Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XI. Jahrgang 1881.

München.
Akademische Buchdruckerei von F. Straub.
1881.

In Commission bei G. Franz.

des Hyperboloids sind, vermindert um die Summe der Quadrate der sechs übrigen Kanten des Oktaëders, bleibt von unveränderlichem Werthe.

III. Die Summe der Quadrate derjenigen sechs Seitenflächen des Oktaëders, welche Berührungsebenen des Hyperboloids sind, vermindert um die Summe der Quadrate der beiden übrigen Seitenflächen des Oktaëders, bleibt von unveränderlichem Werthe.

Hieran knüpfte Herr Bauer einige Bemerkungen:

„Ueber Tripel von Geraden, welche auf einem Hyperboloid liegen."

Den allgemeinen Satz über das geradlinige Hyperboloid, welchen ich der hohen Classe vorigen Sommer mittheilte und auf welchen Herr Schröter Bezug nimmt, habe ich aus einer von Herrn Vogt gefundenen Eigenschaft spezieller Tripel auf einem speziellen Hyperboloid abgeleitet. Es ergaben sich mir aber damals schon durch dieselbe Betrachtung unmittelbar noch mehrere Sätze über Tripel von Geraden, die auf einem Hyperboloid liegen, welche ich, veranlasst durch die Mittheilung von Herrn Schröter, hier nachtragen will.

1) Ist ein geradliniges Hyperboloid U gegeben und eine andere zu U concentrische Fläche zweiter Ordnung U′, und wir nehmen an (wozu nur eine Bedingung zu erfüllen ist), dass U′ ein Tripel von conjugirten Durchmessern habe, welche auf dem Asymptotenkegel von U liegen, so hat U′ einfach unendlich viele solche Tripel und es gibt dann auf dem Hyperboloid in der einen und andern Regelschaar un-

endlich viele Tripel von Geraden, welche Tripeln conjugirter Durchmesser von U′ parallel sind. Ein solches Tripel der einen Regelschaar und die Parallelen der andern Schaar bilden auf dem Hyperboloid ein räumliches Sechseck, dessen Seiten conjugirten Durchmessern von U′ parallel sind.

Nun hat Herr Vogt [1]) nachgewiesen, dass, wenn das Hyperboloid Tripel von zu einander rechtwinkligen Geraden hat, die Ecken aller durch diese Tripel bestimmten Sechsecke auf dem Durchschnitt des Hyperboloids mit einer concentrischen Kugel liegen. Bemerkt man nun, dass die spezielle Eigenschaft dieses „gleichseitigen" Hyperboloids darin besteht, dass es Tripel von Geraden hat, welche zu Tripeln conjugirter Durchmesser einer Kugel parallel sind, so ergibt sich durch affine Transformation, da bei derselben ähnliche und ähnlich liegende Flächen sich wieder in solche transformiren, folgender allgemeine Satz:

I. Liegt auf einem Hyperboloid U ein Sechseck, dessen Seiten paarweise zu einem Tripel conjugirter Durchmesser einer andern Fläche U′ 2ter Ord. parallel sind, so liegen auf U unendlich viele solche Sechsecke und die Ecken aller dieser Sechsecke liegen auf dem Durchschnitt von U mit einer concentrischen zu U′ ähnlichen und ähnlich liegenden Fläche 2ter Ord. V.

2) Wir können nun aber auch den reciproken Fall betrachten und annehmen, die Fläche U′ habe ein Tripel conjugirter Diametralebenen, welche den Asymptotenkegel des Hyperboloids U berühren; dann gibt es einfach unendlich viele solche Tripel. Jede Ebene, welche den Asymptotenkegel von U berührt, enthält aber zwei zu der Berührungslinie parallele Gerade des Hyperboloids U und ein Tripel von solchen Ebenen schneidet daher aus U ein Sechseck

1) Journ. v. Borch. Bd. 86. S. 297 „Ueber ein besonderes Hyperboloid."

aus, aus Paaren paralleler Geraden gebildet. Die zwei Geraden auf einer Ebenen gehören den zwei Regelschaaren an; die eine sei die Gerade λ_1, die zweite die Gerade μ_1; auf einer zweiten Ebene liegen die zwei Parallelen λ_2, μ_2. Diese Geraden schneiden sich auf dem Durchschnitt der zwei Ebenen in zwei Punkten $(\lambda_1 \mu_2)$ und $(\lambda_2 \mu_1)$. Drei conjugirte Diametralebenen von U′, welche den Asymptotenkegel von U berühren, schneiden mithin aus U ein Sechseck, von Paaren paralleler Geraden gebildet, aus, dessen drei Hauptdiagonalen Tripel conjugirter Durchmesser von U′ sind.

Wir erhalten dann den in gewissem Sinne zum vorigen reciproken Satz:

II. Liegt auf einem Hyperboloid U ein Sechseck, von Paaren paralleler Seiten gebildet, dessen Hauptdiagonalen ein Tripel conjugirter Durchmesser einer zweiten Fläche U′ sind, so gibt es einfach unendlich viele solche Sechsecke auf dem Hyperboloid. Die Ebenen der Ecken aller dieser Sechsecke, oder mit anderen Worten die Seitenflächen der Parallelepipede bestimmt durch diese Sechsecke (Tangentialebenen von U) umhüllen eine mit U concentrische zu U′ ähnlich und ähnlich gelegene Fläche 2ter Ord. W.

3) Es lassen sich aber nun auch diese Flächen V und W ganz allgemein analytisch bestimmen.

Nehmen wir zunächst an, es seien die beiden Flächen U und U′ in der Form gegeben:

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1 \qquad 1)$$

und

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = 1 \qquad 2)$$

und die erste Fläche U habe Tripel von Geraden parallel zu Tripeln conjugirter Durchmesser der zweiten Fläche U′, so muss die Bedingung erfüllt sein:

$$\frac{A}{a} + \frac{B}{b} + \frac{C}{c} = o \qquad 3)$$

und es findet sich sodann für die Fläche V des Satzes I die Gleichung:

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = \frac{a}{A} + \frac{b}{B} + \frac{c}{C} \qquad 4)$$

Man bemerke, dass, wenn die Fläche U 1) ein geradliniges Hyperboloid ist, die Fläche U′ eine beliebige Fläche sein kann, nur können, wenn U′ ebenfalls ein geradliniges Hyperboloid ist, die uneigentlichen Axen der zwei Hyperboloide nicht zusammenfallen.

Die Fläche V 4) ist immer reell, und zwar

a) wenn U′ ein Ellipsoid oder eine imaginäre Fläche ist, ein Ellipsoid;

b) wenn U′ ein ein- oder zweischaliges Hyperboloid ist, ein zweischaliges Hyperboloid. [1])

Nehmen wir aber nun an, dass die Fläche U′ 2) Tripel conjugirter Diametralebenen habe, welche dem Asymptotenkegel von U 1) umschrieben sind, so bedingt dieses die Relation:

$$\frac{a}{A} + \frac{b}{B} + \frac{c}{C} = o \qquad 5)$$

Die Fläche 2) schreibt sich sodann in Ebenencoordinaten:

$$A u^2 + B v^2 + C w^2 = 1$$

---

1) Ist speziell die Fläche U′ eine Kugel, so haben wir den von Herrn Vogt betrachteten Fall des gleichseitigen Hyperboloids. Die Bedingung hiefür wird:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = o$$

und die Fläche V wird die Kugel:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a + b + c.$$

und dieselbe Analyse gibt uns die Gleichung der Fläche W des Satzes II in der Form: [1])

$$A u^2 + B v^2 + C w^2 = \frac{A}{a} + \frac{B}{b} + \frac{C}{c} \qquad 6)$$

oder in Punktcoordinaten:

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = \frac{1}{\frac{A}{a} + \frac{B}{b} + \frac{C}{c}}.$$

Es ist übrigens leicht zu sehen, dass ein und dieselbe Fläche 2) nicht die beiden Voraussetzungen, die wir hier gemacht und durch die Bedingungsgleichungen 3) und 5) analytisch definirt sind, zugleich erfüllen kann.

4) Diese für die speziellen Formen 1) 2) der zwei Flächen U, U' erhaltenen Resultate lassen sich nun sofort verallgemeinern.

Sei

$$U = a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + a_{33} z^2 + 2 a_{12} xy + 2 a_{13} xz + 2 a_{23} yz$$

$$U' = a'_{11} x^2 + a'_{22} y^2 + a'_{33} z^2 + 2 a'_{12} xy + 2 a'_{13} xz + 2 a'_{23} yz$$

und die Gleichung der zwei concentrischen Flächen in der Form gegeben:

$$U = 1 \qquad 7)$$

$$U' = 1 \qquad 8)$$

---

1) Ist die Fläche U' eine Kugel, so hat das Hyperboloid Sechsecke mit Paaren paralleler Seiten, deren Hauptdiagonalen rechtwinklig zu einander sind. Die Bedingung hiefür wird:

$$a + b + c = 0$$

Die durch diese Sechsecke bestimmten Parallelepipede umhüllen die Kugel:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}.$$

wo der gemeinschaftliche Mittelpunkt zum Anfangspunkt der Coordinaten genommen ist.

Die Invarianten Φ und Θ eines Systems zweier Flächen 2ter Ordnung [1]) gehen für die zwei Flächen 7) 8) (da hier $a_{14} = a_{24} = a_{34} = 0$ und $a'_{14} = a'_{24} = a'_{34} = 0$ ist) über in

$$\begin{aligned} \varphi = {} & a_{11}(a'_{22}a'_{33} - a'^2_{23}) + a_{22}(a'_{11}a'_{33} - a'^2_{13}) \\ & + a_{33}(a'_{11}a'_{22} - a'^2_{12}) + 2a_{23}(a'_{13}a'_{12} - a'_{11}a'_{23}) \\ & + 2a_{13}(a'_{21}a'_{23} - a'_{22}a'_{13}) + 2a_{12}(a'_{31}a'_{32} - a'_{33}a'_{12}) \end{aligned} \qquad 9)$$

und

$$\begin{aligned} \Theta = {} & a'_{11}(a_{22}a_{33} - a^2_{23}) + \cdot + \cdot \\ & + 2a'_{23}(a_{13}a_{12} - a_{11}a_{23}) + \cdot + \cdot \end{aligned} \qquad 10)$$

Diese Grössen φ und Θ sind Invarianten für affine Transformation. Für die Flächen 1) und 2) reducirt sich φ auf

$$\frac{1}{ABC}\left(\frac{A}{a} + \frac{B}{b} + \frac{C}{c}\right)$$

und ebenso Θ auf

$$\frac{1}{abc}\left(\frac{a}{A} + \frac{b}{B} + \frac{c}{C}\right).$$

Es sind aber zugleich die Grössen abc und ABC, welche das Volumen des Parallelepipeds gebildet von drei conjugirten Durchmessern der Fläche darstellen, Invarianten für affine Transformation. Durch dieselbe geht nämlich $\frac{1}{abc}$ über in

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad 11)$$

und $\frac{1}{ABC}$ in

---

1) Salmon „An. Geom. des Raumes", bearb. v. Fiedler, 2. Aufl. I. Th. Cap. IX.

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{vmatrix} \qquad 12)$$

Es sind mithin die Ausdrücke

$$\frac{a}{A} + \frac{b}{B} + \frac{c}{C} \text{ und } \frac{A}{a} + \frac{B}{b} + \frac{C}{c}$$

absolute Invarianten für affine Transformation.

Transformiren wir daher die Flächen 1) 2) affin in die Flächen 7) und 8)

$$U = 1, \quad U' = 1,$$

so tritt an die Stelle der Bedingungsgleichung 3) die Gleichung

$$\varphi = 0 \qquad 13)$$

und die Gleichung der Fläche V wird

$$U' = \frac{\Theta}{\Delta}. \qquad 14)$$

An die Stelle der Bedingungsgleichung 5) tritt die Gleichung

$$\Theta = 0 \qquad 15)$$

und die Gleichung der Fläche W wird

$$U' = \frac{\Delta'}{\varphi}. \qquad 16)$$

5) Man bemerke nun noch, dass die zwei Invarianten Θ und φ durch Vertauschung der a und a' oder von U und U' in einander übergehen. Hierin spricht sich zunächst analytisch der Satz von Hesse aus: [1]) „Ist ein Kegelschnitt K einem Dreieck umschrieben, das einem zweiten Kegelschnitt K' conjugirt ist, so ist gleichzeitig dieser zweite Kegelschnitt K' einem Dreieck eingeschrieben, das dem ersten Kegelschnitt K conjugirt ist, und umgekehrt."

---

1) Hesse, Vorles. über anal. Geometrie des Raumes 1861, S. 715.

Für geradlinige Hyperboloide ergibt sich daraus folgender Satz:

„Sind

$$U = 1, \quad U' = 1$$

zwei concentrische geradlinige Hyperboloide, und es findet die Bedingung

$$\varphi = 0$$

statt, so besteht zwischen den zwei Hyperboloiden U, U′ eine gewisse Reciprocität in der Weise, dass die Fläche U Sechsecke enthält, gebildet aus Paaren paralleler Seiten, welche zu drei conjugirten Durchmessern von U′ parallel sind, und zugleich U′ Sechsecke enthält, deren Hauptdiagonalen drei conjugirte Durchmesser von U sind. Die Sechsecke auf U sind zugleich der Fläche V

$$U' = \frac{\Theta}{\Delta}$$

eingeschrieben; die Parallelepipede bestimmt durch die Sechsecke auf U′ sind zugleich der Fläche W

$$U = \frac{\Delta}{\Theta}$$

umschrieben. Die Flächen V und W sind zweischalige Hyperboloide.“

Berichtigung.

In der Mittheilung von W. von Beetz pag. 161 dieses Heftes ist zu lesen:

pag. 161 Z. 1 von unten „dieselbe gleichzeitig“ statt „B“.
„ 162 „ 10 „ oben A statt B.
„ 162 „ 12 „ „ B „ A.
