Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

1882. Heft IV.

München.
Akademische Buchdruckerei von F. Straub.
1882.

In Commission bei G. Franz.

Herr Bauer legt vor und bespricht die Abhandlung:

„Von der allgemeinen Inversion." Von J. S. Vaněček.

1. In einer Note „Sur l'inversion générale", welche ich der Académie des Sciences mitgetheilt habe (10. April 1882), habe ich die Idee einer allgemeinen Methode der Transformation durch reciproke Radien kurz entwickelt.

Einem Puncte a entspricht in Bezug auf einen allgemeinen Kegelschnitt K eine Polare A. Diese Polare schneidet eine gegebene Gerade R in einem Puncte a_1, dessen Polare A_1 die Gerade A im Puncte a_2 trifft. Die Puncte a, a_1, a_2 bilden in Bezug auf den Kegelschnitt K (die Basis der Transformation) ein Poldreieck, über welches wir folgende Theoreme aufstellen können:

Durchläuft der Eckpunct eines Poldreieckes $a\,a_1\,a_2$ in Bezug auf einen Kegelschnitt K eine Kurve P der p-ten Ordnung und der Eckpunct a_1 eine Kurve R der r-ten Ordnung, dann beschreibt sein dritter Eckpunkt a_2 eine andere Curve (a_2) der $2pr$-ten Ordnung, welche die Schnittpuncte der Curven P, R mit K zu vielfachen Puncten hat.

Und:

Umhüllt die Seite A eines Polardreiseit $A\;A_1\;A_2$ in Bezug auf einen Kegelschnitt K eine Kurve P der p-ten Classe und die zweite Seite A_1 eine andere

Curve R der r-ten Classe, dann umhüllt die dritte Seite A_2 eine Curve (A_2), welche von der 2pr-ten Classe ist und die gemeinschaftlichen Tangenten der Curven P, R mit K zu vielfachen Tangenten hat.

2. In dem Vorigen hat einem Puncte der gegebenen Figur wieder ein Punct der derivirten entsprochen. Wir können aber auch dem Puncte eine Gerade und umgekehrt entsprechen lassen.

Die Polare A des Punctes a schneidet die Curve R im Puncte a_1. Die Verbindungsgerade A_2 der Puncte a, a_1 ist die früher besprochene Gerade A_2, welche die Curve (A_2) umhüllt.

Da die Puncte a, a_1 in Bezug auf den Kegelschnitt K conjugierte Pole sind, so können wir folgenden Satz aussprechen:

Bewegt sich eine veränderliche Strecke $a a_1$ derart, dass ihre Endpuncte a, a_1, welche stets conjugirte Pole in Bezug auf einen Kegelschnitt K bleiben, respective die Curven P der p-ten Ordnung und R der r-ten Ordnung durchlaufen, dann umhüllt die Gerade $a a_1$ eine Curve (A_2) der 2pr-ten Classe. Diese Curve hat die gemeinschaftlichen Tangenten der Polarcurven P_1, R_1 von P und R mit K zu vielfachen Tangenten.

Weiter:

Bewegt sich ein veränderlicher Winkel (A, A_1) derart, dass seine Schenkel A, A_1, welche stets conjugirte Polaren in Bezug auf einen Kogelschnitt K bleiben, respective die Curven P der p-ten Classe und R der r-ten Classe umhüllen, dann beschreibt der Scheitelpunct a_2 des Winkels eine Curve (a_2) der 2pr-ten Ordnung. Die Schnittpuncte der Polarcurven P_1, R_1 von P, R mit dem Kegelschnitte K sind die vielfachen Puncte der Curve (a_2).

3. Setzen wir nun voraus, dass zwei von den Curven P, R, (a_2) coincidiren. Da die Scheitelpuncte $a\,a_1\,a_2$ des Poldreieckes $a\,a_1\,a_2$ mit einander verwechselt werden können, so bleibt sich gleich, welche die zusammenfallenden Curven sind. Unsere nächste Aufgabe ist, die dritte Curve zu bestimmen.

Es sei gegeben eine Curve M, in welcher sich zwei von den Curven P, R (a_2) vereinigen, und welche von der m-ten Ordnung ist. Dieselbe schneidet die Basis K in 2m Puncten. Die Polare A eines solchen Punctes a ist die Tangente der Basis in diesem Puncte und schneidet die Curve M noch in $m-1$ Puncten. Die Polaren aller dieser Puncte gehen durch den Punct a, welcher demnach ein $(m-1)$-facher Punct der inversen Curve (a_2) ist. Daraus ist ersichtlich, dass die Curve M mit der Basis $2m(m-1)$ Puncte gemeinschaftlich hat, oder dass dieselbe der $m(m-1)$-ten Ordnung ist.

Der Punct a transformirt sich in die Tangente A selbst, deren Berührungspunct a wir als zwei unendlich nahe Puncte betrachten können. Zählen wir daher diese 2m Tangenten auch zu der Curve, die wir erhalten sollen, dann ist dieselbe im Allgemeinen der $m(m+1)$-ten Ordnung. Allein wir betrachten bloss die eigentliche Curve ohne alle die Geraden, in welche dieselbe nebstdem ausartet.

Ein n-facher Punct b der Curve M transformirt sich in m vielfache Puncte n-ter Ordnung, welche auf der Polare B des Punctes b liegen.

Daraus folgt:

Wenn zwei Eckpuncte a, a_1 eines Poldreieckes $a\,a_1\,a_2$ in Bezug auf einen Kegelschnitt K eine Curve M der m-ten Ordnung durchlaufen, dann beschreibt der dritte Eckpunkt a_2 eine Curve (a_2) der $m(m-1)$-ten Ordnung, welche die Schnittpuncte der Curven M, K zu vielfachen Puncten hat.

Und:

Umhüllen zwei Seiten A, A_1 eines Polardreiseit $A A_1 A_2$ in Bezug auf einen Kegelschnitt K eine Curve M der m-ten Classe, dann umhüllt die dritte Seite A_2 eine andere Curve (A_2), welche von der $m(m-1)$-ten Classe ist und die gemeinschaftlichen Tangenten der Curven M, K zu vielfachen Tangenten hat.

4. Die Polaren der Puncte der Curve M umhüllen die reciproke Curve M_1 derselben, welche von der m-ten Classe ist. Die Tangenten der Curve M_1 werden in der Weise gepaart, dass sie stets zwei conjugirte Polaren in Bezug auf den Kegelschnitt K sind. Der Ort des Durchschnittspunctes a_2 von solchen zwei Geraden ist nach dem vorigen Theorem eine Curve der $m(m-1)$-ten Ordnung.

Also:

Bewegt sich ein veränderlicher Winkel (A, A_1) derart, dass die Schenkel desselben stets conjugirte Polaren in Bezug auf einen Kegelschnitt K bleiben, und eine Curve der m-ten Classe umhüllen, dann beschreibt der Scheitelpunct a_2 desselben eine Curve der $m(m-1)$-ten Ordnung.

Und:

Bewegt sich eine Sehne $a a_1$, deren Länge veränderlich ist, in der Weise, dass die Endpunkte a, a_1 derselben stets conjugirte Pole bleiben und eine Curve m-ter Ordnung durchlaufen, dann umhüllt die Sehne eine Curve $m(m-1)$-ter Classe.