Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XI. Jahrgang 1881.

München.
Akademische Buchdruckerei von F. Straub.
1881.

In Commission bei G. Franz.

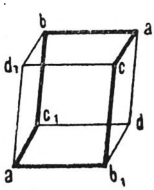
Herr Gustav Bauer legte folgende Mittheilung von Herrn H. Schröter in Breslau vor:

„Ueber eine Eigenschaft des geradlinigen Hyperboloids.“

In den Sitzungsberichten vom 5. Juni 1880 hat Herr G. Bauer eine Mittheilung gemacht, in welcher er eine Eigenschaft eines auf einem einschaligen Hyperboloid verlaufenden räumlichen Sechsecks, dessen drei Paar Gegenseiten drei beliebige Paare paralleler Erzeugender des Hyperboloids sind, als allgemein gültig nachweist, während Herr H. Vogt dieselbe nur für ein Tripel von Normalstrahlen auf dem gleichseitigen Hyperboloid bewiesen hatte. Ich erlaube mir dieser Eigenschaft der Figur noch zwei andere hinzuzufügen, die mit jener auf gleicher Linie stehen, indem alle drei aus den bekannten Relationen für die conjugirten Durchmesser einer Oberfläche zweiter Ordnung entspringen.

Drei beliebige Paare paralleler Erzeugender eines einschaligen Hyperboloids lassen sich zu einem räumlichen Sechseck

$$\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}_1\ \mathfrak{c}\ \mathfrak{a}_1\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{c}_1$$



zusammenstellen, welches auf dem Hyperboloid verläuft. Verbindet man je zwei aufeinanderfolgende Seiten dieses Sechsecks durch eine Ebene, so erhält man die sechs Seitenflächen eines Parallelepipeds, von welchem $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$ $\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1$ drei Paar Gegenecken sind, während das vierte Paar Gegenecken $\mathfrak{d}\mathfrak{d}_1$ nicht auf dem Hyperboloid liegt. Bezeichnen wir die vier Diagonalen des Parallelepipeds durch

$$\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1 = \mathrm{a} \quad \mathfrak{b}\mathfrak{b}_1 = \mathrm{b} \quad \mathfrak{c}\mathfrak{c}_1 = \mathrm{c} \quad \mathfrak{d}\mathfrak{d}_1 = \mathrm{d}$$

so sind die drei ersteren zugleich die drei Hauptdiagonalen des räumlichen Sechsecks. Eine durch zwei parallele Gegenkanten des Parallelepipeds gelegte Ebene, welche dasselbe halbirt und eine Diagonalebene des Parallelepipeds ist, bildet ein Parallelogramm, dessen vier Ecken zwei Paare von Gegenecken des Parallelepipeds sind. Wir erhalten demgemäss sechs Diagonal-Parallelogramme, deren Flächeninhalte wir so bezeichnen:

$$\begin{array}{llll} \text{Parallelogramm} & [\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1] = \mathrm{p} & \text{Parallelogramm} & [\mathfrak{d}\mathfrak{a}\mathfrak{d}_1\mathfrak{a}_1] = \mathrm{p}_1 \\ & [\mathfrak{c}\mathfrak{a}\mathfrak{c}_1\mathfrak{a}_1] = \mathrm{q} & & [\mathfrak{d}\mathfrak{b}\mathfrak{d}_1\mathfrak{b}_1] = \mathrm{q}_1 \\ & [\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1] = \mathrm{r} & & [\mathfrak{d}\mathfrak{c}\mathfrak{d}_1\mathfrak{c}_1] = \mathrm{r}_1 \end{array}$$

Ist endlich v das Volumen des Parallelepipeds, so gelten für das gegebene einschalige Hyperboloid, wie auch die drei Paare paralleler Erzeugender auf demselben gewählt werden mögen, die drei Beziehungen:

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{I.} & \mathrm{v} = \text{const.} \quad \text{(Bauer)} \\ \text{II.} & \mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2 + \mathrm{c}^2 - \mathrm{d}^2 = \text{const.} \\ \text{III.} & \mathrm{p}^2 + \mathrm{q}^2 + \mathrm{r}^2 - \mathrm{p}_1{}^2 - \mathrm{q}_1{}^2 - \mathrm{r}_1{}^2 = \text{const.} \end{array}\right.$$

Für den besonderen Fall dreier Normalstrahlen auf dem gleichseitigen Hyperboloid giebt die erste Beziehung den schon von Herrn Vogt bewiesenen Satz, dessen allgemeine Gültigkeit Herr Bauer nachgewiesen hat, die zweite Beziehung (da $\mathrm{a} = \mathrm{b} = \mathrm{c} = \mathrm{d}$ wird wegen der Rechtwinkligkeit des Parallelepipeds) die von H. Vogt angegebene Eigenschaft, dass die Ecken aller solcher Parallelepipeda auf einer Kugelfläche liegen, endlich die dritte Beziehung (da $\mathrm{p}_1 = \mathrm{p}$, $\mathrm{q}_1 = \mathrm{q}$, $\mathrm{r}_1 = \mathrm{r}$ wird) den besonderen Werth

Null der Konstanten, woraus die bekannte Bedingung für das gleichseitige Hyperboloid hervorgeht.

Die aus irgend drei Paaren von parallelen Erzeugenden eines einschaligen Hyperboloids bestehende Figur lässt eine doppelte Auffassung zu; in dem räumlichen Sechseck, dessen Seiten die abwechselnd den beiden Regelschaaren angehörigen Erzeugenden sind, können sowohl die Schnittpunkte je zweier auf einander folgender Seiten:

$$\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}_1\ \mathfrak{c}\ \mathfrak{a}_1\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{c}_1$$

als Ecken eines Sechsecks, wie auch die je zwei aufeinanderfolgende Seiten verbindenden Ebenen als Seitenflächen eines Sechsflachs aufgefasst werden; das letztere ist oben geschehen und das von diesen sechs Berührungsebenen des Hyperboloids gebildete Parallelepiped bot die oben ausgesprochenen Eigenschaften dar. Wählen wir aber die erstere Auffassung, so bilden die sechs Punkte $\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}_1\ \mathfrak{c}\ \mathfrak{a}_1\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{c}_1$ ein räumliches Sechseck oder in gewöhnlicher Ausdrucksweise die sechs Ecken eines (schiefwinkligen) Oktaëders, dessen drei schiefwinklige Axen die drei Hauptdiagonalen

$$\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_1 \quad \mathfrak{b}\,\mathfrak{b}_1 \quad \mathfrak{c}\,\mathfrak{c}_1$$

sind. Dieses Oktaëder hat also 6 Ecken, 8 Seitenflächen und 12 Kanten.

Von den 12 Kanten des Oktaëders liegen sechs als Erzeugende auf dem Hyperboloid, die sechs übrigen nicht; von den acht Seitenflächen des Oktaëders sind sechs Berührungsebenen des Hyperboloids, die beiden übrigen nicht; unsere obigen drei Sätze lassen sich nun mit Rücksicht auf diese Auffassung des Oktaëders so aussprechen:

I. Der räumliche Inhalt des Oktaëders bleibt von unveränderlichem Werthe.

II. Die Summe der Quadrate derjenigen sechs Kanten des Oktaëders, welche Erzeugende des Hyperboloids sind, vermindert um die Summe der Quadrate der sechs übrigen Kanten des Oktaëders, bleibt von unveränderlichem Werthe.

III. Die Summe der Quadrate derjenigen sechs Seitenflächen des Oktaëders, welche Berührungsebenen des Hyperboloids sind, vermindert um die Summe der Quadrate der beiden übrigen Seitenflächen des Oktaëders, bleibt von unveränderlichem Werthe.

Hieran knüpfte Herr Bauer einige Bemerkungen:

„Ueber Tripel von Geraden, welche auf einem Hyperboloid liegen.“

Den allgemeinen Satz über das geradlinige Hyperboloid, welchen ich der hohen Classe vorigen Sommer mittheilte und auf welchen Herr Schröter Bezug nimmt, habe ich aus einer von Herrn Vogt gefundenen Eigenschaft spezieller Tripel auf einem speziellen Hyperboloid abgeleitet. Es ergaben sich mir aber damals schon durch dieselbe Betrachtung unmittelbar noch mehrere Sätze über Tripel von Geraden, die auf einem Hyperboloid liegen, welche ich, veranlasst durch die Mittheilung von Herrn Schröter, hier nachtragen will.

1) Ist ein geradliniges Hyperboloid U gegeben und eine andere zu U concentrische Fläche zweiter Ordnung U′, und wir nehmen an (wozu nur eine Bedingung zu erfüllen ist), dass U′ ein Tripel von conjugirten Durchmessern habe, welche auf dem Asymptotenkegel von U liegen, so hat U′ einfach unendlich viele solche Tripel und es gibt dann auf dem Hyperboloid in der einen und andern Regelschaar un-