Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band VIII. Jahrgang 1878.

München.
Akademische Buchdruckerei von F. Straub.
1878.

In Commission bei G. Franz.

Sitzung vom 6. Juli 1878.

Herr von Bauernfeind machte folgende nachträgliche Bemerkungen

Zur Ausgleichung der zufälligen Beobachtungsfehler in geometrischen Höhennetzen.

In der Sitzung unserer Classe vom 2. December 1876 habe ich mein Näherungsverfahren zur Ausgleichung der unvermeidlichen Beobachtungsfehler in geometrischen Höhennetzen besprochen, welches ich schon ein halbes Jahr vorher auf die Ausgleichung von vier ganz innerhalb des Königreichs gelegenen Polygonen des bayerischen Präcisionsnivellements angewendet hatte, wie aus den Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Classe der k. Akademie Bd XII, Abth. 3, Seite 110—132 (Vierte Mittheilung über das bayerische Präcisionsnivellement) und aus deren Sitzungsberichten Bd VI, 1876, Seite 243—270 (das oben bezeichnete Näherungsverfahren enthaltend) hervorgeht.

Diese beiden Schriften, wovon ich der Kürze wegen in der Folge die erste nur mit „Abhandlung" und die zweite mit „Sitzungsbericht" bezeichnen werde, wurden von Herrn E. H. Courtney, k. Major und Lehrer der Vermessungskunde an der Ingenieurschule zu Coopers Hill, für die vom Secretär des Instituts der Civilingenieure von England, Herrn

J. Forrest herausgegebenen „Abstracts of papers in foreign transactions and periodicals" ausgezogen und unter dem Titel „Improved method of adjusting errors in levelling by Mr. v. Bauernfeind" in Bd LII, Abth. 2, Seite 1 bis 10 genannter Zeitschrift zum Abdruck gebracht.

Bei dieser Gelegenheit ergaben sich zunächst zwei Druckfehler in dem Sitzungsbericht, auf welche Herr Courtney aufmerksam machte, und die ich um so weniger unerwähnt lassen darf, als sonst ein Widerspruch in den Angaben dieses Berichts und der Abhandlung stattfände. In letzterer gebe ich nämlich auf Seite 123 den nach der Methode der kleinsten Quadrate berechneten mittleren Kilometerfehler der oben erwähnten vier Nivellementsschleifen zu $\pm$ 2,228 mm an, während in dem Sitzungsbericht Seite 258 für denselben Fehler der Werth $\pm$ 2,601 mm steht. Dieser letztere Werth ist falsch und kam durch Verwechslung mit dem in Gl (11) auf Seite 116 der Abhandlung enthaltenen und aus einer dort als fehlerhaft nachgewiesenen Rechnungsmethode entsprungenen gleichen Werthe in den Sitzungsbericht. Eine wiederholt von mir vorgenommene Berechnung des fraglichen Werthes ergab wie früher $m = \pm$ 2,228 mm, was auch Herr Courtney fand.

Eine andere Bewandtniss hat es mit dem zweiten Irrthum, welcher sich auf den nach meinem Näherungsverfahren berechneten und im Sitzungsbericht Seite 262 zu $\pm$ 2,709 mm angegebenen mittleren Kilometerfehler bezieht. Dieser Irrthum beruht auf einem Rechnungsversehen von meiner Seite, das jedoch nicht bei der Herstellung der Fehlerquadrate und deren Summe vorkam, da eine Wiederholung der Berechnung dieser Quadrate genau den auf Seite 262 des Sitzungsberichts angegebenen Werth $[vv] = 53{,}8810$ lieferte. Wie dem auch sei, der richtige Werth des mittleren Kilometerfehlers nach meinem Verfahren heisst in Uebereinstimmung mit Herrn Courtney $m = \pm$ 2,278, so dass zwischen dem nach der strengen Methode berechneten Werthe 2,228 mm und dem aus meinem Näherungsverfahren folgenden 2,278 nur ein Unterschied von 0,05 mm besteht.

Die wiederholte numerische Berechnung des mittleren Kilometerfehlers einer Reihe doppeltnivellirter Schleifen hat mich zu abgekürzten Formeln für diese Berechnungen geführt, welche ich nachstehend mittheilen will. Diese Abkürzungen beziehen sich auf den Ausdruck der Summe der mit den Gewichten multiplicirten Fehlerquadrate, und erstrecken sich sowohl über das strenge als das abgekürzte Verfahren. Beschäftigen wir uns zuerst mit der strengen Methode.

Bekanntlich ist das Quadrat des mittleren Fehlers m einer Reihe von Schleifen, welche zusammen n Seiten von den Längen s_1 s_2 s_3 .... s_n haben und deren Verbesserungen des Doppelnivellements v_1 v_2 v_3 .... v_n sind, ausgedrückt durch die Gleichung

$$m^2 = \frac{[pvv]}{n} = \frac{1}{n}\left(\frac{v_1 v_1}{S_1} + \frac{v_2 v_2}{S_2} + \ldots + \frac{v_n v_n}{S_n}\right)$$

und es geht diese Formel auf den von uns behandelten besonderen Fall von 4 Scheifen des bayerischen Präcisionsnivellements mit 11 Strecken, deren Gesammtlänge S = 1254,474 Km ist, dadurch über, dass man n = 11 setzt. Bleiben wir bei diesem Falle, so gibt es nach Seite 121 der Abhandlung zwischen den beobachteten Höhenunterschieden d_1 d_2 d_3 . . d_{11} und ihren Verbesserungen v_1 v_2 v_3 . . v_{11} vier unabhängige Bedingungs- und eilf Fehlergleichungen, welche mit der Forderung

$$2\,\Sigma = p_1\, v_1\, v_1 + p_2\, v_2\, v_2 + \ldots + p_{11}\, v_{11}\, v_{11} = \text{min.}$$

gleichzeitig zu erfüllen sind. Wenn die Gewichte den nivellirten Strecken umgekehrt proportional angenommen werden; wenn man ferner jene 4 Bedingungsgleichungen nacheinander mit den willkürlichen Factoren k_1 k_2 k_3 k_4 multiplicirt und die Fehler der vier Polygonabschlüsse mit Δ_1 Δ_2 Δ_3 Δ_4 bezeichnet, so nehmen nach Gl (17) Seite 122 der Abhandlung die 11 Verbesserungen folgende allgemeine Werthe an, bei welchen die Reciproke $1 : S = c$ gesetzt ist:

$$
\begin{array}{llll}
v_1 = -\, c\, k_1\, s_1 & & v_7 = +\, c\, k_3\, s_7 & \\
v_2 = +\, c\, k_1\, s_2 & & v_8 = -\, c\, (k_4 - k_3)\, s_8 & \\
v_3 = +\, c\, (k_2 - k_1)\, s_3 & & v_9 = -\, c\, k_3\, s_9 & \\
v_4 = -\, c\, k_2\, s_4 & & v_{10} = +\, c\, k_4\, s_{10} & \\
v_5 = -\, c\, k_2\, s_5 & & v_{11} = -\, c\, k_4\, s_{11} & \\
v_6 = +\, c\, (k_2 - k_3)\, s_6 & & & (2)
\end{array}
$$

Die Werthe der willkührlichen Factoren k_1 k_2 k_3 k_4 sind auf Seite 123 der Abhandlung für den zehnten Theil des Werths von S, nämlich $0{,}1\ S = 125{,}4474$ Km berechnet; behält man den wirklichen Werth von S bei, so werden jene Factoren 10 mal grösser, d. h.

$k = 10{,}473 \quad k_2 = 14{,}947 \quad k_3 = 7{,}385 \quad k_4 = 57{,}763.$

Die Nivellementsschleife oder das Polygon Nr I hat 3 Seiten mit der Gesammtlänge $S_I = s_1 + s_2 + s_3 = 452{,}062$ Km., und es ist für dasselbe, wenn man für v die betreffenden Werthe aus den Fehlergleichungen (2) einsetzt:

$$\frac{v_1 v_1}{s_1} + \frac{v_2 v_2}{s_2} + \frac{v_3 v_3}{s_3} = \frac{k_1\, k_1\, S_I + k_2\, (k_2 - 2\, k_1)\, s_3}{S\, S} \qquad (3)$$

Die Schleife Nr II besteht aus 4 Seiten mit der Gesammtlänge $S_{II} = s_3 + s_4 + s_5 = s_6 = 482{,}993$ Km und dem Unterschiede $S_{II} - s_3 = s_4 + s_5 + s_6 = 335{,}727$ Km. Setzt man wieder für die Fehler v die obigen allgemeinen Werthe, so wird

$$\frac{v_4 v_4}{s_4} + \frac{v_5 v_5}{s_5} + \frac{v_6 v_6}{s_6} = \frac{k_2\, k_2\, (S_{II} - s_3) + k_3\, (k_3 - 2 k_2)\, s_6}{S\, S} \qquad (4)$$

Das Polygon Nr III hat ebenfalls 4 Seiten mit der Gesammtlänge $S_{III} = s_6 + s_7 + s_8 + s_9 = 403{,}108$ Km und einem Unterschiede $S_{III} - s_6 = s_7 + s_8 + s_9 =$ 302,025 Km. Nach Einsetzung der v-Werthe wird

$$\frac{v_7 v_7}{s_7} + \frac{v_8 v_8}{s_8} + \frac{v_9 v_9}{s_9} = \frac{k_3 k_3 (S_{III} - s_6) + k_4 (k_4 - 2 k_3) s_8}{SS} \tag{5}$$

Endlich hat die Schleife Nr IV 3 Seiten mit der Gesammtlänge $S_{IV} = s_8 + s_{10} + s_{11} = 244{,}772$ Km und dem Unterschiede $S_{IV} - s_8 = s_{10} + s_{11} = 164{,}660$ Km. Setzt man für v_{10} und v_{11} die obenstehenden Werthe, so wird

$$\frac{v_{10} v_{10}}{s_{10}} + \frac{v_{11} v_{11}}{s_{11}} = \frac{k_4 (S_{IV} - s_8)}{SS} \tag{6}$$

Addirt man die Gleichungen (3) bis einschliesslich (6) und schreibt für die Summe der linken Seiten das bekannte Zeichen, so ergibt sich

$$\left[p\,vv\right] = \frac{1}{SS} \Big(k_1{}^2 S_I + k_2{}^2 S_{II} + k_3{}^2 S_{III} + k_4{}^2 S_{IV} - $$
$$- 2 (k_1 k_2 s_3 + k_2 k_3 s_6 + k_3 k_4 s_8)\Big) \tag{7}$$

Nun ist nach den Gleichungen (18) auf Seite 122 der Abhandlung

$$\begin{aligned} k_1 S_I &= S \varDelta_1 + k_2 s_3 \\ k_2 S_{II} &= S \varDelta_2 + k_2 s_3 + k_3 s_6 \\ k_3 S_{III} &= S \varDelta_3 + k_2 s_6 + k_4 s_8 \\ k_4 S_{IV} &= S \varDelta_4 + k_3 s_8 \end{aligned}$$

und wenn man diese Werthe in (7) setzt und reducirt:

$$\left[p\,vv\right] = \frac{1}{S} \left(k_1 \varDelta_1 + k_2 \varDelta_2 + k_3 \varDelta_3 + k_4 \varDelta_4\right) \tag{8}$$

Wird dieser Ausdruck in (1) gesetzt und der mittlere Fehler pro Kilometer unter Anwendung der bereits angeführten Werthe von n_1 S_1 k_1 k_2 k_3 k_4 und der aus der Abhandlung bekannten Schlussfehler

$\varDelta_1 = + 2{,}02$ cm, $\varDelta_2 = + 3{,}93$ cm, $\varDelta_3 = - 2{,}52$ cm, $\varDelta_4 = + 10{,}80$ cm berechnet, so ergibt sich zunächst

$$S\,[pvv] = 21{,}15546 + 58{,}74171 - 18{,}61020 + 623{,}84040 = 685{,}12737$$

und hieraus weiter $[pvv] = 11\,m^2 = 0{,}546147$ und schliesslich

$$m = \pm\, 0{,}2228 \text{ cm} = \pm\, 2{,}228 \text{ mm} \qquad (9)$$

genau übereinstimmend mit dem in der Abhandlung (S. 123) aus den 11 Posten $v_1^2 : s_1$ bis $v_{11}^2 : s_{11}$ unmittelbar berechneten Werthe.

Gehen wir nun zum Näherungsverfahren über und suchen wie sich hier der Ausdruck für $[p\mathfrak{v}\mathfrak{v}]$ abkürzen lässt. Bekanntlich sind nach diesem Verfahren für ein Polygon Nr 1, dessen μ Strecken zusammen die Länge S' haben und dessen Schlussfehler Δ' ist, die Verbesserungen dieser Strecken

$$\mathfrak{v}'_1 = e' s'_1 \qquad \mathfrak{v}''_2 = e' s'_2 \qquad \mathfrak{v}''' = e' s'_3 \; \ldots\ldots$$

wobei e' die Verbesserung pro Kilometer oder den E i n h e i t s w e r t h d e r V e r b e s s e r u n g für die Schleife Nr 1, nämlich e' den Quotienten $\Delta' : S'$ vorstellt.

Hieraus folgt die Summe der mit ihren Gewichten multiplicirten Fehlerquadrate

$$\left[p\,\mathfrak{v}'\mathfrak{v}'\right] = \frac{\mathfrak{v}'_1\,\mathfrak{v}'_1}{s'_1} + \frac{\mathfrak{v}'_2\,\mathfrak{v}'_2}{s'_2} + \frac{\mathfrak{v}'_3\,\mathfrak{v}'_3}{s'_3} + \ldots\ldots =$$

$$e'\,e'\,(s'_1 + s'_2 + \ldots + s'_\mu) = \frac{(\Delta')^2}{S^1}$$

Schliesst sich an dieses Polygon ein zweites Nr 2 an mit den ν Strecken $s''_1\; s''_2\; s''_3 \; \ldots \; s''_\nu$, deren Gesammtlänge S'' ist, und heisst die Verbindungsstrecke in diesem Polygon s''_1 während sie in Nr 1 s'_μ heisst, so ist $s'_\mu = s''_1$ und der Einheitswerth der Verbesserung

$$e'' = \frac{\Delta'' - \mathfrak{v}'_\mu}{S'' - s''_1} \qquad (10)$$

Mit diesem Factor erhält man die Verbesserungen

$$\mathfrak{v}''_2 = e''\,s''_2 \qquad \mathfrak{v}''_3 = e''\,s''_3 \qquad \mathfrak{v}''_4 = e''\,s''_4 \;.\;.\;.\;.\;.$$

und damit die Summe der mit den Gewichten multiplicirten Fehlerquadrate

$$\left[p\,\mathfrak{v}''\,\mathfrak{v}''\right] = \frac{\mathfrak{v}''_2\,\mathfrak{v}''_2}{s''_2} + \frac{\mathfrak{v}''_3\,\mathfrak{v}''_3}{s''_3} + \frac{\mathfrak{v}''_4\,\mathfrak{v}''_4}{s''_4} + \ldots = e''\,e''\left(S'' - s''_1\right) = \frac{(\varDelta' - \mathfrak{v}'\mu)^2}{S'' - s''_1}$$

So fortfahrend gelangt man für z. B. 4 Schleifen zu folgendem Ausdrucke für die Summe der Fehlerquadrate multiplicirt mit ihren Gewichten:

$$\left[p\,\mathfrak{v}\mathfrak{v}\right] = \frac{(\varDelta')^2}{S'} + \frac{(\varDelta'' - \mathfrak{v}'\mu)^2}{S'' - s''_1} + \frac{(\varDelta''' - \mathfrak{v}''\nu)^2}{S''' - s'''_1} + \frac{(\varDelta'''' - \mathfrak{v}'''\varkappa)^2}{S'''' - s''''_1} \qquad (11)$$

wofür man auch, unter Beibehaltung der Einheitswerthe $e'\,e'' \ldots$, schreiben kann:

$$\left[p\,\mathfrak{v}\mathfrak{v}\right] = e'\,e'\,S' + e''\,e''\left(S'' - s''_1\right) + e'''\,e'''\left(S''' - s'''_1\right) + e''''\,e''''\left(S'''' - s''''_1\right) \qquad (11\,a)$$

Wendet man diese allgemeinen Formeln auf das bayerische Präcisionsnivellement, d. i. auf die 4 Schleifen an, welche ganz in Bayern liegen, und schreitet man bei der Ausgleichungsberechnung vom Polygon IV zu dem Polygon I fort, so ist zu setzen:

	Km.		Km.
$S' = S_{IV}$	$= 224,772$	$S' - o = S_{IV} - o$	$= 244,772$
$S'' = S_{III}$	$= 403,108$	$S'' - s_1'' = S_{III} - s_8$	$= 322,996$
$S''' = S_{II}$	$= 482,993$	$S''' - s_1''' = S_{II} - s_6$	$= 381,910$
$S'''' = S_{I}$	$= 452,062$	$S'''' - s_1'''' = S_{I} - s_3$	$= 304,796$

$$\begin{array}{llll} & \text{cm} & & \\ \varDelta' = \varDelta_4 = +10{,}80 & \varDelta' - o = \varDelta_4 - o & = +10{,}80 - 0{,}00 = & 10{,}80 \\ \varDelta'' = \varDelta_3 = -\ \ 2{,}52 & \varDelta'' - \mathfrak{v}'\mu = \varDelta_3 - \nu_8 & = -\ \ 2{,}52 + 3{,}54 = & 1{,}02 \\ \varDelta''' = \varDelta_2 = +\ \ 3{,}93 & \varDelta''' - \mathfrak{v}'\nu = \varDelta_2 - \nu_6 & = +\ \ 3{,}93 + 0{,}33 = & 4{,}26 \\ \varDelta'''' = \varDelta_1 = +\ \ 2{,}02 & \varDelta'''' - \mathfrak{v}'\pi = \varDelta_1 - \nu_3 & = +\ \ 2{,}02 + 1{,}64 = & 3{,}66 \end{array}$$

$$e' = \frac{10{,}80}{244{,}772} = 0{,}044123;\ \log e' = 8{,}64466 - 10$$

$$e'' = \frac{1{,}02}{403{,}108} = 0{,}003158;\ \log e'' = 7{,}49940 - 10$$

$$e''' = \frac{4{,}26}{482{,}993} = 0{,}011128;\ \log e''' = 8{,}04643 - 10$$

$$e'''' = \frac{3{,}66}{452{,}062} = 0{,}012008;\ \log e'''' = 8{,}07947 - 10$$

Mit diesen besonderen Werthen findet man zunächst

$$\left[p\mathfrak{v}\mathfrak{v}\right] = 0{,}476526 + 0{,}003221 + 0{,}047295 + 0{,}043949 = 0{,}570990$$

und hieraus den mittleren Kilometerfehler wie oben (S. 417)

$$\mathfrak{m} = \sqrt{\frac{0{,}57099}{11}} = \pm 2{,}278 \text{ mm}$$

Die abgekürzten Formeln (8) und (11) für die Summe der mit ihren Gewichten multiplicirten Fehlerquadrate, welche das n fache Quadrat des mittleren Kilometerfehlers darstellen, lehren uns über die Eigenschaften dieses Fehlers und der Polygone Folgendes:

1) Der Unterschied der Werthe von m und $\mathfrak{m}$ in Gl (8) und Gl (11), welcher den Grad der Annäherung meines abgekürzten Verfahrens an das strenge der Methode der kleinsten Quadrate erkennen lässt, kann nicht allgemein entwickelt werden, weil die Darstellung der willkührlichen Factoren k_1 k_2 k_3 k_4 zu umständlich ist; doch wird die numerische Berechnung jenes Unterschieds durch die Formeln (8) und (11) wesentlich erleichtert.

2) Mein Näherungsverfahren schliesst sich der Methode der kleinsten Quadrate für ein einzelnes Polygon von beliebig vielen Seiten ganz an, und wäre es möglich alle Polygone nur mit je einem einzigen Punkte zu verknüpfen, so müsste dieses Verfahren ausschliesslich angewendet werden; in allen anderen Fällen kommt meine Methode der strengen um so näher, je kürzer die Seiten sind, in welchen sich die Polygone berühren. Man sollte daher bei der Anlage der Höhennetze eines Landes hierauf Rücksicht nehmen.

3) Der mittlere Kilometerfehler ergibt sich nach meinem Verfahren nothwendig stets etwas grösser als jeder nach der Methode der kleinsten Quadratsummen gefundene; beide Fehler unterscheiden sich aber nach allen bisherigen Erfahrungen so wenig von einander, dass ihr Unterschied völlig übersehen werden darf.