# Sitzungsberichte

der

## mathematisch-physikalischen Classe

der

## k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band X. Jahrgang 1880.

**München.**

Akademische Buchdruckerei von F. Straub.

1880.

In Commission bei G. Franz.

Sitzung vom 7. Februar 1880.

Herr F. Klein legte vor:

„Ueber Relationen zwischen Klassenzahlen binärer quadratischer Formen von negativer Determinante" von J. Gierster in Bamberg.

Die 8 Kronecker'schen Relationen zwischen gewissen Klassenzahlen quadratischer Formen von negativer Determinante sind bekanntlich aus den gewöhnlichen Modulargleichungen durch Resultantenbildung gewonnen worden.[1]) In gleichem Sinne untersuchte ich schon früher die von F. Klein aufgestellten Modulargleichungen der regulären Körper[2]) und teilte insbesondere die Ikosaëderresultate in

1) Betreffs dieser Relationen vergl. man folgende Literatur:

Kronecker: Crelle's Journal Bd. 57 pag. 248 ff. und Berliner Monats berichte von 1857, 1862, 1875.

Hermite: Sur la théorie des fonctions elliptiques et ses applications à l'arithmétique in den Comptes Rendus Bd. 55 (1862). Vergl. auch den Briefwechsel zwischen Liouville und Hermite ebenda Bd. 53 (1861.)

Joubert: Sur la théorie des fonctions elliptiques et son application à la théorie des nombres in den Comptes Rendus Bd. 50

Stephen Smith: Report of the British Association 1865 Bd. 35.

2) Mathem. Annalen Bd. 14 pag. 123.

den Göttinger Nachrichten vom 4. Juni 1879 mit. Ich habe mich neuerdings in analoger Weise mit den unendlich vielen Formen der Modulargleichungen beschäftigt, welche nach der kürzlich von F. Klein dargelegten allgemeinen Theorie der elliptischen Modulfunctionen[1]) existieren und möchte im folgenden einige bisher von mir erhaltene Resultate mitteilen.

Ich muss dabei hervorheben, dass ich zu diesen neuen Untersuchungen, wie zu meinen früheren durch Herrn F. Klein veranlasst und bei der Ausführung in mannigfacher Weise unterstützt worden bin.

Die Tendenz der neuen Untersuchungen kann folgendermassen bezeichnet werden: Es gilt, bei den Modularcorrespondenzen $m^{ter}$ Stufe die Anzahl der „Coincidenzen" in doppelter Weise abzuzählen, nämlich einmal auf arithmetischem, dann auf algebraischem Wege. Auf arithmetischem Wege erhält man dabei stets eine Summe von Klassenanzahlen; setzt man dann die beiderlei Resultate einander gleich, so hat man, was ich als eine Klassenzahlrelation der $m^{ten}$ Stufe bezeichne, und solcher Klassenzahlrelationen gibt es, den verschiedenen Werten von m entsprechend, unendlich viele. —

Die hiemit bezeichnete Aufgabe ist nun bis jetzt von mir nur teilweise durchgeführt worden.

Die arithmetische Abzählung, welche die linken Seiten unserer Relationen liefert, bietet, auch bei allgemeinstem Ansatze, keinerlei principielle Schwierigkeit. Ich habe die betr. Resultate für eine beliebige Primzahlstufe im I. Abschnitte dieser Note explicite angegeben.

1) Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu München vom 6. Dezember 1879. Viel ausführlicher in der Vorlesung: Ueber elliptische Modulfunctionen, Sommer 1879.

Hingegen ist eine allgemeine algebraische Abzählung, welche die rechten Seiten der Klassenzahlrelationen der $m^{ten}$ Stufe ergibt, vorerst noch zu ferne liegend. Die Hauptschwierigkeit liegt hier offenbar in der Lösung der Aufgabe, die Modularcorrespondenzen der $m^{ten}$ Stufe auf der Curve des Geschlechtes p nach einer allgemeinen auf alle Transformationsgrade passenden Methode durch allgebraische Gleichungen zu definieren. Verhältnissmässig einfach aber gestaltet sich diese Abzählung noch, wenn die betrachteten Congruenz-Moduln Hauptmoduln im Sinne von pag. 92 sind.[1]) Für sie ist nämlich $p = o$ und man hat es mit Modulargleichungen schlechthin, nicht aber mit Modularcorrespondenzen zu thun. Ich habe mich bei Untersuchung der rechten Seiten bisher ausschliesslich mit solchen Hauptmoduln beschäftigt. Sie allein schliessen schon eine grosse Menge der genannten Klassenzahlrelationen in sich ein. Insbesondere enthalten sie auch die 8 Kronecker'schen Formeln, welche nach der hier gemachten Einteilung als Formeln 2., 4., 8., 16. Stufe erscheinen.

Was an diesen Formeln besonders bemerkenswert erscheint, ist der Umstand, dass ihre rechten Seiten sämtlich sich durch höchsteinfache apriori angebbare Teilersummen darstellen lassen, dass sie also durchgehends mit den 8 Kronecker'schen Relationen in Bezug auf ihren einfachen arithmetischen Aufbau auf gleicher Stufe stehen. Indess habe ich von einer Aufzählung aller dieser letztbezeichneten Resultate abgesehen und mich im II. Abschnitt der Note darauf beschränkt, die Gesamtergebnisse zu bezeichnen, welche mit den genannten Mitteln für die siebente Stufe gewonnen werden.

---

1) Blosse Citate auf Seitenzahlen beziehen sich immer auf die eingangs citierte Abhandlung von F. Klein *in den Sitzungsberichten* der Akademie der Wissenschaften zu München.

## I. Die linken Seiten für beliebige Primzahlstufen.

Die folgenden Erörterungen beziehen sich auf ein vollständiges System ausgezeichneter Congruenz-Moduln der $m^{ten}$ Stufe, wo m eine Primzahl $> 2$ sein soll. Dieses Modulsystem soll weiterhin nach pag. 93 so gewählt sein, dass es für verschiedene Werte $\omega$ und $\omega'$ dann und nur dann dasselbe Wertsystem $M'_1$, $M'_2, \ldots$ aufweist, wenn $\omega$ und $\omega'$ auseinander durch ganzzahlige Substitutionen $\begin{vmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{vmatrix}$ mod. q von der Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ hervorgehen, dass sie hingegen für Substitutionen $\begin{vmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{vmatrix}$, welche mod. q nicht zur Identität congruent sind, sich linear transformieren.

Die Gruppe dieser linearen Transformationen besteht bei den hier gemachten Einschränkungen, wie bekannt, aus $\frac{q\,(q^2 - 1)}{2}$ Substitutionen.

Ich muss nun zunächst die F. Klein'schen Resultate, welche diese Modulsysteme betreffen, nach 2 Richtungen hin weiter ausführen.

1) Neben die von F. Klein genannte Modularcorrespondenz der $q^{ten}$ Stufe stellen sich noch $q \cdot \frac{q^2 - 1}{2} - 1$ weitere, welche alle aus jener dadurch hervorgehen, dass man das ursprüngliche Modulsystem $M$, $M_1$, $M_2, \ldots$ fest lässt, hingegen das transformierte $M'$, $M'_1$, $M'_2$ den eben genannten $\frac{q\,(q^2 - 1)}{2}$ Substitutionen (von den Identität abgesehen) unterwirft. Arithmetisch gelangt man zu denselben nach pag. 95 dadurch, dass man in $M(\omega)$, $M_1(\omega), \ldots$ an Stelle von $\omega$ $\omega' = \frac{1}{n}\,\frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$ setzt und $M(\omega')$, $M_1(\omega'), \ldots$ beziehungsweise mit $M'(\omega)$, $M_1{}'$, $(\omega) \ldots$ bezeichnet. Hiebei

bedeutet $\begin{vmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{vmatrix}$ irgend eine ganzzahlige Substitution von der Determinante 1 und alle derartigen Substitutionen $\begin{vmatrix}\alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta'\end{vmatrix}$, welche mod. q zu $\begin{vmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{vmatrix}$ congruent sind, liefern dieselbe Modularcorrespondenz. Dem entsprechend will ich die einzelne Correspondenz im folgenden kurz durch

$$\omega' = \frac{1}{n} \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$$

bezeichnen.

Nach pag. 99 geht ferner jede dieser Correspondenzen durch $\frac{q(q^2-1)}{2}$ simultane Substitutionen der beiden Modulsysteme M, M' in sich über und wenn insbesondere der Transformationsgrad n quadratischer Rest mod. q ist, so gibt es eine Correspondenz, für welche diese simultanen Substitutionen cogredient (d. h. unter sich identisch) sind.

2) Auch für Transformationsgrade n, welche zu q nicht relativ prim sind, existieren in gewissem Sinne Modulargleichungen, bez. Modularcorrespondenzen, nämlich algebraische Relationen zwischen den gegebenen und den transformierten Moduln.

Ich begnüge mich hinsichtlich dieser Gleichungen, die als besonderen Fall die gewöhnlich sogenannten Modulargleichungen zwischen $\sqrt[4]{\varkappa}$, $\sqrt[4]{\lambda}$ für einen durch 2 teilbaren Transformationsgrad einschliessen, mit einigen wenigen Bemerkungen, die für das Folgende nötig sind.

Der Grad dieser Gleichungen für die Transformation $n^{\text{ter}}$ Ordnung ist in den einzelnen Variablen durch $n.\, \Pi' \left(1 + \frac{1}{r}\right)$ dargestellt. Hiebei erstreckt sich das Produkt $\Pi'$ über alle verschiedenen in n enthaltenen Primzahlen r mit Ausnahme von q. Ferner bleiben diese Correspondenzen bei $\frac{q^2(q-1)}{2}$

simultanen Substitutionen der beiden Modulsysteme ungeändert. Da es im ganzen $\frac{q^2(q^2-1)^2}{4}$ derartige Substitutionen gibt, so existieren überhaupt $\frac{(q^2-1)(q+1)}{2}$ Modulargleichungen der gemeinten Art. —

Nunmehr handelt es sich darum, auf zahlentheoretischem Wege die Coincidenzen aller dieser Modularcorrespondenzen abzuzählen d. h. anzugeben, wie oft es vorkommt, dass das ursprünglich gegebene Modulsystem

$$M, M_1, \ldots$$

mit dem transformierten

$$M', M'_1, \ldots$$

übereinstimmt.

Wir wollen der leichteren Ausdrucksweise halber in dem Falle, wo n auch quadratische Teiler $\varrho^2$ besitzt, welche zu q relativ prim sind, nicht an den im vorhergehenden besprochenen irreduciblen Correspondenzen festhalten,[1]) sondern auch alle jenen irreduciblen Gleichungen zu gleicher Zeit im Auge behalten, welche den Transformationsgraden $\frac{n}{\varrho^2}$ entsprechen. Ist n ein reines Quadrat, so hat man noch eine gewisse Verabredung, die Transformation 1. Ordnung betreffend, hinzuzufügen.

Verstehen wir jetzt mit Kronecker unter H (n) die Anzahl aller Klassen quadratischer Formen $Px^2+Qxy+Ry^2$ von der negativen Determinante

$$Q^2 - 4PR = -n,$$

wobei jedoch die Formenklassen $Px^2+Pxy+Py^2$ und

1) Hält man an den irreduciblen Gleichungen fest, so sind alle quadratischen Formen $Px^2+Qxy+Ry^2$, für welche P, Q, R mit n einen Teiler gemeinsam haben, bei Berechnung der Klassenzahlen auszuschliessen. Vergl. Joubert, die citierte Abhandlung.

$Px^2 + Py^2$ beziehungsweise als $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{2}$ gezählt werden und $H(o) = -\frac{1}{12}$ gesetzt wird, so ist die Anzahl der für die Correspondenz

$$\omega' = \frac{1}{n} \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$$

entstehenden Coincidenzen im allgemeinen durch:

$$g \Sigma H (4n - l_i^2)$$

dargestellt. Hier bedeutet g eine ganze Zahl, welche ich das Gewicht nenne, und $l_i$ beschreibt die sämmtlichen positiven und negativen ganzen Zahlen, eventuell auch o, welche $\equiv \pm i \equiv \pm (\delta n + \alpha)$ mod. q sind und für welche

$$\varDelta = 4n - l_i^2$$

nicht negativ wird. Das Gewicht g[1]), welches als Multiplicator der Klassenzahlsumme auftritt, ist gleich der Anzahl derjenigen linearen Transformationen der betrachteten Modularcorrespondenzen in sich, welche zu gleicher Zeit die Gleichungen:

$$M : M_1 : M_2 : \ldots = M' : M'_1 : M'_2 : \ldots$$

in sich überführen und jeder der aufgezählten Klassen quadratischer Formen entspricht ein Cyclus von solchen Coincidenzen, welche durch die g bezeichneten Substitutionen in einander übergehen.

Dieses allgemeine Verhalten bedarf nur in einigen speciellen Fällen, welche sich auf die Determinante $\varDelta = 4n - l_i^2 \equiv o$ mod. q beziehen, einer Ergänzung. Sind nämlich die $\frac{q(q^2-1)}{2}$ simultanen Substitutionen der Cor-

---

1) Diese Auffassung des Gewichtes g verdanke ich Herrn F. Klein.

respondenzen in sich cogredient, — ein Fall, der, wie oben geschildert, nur eintritt, wenn der Transformationsgrad n quadratischer Rest mod. q ist, — so ist die Anzahl der Coincidenzen durch:

$$\frac{q\,(q^2-1)}{2}\;\Sigma H\left(\frac{4\,n-l^2}{q^2}\right)$$

dargestellt, wo l sich über alle jene positiven und negativen Werte hin erstreckt, für welche $4\,n - l^2$ nicht negativ und durch $q^2$ teilbar ist. Für die übrigen Correspondenzen des Falles $\Delta \equiv o$ mod. q sind dann in den Klassenzahlsummen links jedesmal alle jene Formen ausgeschlossen, für welche

$$P \equiv Q \equiv R \equiv o \text{ mod. } q$$

ist. Ist in diesem Falle $q \equiv 3$ mod. 4, so wird die entstehende Anzahl von Coincidenzen durch

$$\frac{g}{2}\left(\Sigma H\left(4n - l^{2}_{{}_{2}\!\sqrt{n}}\right) - \Sigma H\left(\frac{4\,n-l^2}{q^2}\right)\right)$$

$$\text{oder}\quad g\left(\Sigma H\left(4n - l^{2}_{{}_{0}\!\sqrt{n}}\right) - \Sigma H\left(\frac{4\,n-l^2}{q^2}\right)\right)$$

dargestellt, je nachdem $n \lessgtr o$ mod. q, oder $n \equiv o$ mod. q ist. Wenn hingegen der Modul $q \equiv 1$ mod. 4 ist, so trennen sich ausserdem noch diejenigen Klassen quadratischer Formen von einander, durch welche quadratische Reste und jene, durch welche quadratische Nichtreste mod. q darstellbar sind, für welche also der Charakter $\left(\frac{P}{q}\right)$ den Wert $+1$, bez. $-1$ hat. Bezeichnen wir die Anzahl der Klassen erster Art mit $\underset{+1}{H}(n)$, jene der zweiten mit $\underset{-1}{H}(n)$, so sind die bezüglichen Coincidenzzahlen durch

$$g\;\Sigma\underset{+1}{H}\left(4n - l^{2}_{{}_{2}\!\sqrt{n}}\right)$$

$$\text{oder}\quad g\;\Sigma\underset{-1}{H}\left(4n - l^{2}_{{}_{2}\!\sqrt{n}}\right)$$

dargestellt, je nachdem $\beta$, $\gamma$ quadratische Reste oder Nichtreste mod. q sind. — Der Index $2\sqrt{n}$ bedeutet hier eine Zahl, welche, zum Quadrat erhoben, $\equiv 4n$ mod q ist.

Hinsichtlich des Gewichtes g hat man, abgesehen von der cogredienten Correspondenz, folgende Resultate: Im Falle $l_i \lesssim o$ mod. q ist

$$g = \frac{1}{2}\left[q - \left(\frac{-1}{q}\right)\right] \text{ oder } = \frac{1}{2}\left[q + \left(\frac{-1}{q}\right)\right]$$

oder $= q$, je nachdem $\varDelta = 4n - l_i^2$ quadratischer Rest, oder Nichtrest oder congruent o mod. q ist. Dabei bedeutet $\left(\frac{-1}{q}\right)$ das Legendre'sche Zeichen, also $+1$ oder $-1$, je nachdem $q \equiv 1$ oder $\equiv 3$ mod. 4 ist. Ist $l \equiv o$ mod q, so ist g für jeden der bezeichneten Fälle gerade das Doppelte des angegebenen Wertes. Nur eine Ausnahme findet hier ($l \equiv o$ mod. q) statt. Wenn nämlich $\varDelta \equiv o$, $q \equiv 3$ mod 4 und $n \equiv o$ mod. q ist, so wird wieder $g = q$ statt $2q$ sein.

Die Anzahl $\mu$ aller Correspondenzen der Transformation n. Ordnung, welche ein und dasselbe g liefern, ist im allgemeinen $\frac{q(q^2-1)}{2g}$ und sie alle besitzen dieselbe Anzahl von Coincidenzen, indem diese nämlich durch ein und dieselbe Klassenzahlsumme dargestellt ist. Sie gehen aus einander hervor, wenn man simultan die beiden Modulsysteme den $\frac{q(q^2-1)}{2}$ cogredienten Substitutionen unterwirft. Nur für den Fall $\varDelta \equiv o$ ist dieses wieder dahin zu ergänzen, dass es für denselben Wert von g (wieder abgesehen von der cogredienten Correspondenz) 2 Arten von Modularcorrespondenzen gibt, sobald $n > o$ mod. q oder gleichzeitig $n \equiv o$ mod. q, $q \equiv 1$ mod. 4 ist.

Von den ausgezeichneten Modulsystemen der $q^{\text{ten}}$ Stufe, wie sie bisher vorausgesetzt waren, kann man nunmehr unmittelbar herabsteigen zu nicht ausgezeichneten Systemen von Congruenz-Moduln N, $N_1$, $N_2$ .. derselben Stufe d. h. zu solchen Modulsystemen, welche ausser bei ganzzahligen Substitutionen $\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta} \equiv \begin{vmatrix} 1 0 \\ 0 1 \end{vmatrix}$ mod. q auch noch bei anderen solchen Substitutionen der Determinante 1 ungeändert bleiben. Diese Substitutionen sind in jedem speciellen Falle durch gewisse Congruenzen für $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ mod. q definiert. Alle diese Moduln lassen sich nach pag. 92 als rationale Functionen der erst betrachteten ausgezeichneten Moduln der $q^{ten}$ Stufe darstellen und die verschiedenen Wertsysteme des Systems ausgezeichneter Moduln, welche einem festen Wertsysteme des nicht ausgezeichneten Modulsystems entsprechen, gehen aus einander durch gewisse lineare Substitutionen der ersteren hervor, welche eine in der Gesammtheit der $\frac{q(q^2 - 1)}{2}$ Substitutionen enthaltene Untergruppe bilden. Hieraus ergibt sich sofort, dass das nicht ausgezeichnete Modulsystem für verschiedene Werte $\omega$ und $\omega'$ nur dann dieselben Werte aufweist, wenn die diesen $\omega$ Werten entsprechenden Wertsysteme des ausgezeichneten Modulsystems durch eine Substitution der letztgenannten Untergruppe aus einander hervorgehen. Dem entsprechend treten jetzt linker Hand als Anzahlen von Coincidenzpunkten einfach lineare Combinationen der oben beschriebenen Klassenzahlaggregate auf, die sich in jedem speciellen Falle leicht hinschreiben lassen.

## II. Die rechten Seiten für die siebente Stufe.

Von den ausgezeichneten Moduln, wie sie im ersten Abschnitt beschrieben sind, sind nur diejenigen der ersten fünf Stufen Hauptmoduln. Sie liefern die Modulargleichungen der regulären Körper d. h. die Modulargleichungen der rationalen Invariante, des Doppelverhältnisses, Tetraeders, Oktaeders und Ikosaeders[1]) und für sie lassen sich daher die rechten Seiten der bezüglichen Klassenzahlrelationen einzeln leicht ermitteln. Dagegen treten für die genannten ausgezeichneten Congruenz-Moduln höherer Stufen bereits Modular correspondenzen auf. Es können aber noch vielfach nichtausgezeichnete Moduln der $q^{ten}$ Stufe vorkommen, welche wieder Hauptmoduln sind. Ich möchte mir vorhalten, bei einer nächsten Gelegenheit eine volle Aufzählung dieser Fälle zu geben.

Für die siebente Stufe schreibe ich folgende wesentlich verschiedene Hauptmoduln hin:

1. $$M = \frac{\lambda^2 \mu}{\nu^3}$$

2. $$N = \frac{\lambda\mu + \mu\nu + \nu\lambda}{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}$$

3. $$\begin{cases} Q_1 = \dfrac{(\lambda+\mu+\nu)\,(\gamma^6 A^2\lambda + \gamma^3 C^2\mu + \gamma^5 B^2\nu)}{(\lambda^2+\mu^2+\nu^2) + \dfrac{-1-\sqrt{-7}}{2}\,(\lambda\mu+\mu\nu+\nu\lambda)} \\[2ex] Q_2 = \dfrac{(\lambda+\mu+\nu)\,(\gamma A^2\lambda + \gamma^4 C^2\mu + \gamma^2 B^2\nu)}{\lambda^2+\mu^2+\nu^2 + \dfrac{-1+\sqrt{-7}}{2}\,(\lambda\mu+\mu\nu+\nu\lambda)} \end{cases}$$

Aus ihnen setzen sich alle übrigen Hauptmoduln der siebenten Stufe rational zusammen. — Die Bedeutung der Grössen $\lambda, \mu, \nu, \gamma$, A, B, C ist hier dieselbe wie in der F. Klein'schen Abhandlung: Ueber

1) F. Klein: Ueber die Transformation der elliptischen Functionen und die Auflösung der Gleichungen fünften Grades in den Mathem. Annalen Bd. XIV pag. 162.

die Transformation 7. Ordnung der elliptischen Functionen, Mathem. Annalen Bd. XIV (insbes. pag. 440, 444, 445). —

Ausserdem sei bemerkt, dass für Transformationsgrade $n \equiv o \bmod 7$ wieder wirkliche Modulargleichungen zwischen $\lambda, \mu, \nu$ und $\lambda', \mu', \nu'$ stattfinden, indem diese Gleichungen von selbst nur die Grössen $M = \frac{\lambda^2 \mu}{\nu^3}$, $M' = \frac{\lambda'^2 \mu'}{\nu'^3}$ enthalten.[1] Diese Angabe entspricht dem, dass man die Ikosaedermodulargleichungen für einen durch 5 teilbaren Transformationsgrad als Gleichungen zwischen $\eta^5$ und $\eta'^5$ anschreiben kann, wie hier beiläufig bemerkt sei.

Auf Grund der genannten Hauptmoduln 7. Stufe gelingt es nun, die sämmtlichen Formeln 7. Stufe mit Hilfe eines einzigen Parameters $\xi$ (n) darzustellen, der übrigens nur dann einen von Null verschiedenen Wert haben kann, wenn n quadratischer Rest mod. 7 ist. Nach Adjunction dieses Parameters drücken sich die sämtlichen rechten Seiten der Klassenzahlformeln 7. Stufe durch höchst einfach definierte Teilersummen des Transformationsgrades n aus, während der Parameter $\xi$ (n) selbst sich nicht allgemein durch diese Teilersummen darstellt, und daher als eine wesentlich compliciertere zahlentheoretische Function erscheint, über die ich bei einer anderen Gelegenheit Mitteilung machen möchte.

Die angedeuteten Teilersummen von n sind folgende:

1) $\Phi$ (n) ist die Summe aller Teiler von n

1) Z. B. hat man nach einer Rechnung, die Herr Klein gelegentlich anstellte, für $n = 7$ folgende Gleichung:

$$1 - MM' = [2(\gamma + \gamma^6) + 3(\gamma^2 + \gamma^5)] (M + M' + 1).$$

2) $\Psi(n)$ ist die Summe der Teiler von n, die $>\sqrt{n}$ sind, weniger der Summe der Teiler von n, die $<\sqrt{n}$ sind.

3) $U_i$ bedeutet die Summe jener Teiler $a_i$ von n, die $<\sqrt{n}$ sind und zugleich die Bedingung $a_i \equiv \pm i$ mod. 7 erfüllen, mit der Festsetzung, dass wenn n ein reines Quadrat und $\sqrt{n} \equiv \pm i$ mod. 7 ist, zu dieser Summe noch $\frac{1}{2}\sqrt{n}$ hinzuaddiert werde.

4) $U_i^{(\nu)}$ bedeutet die Summe der Teiler von n, welche $<\sqrt{n}$, durch $7^{(\nu)}$ teilbar und durch $7^{\nu}$ dividiert congruent $\pm i$ mod. 7 sind.

5) Ausserdem bedeutet $\xi(n)$, wie schon soeben gesagt, die hier nicht näher zu definierende höhere zahlentheoretische Function.

Die Formeln 7. Stufe sind dann (nach Hinwegwertung von gemeinsamen Factoren) folgende:

I. n = quadr. Rest mod. 7

$$1)\quad 3.\ \Sigma H\,\frac{4n-1^2}{49} = \xi(n)$$

$$2)\quad 3.\ \Sigma H\,(4n-1^2_0) = \Phi(n) - 6\,U_{\sqrt{n}} - 14\,\xi(n)$$

$$3)\quad 3.\ \Sigma H\left(4n-1^2_{\sqrt{n}}\right) = \Phi(n) - 3\,U_{2\sqrt{n}} - 3\,U_{4\sqrt{n}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(3\,\Psi(n) - \Phi(n)\right) + 3\,U_{\sqrt{n}}$$

$$4)\quad 3.\ \Sigma H\left(4n-1^2_{2\sqrt{n}}\right) = \Phi(n) - 6\,U_{\sqrt{n}} - 7\,\xi(n)$$

$$5)\quad 6.\ \Sigma H\left(4n-1^2_{4\sqrt{n}}\right) = \Phi(n) + 12\,U_{\sqrt{n}} + 28\,\xi(n)$$

II. n = quadr. Nichtrest mod. 7

1) $3.\ \Sigma H\ (4\,n - l_0^2) = \Phi(n) - 6\,U_{\sqrt{-n}}$

2) $4.\ \Sigma H\ \left(4\,n - l^2_{\sqrt{-n}}\right) = \Phi(n)$

3) $3.\ \Sigma H\ \left(4\,n - l^2_{2\sqrt{-n}}\right) = \Phi(n) - 3\,U_{2\sqrt{-n}} - 3\,U_{4\sqrt{-n}}$

$= \frac{1}{2}\,(3\,\Psi(n) - \Phi(n)) + 3\,U_{\sqrt{-n}}$

4) $4.\ \Sigma H\ \left(4\,n - l^2_{4\sqrt{-n}}\right) = \Phi(n)$

III. $n \equiv o$ mod. 7.

$n = 7^{\mu}\cdot m;\ m \gtrless o$ mod. 7.

1) $\Sigma H\ (4\,n - l_0{}^2) = 2\,\Phi(m) + 7\,\Phi\left(\frac{n}{49}\right) + 7\,\Psi\left(\frac{n}{49}\right)$

2) $3.\ \Sigma H\ (4\,n - l_d^2) = 7^{\mu}\,\Phi(m) - 3\,U_d^{(\mu)} - 3\,U^{(\mu)}_{\frac{m}{d}}$

Die Summen linker Hand erstrecken sich für die so geschriebenen Formeln über folgende Zahlensysteme:

1) $l_0 = 0, \pm 7, \pm 14, \ldots \ldots \equiv o$ mod. 7,
2) $l_1 = 1, 6, 8, 13 \ldots \ldots \equiv \pm 1$ mod. 7,
3) $l_2 = 2, 5, 9, 12 \ldots \ldots \equiv \pm 2$ mod. 7,
4) $l_4 = 3, 4, 10, 11 \ldots \ldots \equiv \pm 4$ mod. 7,

und sind so lange fortzusetzen, als $4\,n - l_i^2$ nicht negativ ist. Dessgleichen beschreibt l alle positiven ganzen Zahlen, für welche $\frac{4\,n - l^2}{49}$ eine ganze positive Zahl oder Null ist. Ferner sind $\Phi\left(\frac{n}{49}\right)$ und $\Psi\left(\frac{n}{49}\right)$ gleich Null zu setzen, falls $\frac{n}{49}$ keine ganze Zahl sein soll, und der Index

$r\sqrt{\mu}$ bedeutet immer jenen kleinsten quadratischen Rest mod. 7, welcher ins Quadrat erhoben $\equiv \mu r^2_\mu$ mod. 7 ist. Endlich bedeutet der Index d in Formel III, 2 einen beliebigen der quadratischen Reste 1, 2, 4 mod. 7, so dass diese eine Formel 3 Formeln vertritt. —

Zum Schlusse schreibe ich beispielsweise noch je eine Formel $9^{\text{ter}}$, $13^{\text{ter}}$ und $11^{\text{ter}}$ Stufe hin.

I. Sei $n \equiv$ quadr. Nichtrest mod. 9, so ist:

$$3\Sigma H(4n - l_0^2) = \Phi(n) - 6U_{\sqrt{-n}}$$

II. Sei $n \equiv 5$ mod. 13, so ist:

$$6\Sigma H(4n - l_6^2) = \Phi(n) - 6U_1 - 6U_5$$

III. Sei $n \equiv 1$ mod. 11, so ist:

$$22\Sigma H\left(\frac{4n - l^2}{121}\right) + 3\cdot\Sigma H(4n - l_0^2) + 4\Sigma H(4n - l_1^2)$$
$$+ 2\Sigma(H(4n - l_3^2) + 2\Sigma H(4n - l_4^2) = \Phi(n) + \Psi(n).$$

Die auftretenden Symbole sind hiebei ebenso definiert, wie bei den Formeln 7. Stufe, nur dass an Stelle von mod. 7 beziehungsweise mod. 9, mod. 13, mod. 11 zu setzen ist.

---

Ich knüpfe hieran noch einige Bemerkungen über Liouville's einschlägige Arbeiten. Bekanntlich war Liouville der Erste, der in dem hier behandelten Gebiete über Kronecker hinaus ging. Auf seine reinzahlentheoretischen Ansätze gestützt konnte er auf die Existenz von unendlich vielen den Kronecker'schen analogen Klassenzahlformeln hinweisen. Die Analogie der Liouville'schen mit den Kronecker'schen Formeln bestand hauptsächlich darin, dass es sich hier wie dort um Aggregate von Klassenzahlen quadratischer Formen von negativen

Determinanten handelte, welche eine arithmetische Reihe 2. Ordnung bildeten. Hingegen kam Liouville, so viel ich weiss, nirgends ausdrücklich auf die Frage zurück, welcher Art die zahlentheoretischen Functionen sind, durch welche jene Klassenzahlaggregate definiert werden können, und es ist klar, dass diese Functionen im allgemeinen wesentlich complicierter ausfallen werden, als jene einfachen Teilersummen, welche ausschliesslich in den oft erwähnten 8 Kronecker'schen Formeln enthalten sind.[1]) Aber im besonderen können wohl solche Aggregate auftreten, zu deren Definition derartige einfache Teilersummen hinreichen und welche also in jeder Beziehung mit den 8 Kronecker'schen Formeln anolog sind. Indess hat Liouville nur eine geringe Anzahl derartiger neuer Formeln in kleinen, sehr zerstreuten Abhandlungen wirklich explicite hingestellt.[2])

Von diesen fallen nur zwei unter die bislang von mir gewonnenen Resultate. Seine Formeln im Journal de Mathématiques sér. 2 Bd. XIII pag. 2, und Bd. XIV pag. 262 sind nämlich beziehungsweise specielle Formeln 6. und 10. Stufe. Hingegen findet sich keine der von mir im vorhergehenden mitgeteilten Relationen unter den Liouville'schen Angaben. Möglicherweise sind aber derartige Resultate implicite in den Liouville'schen Abhandlungen enthalten und dann müsste allerdings der rein arithmetischen Methode Liouville's der Vorrang gelassen werden. Aber ganz abgesehen von dem zahlentheoretischen

---

1) Formeln, in denen compliciertere zahlentheoretische Functionen auftreten, hat späterhin auch Kronecker aufgestellt und zwar durch Umformung von $\Theta$-Reihen, vergl. Berliner Monatsberichte von 1875 pag. 225 ff.

2) Vergl. Liouvilles Journal, sér. 2, Bd. XII p. 98, Bd. XIII p. 1. ff. Bd. XIV p. 2, 7, 8, 262, sowie die allgemeinen Auseinandersetzungen in Bd. III—VIII ebenda, insbesondere die Bemerkungen in Bd. VII, p. 44.

Werte dieser Untersuchungen ist es immerhin für den neuen Stand der elliptischen Modulfunctionen bezeichnend, dass nunmehr auch hier auf dem ursprünglich von Kronecker eingeschlagenen Wege in Bezug auf solche Klassenzahlrelationen ein unendlicher Ausblick eröffnet ist, während das alte Gebiet derselben mit den erwähnten 8 Kronecker'schen Formeln vollkommen erschöpft war. (Vergl. Kronecker in den Berliner Monatsberichten von 1875 pag. 235).