, sehr gross wird, für jede einzelne bestimmte Zahl n die Wahrscheinlichkeit, es werde A gerade n mal sich ereignen, sich der Null nähert, und nur mehr *dafür* endliche Probabilitäten übrig bleiben, dass die wirkliche Anzahl der realisirten Fälle von A in solchen Schranken eingeschlossen sein wird, die zwar relativ gegen die Gesammtzahl der Möglichkeiten eng, absolut genommen aber sehr weit gesteckt sind, — deren Differenz nämlich die Quadratwurzel aus der Anzahl der Möglichkeiten zum Factor hat. Auch passt das Gesetz der grossen Zahlen seiner mathematischen Begründung nach nicht auf Fälle, in welchen schliesslich nur zu Gunsten ganz mässiger Zahlen, vielleicht einiger wenigen der allerersten in der natürlichen Scala, Probabilitäten bestehen bleiben. Die zuerst gedachten Beispiele aber, in welchen trotz der unbegrenzten Anzahl von Möglichkeiten das Endergebniss noch derselben Art ist, lassen sich ohnedies nicht direct den Prämissen jenes Satzes unterordnen. Wohl aber kann die Lösung der gestellten Fragen auch für diesen Grenzfall auf dieselben Grundlagen basirt werden, auf welchen der Bernoulli'sche Satz ruht.

Denkt man sich zunächst eine endliche Anzahl N von einander unabhängiger Processe, von welchen jeder für sich Einmal mit der Probabilität $p = 1 - q$ das Ereigniss A herbeiführen kann, so wird bekanntlich die Wahrscheinlichkeit, dass A im Ganzen gerade n mal verwirklicht wird, sein

$$z_n = \frac{N(N-1)(N-2)\cdots(N-n+1)}{1. \quad 2. \quad 3. \quad \cdots \quad n} p^n q^{N-n}$$

wobei

$$z_0 = q^N$$

Hält man endliche Werthe von p und q fest, und lässt N fortwährend wachsen, so nähert sich z_n der Null; für denjenigen Werth von n, welcher z_n möglichst gross macht, und für die ihm benachbarten gestaltet sich dann z_n bekanntlich zum Elemente eines Integrales, welches die Probabilität repräsentirt, dass die Häufigkeit des Vorkommens von A innerhalb bestimmter Grenzen fällt, deren Abstand von dem erwähnten ausgezeichneten Werthe von n man eine der $\sqrt{N}$ proportionale Ausdehnung geben muss, wenn bei beständig wachsendem N das Integral einen endlichen und von Eins verschiedenen Werth behalten soll. Dies ist die Regel des Bernoulli'schen Satzes.

Sollen dagegen, während N wächst, die Grössen z_0, z_1, z_2,... sich endlichen Grenzen y_0, y_1, y_2, ... nähern, so muss man sich offenbar denken, dass p eine kleine Grösse der Ordnung N^{-1} ist; denn nur so wird

$$\log z_0 = -N(p + \tfrac{1}{2}p^2 + \ldots)$$

endlich bleiben, ohne zu verschwinden. Setzt man demnach

$$p = \frac{\lambda}{N}\ , \quad q = 1 - \frac{\lambda}{N}$$

wobei λ irgend eine feste positive Grösse vorstellt, deren Zahlenwerth je nach der besondern Natur des Falles der Anwendung verschieden sein wird, und geht man darauf von den z zu ihren Grenzen y für unendliche N über, so erhält man:

$$\left\{\begin{aligned} y_0 &= e^{-\lambda} \qquad\qquad \text{und allgemein} \\ y_n &= \frac{1}{1.2.3..n}\, e^{-\lambda} \lambda^n \end{aligned}\right.$$

in welchen Gleichungen die Lösung der Anfangs gestellten Aufgabe enthalten ist. Sie bietet, wie man sieht, die Eigenthümlichkeit dar, dass der Zusammenhang zwischen der Wahrscheinlichkeit, das Ereigniss A werde in irgend einer bestimmten Anzahl von Fällen eintreten, und der analogen für eine andere Anzahl ein transscendenter ist, während man dagegen, wenn erst zwei der Grössen y berechnet sind, alle übrigen algebraisch ableiten kann.

Je nachdem λ zwischen 0 und 1, oder zwischen 1 und 2. 2 und 3, etc. liegt, wird offenbar unter den verschiedenen Grössen y entweder y_0, oder y_1, y_2, ... die grösste sein, so dass nach der Besonderheit des Falles diese Eigenschaft auf jeden beliebigen Index treffen kann.

Wenn man sich vorstellt, dass y_n die Wahrscheinlichkeit sei, dass innerhalb eines bestimmten Zeitabschnittes oder Gebietes das Ereigniss A n mal zu Stande kommt, so lässt sich aus den Grössen y_0, y_1, y_2, ... y_n offenbar auch die Wahrscheinlichkeit zusammensetzen, dass in dem doppelten dann in dem dreifachen etc. Abschnitt oder Gebiet dasselbe n mal sich begibt. Diese Wahrscheinlichkeit muss der Natur der Sache nach selbst wieder ein Ausdruck von der Form der Grösse y_n sein, nur mit verändertem Werthe der Constanten λ. Wenn man diese Betrachtung, die eine Verification der gefundenen Resultate enthält, durchführt, so findet man in der That, dass an die Stelle von λ lediglich die Grössen 2λ, 3λ, ... treten, wenn die Gelegenheit zum Hervortreten des Ereignisses A durch Verdoppelung, Verdreifachung etc. des Zeitraumes oder des Gebietes, für welches y_n gilt, vervielfältigt wird. Auch stimmt dies Ergebniss mit der ursprünglichen Bedeutung von $\lambda = Np$ durchaus überein; denn wenn die Zeit verdoppelt wird, innerhalb deren A (welches in jedem Augenblicke gleich leicht sich begibt) hervortreten soll, so wird für jeden einzelnen Process, der A herbeiführen kann, die Wahrscheinlichkeit p, dass er diese Wirkung hat, sich verdoppeln *); eine Vergrösserung des Gebietes dagegen, auf

*) Streng genommen würde sie $1 - (1 - p)^2$; in unserer Anwendung fällt aber die zweite Ordnung von p ausser Betracht.

welchem in Anwendungen anderer Art überall gleich leicht A realisirt wird, vergrössert den Werth von N. In beiden Fällen wächst also λ naturgemäss im gleichen Verhältnisse.

Die Constante λ selbst lässt sich definiren als der Mittelwerth, wie er im grossen Durchschnitt aus vielen beobachteten Werthen von n zu erwarten ist. Denn wenn man jedes n multiplicirt mit der Wahrscheinlichkeit y_n, dass es in einem einzelnen Falle statt finden wird, und alle diese Producte addirt, so erhält man λ; — wiederum ganz übereinstimmend mit dem Ergebniss einer Betrachtung, welche sich auf die ursprüngliche Einführung von $\lambda = pN$ stützt. — Man kann sonach auch solche Fragen beantworten, wie: wenn ein Ereigniss im grossen Durchschnitt 7mal im Jahre eintritt, während es unendlich oft eintreten konnte, wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es in einem vorausbezeichneten Jahre gar nicht eintreten wird — im Beispiel ist dieselbe $= e^{-7}$ oder nicht ganz $\frac{1}{1000}$ — oder, wie die umgekehrte Frage: wie oft per annum wird im Durchschnitt ein Ereigniss A zu erwarten sein, für dessen Häufigkeit keine Schranken gesteckt sind, und bei welchem die Probabilität, es werde in einem Jahre nicht völlig ausbleiben, gleich ist 0,999? —

Als ein vielleicht von der Erwartung, zu der man geneigt sein möchte, etwas abweichendes Ergebniss der mathematischen Analyse mag hier erwähnt werden, dass, wenn, wie in dem eben angenommenen Beispiel, die Durchschnittszahl λ eine ganze Zahl r ist, es um nichts wahrscheinlicher ist, dass A gerade r mal, als dass es nur $r-1$ mal eintritt, und dass sogar die letztere Probabilität die erstere ein wenig übertrifft, sobald λ ein wenig kleiner als r genommen wird. Gesetzt z. B., dass im Durchschnitt vieler Jahre 6,9 Kometen-Erscheinungen auf ein Jahr träfen, so wäre der Fall, wo nur 6 beobachtet werden, etwas häufiger zu erwarten, als der von 7, indem hier y_6 im Verhältniss von 7 : 6,9 grösser ist als y_7. Eine naheliegende Ueberlegung benimmt übrigens diesem Rechnungs-Resultate das Paradoxe, was es auf den ersten Blick haben kann. Denn da unterhalb der plausibelsten ganzen Zahl (im Beispiel der Zahl 6) nur einige wenige ihr nahe, oberhalb aber unendlich viele liegen, so ist es sehr begreiflich, dass aus dem grossen Durchschnitt eine grössere Zahl, als jene im einzelnen Fall plausibelste hervorgehen wird.