Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band VI. Jahrgang 1876.

München.
Akademische Buchdruckerei von F. Straub.
1876.

In Commission bei G. Franz.

Sitzung vom 2. December 1876.

Mathematisch-physikalische Classe.

Herr v. Bauernfeind bespricht sein

Näherungs-Verfahren zur Ausgleichung der zufälligen Beobachtungsfehler in geometrischen Höhennetzen.

Der Umstand, dass in mehreren Staaten Europas, welche sich seit zwölf Jahren zu einer Europäischen Gradmessung verbunden haben, die mit dieser Messung verbundenen Präcisionsnivellemente ihrer Vollendung entgegengehen, hat bereits eine Reihe von Abhandlungen über die beste Art der Ausgleichung der Beobachtungsfehler in den durch jene Nivellemente geschaffenen geometrischen Höhennetzen hervorgerufen. So in den Astronomischen Nachrichten (Jahrgang 1875, Nr. 2052) die Arbeit der Herrn Generallieutenants Dr. Baeyer „über Fehlerbestimmung und Ausgleichung eines geometrischen Nivellements", ferner in der Zeitschrift für Vermessungswesen (Jahrgang 1876, Heft 7, S. 313 u. ff.) die „Ausgleichung eines Systems gemessener Höhenunterschiede eines Präcisionsnivellements" von Herrn Generallieutenant v. Morozowicz, und in derselben Zeitschrift (1876, Heft 8, S. 390 und ff.) eine mit Bezug auf die Abhandlung des Herrn v. Morozowicz verfasste Mittheilung des Herrn Professors Dr. Jordan in Carlsruhe über die „Ausgleichung eines Nivellementsnetzes". Früher schon hatte Herr Professor Jordan in seinem Taschenbuche der praktischen Geometrie (Stuttgart 1873, § 89, S. 182 u. ff.) die Ausgleichung trigonometrischer Höhenmessungen behandelt und deren Anwendung auf geometrische Nivellemente gezeigt. Alle diese Anleitungen stimmen darin überein, dass sie die wohlbekannten Regeln der Methode der kleinsten Quadrate auf die Ausgleichung der zufälligen Fehler, welche von den auf geometrischem oder trigonometrischem Wege gefundenen Höhenunterschieden eines gegebenen Systemes von Fixpunkten nicht zu trennen sind, anwenden, und sie weichen von einander ab theils in der Gewichtsbestimmung der Beobachtungen und theils in dem Rechnungsmechanismus, durch welchen die Verbesserungen der gemessenen Höhenunterschiede gefunden werden.

Alle diese Methoden liefern für eine bestimmte Strecke eines gegebenen Höhennetzes, das wir uns aus einer beliebigen Anzahl geschlossener und unter sich zusammenhängender Nivellementsschleifen oder N-Polygone bestehend zu denken haben, die gleichen Verbesserungen, wenn die Gewichte der Beobachtungen in gleicher Weise bestimmt sind, d. h. wenn diese Gewichte bei jeder Methode entweder den Längen der nivellirten Strecken oder den Quadraten der wahrscheinlichen Fehler der beobachteten Höhenunterschiede umgekehrt proportional angenommen werden; diese Methoden liefern aber verschiedene Werthe für die Verbesserung einer bestimmten Strecke eines gegebenen Netzes, wenn die Gewichte der gemessenen Höhenunterschiede nach verschiedenen Principien oder gar nach sogenannten „praktischen Erwägungen" d. i. ziemlich willkürlich bestimmt worden sind.

So lange nun die Zahl der Schleifen oder Polygone, welche ein Höhennetz zusammensetzen, gering ist, also etwa über 10 nicht hinausgeht, sind die Zahlenrechnungen, aus denen die Verbesserungen und mittleren Fehler der nivellirten Strecken sich ergeben, noch immer erträglich, sie steigern sich aber bis zur Unerträglichkeit und praktischen Unausführbarkeit, wenn die Zahl der auszugleichenden Polygone gross wird. Jedenfalls steht schon bei mehr als 10 Polygonen, die auf die Ausgleichung zu verwendende Arbeit in keinem annehmbaren Verhältnisse mehr zu dem möglicherweise damit verbundenen Gewinne an Genauigkeit, zumal die wirklichen Schlussfehler der nach den üblichen präcisen Methoden nivellirten Polygone oder Schleifen selten mehr als 3 Millimeter für eine Strecke von 1 Kilometer Länge betragen.

Wie gross die Zahl der in jedem gegebenen Falle zu behandelnden Gleichungen ist, lässt sich leicht übersehen, wenn man die Bedingungen aufstellt, welche eine systematisch nach der Methode der kleinsten Quadrate durchgeführte Ausgleichung zu erfüllen hat. Besteht nämlich das geometrische Höhennetz aus n zusammenhängenden Polygonen oder Schleifen, so sind zunächst die n Bedingungsgleichungen zu erfüllen, welche sich aus der Forderung ergeben, dass die algebraische Summe der Höhenunterschiede aller Strecken eines geschlossenen Nivellementspolygons der Null, oder die Summe aller Steigungen eines solchen Polygons der Summe aller Gefälle desselben gleich sein muss. Zu diesen n Bedingungen kommt noch die weitere, dass die Summe der Produkte aus den Fehlerquadraten in die zugehörigen Gewichte ein Minimum sein soll. Haben nun sämmtliche zu einem Höhennetz vereinigte Polygone m Seiten oder Strecken, wobei jedoch die Ausschlussseiten je zweier Polygone nur ein Mal gezählt sind, so müssen aus weiteren m Fehler-Gleichungen die an den gedachten m Strecken anzubringenden Verbesserungen gesucht werden. In jedem Falle sind also n + m Gleichungen aufzulösen, wobei freilich nur die erstgenannten n Bedingungsgleichungen um so mehr Schwierigkeiten bereiten, je grösser ihre Zahl ist. Wenn demnach die Höhennetze für Länder von der Grösse Bayerns noch recht gut nach der strengen Methode der kleinsten Quadrate ausgeglichen werden können, so ist dieses System nur mit ganz besonderen Schwierigkeiten auf die Präcisionsnivellemente grösserer Länder, wie Deutschland, Oesterreich, Frankreich, Italien u. s. w. anzuwenden, und für das gesammte Europäische Höhennetz geradezu unausführbar. Dieses Netz und wohl auch schon die der eben genannten Staaten müssen in kleinere Theile von höchstens 10 Polygonen zerlegt, in diesen Theilen ausgeglichen und dann durch Hilfsmittel, welche den Anspruch auf strenge Wissenschaftlichkeit nicht mehr machen können, mit einander verbunden werden.

Meine Methode der Ausgleichung kennt diese Schwierigkeit nicht, die Rechnungsarbeit wächst einfach mit der Zahl der Polygone, während sie bei dem strengen Verfahren nach einer kaum zu bestimmenden hohen Potenz der Polygonzahl zunimmt. Sie erfüllt alle Bedingungen der strengen Methode mit Ausnahme der einzigen, dass die Summe der Fehlerquadrate ein Minimum ist; angestellte Vergleichungen zeigen jedoch, dass die von mir gefundenen Quadratsummen stets nur wenig grösser sind, als die nach der strengen Methode bestimmten Minima der Fehler-Quadrate.

Ich gehe nämlich von der Erwägung aus, dass es sich eigentlich nicht rechtfertigen lässt, die auf ein Nivellementspolygon verwendete vorzügliche Arbeit durch die minder gute eines anderen Polygons zu trüben oder letztere durch erstere zu verschleiern: ebendesshalb fange ich die Ausgleichung bei dem Polygon an, welches den stärksten Schluss- oder Kilometerfehler hat und vertheile diesen Fehler über den ganzen Umfang des Polygons proportional den Längen der Seiten desselben. Nach diesem Polygon kommt dasjenige Nachbarpolygon, welches unter diesen den grössten Schluss- und beziehungsweise Kilometerfehler hat, zur Ausgleichung. In diesem zweiten Polygon wird die Anschlussseite beibehalten, wie sie sich aus dem ersten Polygon ergeben hat, und es kommt demnach nur mehr der durch die verbesserte Anschlussstrecke abgeänderte Schlussfehler des zweiten Polygons auf dem um die Anschlussseite verminderten Umfange desselben zur proportionalen Vertheilung. Dasselbe geschieht in analoger Weise bei dem dritten, vierten und jedem weiter folgenden Polygon, das nur mit Einer Seite den bereits ausgeglichenen Netztheil berührt. Bei denjenigen Polygonen aber, welche mit zwei oder selbst drei Strecken an die schon ausgeglichenen Polygone geknüpft sind, werden die bereits berechneten Verbesserungen dieser Strecken ebenfalls beibehalten und nur mehr die Reste der Schlussfehler auf die übrigen Strecken ihren Längen proportional vertheilt.

Mit diesem Verfahren ist angenommen, dass die Gewichte p_1 p_2 p_3 p_4 . . . . der beobachteten Strecken deren Längen s_1 s_2 s_3 s_4 . . . umgekehrt proportional seien, wie sich leicht beweisen lässt. Denn hätte man nur ein einziges Polygon mit 4 Strecken, deren beobachtete Höhenunterschiede d_1 d_2 d_3 d_4 und deren gesuchte Verbesserungen v_1 v_2 v_3 v_4 sind, auszugleichen, so wären die zu erfüllenden Bedingungen:

1) $(d_1 + v_1) + (d_2 + v_2) + (d_3 + v_3) + (d_4 + v_4) = 0$

2) $p_1 v_1 v_1 + p_2 v_2 v_2 + p_3 v_3 v_3 + p_4 v_4 v_4 =$ minimum.

Ist der Schlussfehler des Polygons $= \Delta$, so ist diesem Fehler die Summe aller Verbesserungen gleich zu setzen und daher, wenn man diese gebildete Gleichung noch mit einem beliebigen constanten Factor k multiplicirt:

3) $$\Delta k = (v_1 + v_2 + v_3 + v_4)\, k.$$

Differentiirt man die Gleichungen (2) und (3) nach bekannten Regeln, so ergeben sich zunächst folgende lGeichungen zur Bestimmung der Verbesserungen:

4)
$$\begin{aligned} p_1 v_1 + k &= 0 \\ p_2 v_2 + k &= 0 \\ p_3 v_3 + k &= 0 \\ p_4 v_4 + k &= 0 \end{aligned}$$

und es sind die in k und den nivellirten Strecken $s_1\, s_2\, s_3\, s_4$, deren Gesammtlänge S sei, ausgedrückten Verbesserungen selbst:

5)
$$\begin{aligned} v_1 &= -\frac{k}{p_1} = -\frac{s_1}{S} k \\ v_2 &= -\frac{k}{p_2} = -\frac{s_2}{S} k \\ v_3 &= -\frac{k}{p_3} = -\frac{s_3}{S} k \\ v_4 &= -\frac{k}{p_4} = -\frac{s_4}{S} k. \end{aligned}$$

Setzt man diese Werthe in die vorher mit k dividirte Gleichung (3), so wird

6) $$\varDelta S = -(s_1 + s_2 + s_3 + s_4)\, k$$

woraus folgt, dass in dem vorliegenden Falle $k = -\varDelta$ ist und dass demnach, wenn man die auf die Längenheit des Umfangs S treffende Verbesserung

7) $$v = \frac{\varDelta}{S}$$

setzt, die einzelnen Verbesserungen werden:

8)
$$\begin{aligned} v_1 &= -s_1 \,.\, v \\ v_2 &= -s_2 \,.\, v \\ v_3 &= -s_3 \,.\, v \\ v_4 &= -s_4 \,.\, v \end{aligned}$$

womit bewiesen ist, dass aus der vorhin erwähnten Annahme der Gewichte die den Strecken proportionale Fehlervertheilung folgt. Indem wir also eine solche Vertheilung der Fehler vornehmen, berücksichtigen wir auch die den Strecken umgekehrt proportional gesetzten Gewichte, ohne dass von diesen im Verlauf der Rechnung die Rede ist.

Um zu beweisen, dass meine Methode der Ausgleichung die erste Forderung des Schlusses aller Polygonzüge und des Gesammtumfangs der Einzelpolygone erfüllt, wenn jedes von diesen zum Schlusse gebracht ist, lege ich folgende Figur zu Grunde, welche dem Bayerischen Nivellementsnetze entspricht, übrigens nach Belieben erweitert gedacht werden kann.

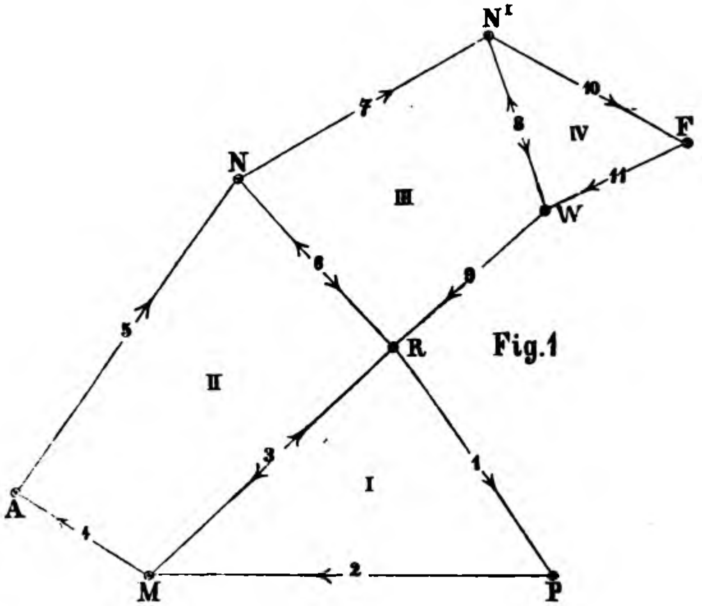


Fig. 1

In dieser Figur heisse das durch die Hauptfixpunkte in R (Regensburg), P (Passau) und M (München) gebildete Polygon RPM das erste (I), seine im Allgemeinen durch die Eisenbahnen bezeichneten Strecken haben folgende horizontale Längen und verticale Steigungen:

von R nach P: Länge $= s_1$, Neigung $+ d_1$
„ P „ M „ s_2 „ $- d_2$
„ M „ R „ s_3 „ $+ d_3$

Der Gesammtumfang dieses Polygons $s_1 + s_2 + s_3$ heisse S_1 und der Schlussfehler $d_1 - d_2 + d_3 = \varDelta_1$.

Ferner wurde das Polygon RMANR, worin R und M ihre vorige Bedeutung haben, A aber Augsburg und N Nürnberg bezeichnet, das zweite (II) genannt; in ihm sind die Längen und Neigungen der Strecken folgende:

von R nach M: Länge $= s_3$, Neigung $- d_3$
„ M „ A „ s_4 „ $+ d_4$
„ A „ N „ s_5 „ $+ d_5$
„ N „ R „ s_6 „ $- d_6$

In gleicher Weise seien in dem III. Polygon RNN'R, worin von den noch unbekannten Eckpunkten N' Neuenmarkt und W Weiden bedeutet, die Längen und Neigungen folgende:

von R nach N: Länge $= s_6$, Neigung $+ d_6$
„ N „ N' „ s_7 „ $- d_7$
„ N' „ W „ s_8 „ $- d_8$
„ W „ R „ s_9 „ $+ d_9$

Endlich habe das IV. Polygon WN'FW mit den Hauptfixpunkten in W, N' und F (Franzensbad) folgende Längen und Neigungen der Strecken:

von W nach N': Länge $= s_8$, Neigung $+ d_8$
„ N' „ F „ s_{10} „ $- d_{10}$
„ F „ W „ s_{11} „ $+ d_{11}$

Heissen die an den Strecken d_1 bis d_{11} anzubringenden Verbesserungen v_1 bis v_{11}, so müssen, da durch letztere der verticale Polygonschluss bewirkt wird, folgende Gleichungen stattfinden:

$$9)\quad + (d_1 + v_1) - (d_2 + v_2) + (d_3 + v_3) = 0$$
$$- (d_3 + v_3) + (d_4 + v_4) + (d_5 + v_5) - (d_6 + v_6) = 0$$
$$+ (d_6 + v_6) - (d_7 + v_7) - (d_8 + v_8) + (d_9 + v_9) = 0$$
$$+ (d_8 + v_8) - (d_{10} + v_{10}) + (d_{11} + v_{11}) = 0.$$

Bei der Bildung dieser Gleichungen ist darauf zu sehen, dass alle Polygone in g l e i c h e m Sinne, hier von links nach rechts, umfahren werden, und dass man für die zweimal aber entgegengesetzt durchfahrenen Anschlussstrecken, hier s_3, s_6, s_8, die Neigungen mit entgegengesetzten Vorzeichen anschreibt, so dass auf $+ (d_3 + v_3)$ folgt $- (d_3 + v_3)$, auf $- (d_6 + v_6)$ folgt $+ (d_6 + v_6)$, auf $- (d_8 + v_8)$ folgt $+ (d_8 + v_8)$ u. s. w.

Addirt man vorstehende Bedingungsgleichungen, welche jede beliebige Anzahl vorstellen können, so fallen die Neigungen der Anschlussstrecken, weil jede zweimal mit entgegengesetzten Vorzeichen vorkommt, heraus und man erhält

$$10)\quad + (d_1 + v_1) - (d_2 + v_2) + (d_4 + v_4) + (d_5 + v_5) - \\ - (d_7 + v_7) + (d_9 + v_9) - (d_{10} + v_{10}) + (d_{11} + v_{11}) = 0$$

womit bewiesen ist, dass auch der Umfang der Figur RPMANN'FWR schliesst, sobald alle Einzelpolygone schliessen.

Es schliesst aber auch jeder beliebige Polygonzug, z. B. RPMANN'WR, welcher aus den Polygonen I, II, III gebildet ist, oder RMANN'FWR, welcher aus den Polygonen II, III, IV besteht; denn addirt man in dem ersten Falle die 3 ersten Gleichungen des Systems (9), so folgt (11)

$$(d_1 + v_1) - (d_2 + v_2) + (d_4 + v_4) + (d_5 + v_5) - (d_7 + v_7) - (d_8 + v_8) + (d_9 + v_9) = 0$$

und wenn man in dem zweiten Falle die 3 letzten Gleichungen des Systems (9) addirt, so ist (12)

$$- (d_3 + v_3) + (d_4 + v_4) + (d_5 + v_5) - (d_7 + v_7) - (d_{10} + v_{10}) + (d_{11} + v_{11}) + (d_9 + v_9) = 0$$

womit die aufgestellte Behauptung bewiesen ist.

Dieser Beweis gilt wie der vorige für Nr 10, ganz allgemein, da man in der hier angegebenen Art eine noch so grosse Zahl aneinander gereihter Polygone immer in gleichem Sinne und so umfahren kann, dass die Anschlussstrecken doppelt aber entgegengesetzt werden, wodurch deren Höhenunterschiede aus der Summe der Gleichungen herausfallen und diese Summe dann den Schluss des Umfangs ausspricht. Meines Wissens ist auf diese einfache und anschauliche Art des Beweises, dass der Schluss der Einzelpolygone auch den des Umfangs aller oder beliebig vieler Polygone eines Netzes bedingt, noch nirgends aufmerksam gemacht worden, und wenn auch die meisten Geodäten, welche über die Ausgleichung von Höhennetzen geschrieben haben, für den Umfang aller Polygone eine besondere Bedingungsgleichung nicht aufstellten, weil sie wussten, dass diese schon mit denen der Einzelpolygone gegeben ist, so ist es doch noch im Jahre 1875 von einer Autorität geschehen, wie man aus Nr 2052 der Astronomischen Nachrichten und deren besonderem Abdrucke ersehen kann.

Es ist nunmehr die Frage zu beantworten, wie gross die Abweichung zwischen dem bekannten strengen Verfahren und meiner Näherungsmethode ist.

Durch die Gleichungen (1) bis (8) auf Seite 247 bis 248 habe ich schon bewiesen, dass, wenn es sich nur um ein einziges Polygon handelt, zwischen meinem Verfahren und dem der Methode der kleinsten Quadrate gar kein Unterschied besteht, indem beide Verfahren auf die den Strecken proportionale Fehlervertheilung führen, von der ich ausgehe.

Für 2 aneinander gereihte Polygone lässt sich der Unterschied in den Verbesserungen und deren Quadratsummen noch allgemein darstellen, für 3 oder mehr Polygone hört die Allgemeinheit des Beweises auf und muss man sich mit Zahlenbeispielen begnügen.

Nehmen wir an, es seien die Polygone I und II in der schon benützten Figur nach den in Rede stehenden zwei Verfahren auszugleichen, so bestehen nach beiden folgende Bedingungsgleichungen:

13) $+ (d_1 + v_1) - (d_2 + v_2) + (d_3 + v_3) = 0$

$- (d_3 + v_3) + (d_4 + v_4) + (d_5 + v_5) - (d_6 + v_6) = 0.$

Die Methode der kleinsten Quadrate fordert aber noch die Erfüllung der weiteren Bedingung:

14) $p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + p_3 v_3^2 + p_4 v_4^2 + p_5 v_5^2 + p_6 v_6^2 = \text{min.}$

Schreibt man für die bekannten Schlussfehler in den beiden Polygonen I und II je einen einzigen Buchstaben, nämlich

15) $$\begin{aligned} \Delta_1 &= + d_1 - d_2 + d_3 \\ \Delta_2 &= - d_3 + d_4 + d_5 - d_6 \end{aligned}$$

und multiplicirt die beiden Gleichungen des Systems (13) mit willkührlichen constanten Factoren, die erste mit k_1 und die zweite mit k_2, so erhält man

16) $$\begin{aligned} \Delta_1 k_1 + (v_1 - v_2 + v_3) k_1 &= 0 \\ \Delta_2 k_2 - (v_3 - v_4 - v_5 + v_6) k_2 &= 0 \end{aligned}$$

Hieraus und aus (14) ergeben sich durch Differentiiren nach den Veränderlichen $v_1\ v_2\ v_3 \ldots v_6$ die sechs Gleichungen, welche zur Bestimmung dieser Verbesserungen führen, und diese selbst, nämlich:

17) $$\begin{aligned} 0 &= p_1 v_1 + k_1 \\ 0 &= p_2 v_2 - k_1 \\ 0 &= p_3 v_3 + k_1 - k_2 \\ 0 &= p_4 v_4 + k_2 \\ 0 &= p_5 v_5 + k_2 \\ 0 &= p_6 v_6 - k_2 \end{aligned}$$

18) $$\begin{aligned} v_1 &= - \frac{k_1}{p_1} \\ v_2 &= + \frac{k_1}{p_2} \\ v_3 &= + \frac{k_2 - k_1}{p_3} \\ v_4 &= - \frac{k_2}{p_4} \\ v_5 &= - \frac{k_2}{p_5} \\ v_6 &= + \frac{k_2}{p_6} \end{aligned}$$

Führt man diese Werthe von v_1 bis v_6 in die Gleichungen (16) ein, nachdem sie vorher wieder mit k_1 und beziehungsweise k_2 dividirt sind, und bedenkt, dass, wenn S_I der Umfang des Polygons I, S_{II} jener des Polygons II und S der Umfang beider Polygone ist,

$$\frac{1}{p_1} = \frac{s_1}{S}, \quad \frac{1}{p_2} = \frac{s_2}{S}, \quad \frac{1}{p_3} = \frac{s_3}{S}$$

wird, so erhält man folgende Gleichungen zur Bestimmung von k_1 und k_2, nämlich:

$$19)\quad \begin{aligned} \Delta_1 S &= (s_1 + s_2 + s_3) k_1 - s_3 k_2 &&= S_I k_1 - s_3 k_2 \\ \Delta_2 S &= - s_3 k_1 + (s_3 + s_4 + s_5 + s_6) k_2 &&= - s_3 k_1 + S_{II} k_2 \end{aligned}$$

Hieraus folgt in bekannter Weise:

$$20)\quad \begin{aligned} k_1 &= \frac{\Delta_1 S_{II} + \Delta_2 s_3}{S_I S_{II} - s_3 s_3} \cdot S = Q_1 . S \\ k_2 &= \frac{\Delta_1 s_3 + \Delta_2 S_I}{S_I S_{II} - s_3 s_3} \cdot S = Q_2 . S \end{aligned}$$

und hiemit, wenn man in (18) substituirt:

$$21)\quad \begin{aligned} v_1 &= - s_1 \cdot Q_1 \\ v_2 &= + s_2 \cdot Q_1 \\ v_3 &= - s_3 \cdot (Q_1 - Q_2) \\ v_4 &= - s_4 \cdot Q_2 \\ v_5 &= - s_5 \cdot Q_2 \\ v_6 &= + s_6 \cdot Q_2 \end{aligned}$$

Es verhalten sich demnach bei der Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate die Verbesserungen aller Strecken eines Polygons, welche nicht Anschlussstrecken sind, wie die Längen dieser Strecken, d. h. in dem Polygon I die absoluten Werthe

$$v_1 : v_2 = s_1 : s_2$$

und im Polygon II ohne Rücksicht auf Vorzeichen

$$v_4 : v_5 : v_6 = s_4 : s_5 : s_6$$

Dieses nämliche Verhältniss stellt sich auch bei der Ausgleichung nach meiner Methode dar. Wenn nämlich $+ \Delta_1$ der auf die 3 Strecken s_1 s_2 s_3 des Polygons Nr I zu vertheilende Schlussfehler ist, so wird der auf die Längeneinheit des Umfangs S_I treffende Theil der Verbesserung $\Delta_1 : S_I = Q^I$ und es ist folglich in diesem Polygon, wenn man die neuen Verbesserungen mit $\mathfrak{v}_1$ $\mathfrak{v}_2$ $\mathfrak{v}_3$ ... bezeichnet:

$$22)\quad \begin{aligned} \mathfrak{v}_1 &= - s_1 . Q^I \\ \mathfrak{v}_2 &= + s_2 . Q^I \\ \mathfrak{v}_3 &= - s_3 . Q^I. \end{aligned}$$

In dem zweiten Polygon ist der Rest des Schlussfehlers oder

23) $$\Delta_2 - \mathfrak{v}_3 = \Delta_2 + s_3 \, . \, Q^{I}$$

auf die 3 Strecken s_4 s_5 s_6 im Verhältniss zu deren Längen und nach dem Einheitswerthe

24) $$\frac{\Delta_2 - \mathfrak{v}_3}{S_{II} - s_3} = \frac{\Delta_2 + s_3 \, Q^{I}}{S_{II} - s_3} = Q^{II}$$

zu vertheilen; es wird demnach mit Rücksicht auf die zweite Gleichung im System (13), da $\mathfrak{v}_3$ schon aus Polygon I gegeben ist:

25) $$\begin{aligned} \mathfrak{v}_4 &= - s_4 \, . \, Q^{II} \\ \mathfrak{v}_5 &= - s_5 \, . \, Q^{II} \\ \mathfrak{v}_6 &= + s_6 \, . \, Q^{II} \end{aligned}$$

Aus den in (22) und (25) ausgedrückten Werthen der Verbesserungen sieht man, dass folgende Proportionen stattfinden:

$$\begin{aligned} \mathfrak{v}_1 : \mathfrak{v}_2 : \mathfrak{v}_3 &= s_1 : s_2 : s_3 \\ \mathfrak{v}_4 : \mathfrak{v}_5 : \mathfrak{v}_6 &= s_4 : s_5 : s_6 \end{aligned}$$

womit bewiesen ist, dass sich die nach meinem abgekürzten Verfahren berechneten Werthe mindestens ebenso gut als die nach der Methode der kleinsten Quadrate erhaltenen den Streckenverhältnissen anschliessen. Dabei brauchen selbstverständlich die absoluten Werthe der Verbesserungen noch nicht übereinzustimmen. Die Abweichungen der einzelnen Verbesserungen und ihrer Quadrate ergeben sich wie folgt:

26) $$\begin{aligned} v_1 - \mathfrak{v}_1 &= - s_1 (Q_I - Q^{I}) \\ v_2 - \mathfrak{v}_2 &= + s_2 (Q_I - Q^{I}) \end{aligned}$$
u. s. w.

27) $$\begin{aligned} v_1^2 - \mathfrak{v}_1^2 &= s_1^2 (Q_I^2 - Q_I^2) \\ v_2^2 - \mathfrak{v}_2^2 &= s_2^2 (Q_I^2 - Q_I^2) \end{aligned}$$
u. s. w.

Hieraus lässt sich jedoch die Ungleichung $[vv] < [\mathfrak{v}\mathfrak{v}]$ nicht allgemein beweisen, sie folgt lediglich aus dem von Gauss in seiner theoria combinationis etc. (art. 37 und 38) bewiesenen Satze, dass jedes andere als das durch die Methode der kleinsten Quadrate gelieferte System von Unbekannten eine grössere Quadratsumme der Fehler liefert als diese Methode. Hier kommt es nur darauf an, dass der Unterschied [vv] — [𝔳𝔳] in allen praktischen Fällen nicht zu gross wird, und dieses ist bei meiner Methode der Fall.

Wendet man die beiden hier beschriebenen Ausgleichungsmethoden auf einige bestimmte Fälle an, so wird man am besten die Verschiedenheit beider in der Rechnungsweise und in den Ergebnissen bezüglich der Fehlerquadrate und mittleren Fehler erkennen.

Wählen wir zunächst z. B. das aus 4 geschlossenen Polygonen bestehende Bayerische Höhennetz, zu dessen Ausgleichung ich bereits in der vierten Mittheilung über das Bayerische Präcisionsnivellement, (vergl. die Abhandlungen unserer Akademie, Cl. II, Bd. XII. Abth. 3, S. 81 u. ff.) Die erforderlichen Daten angegeben habe, nämlich mit Bezug auf Fig. 1. und die bereits erklärten Bezeichnungen:

	Km					
s_1	= 125,771	$d_1 = + \; 35{,}8723$	von	R	nach	P
s_2	= 179,025	$d_2 = - \; 217{,}5062$	„	P	„	M
s_3	= 147,266	$d_3 = + \; 181{,}6541$	„	M	„	R
s_4	= 60,597	$d_4 = + \; 32{,}0958$	„	M	„	A
s_5	= 174,047	$d_5 = + \; 179{,}5981$	„	A	„	N
s_6	= 101,083	$d_6 = - \; 30{,}0005$	„	N	„	R
s_7	= 134,879	$d_7 = - \; 38{,}6644$	„	N	„	N¹
s_8	= 80,112	$d_8 = - \; 48{,}8053$	„	N¹	„	W
s_9	= 87,034	$d_9 = + \; 57{,}4440$	„	W	„	R
s_{10}	= 96,768	$d_{10} = - \; 100{,}1619$	„	N¹	„	F
s_{11}	= 67,892	$d_{11} = + \; 51{,}4646$	„	F	„	W

Es ist demnach der Schlussfehler des Polygons

$$
\begin{aligned}
&\text{Nr I} = \Delta_1 = + d_1 - d_2 + d_3 && = + \overset{m}{0{,}0202} \\
&\text{Nr II} = \Delta_2 = - d_3 + d_4 + d_5 - d_6 && = + 0{,}0393 \\
&\text{Nr III} = \Delta_3 = + d_6 - d_7 - d_8 + d_9 && = - 0{,}0252 \\
&\text{Nr IV} = \Delta_4 = + d_8 - d_{10} + d_{11} && = + 0{,}1080
\end{aligned}
$$

und es sind die Längen aller Umfänge und aller Strecken folgende:

$$
\begin{aligned}
& & & \text{Km} \\
S_{I} &= s_1 + s_2 + s_3 &= & \;452{,}062 \\
S_{II} &= s_3 + s_4 + s_5 + s_6 &= & \;482{,}993 \\
S_{III} &= s_6 + s_7 + s_8 + s_9 &= & \;403{,}108 \\
S_{IV} &= s_9 + s_{10} + s_{11} & & \;244{,}772 \\
S &= s_1 + s_2 + s_3 .. + s_{11} &= & \;1254{,}474.
\end{aligned}
$$

Wendet man diese Zahlen auf die in Nr 9 mit Rücksicht auf den vorliegenden Fall dargestellten 4 Bedingungsgleichungen und auf die allgemeine Function $[pvv] = \min.$ an, so ergeben sich zur Bestimmung der willkührlichen Factoren k_1 k_2 k_3 k_4 folgende 4 Normalgleichungen (a. a. O S. 122):

$$
\begin{aligned}
S\Delta_1 &= + S_I k_1 - s_3 k_2 \\
S\Delta_2 &= - s_3 k_1 + S_{II} k_2 - s_6 k_3 \\
S\Delta_3 &= \qquad\qquad - s_6 k_2 + S_{III} k_3 - s_9 k_4 \\
S\Delta_4 &= \qquad\qquad\qquad\qquad - s_9 k_3 + S_{IV} k_4.
\end{aligned}
$$

Aus diesen erhält man, wenn für die Umfänge S, S_I, S_{II}, S_{III}, S_{IV} und die Strecken s_3, s_6, s_9 die vorstehenden Werthe eingesetzt werden:

$$
\begin{aligned}
k_1 &= + 1{,}0473 \\
k_2 &= + 1{,}4947 \\
k_3 &= + 0{,}7385 \\
k_4 &= + 5{,}7763
\end{aligned}
$$

und hiemit ergeben sich aus den nach (17) und (18) gebildeten 11 Gleichungen die Verbesserungen v_1 bis v_{11} und deren Quadrate:

	cm	
29)	$v_1 = -1{,}05$	$v_1^2 = 1{,}1025$
	$v_2 = +1{,}49$	$v_2^2 = 2{,}2201$
	$v_3 = +0{,}52$	$v_3^2 = 0{,}2756$
	$v_4 = -0{,}72$	$v_4^2 = 0{,}5184$
	$v_5 = -2{,}07$	$v_5^2 = 4{,}2849$
	$v_6 = +0{,}61$	$v_6^2 = 0{,}3721$
	$v_7 = +0{,}79$	$v_7^2 = 0{,}6241$
	$v_8 = -3{,}21$	$v_8^2 = 10{,}3041$

$$v_9 = -\overset{\text{cm}}{0{,}51} \qquad v_9^2 = 0{,}2601$$
$$v_{10} = +4{,}46 \qquad v_{10}^2 = 19{,}8916$$
$$v_{11} = -3{,}13 \qquad v_{11}^2 = 9{,}7969$$
$$[vv] = 49{,}6504.$$

Aus diesen Fehlerquadraten und den bekannten Streckenlängen findet sich nach der Formel

$$30)\qquad m^2 = \frac{1}{11}\left(\frac{v_1^2}{s_1} + \frac{v_2^2}{s_2} + \frac{v_3^2}{s_3} + \ldots + \frac{v_{11}^2}{s_{11}}\right)$$

der mittlere Fehler des Bayerischen Präcisionsnivellements für einen Kilometer:

$$m = \pm \overset{\text{mm}}{2{,}601}$$

während er nach den Bestimmungen der Allgemeinen Conferenz der Europäischen Gradmessung 3^{mm} betragen dürfte.

Die verbesserten Höhenunterschiede werden somit

$$31)\qquad \begin{aligned}
d_1^1 &= +(d_1 + v_1) = + 35{,}8618\\
d_2^1 &= -(d_2 + v_2) = - 217{,}5211\\
d_3^1 &= +(d_3 + v_3) = \pm 181{,}6593\\
d_4^1 &= +(d_4 + v_4) = + 32{,}0886\\
d_5^1 &= +(d_5 + v_5) = + 179{,}5774\\
d_6^1 &= -(d_6 + v_6) = \pm 30{,}0066\\
d_7^1 &= -(d_7 + v_7) = - 38{,}6723\\
d_8^1 &= -(d_8 + v_8) = \mp 48{,}7732\\
d_9^1 &= +(d_9 + v_9) = + 57{,}4389\\
d_{10}^1 &= -(d_{10} + v_{10}) = - 100{,}2065\\
d_{11}^1 &= +(d_{11} + v_{11}) = + 51{,}4333
\end{aligned}$$

und man kann sich sofort überzeugen, dass alle Polygone einzeln und ganz oder theilweise aneinander gereiht schliessen. Die Vorzeichen der Strecken Nr 3, Nr 6, Nr 8 sind entgegengesetzt, und es gilt das obere für das vorausgehende, das untere für das nachfolgende Polygon, in welchem die betreffende Strecke nach einer der vorigen entgegengesetzten Richtung durchfahren wird. Bei der Addition sämmtlicher Höhenunterschiede heben sich die mit doppelten Vorzeichen auf und es deutet der Umstand, dass die Summe der übrigen Unterschiede null wird, den Schluss des Gesammtumfangs an.

Berechnet man die Verbesserungen des in Fig. 1 dargestellten Bayerischen Netzes nach meinem Verfahren, so beginnt man am zweckmässigsten mit dem Polygon IV (der Fichtelgebirgsschleife), worin der grösste Schluss- und Kilometerfehler vorkommt*), und lässt hierauf die Polygone III, II, I folgen. Der Grund dieser Reihenfolge ist, dass der grosse Anschlussfehler $\varDelta_4$ über alle Seiten des Polygons IV den Streckenlängen proportional vertheilt und diese Vertheilung nicht vom Polygon III her, welches nur einen kleinen Schlussfehler $\varDelta_3$ hat, beeinflusst wird. Denn müsste man die verbesserte Strecke s_8 in IV beibehalten, wie sie sich aus III ergeben hat, so träfen auf die Strecken s_{10} und s_{11} zu grosse Theile des Schlussfehlers $\varDelta$ und damit erhielte man auch eine grössere Quadratsumme der Fehler als in dem Falle, wo man die Polygone nach der umgekehrten Reihenfolge IV, III, II, I ausgleicht.

Da auf den Umfang S_{IV} der Schlussfehler $\varDelta_4$ trifft, so kommt auf die Längeneinheit der Strecke eine Verbesserung $\varDelta_4 : S_{IV} = Q^{IV}$ und es wird folglich

$$\begin{aligned} v_8 &= - s_8 \,.\, Q^{IV} = - \overset{m}{0{,}03535} = - \overset{cm}{3{,}54} \\ v_{10} &= + s_{10} \,.\, Q^{IV} = + 0{,}04268 = + 4{,}27 \\ v_{11} &= - s_{11} \,.\, Q^{IV} = - 0{,}02983 = - 2{,}99. \end{aligned}$$

Setzt man diese Verbesserungen in die Bedingungsgleichung (System 9, Nr 4):

$$+ (b_8 + v_8) - (b_{10} + v_{10}) + (b_{11} + v_{11}) = 0$$

ein, so wird

---

*) Ich habe zwar die Absicht, dieses Polygon vor der definitiven Ausgleichung des Bayerischen Höhennetzes nochmals nivelliren zu lassen; für das hier zu gebende Beispiel ist es aber ohne Belang, wenn der Schlussfehler $\varDelta_4 = + 0{,}1080$ etwas grösser ist, als er sein sollte.

$$\mathfrak{b}_8^1 = + (\ 48,8053 - 0,0354) = + \overset{m}{48,7699}$$
$$\mathfrak{b}_{10}^1 = - (100,1619 + 0,0427) = - 100,2046$$
$$\mathfrak{b}_{11}^1 = + (\ 51,4646 - 0,0298) = + \ 51,4347$$

woraus folgt, dass die algebraische Summe der 3 Neigungen der drei Strecken Nr 8, 10, 11 null ist, wie es sein muss.

Für das Polygon III besteht die Bedingungsgleichung (System 9, Nr 3):

$$+ (\mathfrak{b}_6 + \mathfrak{v}_6) - (\mathfrak{b}_7 + \mathfrak{v}_7) - (\mathfrak{b}_8 + \mathfrak{v}_8) + (\mathfrak{b}_9 + \mathfrak{v}_9) = 0$$

und da $\mathfrak{b}_6 - \mathfrak{b}_7 - \mathfrak{b}_8 + \mathfrak{b}_9 = \Delta_3 = - \overset{m.}{0,0252}$ und $\mathfrak{v}_8 = - \overset{m}{0,0354}$, so folgt hieraus, nach der Einsetzung dieser Werthe:

$\mathfrak{v}_6 - \mathfrak{v}_7 + \mathfrak{v}_9 = - \Delta_3 + \mathfrak{v}_8 = 0,0252 - 0,0354 = - \overset{m}{0,0102}$ und es ist somit der Einheitswerth der Verbesserung $0,0102 : S_{III} = Q^{III}$, folglich die Verbesserung

$$\mathfrak{v}_6 = - s_6 \,.\, Q^{III} = - \overset{m}{0,003233} = - \overset{cm.}{0,33}$$
$$\mathfrak{v}_7 = + s_7 \,.\, Q^{III} = + 0,004155 = + 0,42$$
$$\mathfrak{v}_9 = - s_9 \,.\, Q^{III} = - 0,002726 = - 0,27.$$

Hiemit findet man die verbesserten Streckenneigungen:

$$\mathfrak{b}_6^1 = + (30,0005 - 0,0033) = + \overset{m.}{29,9972}$$
$$\mathfrak{b}_7^1 = - (38,6644 + 0,0042) = - 38,6686$$
$$\mathfrak{b}_9^1 = + (57,4440 - 0,0027) = + 57,4413$$

welche zu der Neigung der 8. Strecke $- \mathfrak{b}_8^1 = - 48,7699$ addirt, Null geben.

In dem Polygon Nr II ist nach System 9, Nr 2 die Bedingungsgleichung zu erfüllen:

$$- (\mathfrak{b}_3 + \mathfrak{v}_3) + (\mathfrak{b}_4 + \mathfrak{v}_4) + (\mathfrak{b}_5 + \mathfrak{v}_5) - (\mathfrak{b}_6 + \mathfrak{v}_6) = 0$$

oder, da $- \mathfrak{b}_3 + \mathfrak{b}_4 + \mathfrak{b}_5 - \mathfrak{b}_6 = \Delta_2 = + \overset{m.}{0,0393}$ und $\mathfrak{v}_6 = - \overset{m}{0,0033}$, die hieraus folgende:

$$\Delta_2 - \mathfrak{v}_3 + \mathfrak{v}_4 + \mathfrak{v}_5 - \mathfrak{v}_6 = 0.$$

Es muss demnach $- \mathfrak{v}_3 + \mathfrak{v}_4 + \mathfrak{v}_5 = \overset{m}{0,0426}$ und der Einheitswerth der Verbesserung $0,0426 : S_{II} = Q^{II}$ sein, woraus folgt:

$$\mathfrak{v}_3 = + s_3 \,.\, Q^{II} = + \overset{\text{m}}{0{,}01635} = + \overset{\text{cm}}{1{,}64}$$
$$\mathfrak{v}_4 = - s_4 \,.\, Q^{II} = - 0{,}00673 = - 0{,}68$$
$$\mathfrak{v}_5 = - s_5 \,.\, Q^{II} = - 0{,}01934 = - 1{,}94$$
$$\mathfrak{d}_3{}^1 = - (181{,}6541 + 0{,}0164) = - \overset{\text{m}}{181{,}6705}$$
$$\mathfrak{d}_4{}^1 = + (\ 32{,}0958 - 0{,}0068) = + \ 32{,}0890$$
$$\mathfrak{d}_5{}^1 = + (179{,}5981 - 0{,}0194) = + 179{,}5787.$$

Addirt man die letzten 3 Werthe zu $\mathfrak{d}_6{}^1 = - 29{,}9972$ so erhält man Null, womit angezeigt ist, dass das Polygon II schliesst.

Für das Polygon I ist die Bedingungsgleichung nach System 9, Nr 1:

$$+ (\mathfrak{d}_1 + \mathfrak{v}_1) - (\mathfrak{d}_2 + \mathfrak{v}_2) + (\mathfrak{d}_3 + \mathfrak{v}_3) = 0$$

oder, da $\mathfrak{d}_1 - \mathfrak{d}_2 + \mathfrak{d}_3 = \Delta_1 = \overset{\text{m}}{0{,}0202}$ und $\mathfrak{v}_3 = + \overset{\text{m}}{0{,}0164}$,

$$\Delta_1 + \mathfrak{v}_3 = \overset{\text{m}}{0{,}0366} = - \mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2$$

und der Einheitswerth der Verbesserungen $\overset{\text{m}}{0{,}0366} : S_1 = Q^I$, somit

$$\mathfrak{v}_1 = - s_1 \, Q^I = - \overset{\text{m}}{0{,}01509} = - \overset{\text{cm}}{1{,}51}$$
$$\mathfrak{v}_2 = + s_2 \, Q^I = + 0{,}02148 = = 2{,}15$$
$$\mathfrak{d}_1{}^1 = + (\ 35{,}8723 - 0{,}0151) = + \ \overset{\text{m}}{35{,}8572}$$
$$\mathfrak{d}_2{}^1 = - (217{,}5062 + 0{,}0215) = - 217{,}5277.$$

Addirt man zu $d_1{}^1 + d_2{}^1$ noch $d_3{}^1 = + 181{,}6705$; so überzeugt man sich, dass auch die Schleife Nr 1 wie alle übrigen schliesst.

Stellt man die Verbesserungen $\mathfrak{v}$, deren Quadrate $\mathfrak{v}\mathfrak{v}$ und die verbesserten Streckengefälle und Steigungen $\mathfrak{d}^1$ zusammen, so erhält man folgende Tabelle:

32)	$\mathfrak{v}_1 = - \overset{\text{cm.}}{1{,}51}$	$\mathfrak{v}_1{}^2 = 2{,}2801$	$\mathfrak{d}_1{}^1 = + \ 35{,}8572$
	$\mathfrak{v}_2 = + 2{,}15$	$\mathfrak{v}_2{}^2 = 4{,}6225$	$\mathfrak{d}_2{}^1 = - 217{,}5277$
	$\mathfrak{v}_3 = + 1{,}64$	$\mathfrak{v}_3{}^2 = 2{,}6896$	$\mathfrak{d}_3{}^1 = \mp 181{,}6705$
	$\mathfrak{v}_4 = - 0{,}68$	$\mathfrak{v}_4{}^2 = 0{,}4624$	$\mathfrak{d}_4{}^1 = + \ 32{,}0890$

$\mathfrak{v}_5 = -\overset{cm}{1,94}$	$\mathfrak{v}_5^2 = 3,7636$	$\mathfrak{b}_5^1 = + 179,5787$
$\mathfrak{v}_6 = - 0,33$	$\mathfrak{v}_6^2 = 0,1089$	$\mathfrak{b}_6^1 = \pm 29,9972$
$\mathfrak{v}_7 = + 0,42$	$\mathfrak{v}_7^2 = 0,1764$	$\mathfrak{b}_7^1 = - 38,6686$
$\mathfrak{v}_8 = - 3,54$	$\mathfrak{v}_8^2 = 12,5316$	$\mathfrak{b}_8^1 = \pm 48,7699$
$\mathfrak{v}_9 = - 0,27$	$\mathfrak{v}_9^2 = 0,0729$	$\mathfrak{b}_9^4 = + 57,4413$
$\mathfrak{v}_{10} = + 4,27$	$\mathfrak{v}_{10}^2 = 18,2329$	$\mathfrak{b}_{10}^1 = - 100,2046$
$\mathfrak{v}_{11} = - 2,99$	$\mathfrak{v}_{11}^2 = 8,9401$	$\mathfrak{b}_{11}^1 = + 51,4347$
	$[\mathfrak{v}\mathfrak{v}] = 53,8810$	

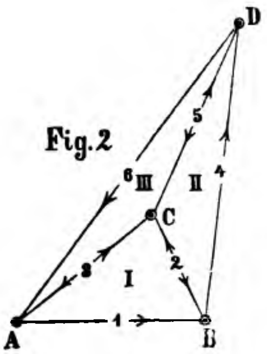
Die Summe der Fehlerquadrate beträgt hier etwas mehr als nach der strengeren Methode gefunden wurde, indem nach (29) die Summe $[\mathfrak{v}\mathfrak{v}] = 49,6504$ und nach (32) die Summe $[\mathfrak{v}\mathfrak{v}] = 53,8810$. Berechnet man jedoch aus den in vorstehender Tafel bestimmten Fehlerquadraten und den auf Seite 256 gegebenen Streckenlängen s_1 bis s_{11} den mittleren Fehler $\mathfrak{m}$ des Bayerischen Präcisionsnivellements nach der Formel Nr (30), so wird

$$\mathfrak{m} = \pm \overset{mm}{2,709}$$

also nur um 0,1 Millimeter grösser als der nach der Methode der kleinsten Quadrate gefundene mittlere Fehler $m = 2,601$ Millimeter.

2) Ein anderes Beispiel der Ausgleichung und Vergleichung bietet uns das von Herrn General von Morozowicz in der Zeitschrift für Vermessungswesen, 1876, Bd. V, S. 327 bis 345 beschriebene und berechnete Höhennetz, das wir ein Preussisches Netz nennen wollen, da nicht anzunehmen ist, dass die Zahlen desselben fingirt sind. Dieses Netz ist in Fig. 2 skizzirt und durch folgende Beobachtungswerthe gegeben:

Fig. 2



					Km			m
Von	A	nach	B	ist	$\mathfrak{s}_1 = 11{,}670$	und	$\mathfrak{d}_1 =$	$+ 10{,}8838$
„	B	„	C	„	$\mathfrak{s}_2 = 6{,}045$	„	$\mathfrak{d}_2 =$	$- 6{,}1963$
„	C	„	A	„	$\mathfrak{s}_3 = 9{,}240$	„	$\mathfrak{d}_3 =$	$- 4{,}6783$
„	B	„	D	„	$\mathfrak{s}_4 = 16{,}580$	„	$\mathfrak{d}_4 =$	$+ 7{,}6657$
„	D	„	C	„	$\mathfrak{s}_5 = 12{,}860$	„	$\mathfrak{d}_5 =$	$- 13{,}8677$
„	A	„	D	„	$\mathfrak{s}_6 = 20{,}420$	„	$\mathfrak{d}_6 =$	$+ 18{,}5595.$

Für die hier gegebenen 3 Polygone ABCA = I, BDCB = II und CDAC = III bestehen folgende Bedingungsgleichungen, welche von beiden Methoden zu erfüllen sind:

$$
\begin{aligned}
&+ (d_1 + \mathfrak{v}_1) - (d_2 + \mathfrak{v}_2) - (d_3 + \mathfrak{v}_3) = 0 \\
&+ (d_2 + \mathfrak{v}_2) + (d_4 + \mathfrak{v}_4) - (d_5 + v_5) = 0 \\
&+ (d_5 + \mathfrak{v}_5) - (d_6 + \mathfrak{v}_6) + (d_3 + \mathfrak{v}_3) = 0
\end{aligned} \tag{33}
$$

aus denen durch Addition, welche die Streckengefälle $d_2{}^1$, $d_3{}^1$, $d_5{}^1$ aufhebt, folgt:

$$+ (d_1 + \mathfrak{v}_1) + (d_4 - \mathfrak{v}_4) - (d_6 + \mathfrak{v}_6) = 0.$$

Es steht nun nichts im Wege, mit der Ausgleichung des Umfangs, d. h. mit Erfüllung dieser letzten Gleichung zu beginnen, dann mit I, II, III fortzufahren und zu schliessen.

Da $d_1 + d_4 - d_6 = \varDelta = - \overset{\text{m}}{0{,}01}$ und der Umfang ABDA = S = 48,67 so wird der Einheitswerth der Verbesserung in diesem Umfange = 0,01 : S = Q und daher

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{v}_1 &= + \mathfrak{s}_1 \,.\, Q = + \overset{\text{m}}{0{,}0024} = + \overset{\text{cm}}{0{,}24} \\
\mathfrak{v}_4 &= + \mathfrak{s}_4 \,.\, Q = + 0{,}0034 = + 0{,}34 \\
\mathfrak{v}_6 &= - \mathfrak{s}_6 \,.\, Q = - 0{,}0042 = - 0{,}42
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{d}_1{}^1 &= + 10{,}8838 + 0{,}0024 = + 10{,}8862 \\
\mathfrak{d}_4{}^1 &= + 7{,}6657 + 0{,}0034 = + 7{,}6691 \\
\mathfrak{d}_6{}^1 &= - 18{,}5595 + 0{,}0042 = - 18{,}5553.
\end{aligned}
$$

Im Polygon ABCA = I ist $d_1 - d_2 - d_3 = \Delta_1 = 0\overset{m}{,}0092$ und daher muss nach der ersten Gleichung des Systems (33) $\Delta_1 + \mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_2 - \mathfrak{v}_3 = 0$ sein; da aber $\mathfrak{v}_1 = +\,0\overset{m}{,}0024$ schon gefunden ist, so muss $\mathfrak{v}_2 + \mathfrak{v}_3 = \Delta_1 + \mathfrak{v}_1 = +\,0\overset{m}{,}0116$ werden. Der Anschlussrest 0,0116 ist auf die Länge $s_1 + s_2 = 17{,}715$ gleichheitlich zu vertheilen, es trifft somit auf die Längeneinheit eine Verbesserung von $0{,}0116 : S_1 = Q^I$ und es wird

$$\begin{aligned}
\mathfrak{v}_2 &= +\,s_2 \,.\, Q^I = +\,0\overset{m}{,}0046 = +\,0\overset{cm}{,}46\\
\mathfrak{v}_3 &= +\,s_3 \,.\, Q^I = +\,0{,}0070 = +\,0{,}70\\
\mathfrak{b}_2{}^1 &= -\,6{,}1963 - 0{,}0046 = -\,6{,}2009\\
\mathfrak{b}_3{}^1 &= -\,4{,}6783 - 0{,}0070 = -\,4{,}6853.
\end{aligned}$$

In den beiden Polygonen II und III sind somit je zwei Strecken schon ausgeglichen; es bleibt somit in jedem nur noch die Verbesserung der dritten Strecke (hier $\mathfrak{v}_5$) so zu bestimmen übrig, dass jedes Polygon schliesst; es müssen demnach die beiden letzten Bedingungsgleichungen des Systems für $\mathfrak{v}_5$ gleiche Werthe geben, und diese Gleichungen sind:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{b}_2{}^1 + \mathfrak{b}_4{}^1 - (d_5 + \mathfrak{v}_5) &= 0\\
\mathfrak{b}_3{}^1 - \mathfrak{b}_6{}^1 + (d_5 + \mathfrak{v}_5) &= 0.
\end{aligned}$$

Da nun $\mathfrak{b}_2{}^1 + d_4{}^1 - d_5$ und ebenso $\mathfrak{b}_3{}^1 - \mathfrak{b}_6{}^1 + d_5 = -\,0{,}0023$; so ist in der That

$$\mathfrak{v}_5{}^1 = -\;0\overset{m}{,}0023 = -\,0\overset{cm}{,}23 \quad \text{und somit}$$

$$\mathfrak{b}_5 = -\,13{,}8677 - 0{,}0023 = -\,13\overset{m}{,}8700.$$

Wenn man die von Herrn General von Morozowicz nach der Methode der kleinsten Quadrate und von mir nach meinem abgekürzten Verfahren gefundenen Werthe zusammenstellt, so erhält man folgende zwei Tafeln:

Tafel I.

Die Verbesserungen und deren Quadrate.

Strecken-Nr	Morozowicz*)		Bauernfeind	
	v	vv	v	vv
	cm		cm	
1	— 0,13	0,0169	+ 0,24	0,0576
2	+ 0,40	0,1600	+ 0,46	0,2116
3	+ 0,39	0,1521	+ 0,70	0,4900
4	+ 0,37	0,1369	+ 0,34	0,1156
5	— 0,20	0,0400	— 0,23	0,0529
6	— 0,76	0,5776	— 0,42	0,1764
		1,0835		1,1041

*) Die Vorzeichen der Verbesserungen sind hier für dieselben Richtungen genommen, welche für die Ausgleichung nach Bauernfeind gelten.

Tafel II.

Verbesserte Höhenunterschiede.

Strecke	Morozowicz	Bauernfeind	Differenz
	m	m	m
AB	+ 10,8825	+ 10,8862	— 0,0037
BC	— 6,2003	— 6,2009	+ 0,0006
CA	— 4,6822	— 4,6853	+ 0,0031
BD	+ 7,6694	+ 7,6691	+ 0,0003
DC	— 13,8697	— 13,8700	+ 0,0003
DA	— 18,5519	— 18,5553	+ 0,0034

Herr v. Morozowicz findet auf Seite 340 der oben genannten Zeitschrift den mittleren Fehler für den Kilometer

$$m = \pm \overset{mm}{0{,}765}$$

während aus meiner Rechnung

$$m = \pm\, 0{,}772^{\mathrm{mm}}$$

folgt; ein Unterschied zwischen beiden Werthen, der nicht mehr zu beachten ist.

3) Zum Schlusse will ich noch eine Vergleichung der nach zwei Methoden berechneten Verbesserungen eines Netzes beifügen, nämlich des Badischen Höhennetzes Friedrichsfeld-Carlsruhe, das Herr Dr. M. Doll in seiner Schrift „die Nivellirinstrumente und deren Anwendung", Stuttgart 1876, Seite 28 bis 30 nach der Methode der kleinsten Quadrate ausgeglichen hat und wozu ich eine Ausgleichung nach meinem abgekürzten Verfahren berechnet habe.

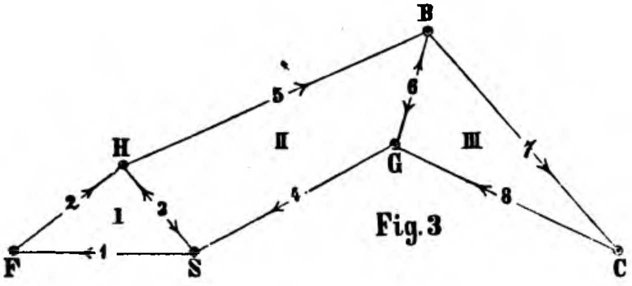


Fig. 3

Ein Bild des Badischen Netzes gewährt Fig. 3, worin F Friedrichsfeld, H Heidelberg, S Schwetzingen, G Graben, B Bruchsal und C Carlsruhe bedeutet.

Die gemessenen Grössen sind folgende:

Von	S	nach	F	ist	$s_1 = 19{,}5^{\mathrm{Km}}$	und	$d_1 = -\ 1{,}0085^{\mathrm{m}}$
„	F	„	H	„	$s_2 = 9{,}6$	„	$d_2 = -\ 9{,}0140$
„	H	„	S	„	$s_3 = 9{,}0$	„	$d_3 = +\ 10{,}0130$
„	S	„	G	„	$s_4 = 26{,}2$	„	$d_4 = -\ 6{,}1935$
„	B	„	H	„	$s_5 = 33{,}3$	„	$d_5 = +\ 2{,}6250$
„	G	„	B	„	$s_6 = 9{,}3$	„	$d_6 = -\ 6{,}4615$

Von B nach C ist $s_7 = 21{,}3^{\text{Km.}}$ und $d_7 = -\ 0{,}4935^{\text{m.}}$
„ C „ G „ $s_8 = 22{,}2$ „ $d_8 = +\ 6{,}9155$.

Für die hier gegebenen 3 Polygone SFHS = I, HSGBH = II und GBCG = III bestehen folgende 3 Bedingungsgleichungen, welche von beiden Methoden erfüllt werden müssen:

$$34)\quad \begin{aligned} &-(d_1 + v_1) - (d_2 + v_2) + (d_3 + v_3) = 0 \\ &-(d_3 + v_3) - (d_5 + v_5) + (d_6 + v_6) + (d_4 + v_4) = 0 \\ &-(d_6 + v_6) - (d_7 + v_7) + (d_8 + v_8) = 0. \end{aligned}$$

Addirt man diese 3 Gleichungen, so folgt

$$-(d_1 + v_1) - (d_2 + v_2) - (d_5 + v_5) - (d_7 + v_7) + (d_8 + v_8) + (d_4 + v_4) = 0$$

was andeutet, dass auch der Umfang schliesst, wenn die einzelnen Polygone schliessen.

Beginnen wir die Ausgleichung nach meinem Verfahren mit Polygon III, so ist

$$-d_6 - d_7 + d_8 = \Delta_3 = -\overset{\text{m}}{0{,}0395}$$

$$s_6 + s_7 + s_8 = S_{III} = +\overset{\text{Km}}{52{,}80}$$

folglich der Einheitswerth der Verbesserung

$$Q^{III} = -\frac{\overset{\text{m}}{0{,}0395}}{52{,}80}$$

die Verbesserungen: $v_8 = -s_8 \,.\, Q^{III} = +\overset{\text{cm}}{1{,}66}$
$v_7 = +s_7 \,.\, Q^{III} = -1{,}59$
$v_6 = +s_6 \,.\, Q^{III} = -0{,}70$

die Höhenunterschiede: $\mathfrak{h}_8^1 = +6{,}9155 + 0{,}0166 = +6{,}9321$
$\mathfrak{h}_7^1 = +0{,}4935 + 0{,}0159 = -0{,}4776$
$\mathfrak{h}_6^1 = -6{,}4615 + 0{,}0070 = -6{,}4545.$

In dem Polygon II ist

$$-d_3 - d_5 + d_6 + d_4 = \Delta_2 = +\overset{\text{m}}{0{,}0170}$$

$$+s_3 + s_5 + s_6 + s_4 = S_{II} = +77{,}8\ \text{Km};$$

die Strecke s_6 ist aber bereits verbessert und $v_6 = -\overset{m}{0{,}0070}$ $= -\overset{cm}{0{,}70}$; daher geht die Gleichung 2 des Systems (34) über in

$$\Delta_2 - 0{,}0070 - v_3 - v_5 + v_4 = 0$$

d. h. es ist noch $\Delta_2 - 0{,}007 = +\overset{m}{0{,}01}$ auf die Strecken s_3, s_4, s_5, die zusammen die Länge $S^{II} = 68{,}5^{Km}$ haben, zu vertheilen. Es ist somit der Einheitswerth

$$Q^{II} = + \frac{\overset{m}{0{,}01}}{68{,}5}$$

damit werden die Verbesserungen:

$$\begin{aligned} v_5 &= + s_5 \,.\, Q^{II} = + \overset{cm}{0{,}49} \\ v_4 &= - s_4 \,.\, Q^{II} = - 0{,}38 \\ v_3 &= + s_3 \,.\, Q^{II} = + 0{,}13 \end{aligned}$$

die Höhenunterschiede:

$$\begin{aligned} h_5{}^1 &= - 2{,}6250 - 0{,}0049 = - 2{,}6299 \\ h_4{}^1 &= + 6{,}1935 - 0{,}0038 = + 6{,}1897 \\ h_3{}^1 &= - 10{,}0130 - 0{,}0013 = - 10{,}0143. \end{aligned}$$

In dem Polygon I ist bereits die Strecke s_3 ausgeglichen, es findet daher für dasselbe nur mehr die Bedingungsgleichung statt:

$$-(d_1 + v_1) - (d_2 + v_2) + h_3{}^1 = 0.$$

Da nun $h_3{}^1 - (d_1 + d_2) = 10{,}0143 - 10{,}0225 = \Delta_1 = - 0{,}0082$ und $s_1 + s_2 = S_I = 29{,}1$ Km. ist, so wird der Einheitswerth der Verbesserungen

$$Q^I = - \frac{\overset{m}{0{,}0082}}{29{,}1};$$

damit ergeben sich die Verbesserungen selbst:

$$\begin{aligned} v_2 &= + s_2 \,.\, Q^I = - 0{,}55 \\ v_1 &= + s_1 \,.\, Q^I = - 0{,}27 \end{aligned}$$

und endlich die Höhenunterschiede

$$\mathfrak{b}_2{}^1 = -9{,}0140 + 0{,}0055 = -9{,}0085$$
$$\mathfrak{b}_1{}^1 = -1{,}0085 + 0{,}0027 = -1{,}0058.$$

Bildet man auch hier zwei Tafeln wie für das Preussische Netz, so gestalten sich dieselben wie folgt:

Tafel I.

Die Verbesserungen und deren Quadrate.

Strecken-Nr.	M. Doll		Bauernfeind	
	v	vv	$\mathfrak{v}$	$\mathfrak{vv}$
	cm		cm	
1	— 0,44	0,1916	— 0,55	0,3019
2	— 0,22	0,0464	— 0,27	0,0732
3	+ 0,30	0,0881	+ 0,13	0,0173
4	— 0,28	0,0761	— 0,38	0,1463
5	+ 0,35	0,1228	+ 0,49	0,2363
6	— 0,78	0,6026	— 0,70	0,4900
7	— 1,55	2,4149	— 1,59	2,5391
8	+ 1,62	2,6166	+ 1,66	2,7556
		6,1581		6,5597

Tafel II.

Die verbesserten Höhenunterschiede.

Strecke	M. Doll	Bauernfeind	Differenz
	m	m	m
SF	— 1,0041	— 1,0058	+ 0,0017
FH	— 9,0118	— 9,0085	— 0,0033
HS	+ 10,0160	+ 10,0143	+ 0,0017
SG	— 6,1907	— 6,1897	— 0,0010
BH	+ 2,6285	+ 2,6299	— 0,0014
GB	— 6,4537	— 6,4545	+ 0,0008
BC	— 0,4780	— 0,4776	— 0,0004
CG	+ 6,9317	+ 6,9321	— 0,0004

Wenn man nach den vorstehenden Fehlerquadraten die mittleren Fehler m und m des Badischen Netzes berechnet, so ergibt sich in deren Werthen kein merklicher Unterschied, sowie auch die Differenzen der verbesserten Streckengefälle sich nur zwischen 0,4 und 3,3 Millimeter bewegen. Es ist demnach hier wie in den anderen beiden Beispielen in Bezug auf die Resultate fast gleich, ob man nach dem strengen oder nach dem abgekürzten Verfahren rechnet, in Bezug auf die zur Ausgleichung erforderliche Zeit aber bietet meine Methode, welche — ich wiederhole es — nach einem festen Princip verfährt und daher mit andern willkührlichen Näherungsmethoden nicht zu vergleichen ist, um so grössere Vortheile, je mehr Polygone das auszugleichende Netz umfasst.