Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band VII. Jahrgang 1877.

München.
Akademische Buchdruckerei von F. Straub.
1877.

In Commission bei G. Franz.

Herr Wilhelm von Bezold legt vor:

„Die Theorie der stationären Strömung unter ganz allgemeinen Gesichtspunkten betrachtet".

Wenn man die von Kirchhoff [1]) gegebene Ableitung der Ohm'schen Gesetze aufmerksam betrachtet, so kann es kaum entgehen, dass dieselbe im Wesentlichen nicht nur für elektrische Ströme giltig ist, sondern dass sie mit kleinen Abänderungen gerade so gut auf andere Arten stationärer Ströme übertragbar ist.

Thatsächlich haben auch z. B. die Gesetze für den Durchgang der Wärme durch parallele Wände von geringer Dicke [2]) und grosser Flächenausdehnung genau dieselbe Form, wie die Ohm'schen. Das Gleiche gilt von den Formeln, welche die Luftmengen angeben, die bei einseitigem Ueberdrucke durch poröse Wandungen hindurch gepresst werden [3]) nur mit dem Unterschiede, dass an die Stelle der im Ohm'schen Gesetze vorkommenden elektromotorischen Kräfte (d. i. Spannungsdifferenzen) in dem einen Falle Temperatur- in dem andern Druckdifferenzen treten.

Auch das in den Lehrbüchern viel benutzte Gleichniss, bei welchem man statt des galvanischen Stromes einen

1) Poggdff. Ann. LXXVIII. S. 506 ff.
2) Péclet. Traité de la Chaleur 3me ed. tom. I. p. 408 ff.
3) C. Lang in Ztschft. f. Biologie. Bd. XI. S. 323.

Wasserstrom betrachtet, lässt sich viel weiter verfolgen, als man im ersten Augenblicke glauben möchte. So kann man z. B. verschiedene Eigenthümlichkeiten der galvanischen Kette trefflich versinnlichen, wenn man sich an Stelle der Elemente Pumpwerke gesetzt denkt, welche Wasser um bestimmte Höhen heben, während Röhren von dem oberen Ende einer jeden Pumpe zu dem unteren der nächstfolgenden führen und so bei Thätigkeit der Pumpen einen geschlossenen Strom ermöglichen. Entnähme die erste der Pumpen ihr Wasser einem grossen Reservoir z. B. einem See, während die letzte das gehobene Wasser in ein eben solches Reservoir entleerte, so hätte man bei fortgesetzter Wirksamkeit der Pumpen ebenfalls einen stationären Strom, gerade wie in einer Telegraphenleitung, deren Enden mit Erdplatten verbunden sind u. s. w.

Dieses Gleichniss liesse sich noch viel weiter ausspinnen ohne die Analogie zu verlieren.

Eine so weit gehende Uebereinstimmung ist nicht denkbar ohne tiefere innere Begründung und muss unwillkürlich auf den Gedanken führen, dass für beide Gruppen von Erscheinungen gleichartig gebaute Gesetze gelten müssen.

Es schien desshalb angezeigt, einmal den Versuch zu machen, ob es nicht möglich sei, ganz allgemeine Gesetze aufzustellen, welche für alle Arten stationärer Ströme gültig sind, und welche alsdann sowohl die Ohm'schen und Kirchhoff'schen Gesetze der Stromesleitung und Stromverzweigung als auch das Lenz-Joule'sche Gesetz der Erwärmung durch den Strom als specielle Fälle in sich schliessen müssten.

Einer solch' allgemeinen Untersuchung sollen die folgenden Zeilen und voraussichtlich noch einige spätere Mittheilungen gewidmet werden, da sich thatsächlich zeigen wird, dass eine Menge von Fragen der Mechanik, und zwar aus sehr verschiedenen Gebieten, eine Behandlung unter diesem Gesichtspunkte gestatten. Wenn hier die Beispiele für die einzelnen Sätze zunächst der Lehre vom galvanischen Strome entnommen werden, so liegt der Grund darin, dass es besonders interessant schien, zu zeigen, dass verschiedene der dort längst bekannten und bewiesenen Sätze nicht sowohl in dem Wesen der Elektricität wurzeln, als vielmehr dem stationären Strome eigen sind, und dass sie den Grundanschauungen über dieses Wesen noch äusserst weiten Spielraum gewähren.

Um das Verständniss zu erleichtern, müssen jedoch vor Allem einige Definitionen gegeben, beziehungsweise in's Gedächtniss zurückgerufen werden.

Definitionen und einleitende Bemerkungen.

Wenn ein System von Punkten sich in der Weise bewegt, dass an bestimmten, dem Systeme angehörigen Stellen, des Raumes jederzeit genau der nämliche Bewegungszustand herrscht, so nennt man die Bewegung an jenen Stellen „stationär" und zwar wollen wir sie in diesem Falle als „einfach stationär" bezeichnen.

Tritt eine solche Gleichheit des Bewegungszustandes nur innerhalb gewisser Perioden ein, so dass innerhalb jeder Periode sich dieselben Bewegungszustände in genau gleicher Weise wiederholen, so soll die Bewegung „periodisch stationär" heissen.

Streng genommen ist eine einfach stationäre Bewegung nur denkbar bei continuirlicher Vertheilung der bewegten Massen; bei discontinuirlich vertheilten kann sie nur periodisch sein, aber diese Periode kann unendlich klein werden im Vergleiche mit den übrigen in Betracht kommenden Zeiten und man darf dann eine solche Bewegung mit demselben Rechte als einfach stationäre betrachten, mit welchem man z. B. einen schweren Körper als continuirlich mit Masse erfüllt ansieht, obwohl man sich denselben aus Atomen zusammengesetzt denkt.

Der Allgemeinheit wegen soll im folgenden immer von Punkten die Rede sein, da die so durchgeführten Betrachtungen auch jenen Fall in sich schliessen, wo die Anzahl der in einem Raumstücke enthaltenen Punkte unendlich gross wird, ein Fall, den man, wie bemerkt, bei einfach stationärer Bewegung immer voraussetzen muss. Dabei sollen diese Punkte, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt ist, immer als materielle Punkte d. h. als träge Massen aufgefasst werden, obwohl verschiedene der später aufzustellenden Sätze auch bei rein mathematischen Punkten gültig bleiben. Inwieferne sich die Sätze für die Bewegung träger Massen auf die Fortpflanzung blosser Zustände übertragen lassen, muss in jedem einzelnen Falle besonders entschieden werden [4]).

Bewegen sich durch eine Linie oder durch einen Complex stetig nebeneinander verlaufender Linien Punkte in der Art, dass durch jede Fläche, welche sämmtliche Linien schneidet, in gleichen Zeiten die gleiche Punktenzahl hindurch geht, so nennt man das Ganze einen stationären Strom. Der Strom ist **einfach stationär**, wenn diese Zeiten beliebig kurz gewählt werden können, **periodisch stationär**, wenn die Bedingung nur für bestimmte, aber gleich lange, Zeiträume erfüllt ist.

---

4) So kann man z. B. eine Schwingung, welche die Gesammtenergie $\frac{mv^2}{2}$ besitzt und sich mit der Geschwindigkeit c längs einer Geraden fortpflanzt in vielen Fällen durch eine Masse $M = \frac{mv^2}{c^2}$ ersetzt denken, welche sich mit der Geschwindigkeit c in derselben Graden bewegt. Die Möglichkeit eine grosse Zahl von optischen Erscheinungen mit Hülfe der Emanationstheorie zu erklären beruhte nur darauf, dass eine solche Vertauschung translatorischer Bewegung mit oscillatorischen innerhalb gewisser Grenzen zulässig war.

Beispiele eines einfach stationären Stromes bieten, abgesehen vom galvanischen Strome und von den Wärmeströmen, die Bewegungen in Wasser- und Gasleitungen oder in den Röhren einer Wasserheizung, oder die Bewegungen der Luft in Kaminen und Ventilationsanlagen, annäherungsweise auch die Bewegungen des Wassers in Flüssen und Canälen, das Ausströmen von Gasen und Dämpfen bei constantem Ueberdruck u. s. w.

Periodisch stationäre Ströme erhält man, wenn man z. B. in einen galvanischen Strom einen Selbstunterbrecher einschaltet, oder bei den gewöhnlichen Pumpen, beim hydraulischen Widder, bei der Dampfmaschine u. s. w.

Den Weg, welchen ein Punkt eines Stromes durchläuft, nennt man Stromlinie.

Eine Fläche, welche sämmtliche Stromlinien senkrecht schneidet[5]), heisst ein Querschnitt des Stromes.

Den Inbegriff aller durch ein Element eines Querschnitts gehenden Stromlinien nennt man einen Stromfaden.

Durchlaufen dieselben Punkte den nämlichen Querschnitt immer wieder, so nennt man den Strom in sich geschlossen.

Ein Strom kann in sich geschlossen sein, ohne dass die einzelnen Stromfäden in sich geschlossen sind.

Treten die Stromfäden an einzelnen Stellen auseinander, so dass sie nicht mehr mit einander in Berührung stehen, so heisst der Strom verzweigt.

Die Menge der Punkte, welche in der Zeiteinheit durch den Querschnitt eines Stromes geht, dient als Maass für die „Stromintensität" oder „Stromstärke". Sie soll mit i bezeichnet werden.

---

5) Man kann nicht behaupten, dass immer eine solche Fläche existire; wo dies nicht der Fall ist, müssen eben besondere Untersuchungen darüber angestellt werden, ob die im folgenden zu gebenden Sätze noch anwendbar sind.

Beim einfach stationären Strom ist die Stromstärke constant, d. h. sowohl von der Zeit als auch von der Lage des betreffenden Querschnittes unabhängig.

Beim periodisch stationären Strome ist die „mittlere Stromintensität" constant. Bezeichnet man demnach diese mittlere Intensität durch J die Periode aber durch T, so muss für jeden Querschnitt und für jede Zeit t

$$J = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} i dt$$

constant sein.

In dieser Mittheilung sollen nur einfach stationäre Ströme betrachtet werden.

Auch sollen die Entwickelungen zunächst auf Stromfäden beschränkt werden, deren Querschnitt so klein ist, dass man in allen Punkten eines solchen Querschnitts die Geschwindigkeit u. s. w. gleich annehmen darf.

Ist die eben genannte Bedingung auch für die Querschnitte eines ganzen Stromes erfüllt, so sind selbstverständlich die gewonnenen Sätze sofort auf den ganzen Strom übertragbar.

Theorie der einfach stationären Strömung.

§ 1. Denkt man sich aus einem einfach stationären Strome einen Stromfaden herausgenommen, der an einer beliebigen Stelle den (unendlich kleinen) Querschnitt q hat und nennt man die Geschwindigkeit, mit welcher die Punkte durch diesen Querschnitt fliessen v, die Dichtigkeit der Punkte aber d. h. die Anzahl der in der Volumeneinheit enthaltenen Punkte oder eine ihr proportionale Grösse, also auch die in der Volumeneinheit enthaltene Masse, durch δ, so ist

$$i = v q \delta \qquad [1]$$

Wenn nämlich die Punkte mit der Geschwindigkeit v durch den Querschnitt fliessen, so füllen die während einer Zeiteinheit hindurchgegangenen ein Element des Stromfadens von der Basis q und von der Höhe v und ihre Menge beziehungsweise die in dem Element enthaltene Masse ist alsdann $\mathrm{q} v \delta$, diese Menge ist aber das Maass der Stromstärke.

δ soll die Massendichtigkeit oder die Dichtigkeit des strömenden Mediums heissen, nicht zu verwechseln mit der Stromdichte ϱ. Letztere wird gemessen durch die Menge der in der Zeiteinheit durch die Querschnittseinheit fliessenden Punkte und es ist demnach

$$\varrho = \frac{\mathrm{i}}{\mathrm{q}} \qquad [2]$$

Aus Gleichung [1] ergeben sich sofort zwei wichtige Folgerungen für zwei extreme Fälle.

Ist nämlich δ constant $= \delta^*$ so ist auch $\frac{\mathrm{i}}{\delta^*}$ constant etwa $= \varkappa$, und demnach

$$v = \frac{\mathrm{i}}{\mathrm{q}\,\delta^*} = \frac{\varkappa}{\mathrm{q}} \qquad [3]$$

d. h. die Geschwindigkeit ist in diesem Falle dem Querschnitt umgekehrt proportional, während die Stromesdichtigkeit

$$\varrho = \frac{\mathrm{i}}{\mathrm{q}} = v\,\delta^*$$

wird und mithin der Geschwindigkeit proportional ist.

Diesen Fall hat man bei incompressiblen Flüssigkeiten von constanter Temperatur vor sich.

Ist dagegen $\mathrm{q}\,\delta$ constant d. h. rücken die Punkte in demselben Maasse aneinander, in welchem der Querschnitt abnimmt, so ist auch v constant $= v^*$ und $\varrho = \delta v^*$ sagt in diesem Falle aus, dass die Stromesdichtigkeit der Dichtigkeit des strömenden Mediums proportional ist.

Es soll später gezeigt werden, dass man sich den galvanischen Strom von dieser Beschaffenheit zu denken hat.

§ 2. Wählt man nun einen Querschnitt als Ausgangspunkt und schneidet man von diesem anfangend im Sinne der Stromesrichtung eine Länge s von dem Stromfaden ab, so sind q und v nur Functionen von s während i davon unabhängig, d. h. allenthalben constant ist.

Die Beschleunigung, welche die strömenden Punkte an einer gegebenen Stelle erfahren, ist sobald einmal der Strom stationär ist, und nur diesen Fall betrachten wir hier, eine Function von s.

Es gibt demnach für die accelerirenden Kräfte, d. h. für die im Sinne der Stromesrichtung wirkenden jedenfalls eine Kräftefunktion V, deren negativer Differentialquotient $-\frac{dV}{ds}$ die im Sinne der Stromesrichtung auf die Masseneinheit wirkende beschleunigende Kraft ist. Da man in allen Fällen, wo diese Kraft die Folge von Anziehungen oder Abstossungen ist, dieselbe den Massen proportional setzen muss, auf welche sie wirkt, so ist die Kraft, welche auf die in einem Stromelemente von der Länge ds enthaltenen Massen $q\,\delta\,ds$ wirkt $-q\,d\frac{dV}{ds}ds$ und mithin die Beschleunigung φ im Sinne der Stromrichtung

$$\varphi = -\frac{q\,\delta\,ds\,\frac{dV}{ds}}{q\,\delta\,ds} = -\frac{dV}{ds}$$

Um die Gesammtbeschleunigung zu erhalten, muss man noch die im entgegengesetzten Sinne thätigen retardirenden Kräfte in Rechnung bringen. Bezeichnet man die durch sie hervorgebrachte Verzögerung ihrem absoluten Werthe nach durch ξ, so erhält man als Gesammtbeschleunigung

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{dV}{ds} - \xi. \qquad [4]$$

Hiebei empfiehlt es sich, den negativen Werth des Differentialquotienten als Beschleunigung anzusehen, weil bei Wirkung der Schwerkraft $V = gh$ wird, wo h die Höhe über der Erdoberfläche ist und man bei Wasserströmen die Richtung von oben nach unten als positive ansieht, während bei galvanischen Strömen V die Potentialfunction ist und auch dort im Sinne des sinkenden Werthes von V die Strömung erfolgt.

Die Betrachtungen in diesem Paragraphen sind so geführt, als ob das strömende Medium aus einzelnen freien Massenpunkten bestände. Sie sind jedoch auch dann noch gültig, wenn zwischen den Punkten dieses strömenden Systemes Kräfte thätig sind, soferne man nur unter $\frac{dV}{ds}$ und ξ nicht nur die von aussen wirkenden, sondern die Summe dieser Kräfte und der aus den Verbindungen entspringenden versteht.

§ 3. Die Gleichung [4] soll nun zunächst verwerthet werden, um die von dem Strome geleistete Arbeit zu ermitteln.

Die Kraft, welche auf die im Stromelemente vom Querschnitt q und von der Länge ds befindliche Masse ausgeübt wird, ist

$$q\delta ds \frac{dv}{dt} = -q\delta \frac{dV}{ds} ds - q\delta\xi ds$$

Dem entsprechend erhält man die während der Zeiteinheit geleistete Arbeit durch Multiplication dieses Werthes mit v, d. h. mit dem Wege, durch welchen diese Kraft während der Zeiteinheit thätig ist.

Die Arbeit ist mithin:

$$vq\delta \frac{dv}{dt} ds = -vq\delta \frac{dV}{ds} ds \cdot vq\delta\xi ds$$

oder wenn man berücksichtigt, dass $vq\delta = i$ und

$\frac{dv}{dt} = \xi \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt}$ ist:

$$iv \frac{dv}{ds} ds = - i \frac{dV}{ds} ds - i \xi ds.$$

Diese Arbeit stellt sich als Differenz der Arbeiten der accelerirenden und retardirenden Kräfte dar.

Von den drei hier stehenden Grössen bietet die letzte das meiste Interesse dar, d. h. es ist von besonderer Bedeutung, die Arbeit kennen zu lernen, welche auf einer bestimmten Strecke zur Ueberwindung der Widerstände zu leisten ist. Bezeichnet man diese Arbeit für das zwischen s′ und s″ liegende Stromstück durch U, während die dem s′ und s″ entsprechenden Werthe von V, v, q und δ ebenfalls durch die entsprechenden Indices charakterisirt werden sollen, so findet man

$$U = \int_{s'}^{s''} i \xi ds = i (V' - V'') - i \left(\frac{v''^2}{2} - \frac{v'^2}{2}\right)$$

oder

$$U = i\left(V' + \frac{v'^2}{2}\right) - i\left(V'' + \frac{v''^2}{2}\right), \qquad [5]$$

oder wenn man

$$i\left(V' + \frac{v'^2}{2}\right) = U' \text{ und } i\left(V'' + \frac{v''^2}{2}\right) = U'' \text{ setzt,}$$

$$U = U' - U''.$$

Hiebei ist aber iV′ nichts anderes als die sogenannte potentielle, $i \frac{v'^2}{2}$ die actuelle Energie, ihre Summe demnach die Gesammtenergie.

Der Satz heisst demnach: die in der Zeiteinheit auf dem Stromstücke von der Länge s zur Ueberwindung der Widerstände verbrauchte Arbeit ist gleich dem Verluste an Gesammtenergie, welchen die in der Zeiteinheit durch den Querschnitt fliessende Masse auf dem Wege s erleidet.

Dieser Satz enthält natürlich nichts Neues in sich, sondern ist nach dem Gesetze der Erhaltung der Kraft selbstverständlich, trotzdem schien seine Ableitung auf diesem Wege wegen des Folgenden unerlässlich.

Unter Benutzung der Gleichung [1] geht diese Formel in die folgende über:

$$U = i(V' - V'') + \frac{i^3}{2}\left[\frac{1}{(q'\delta')^2} - \frac{1}{(q''\delta'')^2}\right]$$

oder auch

$$U = i(V' - V'') + \frac{i}{2}\left[\left(\frac{\varrho'}{\delta'}\right)^2 - \left(\frac{\varrho''}{\delta''}\right)^2\right]$$

Diese Formen gestatten besonders einfache Behandlung der beiden obenerwähnten extremen Fälle.

Ist nämlich δ constant, so ergibt sich

$$U = i(V' - V'') + \frac{i}{2\delta}(\varrho'^2 - \varrho''^2)$$

ist dagegen $q\delta$ oder, was das nämliche ist, v constant, so wird:

$$U = i(V' - V'').$$

Sind die retardirenden Kräfte derartig beschaffen, dass die zu ihrer Ueberwindung erforderliche Arbeit nur in Wärme verwandelt wird, wie dies z. B. bei Reibungswiderständen der Fall ist, so erhält man die auf der betrachteten Strecke des Stromfadens entwickelte Wärme Q durch die Formel

$$Q = A\,U$$

wo A das calorische Aequivalent der Arbeit ist.

Unter Anwendung auf Elektricität ist alsdann Formel [5] nichts anderes als das Lenz-Joule'sche Gesetz.

Man kann demnach auch die Formel [5] als die auf alle Arten einfach stationärer Ströme anwendbare Erweiterung dieses Satzes betrachten.

§ 4. Wäre s die ganze Länge eines in sich geschlossenen Stromes und würde das Gesetz

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\frac{dV}{ds} - \xi$$

allenthalben die gleiche Form behalten und auch nirgends Unstetigkeiten vorkommen, welche eine Integration durch den ganzen Stromeskreis unzulässig erscheinen liessen, so wäre $v' = v''$ und $V' = V''$ und mithin auch

$$U = \int_{s'}^{s''} i\,\xi\,ds = 0$$

oder da ξ, so lange es unter die oben gegebene Definition fällt, sein Zeichen nicht wechseln kann:

$$\xi = 0.$$

Wenn demnach ein stationärer geschlossener Strom überhaupt möglich sein soll, so müssen entweder die Widerstände überall gleich 0 sein oder es müssen die Werthe von V Unstetigkeiten zeigen, oder es müssen an die Stelle von ξ an einzelnen Strecken Ausdrücke mit entgegengesetztem Vorzeichen, d. h. noch andere accelerirende Kräfte als die durch $\frac{dV}{ds}$ ausgedrückten treten.

Dies lässt sich folgendermassen näher untersuchen:

Man theilt den ganzen Strom in 2n Stücke in der Art, dass auf den Strecken 1,3 . . . 2n — 1 die Gleichung [4] in der oben bezeichneten Weise gültig bleibt, während die Strecken 2, 4 . . 2n die Ausnahmsstellen enthalten sollen, wobei es aber durchaus nicht nöthig ist, dass all' diese Strecken mit geradem Index wirklich solche enthalten, sondern nur vorausgesetzt ist, dass auf den ungeradzahligen keinenfalls solche vorkommen.

Dann gelten jedenfalls die Gleichungen:

$$U_1 = U_1' - U_1'' = i\left(V_1' + \frac{v_1'^2}{2}\right) - i\left(V_1'' + \frac{v_1''^2}{2}\right)$$

$$U_3 = U_3' - U_3'' = i\left(V_3' + \frac{v_3'^2}{2}\right) - i\left(V_3'' + \frac{v_3''^2}{2}\right)$$

. . . .

$$U_{2n-1} = U_{2n-1}' - U_{2n-1}'' = i\left(V_{2n-1}' + \frac{v_{2n-1}'^2}{2}\right)$$
$$- i\left(V_{2n-1}'' + \frac{v_{2n-1}''^2}{2}\right)$$

Addirt man alle diese Gleichungen, so erhält man:

$$\sum_1^n U_{2\nu-1} = \sum_1^n (U_{2\nu+1}' - U_{2\nu-1}'') \qquad [6]$$

wobei man nur zu beachten hat, dass für den geschlossenen Strom der Index $2n+1$ mit dem Index 1 identisch d. h.

$U_{2n+1}' = U_1'$ wird.

Dieser Satz lässt sich folgendermaassen aussprechen:

Nimmt man aus einem geschlossenen Strome beliebig viele Stücke heraus, welche jedoch sämmtlich der Bedingung genügen, dass auf ihnen die Totalenergie (immer bezogen auf die in der Zeiteinheit durch den Querschnitt fliessende Masse) im Sinne der Stromesrichtung abnimmt, so erhält man den auf sämmtlichen Stücken in der Zeiteinheit erfolgenden Verlust an totaler Energie, indem man die Sprünge, welche diese Grösse beim Uebergang von einem Stücke zum nächstfolgenden erleidet, addirt. Dabei ist dieser Sprung, d. h. die Differenz positiv zu rechnen, wenn die Totalenergie im Anfangspunkte des im Sinne der Stromesrichtung nach-folgenden Stückes grösser ist als am Ende des vorhergehenden.

Sind die widerstehenden Kräfte der Art, dass aller Aufwand von Energie zur Erzeugung von Wärme dient, so gibt diese Summe die auf den betreffenden Stromstücken entwickelte Wärme in mechanischem Maasse.

Da dieser Satz gültig bleibt, ohne irgend welche Rücksicht auf das Verhalten der zwischenliegenden, mit geradem Index behafteten Stücke, so umfasst er auch jenen Fall, wo diese Stücke unendlich kurz werden und der Trennungspunkt zweier aufeinander folgender Strecken mit ungeradem Index ein Discontinuitätspunkt wird.

Ist v auf jedem der betrachteten Stromstücke constant, d. h. $v_1' = v_1''$ u. s. w., so wird

$$\sum_1^n U_{2\nu-1} = i \sum_1^n (V'_{2\nu+1} - V''_{2\nu-1})$$

oder wenn man die zwischenliegenden Stücke vom Index 2ν ganz ignorirt und fortlaufend zählt

$$\sum_1^n U_\mu = i \sum_1^n (V'_{\mu+1} - V''_\mu) = i \sum_1^n V_{\mu,\mu+1} \qquad [7]$$

und die Differenz

$$V'_{\mu+1} - V'_\mu = V_{\mu,\mu+1} \text{ setzt.}$$

Beim galvanischen Strome ist $V_{\mu,\mu+1}$ nichts anderes als die an der Berührungsstelle der Leiter μ und $\mu + 1$ herrschende elektromotorische Kraft oder

$$\sum_1^n U_\mu = i \Sigma E$$

und die im ganzen Schliessungsbogen entwickelte Wärmemenge ist demnach

$$\Sigma Q = A i \Sigma E \qquad [8]$$

ein Satz, der jedoch nur auf die metallischen Theile des Schliessungsbogens anwendbar ist, und auch hier nur nach

Ausschluss der Berührungsstellen verschiedener Metalle, d. h. ohne Berücksichtigung des Peltier'schen Phänomens.

Die Formel [6] wirft ein interessantes Licht auf Fälle, wo eine Querschnittsänderung eintritt:

Nimmt man nämlich ein Stromstück heraus, in welchem $q'' > q'$, so wird, wie oben bemerkt, bei einer incompressiblen Flüssigkeit $v' > v''$ und ist demnach in der Formel

$$U = i(V' - V'') + i\left(\frac{v'^2}{2} - \frac{v''^2}{2}\right)$$

welche den Aufwand an totaler Energie auf dem betrachteten Stücke darstellt, nicht nur die erste Differenz positiv, sondern auch die zweite.

Wenn hingegen $q' > q''$, so ist die zweite negativ. Würde man nun in den beiden Fällen Strecken von solcher Länge wählen, dass $V' - V''$ den gleichen Werth behielte, so würde das Gesammtresultat im ersteren Falle grösser werden als im zweiten.

Nimmt man an, dass der ganze Aufwand von Energie zu Wärmeentwickelung diene, so würden demnach bei einer incompressiblen oder nur schwach compressiblen Flüssigkeit die Uebergangsstellen von engerer zu weiterer Leitung eine grössere Wärmeabgabe zeigen als Stellen, an welchen die Leitung enger wird.

Da beim galvanischen Strome ein solcher Einfluss von Querschnittsänderungen nicht nachweisbar ist, so folgt wenigstens unter Grundelegung einer unitarischen Anschauung schon hieraus, dass man sich die Geschwindigkeit v, wenigstens in einem und demselben Materiale constant zu denken hat, im Gegensatze zu Edlund, der diese Geschwindigkeit dem Querschnitte umgekehrt proportional annimmt[6]. Wenn man von der binären Hypothese ausgeht, und dem

6) K. Swensk. Vetenskaps-Akadem. Handlingar. Bd. XII Nr. 8 § 6.

entsprechend den Strom als Doppelstrom betrachtet, kann dieses negative Resultat kein Kriterium abgeben.

§ 5. Nach dieser Betrachtung der Strecken mit ungeradem Index, d. h. jener Strecken, auf welchen das Gesetz

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{dV}{ds} - \xi$$

gültig ist, und ξ ein bloser Widerstand, sollen nun auch die Strecken mit geradem Index betrachtet werden, von welchen schon vorhin bewiesen wurde, dass auf ihnen wenigstens theilweise andere Gesetze gelten müssen. Dabei soll jedoch zunächst vorausgesetzt werden, dass weder V noch v Unstetigkeiten aufweise und demnach $U'_2 = U''_1$, $U''_2 = U'_3$ u. s. w. sei.

Dann werden die auf den Strecken mit geradem Index eintretenden Energieverluste beziehungsweise Gewinne durch folgende Ausdrücke dargestellt werden

$$\begin{aligned}
U_2 &= U'_2 - U''_2 = U''_1 - U'_3 \\
U_4 &= U_4 - U''_4 = U''_3 - U'_5 \\
&\vdots \\
U_{2n} &= U'_{2n} - U''_{2n} = U''_{2n-1} - U_1
\end{aligned}$$

Addirt man nun sowohl diese Gleichungen, sowie die unter [6] aufgeführten zusammen, so kommt:

$$\sum_1^n U_{2\nu-1} + \sum_1^n U_{2\nu} = 0. \qquad [9]$$

Da nun $\sum_1^n U_{2\nu-1}$ immer positiv ist, so muss $\sum_1^n U_{2\nu}$ jedenfalls negativ sein, d. h. es müssen unter den Grössen $U_{2\nu}$ jedenfalls welche vorkommen, die keinen Energieverlust, sondern einen Energiegewinn darstellen.

Theilt man den Strom in der Art, dass die Trennungsstellen der geradzahligen und ungeradzahligen Strecken mit den Maximal- und Minimalwerthen von U zusammenfallen, so müssen selbstverständlich sämmtliche Werthe $U_{2\nu}$ negativ sein.

Für eine solche Strecke stellen sich nun die Verhältnisse folgendermaassen:

Unter allen Bedingungen bleibt die Gleichung bestehen:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{dV}{ds} + \Xi \qquad [10]$$

wo Ξ die Gesammt-Beschleunigung ist, welche die Masseneinheit von Kräften erleidet, die nicht bei der Bildung der Kräftefunktion V berücksichtigt wurden.

Multiplicirt man auf beiden Seiten mit ids und bringt man alsdann $-i\frac{dV}{ds}ds$ von der rechten auf die linke Seite, so bekommt man:

$$dU_{2\nu} = i\,\Xi\,ds$$

oder

$$U''_{2\nu} - U'_{2\nu} = i\int_{s'}^{s''} \Xi\,ds \qquad [11]$$

Da nun der Voraussetzung gemäss auf dem betrachteten Stücke ein Energiezuwachs eintritt, so ist diese Differenz positiv und muss demnach auch Ξ, wenigstens eine Strecke weit, positiv sein.

Mithin kann Ξ keinenfalls auf dem ganzen Stücke eine aus blossen Widerständen entspringende negative Beschleunigung, d. h. Verzögerung sein.

Da jedoch auch auf diesen Stücken solche Widerstände nicht ausgeschlossen sind, so muss im Allgemeinen

$$\Xi = \eta - \xi$$

sein, wo η die (positive) Beschleunigung ist, welche die Masseneinheit durch Kräfte erfährt, die aus der Kräftefunction V nicht ableitbar sind.

Der ganze Gewinn an Energie in einem solchen Stücke stellt sich also durch die Formel dar:

$$U''_{2\nu} - U'_{2\nu} = i\left(V''_{2\nu} - V'_{2\nu}\right) + i\left(\frac{v''^2_{2\nu}}{2} - \frac{v'^2_{2\nu}}{2}\right)$$

$$= i\int_{s'_{2\nu}}^{s''_{2\nu}} \eta_{2\nu}\, ds - i\int_{s'_{2\nu}}^{s''_{2\nu}} \xi_{2\nu}\, ds \qquad [12]$$

während die auf dem Stücke zu leistende Arbeit

$$L_{2\nu} = i\int_{s'_{2\nu}}^{s''_{2\nu}} \eta_{2\nu}\, ds = U''_{2\nu} - U'_{2\nu} + i\int_{s'_{2\nu}}^{s''_{2\nu}} \xi_{2\nu}\, ds \qquad [13]$$

ist.

Wird diese Arbeit durch Aufwand von Wärme geleistet, so muss die Wärmemenge $Q_{2\nu} = A\, L_{2\nu}$ verschwinden, wenn die widerstehenden Kräfte von zu leistender äusserer Arbeit herrühren. Hat jedoch die Verzögerung $\xi_{2\nu}$ ihren Grund in Kräften die nach Art eines Reibungswiderstandes wirken, so wird durch ihre Ueberwindung wieder Wärme erzeugt und die verschwindende Wärmemenge ist alsdann nur

$$Q_{2\nu} = A\, L_{2\nu} - Ai\int_{s'_{2\nu}}^{s''_{2\nu}} \xi_{2\nu}\, ds = A\,(U''_{2\nu} - U_{2\nu}). \qquad [14]$$

Um die Bedeutung der hier eingeführten Grössen anschaulicher zu machen, sei erwähnt, dass in dem Falle, wo man durch ein Pumpwerk und eine vom oberen Ende der Pumpe zum unteren geführte Rückleitung einen Flüssigkeitsstrom herstellen würde, die Pumpe selbst als Strecke von geradem Index also etwa als s_2 zu betrachten ist und dass in diesem Falle $i\int \eta_2 ds$ ausgedehnt durch die Höhe der

Pumpe, die ganze zu deren Betrieb einschliesslich der Reibungswiderstände erforderliche Arbeit repräsentiren würde, während sich das ξ_2 auf die Reibungswiderstände in der Pumpe bezöge.

So lange keine Unstetigkeiten in den Werthen von V und v und mithin auch in den Werthen von U vorkommen, ist $U''_{2\nu} = U'_{2\nu+1}$ und $U'_{2\nu} = U''_{2\nu-1}$ und mithin auch

$$L_{2\nu} = U'_{2\nu+1} - U''_{2\nu-1} + X_{2\nu}$$

wenn man unter $X_{2\nu}$ die Arbeit versteht, welche zur Ueberwindung der Widerstände während der Zeiteinheit auf dem Stücke 2ν zu leisten ist. Diese Gleichung bleibt nun richtig, wie kurz auch das Stück mit dem Index 2ν sein mag, so dass auch für den Fall, wo dieses Stück verschwindend klein wird und nur eine Discontinuität zwischen den auf $2\nu - 1$ und $2\nu + 1$ bezüglichen Grössen eintritt, die Gleichung Gültigkeit behält. Dabei empfiehlt es sich jedoch, in einem solchen Falle $L_{2\nu} = L_{2\nu-1, 2\nu+1}$ zu setzen und einfach fortlaufende Indices $\mu, \mu + 1$ zu wählen, so dass schliesslich $L_{\mu, \mu+1}$ statt $L_{2\nu}$ und $X_{\mu, \mu+1}$ statt $X_{2\nu}$ zu schreiben ist und die ganze Gleichung übergeht in:

$$L_{\mu, \mu+1} = U'_{\mu+1} - U''_{\mu} + X_{\mu, \mu+1} \qquad [15]$$

Für den Fall, dass alle Arbeitsleistung auf Kosten von Wärme geschieht und auch die Widerstandsarbeiten, wenn solche bei unendlich kurzen Stücken überhaupt noch vorkommen sollten, in Wärme verwandelt werden, erhält man bei entsprechender Bezeichnung und unter Berücksichtigung des Umstandes, dass eine verschwindende Wärmemenge als eine negative auftretende angesehen werden kann, als erzeugte Wärmemenge an der Uebergangsstelle

$$Q_{\mu,\,\mu+1} = A\left[U''_{\mu} - U'_{\mu+1}\right] \qquad [16]$$

ein Ausdruck, der unter den eben gemachten Voraussetzungen stets negativ sein, und demnach eine verschwindende Wärmemenge darstellen wird.

Es ist natürlich nicht undenkbar, dass auch auf den Strecken mit abnehmender Energie, wie sie oben betrachtet wurden ausser $-\frac{dV}{ds}$ noch andere Kräfte eine in demselben Sinne wirkende Beschleunigung hervorbringen, die dann auch wieder durch η, oder wenn wir der gerade betrachteten Strecke den Index ν geben, η_ν bezeichnet werden mag. Alsdann wird die auf einer solchen Strecke zur Ueberwindung von Widerständen verbrauchte Arbeit

$$L_\nu = U'_\nu - U''_\nu + \int_{s'_\nu}^{s''_\nu} i\eta_\nu ds = U'_\nu - U''_\nu + Y_\nu$$

Geht diese Arbeit in Wärme über, so ist die erzeugte Wärmemenge

$$Q = AL_\nu.$$

Muss jedoch die Arbeit Y selbst wieder auf Kosten der dem Körper innewohnenden Wärme geschaffen werden, so wird wiederum wie oben

$$Q_\nu = AL_\nu - AY_\nu = A\,(U'_\nu - U''_\nu)$$

So lange die Bedingungen der Stetigkeit erfüllt sind, kann man auch hier wiederum $U'_\nu = U''_{\nu-1}$ und $U''_\nu = U'_{\nu+1}$ setzen, oder $\quad Q_\nu = A\left[U''_{\nu-1} - U_{\nu+1}\right]$

Schrumpft nun die Strecke mit dem Index ν mehr und mehr zusammen und setzt man dann μ statt $\nu - 1$, und $\mu + 1$ statt $\nu + 1$, und bezeichnet man analog wie oben Q_ν in in diesem Falle durch $Q_{\mu, \mu+1}$ so erhält man

$$Q_{\mu, \mu+1} = A \left[U_\mu - U'_{\mu+1}\right]$$

also genau dieselbe Formel wie oben.

Diese Formel gibt demnach für Unstetigkeitsstellen sowohl die verschwindenden als auch die auftretenden Wärmemengen an.

In ihrer Anwendung auf den galvanischen Strom enthält sie den Ausdruck für das Peltier'sche Phänomen.

Dieser Ausdruck gewinnt jedoch dadurch ein besonderes Interesse, dass er auf einen Umstand hinweist, den man meines Wissens bisher bei diesem Vorgange nicht in Betracht gezogen hat. Er zeigt nämlich, dass unter der Annahme einer unitarischen Anschauung die Erwärmungen und Abkühlungen an den Berührungsstellen zweier verschiedener Leiter nicht nur von ihrer Spannungsdifferenz (Potential-Niveau-Differenz), sondern auch von den Geschwindigkeiten abhängen, welche zu beiden Seiten der Berührungsstelle herrschen. Man sieht dies sofort, wenn man den Ausdruck [16] ausführlich schreibt, dann erhält man

$$Q_{\mu, \mu+1} = Ai \left[V'_\mu - V'_{\mu+1}\right] + Ai \left[\frac{v''^2_\mu}{2} - \frac{v'^2_{\mu+1}}{2}\right]$$

Der Wärmeverbrauch an einer solchen Trennungsstelle wird demnach grösser sein, als die blosse Potentialniveaudifferenz erfordert, wenn zugleich eine Zunahme der Geschwindigkeit erfolgt (was ja bei geringerer Dichtigkeit δ auf dem Leiter $\mu + 1$, auch ohne Querschnittsänderung der Fall ist) geringer, wenn die Geschwindigkeit abnimmt.

Trotzdem wird das Gesetz, welches aus den Favre'schen Versuchen [7]) abgeleitet wurde, und wonach die algebraische

7) Annales de chim. et de phys. (1) T 40 (1854).

Summe aller an den Berührungsstellen verschiedener Leiter verschwindenden und auftretenden Wärmemengen gleich sein muss den in den Leitern selbst entwickelten, dadurch nicht gestört. Bildet man nämlich $\Sigma Q_{\mu,\mu+1}$ für einen in sich geschlossenen Stromeskreis, so ist

$$\sum_1^n Q_{\mu,\mu+1} = -\mathrm{A\,i}\sum_1^n E_{\mu,\mu+1} + \mathrm{A\,i}\sum_1^n\left(\frac{v''^2_\mu}{2} - \frac{v'^2_{\mu+1}}{2}\right)$$

Erinnert man sich nun daran, dass bei geschlossenem Strome $v'_{n+1} = v'_1$ und vereinigt man dann in der letzten rechts stehenden Summe, das 2te mit dem 3ten, das 5te mit dem 6ten Gliede u. s. w. und schliesslich das letzte mit dem ersten, so erhält man für einen geschlossenen Strom:

$$\sum_1^n\left(\frac{v''^2_\mu}{2} - \frac{v'^2_{\mu+1}}{2}\right) = \sum_1^n\left(\frac{v''^2_\mu}{2} - \frac{v'^2_\mu}{2}\right)$$

und da, wie schon in § 4 bemerkt und später in § 6 noch bewiesen werden soll

$$v''_\mu - v'_\mu = 0$$

auch

$$\sum_1^n\left[\frac{v''^2_\mu}{2} - \frac{v'^2_{\mu+1}}{2}\right] = 0$$

und mithin

$$\Sigma Q_{\mu,\mu+1} = -\mathrm{A\,i}\,\Sigma E \qquad [17]$$

oder im Zusammenhalte mit Formel [8]

$$\Sigma Q_\mu + \Sigma Q_{\mu,\mu+1} = 0 \qquad [18]$$

wie es Favre's Versuche verlangen.

Der von Edlund[8]) gezogene Schluss, dass die beim Peltier'schen Phänomen auftretenden oder verschwindenden

8) Poggdff. An. Bd. 137.

Wärmemengen der Spannungsdifferenz der beiden Metalle proportional seien ist demnach nur bindend, wenn entweder die Hypothese von dem Doppelstrome festgehalten wird, oder wenn bei unitarischer Anschauung die Geschwindigkeit v in der ganzen Kette allenthalben die gleiche ist, ohne Rücksicht auf das Material der einzelnen Theile.

Die Einwände, welche abgesehen von dem eben berührten Punkte, der meines Wissens bisher unbeachtet blieb, von Wüllner[9]) gegen Edlund's Folgerungen erhoben wurden, sind mir nicht verständlich.

Dagegen geht aus den eben angestellten Betrachtungen hervor, dass unter Annahme des Doppelstromes die an Löthstellen auftretenden oder verschwindenden Wärmemengen den auf elektrostatischem Wege ermittelten Spannungsdifferenzen genau proportional sein müssten. Abweichungen von dieser Proportionalität würden demnach sowohl diese Annahme als eine unhaltbare kennzeichnen als auch darthun, dass die Geschwindigkeiten v, mit denen sich die elektrischen Massen (soferne sich solche für die in Wahrheit noch unbekannten Vorgänge substituiren lassen) im Strome bewegen, in den verschiedenen Leitern verschiedene seien.

§ 6. Es erübrigt uns nun noch die Lösung der Aufgabe unter gegebenen Verhältnissen die Stärke des entstehenden Stromes zu bestimmen.

Man muss zu dem Ende untersuchen, unter welchen Bedingungen die Gleichung [4] d. i.

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{dV}{ds} - \xi$$

allgemeine Lösungen gestattet.

Dies ist in zwei ziemlich umfassenden Fällen möglich, nämlich einmal wenn $dv = 0$ und $\xi = \varphi(v) \, . \, f(s)$ ist und

9) Experimentalphysik. 3 Aufl. Bd. IV. S. 555—556.

ferner, wenn für ξ die Bedingung $\xi = v^2 \varphi s$ erfüllt ist, ohne dass desshalb $dv = o$ zu sein brauchte.

Den ersten Fall hat man vor sich, wenn eine incompressible Flüssigkeit bei constantem Querschnitt gegeben ist, oder wenn $q\,\delta$ constant ist, in welchem Falle man das strömende Medium als absolut compressibel bezeichnen könnte.

Gleichung [4] aber wird

$$\frac{dV}{ds} = -\xi$$

und wenn man nun beachtet, dass man statt $\varphi(v)$ gerade so gut $\psi(i)$ schreiben kann, weil $i = v\,q\,\delta$ und $q\,\delta$ constant ist

$$\frac{dV}{ds} = -\psi(i)\,f(s) \qquad [19]$$

oder wenn man aus dem Strome das zwischen den Längen s' und s'' liegende Stück heraus nimmt und integrirt

$$V' - V'' = \psi(i) \int_{s'}^{s''} f(s)\,ds \qquad [20]$$

Hat man nun einen in sich geschlossenen Strom und nimmt man aus diesem einzelne (getrennte) Stücken heraus, für welche das oben aufgestellte Grundgesetz gültig ist und setzt man

$$\int_{s'}^{s''} f(s) ds = Fs$$

so wird

$$\begin{aligned} \psi i\,F(s_a) &= V'_a - V''_a \\ \psi i\,F(s_b) &= V'_b - V''_b \qquad [21] \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \psi i\,F(s_n) &= V'_n - V''_n \end{aligned}$$

oder wenn man alle rechts und alle links stehenden Glieder addirt $\psi i\, \Sigma F(s_n) = \Sigma V_{n,n+1}$ wo $V_{n,n+1} = V'_{n+1} - V''_n$ ist d. h. gleich dem Sprunge der Kräftefunction, der beim Uebergang vom Stücke n zum Stücke n + 1 stattfindet.

Bezeichnet man die inverse Function von ψ durch Ψ, so kann man auch setzen:

$$i = \Psi \frac{\Sigma V_{n,n+1}}{\Sigma F(s_n)} \tag{22}$$

Ein Satz, den man als die Verallgemeinerung des Ohm'schen Gesetzes bezeichnen kann.

$\psi i\, F(s_n)$ ist die Arbeit, welche der Stromlauf der Strecke s_n während der Zeiteinheit leistet.

Für $\psi i = i$ geht die Formel über in

$$i = \frac{\Sigma V_{n,n+1}}{\Sigma, F(s)} \tag{23}$$

Für $\psi i = i$ und $f(s) = \frac{1}{q_n k_n}$ d. h. für $\xi_n = \frac{v_n \delta_n}{k_n}$ und für $dq_n = 0$ aber erhält man

$$i = \frac{\Sigma V_{n,n+1}}{\Sigma \frac{s_n}{k_n q_n}}$$

wobei jedoch immer noch angenommen ist, dass die einzelnen Stromstücke a, b u. s. w. durch endliche Strecken von einander getrennt seien und nur auf keinem derselben V unstetig werde[10]).

10) Zu dem nämlichen Gesetze für den Widerstand, den ein Leiter dem galvanischen Strom im gewöhnlichen (mechanischen) Sinne des Wortes entgegensetzt, kommt Edlund in k. Vetenskaps. Aks. Handl. Bd. XII. Nr. 8 § 10.

Denkt man sich nun die Endpunkte dieser Stücke näher und näher aneinander rückend bis sie an den Unstetigkeitsstellen von V einander berühren, so treten an die Stelle von $V_{n,n+1}$ eben die Spannungsdifferenzen zwischen den verschiedenen Leitern oder die sogenannten elektromotorischen Kräfte, d. h. man hat alsdann

$$i = \frac{\Sigma E}{\Sigma \frac{s}{kq}}$$

oder das Ohm'sche Gesetz in seiner gewöhnlichen Form.

Hat man einen verzweigten Strom und durchläuft man einen in sich geschlossenen Kreis, so bleiben für einzelne Stücken dieses Kreises die Gleichungen [21] ebenfalls noch gültig, nur mit dem Unterschiede, dass alsdann i nicht auf allen Stücken den gleichen Werth hat, die Summation liefert desshalb in diesem Falle das Resultat:

$$\Sigma \psi(i_n) F(s_n) = \Sigma V_{n,n+1}$$

während für die von einem Verzweigungspunkte ausgehenden Ströme die Kirchhoff'sche Bedingung

$$\Sigma i = 0$$ gelten muss.

Die Lösung einer Verzweigungsfrage reducirt sich also auch hier auf ein Eliminationsproblem.

§ 7. Auch bei wechselndem Werthe der Geschwindigkeit gibt es doch, wie schon bemerkt, einen Fall, in dem eine Lösung der Gleichung in ähnlicher Weise wie oben möglich ist, nämlich dann, wenn der Widerstand dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional ist oder $\xi = v^2\varphi(s)$.

Die Einsetzung dieses Ausdruckes in [4] ergibt

$$-\frac{dV}{ds} = v^2\varphi(s) + \frac{1}{2}\frac{dv^2}{ds} \qquad [24]$$

oder wenn man sich daran erinnert, dass

$$v = \frac{i}{q\delta}$$

und $q\delta$ als Funktion von s betrachtet werden kann und demnach auch $\frac{\varphi(s)}{q\delta}$ als solche, so dass man $\frac{\varphi(s)}{q\delta} = f(s)$ setzen darf, so erhält man für ein Stromstück, das ganz und gar dem betreffenden Gesetze unterworfen ist, die Gleichung:

$$V' - V'' = i^2 \int_{s'}^{s'} f(s)\,ds + \frac{i^2}{2}\left[\frac{1}{q''^2\delta''^2} - \frac{1}{q'^2\delta'^2}\right]$$

[25]

$$= i^2\left[\left(F(s'') + \frac{1}{2q''^2\delta''^2}\right) - \left(F(s') + \frac{1}{2q'^2\delta'^2}\right)\right]$$

oder wenn man den in Klammer stehenden Ausdruck durch W_s bezeichnet

$$V' - V'' = i^2 W_s \qquad [26]$$

W_s ist analog wie oben die Arbeit, welche der Strom 1 auf der Strecke s leistet.

Zerfällt man den ganzen Strom wieder in verschiedene Stücke, so ergeben sich ähnlich wie oben die Gleichungen:

$$i^2 W_1 = V_1' - V_1''$$

$$i^2 W_2 = V_2' - V_2''$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$i^2 W_n = V_n' - V_n''$$

oder nach Summation

$$i^2 \sum_1^n W_\nu = V_1' - V_n'' + \sum_1^{n-1} V_{\nu,\nu+1}$$

was für einen geschlossenen Strom, wo $V_1' = V_{n+1}'$ zu setzen ist,

$$i^2 \Sigma W_n = \Sigma V_{n,n+1} \qquad [27]$$

ergibt, oder

$$i = \frac{\sqrt{\Sigma V_{n,n+1}}}{\sqrt{\Sigma W_n}} \qquad [28]$$

Im Falle einer Stromverzweigung tritt an Stelle von Gleichung [27] für jeden in sich geschlossenen Stromeskreis die Gleichung

$$\Sigma i_n^2 W_n = \Sigma V_{n,n+1} \qquad [29]$$

während die Gleichung

$$\Sigma i = 0$$

für jeden Verzweigungspunkt nach wie vor bestehen bleibt.

Die zuletzt entwickelten Gleichungen schliessen die Formeln für die Bewegungen der Luft in weiten Röhren, also z. B. für die Bewegung in Kaminen oder Ventilationsanlagen in sich.