Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

1883. Heft I.

München.

Akademische Buchdruckerei von F. Straub.

1883.

In Commission bei G. Franz.

Herr W. von Beetz legte eine Untersuchung vor:

„Ueber den Einfluss der durch Dilatation erzeugten Temperaturveränderung auf die Messung der ersteren.“ Von Dr. A. Miller.

(Mit einer Tafel.)

§ 1. Ziel der Untersuchung.

In den Verlängerungen und Verkürzungen, welche man mit Drähten behufs Bestimmung des longitudinalen Elastizitätsmoduls (E) vornimmt, ist sowohl die eigentliche, von der Zeit unabhängige elastische Dehnung (e. D.), als auch die während der Zeit des An- oder Abspannens entstandene elastische Nachwirkung (e. N.) enthalten. Um wenigstens in erster Annäherung die elastische Dehnung allein zu messen, ist man veranlasst, die Ablesung der Verlängerungen und Verkürzungen sofort vorzunehmen, sobald eine Belastung allmählich ihren höchsten Wert P oder den niedersten o erlangt hat, ohne abzuwarten, bis der Körper seine ursprüngliche Temperatur, — die der Umgebung — welche nach den Versuchen von Edlund[1]) durch Dilatation verändert wird, wieder angenommen hat. Dadurch kann selbst bei konstanter Temperatur der Umgebung des gedehnten Körpers an der Ablesung eine Korrektur notwendig werden, insoferne die Absicht besteht, die bloss von der Elastizität des Körpers

1) Edlund, Poggendorffs Annalen Bd. 114.

herrührende Dehnung zu messen. Die Kenntnis dieses Einflusses der Temperatur auf die Messung der Verlängerungen und Verkürzungen, welche infolge von Be- oder Entlastung entstehen, kann besonders dann von ziemlicher Wichtigkeit sein, wenn dieses Be- und Entlasten mehrmals unmittelbar hintereinander geschieht, wie dies in der Arbeit[1]): „Untersuchung über den Einfluss der Temperatur auf Aeusserungen von Molekularkräften" der Fall ist. Auf die ersten §§ dieser Abhandlung nimmt gegenwärtige Untersuchung zunächst Bezug.

Der Körper besitzt, da er während der Dehnung und Zusammenziehung nicht nur selbst seine Temperatur ändert, sondern auch noch Wärme aus der Umgebung empfängt oder an dieselbe abgibt, bei gleichen Dilatationen nicht dieselbe Temperatur, wie dies etwa geschehen würde, wenn man sich vorstellt, die Umgebung befände sich jederzeit mit dem Körper in gleichem Temperaturzustande. Es ist vielmehr zu vermuten, dass die mittlere Temperatur des Drahtes fort und fort steigt, wenn das Ausdehnen und Zusammenziehen sich unmittelbar folgt und fortgesetzt wird, um sich einer Grenze zu nähern. Der Draht erscheint gleichsam wie ein Wärmesauger aus der Umgebung und die Ablesungen geschehen bei verschiedenen Temperaturen.

Das Ziel vorliegender Abhandlung besteht nun darin, den erwähnten Einfluss auf die Messung der durch Be- und Entlastung eines Drahtes entstehenden Verlängerungen und Verkürzungen gesetzmässig zu bestimmen, woraus sich von selbst die Notwendigkeit ergibt, einen math. Ausdruck für den Verlauf des Temperaturzustandes des Drahtes zu ermitteln. Da bei dem hier in Betracht kommenden Verfahren, die elast. Nachwirkung nicht unmittelbar gemessen werden kann,

---

1) A. Miller, Sitzungsberichte der math.-phys. Classe d. k. bayer. Akademie der Wissenschaften 1882. Heft 4.

so muss die Messung der elast. Dehnung auf diese Art als eine erste Annäherung betrachtet werden und es frägt sich, ob durch die einfache Vernachlässigung des in Rede stehenden Temperatureinflusses der Fehler vermehrt oder vermindert wird.

§ 2. Die Korrektur der Messung.

Es stelle in Fig. 1 die Strecke $AB_0 = L$ die Länge des zu untersuchenden, unbelasteten Drahtes vor. Durch succ. Anwachsen einer Belastung von o auf die Grösse P rückt der Endpunkt B_0 nach B_1; nimmt P wieder bis o ab, so kommt der Endpunkt B_0 etwa nach B_2, infolge sofortiger Belastung nach B_3, durch die unmittelbar darauffolgende Entlastung nach B_4, dann nach B_5, B_6 u. s. f. In der Fig. 1 sind diese Strecken der leichteren Uebersicht halber nicht auf-, sondern nebeneinander gelegt. Der in B_0 abgelesene Skalenteil sei a_1, der in B_1 abgelesene b_1 und der in B_2 sei c_1; desgleichen seien bei der ν. Be- und Entlastung die entsprechenden Zahlen a_ν, b_ν und c_ν. Die wirkliche Temperatur des Drahtes, wenn die jeweils durch Belastung entstandene oder infolge Entlastung noch bestehende Verlängerung x beträgt, sei $^{\nu}\dot{T}_x$ bei der ν. Verlängerung, $^{\nu}\ddot{T}_x$ bei der ν. Verkürzung. Daraus ergeben sich für den Grenzwert der Verlängerung und Verkürzung die ihnen entsprechenden Temperaturbezeichnungen $^{\nu}\dot{T}_\lambda$ und $^{\nu}\ddot{T}_\lambda$, sowie $^{\nu}\dot{T}_0$ und $^{\nu}\ddot{T}_0$, deren Bedeutung und Beziehung aus Fig. 1 am leichtesten überblickt werden können.

Bei der allmählichen Belastung und Entlastung wird ein Teil der Verlängerung bezw. Verkürzung unabhängig von der Zeit entstehen. Es wurde dieser Teil in der bereits näher bezeichneten Abhandlung „elastische Dehnung“ (e. D.) genannt. Die Grösse desselben sei der Temperatur $^{0}\dot{T}_0$ der Umgebung entsprechend in beiden Fällen λ. Ausserdem ist anzunehmen, dass eine „elastische Nachwirkung“ (e. N.) von

der Länge $^{\nu}\dot{l}$ bei der ν. Anspannung, von der Länge $^{\nu}\ddot{l}$ bei der ν. Abspannung entsteht. Ob diese beiden Werte gleiches oder entgegengesetztes Vorzeichen haben, soll dahin gestellt bleiben. Der Faktor γ hängt von der Einrichtung der Messungsvorrichtung — Spiegelablesung — ab und dient, den Wert des betreffenden Gliedes in Skalenteilen auszudrücken. $\dot{\alpha}_t$ und $\ddot{\alpha}_t$ sind die linearen, thermischen Koëffizienten des Drahtes bei der Temperatur t; sie sind nach den Untersuchungen von Dahlander[1]) verschieden bei gespanntem und ungespanntem Zustande des Drahtes. Endlich sei noch erinnert, dass wie aus Fig. 1 leicht zu übersehen, stets $^{\nu}\dot{T}_0 = {}^{\nu-1}\ddot{T}_0$ und $^{\nu}\dot{T}_\lambda = {}^{\nu}\ddot{T}_\lambda$ ist.

Unter diesen Voraussetzungen hat man für die ν. Verlängerung die Gleichung:

$$b_\nu - a_\nu = \lambda + {}^{\nu}\dot{l} + \gamma L \dot{\alpha}_t ({}^{\nu}\dot{T}_\lambda - {}^{\nu}\dot{T}_0); \qquad 1)$$

für die ν. Verkürzung:

$$c_\nu - b_\nu = -\lambda + {}^{\nu}\ddot{l} + \gamma L \ddot{\alpha}_t ({}^{\nu}\ddot{T}_0 - {}^{\nu}\ddot{T}_\lambda). \qquad 2)$$

Aus Gleichung 2) und 3) ergibt sich:

$$c_\nu - a_\nu = ({}^{\nu}\dot{l} + {}^{\nu}\ddot{l}) + \gamma L \left\{\dot{\alpha}_t ({}^{\nu}\dot{T}_\lambda - {}^{\nu}\dot{T}_0) + \ddot{\alpha}_t ({}^{\nu}\ddot{T}_0 - {}^{\nu}\ddot{T}_\lambda)\right\}. \quad 3)$$

Nun handelt es sich, den Verlauf der Temperatur des Drahtes während des An- und Abspannens, also die Funktionen $^{\nu}\dot{T}_x$ und $^{\nu}\ddot{T}_x$ zu ermitteln.

§ 3. Verlauf der Temperatur des gedehnten Drahtes.

Der Draht wird vor der ersten Spannung die Temperatur $^{1}\dot{T}_0$ haben, welche gleich jener der Umgebung ist. Erfährt derselbe zum ν. mal die Verlängerung x, so ist seine Temperatur $^{\nu}\dot{T}_x$ und bei der ν. Verkürzung um y ist sie $^{\nu}\ddot{T}_y$. Der gedehnte Körper erleidet bei einer Verlängerungszunahme

1) Dahlander, Poggendorffs Annalen. Bd. 145.

dx oder Verkürzungszunahme dy nach den schon erwähnten Versuchen von Edlund eine Temperaturänderung dt_0 und eine weitere $d\tau$ durch Wärmeaufnahme oder Abgabe aus bez. an die Umgebung, so dass

$$d({}^{\nu}\dot{T}_x - {}^{1}\dot{T}_0) = dt_0 + d\tau \qquad 4)$$ für die Verlängerung,

$$d({}^{\nu}\ddot{T}_y - {}^{1}\dot{T}_0) = dt_0 + d\tau \qquad 5)$$ für die Verkürzung,

gesetzt werden kann. Nun ist $t_0 = \pm kx$, also $dt_0 = \pm k\,dx$, worin k eine Konstante bedeutet. Für die hier herrschenden kleinen Differenzen kann das Newton'sche Abkühlungsgesetz in Anwendung kommen, somit $d\tau = -h\tau dz$ genommen werden, wenn h die Konstante in der bekannten Bedeutung und z die Zeit, in der x resp. y entsteht, bezeichnet. Wir erhalten dann aus Gl. 4) und 5)

$$d\,{}^{\nu}\dot{T}_x = -k\,dx - h\tau\,dz, \qquad 6)$$

$$d\,{}^{\nu}\ddot{T}_y = \quad k\,dy - h\tau\,dz. \qquad 7)$$

Erwägt man, dass stets $\tau = {}^{\nu}\dot{T}_x - {}^{1}\dot{T}_0$ bezw. $\tau = {}^{\nu}\ddot{T}_y - {}^{1}\dot{T}_0$, sowie dass $\frac{dx}{dz} = v$ und $\frac{dy}{dz} = v$ die Geschwindigkeit ist, mit der sich der Endpunkt des Drahtes bei der An- und und Abspannung bewegt, so ergibt sich:

$$d\,{}^{\nu}\dot{T}_x = -k\,dx - \frac{h}{v}({}^{\nu}\dot{T}_x - {}^{1}\dot{T}_0)\,dx, \qquad 8)$$

$$d\,{}^{\nu}\ddot{T}_y = \quad k\,dy - \frac{h}{v}({}^{\nu}\ddot{T}_y - {}^{1}\dot{T}_0)\,dy. \qquad 9)$$

Nimmt man als Wert der gesammten Dehnung λ, indem man von den Korrektionsgrössen absieht, so ist $y = \lambda - x$ und $dy = -dx$; setzt man ferner der Kürze halber $\frac{h}{v} = n$, so ergeben sich zur Ermittelung der Grössen ${}^{\nu}\dot{T}_x$ und ${}^{\nu}\ddot{T}_x$ die Differenzialgleichungen:

$$d\,{}^{\nu}\dot{T}_x = -\,k\,dx - n\,({}^{\nu}\dot{T}_x - {}^{1}\dot{T}_0)\,dx \qquad 10)$$

und $$d\,{}^{\nu}\ddot{T}_x = -\,k\,dx + n\,({}^{\nu}\ddot{T}_x - {}^{1}\dot{T}_0)\,dx. \qquad 11)$$

Die Gl. 10) liefert:

$$\int dx + \int \frac{d\,{}^{\nu}\dot{T}_x}{(k - n\,{}^{1}\dot{T}_0) + n\,{}^{\nu}\dot{T}_x} = \dot{C}. \qquad 12)$$

Bestimmt man die Integrationskonstante mit der Bedingung, dass für $x = 0$ der Wert ${}^{\nu}\dot{T}_x = {}^{\nu}\dot{T}_0$ wird, so führt dies zur Gleichung:

$${}^{\nu}\dot{T}_x = {}^{1}\dot{T}_0 + ({}^{\nu}\dot{T}_0 - {}^{1}\dot{T}_0)\,e^{-nx} + \frac{k}{n}\,(e^{-nx} - 1). \qquad 13)$$

Nimmt man Gl. 13) für $\nu = 1$, bestimmt daraus das letzte Glied und substituirt es in 13), so erhält sie die übersichtlichere Form:

$${}^{\nu}\dot{T}_x = {}^{1}\dot{T}_x + ({}^{\nu}\dot{T}_0 - {}^{1}\dot{T}_0)\,e^{-nx}. \qquad 14)$$

Die Differenzialgleichung 11) führt auf:

$$\int dx + \int \frac{d\,{}^{\nu}\ddot{T}_x}{(k + n\,{}^{1}\dot{T}_0) - n\,{}^{\nu}\ddot{T}_x} = \ddot{C}. \qquad 15)$$

Bestimmt man hier die Konstante der Integration mit der Bedingung, dass für $x = \lambda$ der Wert ${}^{\nu}\ddot{T}_x = {}^{\nu}\ddot{T}_\lambda = {}^{\nu}\dot{T}_\lambda$ wird, so erhält man:

$${}^{\nu}\ddot{T}_x = {}^{\nu}\dot{T}_\lambda\,e^{-n(\lambda - x)} - \left(\frac{k}{n} + {}^{1}\dot{T}_0\right)\left(e^{-n(\lambda - x)} - 1\right). \qquad 16)$$

Auch hier erhält man eine übersichtlichere Form, wenn man Gl. 16) für $\nu = 1$ nimmt, den letzten Faktor berechnet und in Gl. 16) einsetzt, wodurch man findet:

$$^{\nu}\dot{T}_x = {}^{1}\dot{T}_x + ({}^{\nu}\dot{T}_\lambda - {}^{\nu}\dot{T}_\lambda)\, e^{-n(\lambda - x)}. \qquad 17)$$

Man kann nun, ohne die Allgemeinheit der Untersuchung wesentlich zu beeinträchtigen, die ohnehin als konstant angenommene Temperatur der Umgebung des Drahtes, nämlich ${}^{1}\dot{T}_0 = 0$ setzen. Dadurch gehen Gl. 13) und 16), sowie 14) und 17) in folgende über:

$$^{\nu}\dot{T}_x = {}^{\nu}\dot{T}_0\, e^{-nx} + \frac{k}{n}\left(e^{-nx} - 1\right)$$

$$= {}^{\nu-1}\dot{T}_0\, e^{-nx} + \frac{k}{n}\left(e^{-nx} - 1\right), \qquad 18)$$

$$^{\nu}\dot{T}_x = {}^{\nu}\dot{T}_\lambda\, e^{-n(\lambda - x)} - \frac{k}{n}\left(e^{-n(\lambda - x)} - 1\right)$$

$$= {}^{\nu}\dot{T}_\lambda\, e^{-n(\lambda - x)} - \frac{k}{n}\left(e^{-n(\lambda - x)} - 1\right), \qquad 19)$$

ferner:

$$^{\nu}\dot{T}_x = {}^{1}\dot{T}_x + {}^{\nu}\dot{T}_0\, e^{-nx} = {}^{1}\dot{T}_x + {}^{\nu-1}\dot{T}_0\, e^{-nx}, \qquad 20)$$

$$^{\nu}\dot{T}_x = {}^{1}\dot{T}_x + ({}^{\nu}\dot{T}_\lambda - {}^{1}\dot{T}_\lambda)\, e^{-n(\lambda - x)}$$

$$= {}^{1}\dot{T}_x + ({}^{\nu}\dot{T}_\lambda - {}^{1}\dot{T}_\lambda)\, e^{-n(\lambda - x)}. \qquad 21)$$

Würde man die Relationen 18) und 19) graphisch in der Weise darstellen, dass die Dehnungen x als Abscissen und die Temperaturen ${}^{\nu}\dot{T}_x$ und ${}^{\nu}\dot{T}_x$ als Ordinaten aufgetragen werden, so lässt sich aus:

$$\frac{d\,{}^{\nu}\dot{T}_x}{dx} = -(k + n\,{}^{\nu}\dot{T}_0)\, e^{-nx} \qquad 22)$$

und $$\frac{d^2 {}^{\nu}\dot{T}_x}{dx^2} = n\,(k + n\,{}^{\nu}\dot{T}_0)\,e^{-nx} \qquad 23)$$

erkennen, dass die Temperaturkurve der ν. Anspannung — 18) und 20) — des Drahtes für wachsende Verlängerungen stets fällt und ihre convexe Seite nach unten wendet, also ohne Kulminations- und Wendepunkt ist und in

$$x = \frac{1}{n} \cdot l\left[1 + \frac{n}{k}\,{}^{\nu}\dot{T}_0\right]$$

die Abscissenachse schneidet.

Desgleichen ergibt sich aus Gl. 19)

$$\frac{d\,{}^{\nu}\ddot{T}_x}{dx} = -\,(k - n\,{}^{\nu}\dot{T}_\lambda)\,e^{-n(\lambda - x)}, \qquad 24)$$

$$\frac{d^2\,{}^{\nu}T_x}{dx^2} = -\,n\,(k - n\,{}^{\nu}\dot{T}_\lambda)\,e^{-n(\lambda - x)}. \qquad 25)$$

Da, wie aus dem später entwickelten Wert von ${}^{\nu}\dot{T}_\lambda$ hervorgeht, derselbe stets neg. ist, was indes schon aus der Natur der Sache ohne weitere Rechnung einleuchtet, so besitzt auch die Temperaturkurve der ν. Abspannung — 19) und 21) — weder einen Kulminations- noch Wendepunkt, fällt für wachsende x stets und hat die concave Seite nach unten gewendet. Sie schneidet die Abscissenachse in

$$x = \lambda - \frac{1}{n} \cdot l\left[1 - \frac{n}{k}\,{}^{\nu}\dot{T}_\lambda\right].$$

Darnach kann man sich ein Bild von dem Verlauf der Temperatur des Drahtes bei den unmittelbar aufeinanderfolgenden An- und Abspannungen machen.

Wie aus § 2 erhellt, ist die Kenntnis der Werte ${}^{\nu}\dot{T}_\lambda$ und ${}^{\nu}\ddot{T}_0$ etc. zur Aufstellung von brauchbaren Korrekturformeln nötig. Auch dürfte für die Anwendung bei experimentellen Untersuchungen die Frage vom Interesse sein, ob

hinsichtlich der Temperatur bei fortgesetztem An- und Abspannen eine Annäherung an einen Grenzzustand stattfindet und wie dieser beschaffen ist. Wir wollen beiden Fragen in der angeführten Reihenfolge näher treten.

§ 4. Die Temperatur bei vollendeter An- und Abspannung.

Setzt man in Gl. 18) und 19) succ. $\nu = 1, 2, 3 \ldots$ so erhält man ${}^{1}\dot{T}_{\lambda}$, ${}^{1}\ddot{T}_{0}$; ${}^{2}\dot{T}_{\lambda}$, ${}^{2}\ddot{T}_{0}$ . . . ${}^{\nu}\dot{T}_{\lambda}$ und ${}^{\nu}\ddot{T}_{0}$ durch als bekannt vorauszusetzende Grössen ausgedrückt.

Es wird nämlich:

$$ {}^{\nu}\dot{T}_{\lambda} = \dot{T}_{\lambda}\left(1 - e^{-n\lambda} + e^{-2n\lambda} - e^{-3n\lambda} + \ldots - e^{-(2\nu-3)n\lambda} + e^{-2(\nu-1)n\lambda}\right), \qquad 26) $$

$$ {}^{\nu}\ddot{T}_{0} = -\dot{T}_{\lambda}\left(1 - e^{-n\lambda} + e^{-2n\lambda} - e^{-3n\lambda} + \ldots + e^{-(2\nu-2)n\lambda} - e^{-(2\nu-1)n\lambda}\right). \qquad 27) $$

Die in Klammern stehenden Ausdrücke rechts sind geom. Progressionen vom Exponenten $-e^{-n\lambda}$; die Gliederzahl ist bezw. $2\nu - 1$ und 2ν; darnach ergibt sich:

$$ {}^{\nu}\dot{T}_{\lambda} = {}^{1}\dot{T}_{\lambda} \cdot \frac{e^{(2\nu-1)n\lambda} + 1}{e^{n\lambda} + 1} \cdot \frac{1}{e^{2(\nu-1)n\lambda}}, \qquad 28) $$

$$ {}^{\nu}\ddot{T}_{0} = -{}^{1}\dot{T}_{\lambda} \cdot \frac{e^{2\nu n\lambda} - 1}{e^{n\lambda} + 1} \cdot \frac{1}{e^{(2\nu-1)n\lambda}}. \qquad 29) $$

Schon durch eine einfache Umformung ergeben sich, wenn man zugleich für ${}^{1}\dot{T}_{\lambda}$ den Wert setzt, die Grenzwerte für $\nu = \infty$, nämlich:

$$^{\infty}T'_{\lambda} = {}^{1}T'_{\lambda} \cdot \frac{e^{n\lambda}}{e^{n\lambda}+1} = -\frac{k}{n} \cdot \frac{e^{n\lambda}-1}{e^{n\lambda}+1}, \qquad 30)$$

$$^{\infty}T''_{0} = -{}^{1}T'_{\lambda} \cdot \frac{e^{n\lambda}}{e^{n\lambda}+1} = \frac{k}{n} \cdot \frac{e^{n\lambda}-1}{e^{n\lambda}+1}; \qquad 31)$$

also ist $^{\infty}T'_{\lambda} = -{}^{\infty}T''_{0}$, wie zu erwarten war. Die Grenztemperaturen verändern sich, bis $^{\infty}T'_{\lambda} + {}^{\infty}T''_{0} = 0$, also das arith. Mittel 0, gleich der Temperatur der Umgebung ist.

§ 5. Verlauf der Temperatur im Grenzzustande.

Nun können auch die Gleichungen für den Verlauf der Temperatur des Drahtes bei der An- und Abspannung desselben im Grenzzustande angegeben werden.

Aus Gl. 20) hat hat man für $\nu = \infty$

$$^{\infty}T'_{x} = {}^{1}T'_{x} + {}^{\infty}T''_{0}\, e^{-nx} = \frac{k}{n}\left(e^{-nx}-1\right) + \frac{k}{n} \cdot \frac{e^{n\lambda}-1}{e^{n\lambda}+1} e^{-nx}, \qquad 32)$$

somit

$$^{\infty}T'_{x} = -\frac{k}{n}\left[1 - 2 \cdot \frac{e^{n(\lambda-x)}}{e^{n\lambda}+1}\right]. \qquad 33)$$

Ebenso aus Gl. 21) für $\nu = \infty$

$$^{\infty}T''_{x} = {}^{1}T''_{x} + (^{\infty}T'_{\lambda} - {}^{1}T'_{\lambda})\, e^{-n(\lambda-x)} \qquad 34)$$

und daraus mit Benützung der Relationen 19) und 30)

$$^{\infty}T''_{x} = \frac{k}{n}\left[1 - 2 \cdot \frac{e^{nx}}{e^{n\lambda}+1}\right]. \qquad 35)$$

Setzt man in Gl. 33) und 35) die entsprechenden Werte für x, so erhält man die zu erwartenden Relationen:

$$^{\infty}T'_{\lambda} = {}^{\infty}T''_{\lambda} \text{ und } {}^{\infty}T'_{0} = {}^{\infty}T''_{0}.$$

Die Discussion der Gl. 33) und 35) zeigt, dass die Temperaturkurven auch im Grenzzustande noch ihren Grundcharakter beibehalten, vorausgesetzt, dass wie bisher die An- und Abspannungsgeschwindigkeit dieselbe ist. Es ergibt sich nämlich:

$$\frac{d\,{}^{\infty}\dot{T}_x}{dx} = -2 \cdot \frac{k}{e^{n\lambda}+1} \cdot e^{n(\lambda - x)}, \qquad 36)$$

$$\frac{d^2\,{}^{\infty}\dot{T}_x}{dx^2} = 2 \cdot \frac{kn}{e^{n\lambda}+1} e^{n(\lambda - x)}; \qquad 37)$$

ferner

$$\frac{d\,{}^{\infty}\ddot{T}_x}{dx} = -2 \cdot \frac{k}{e^{n\lambda}+1} e^{nx}, \qquad 38)$$

$$\frac{d^2\,{}^{\infty}\ddot{T}_x}{dx^2} = -2 \cdot \frac{kn}{e^{n\lambda}+1} e^{nx}. \qquad 39)$$

Es fallen somit für wachsende x beide Temperaturkurven des Grenzzustandes; während jedoch die der Anspannung die convexe Seite nach unten wendet, thut die der Abspannung dies mit der convaven. Wendepunkte gibt es also nicht, ebenso keinen Kulminationspunkt. Die Gleichungen ${}^{\infty}\dot{T}_x = 0$ und ${}^{\infty}\ddot{T}_x = 0$ geben der Reihe nach

$$\dot{x} = \lambda - \frac{1}{n} \cdot l \frac{e^{n\lambda}+1}{2}$$

und

$$\ddot{x} = \frac{1}{n} \cdot l \frac{e^{n\lambda}+1}{2},$$

so dass $\dot{x} + \ddot{x} = \lambda$ ist.

Für $x = \frac{\lambda}{2}$ erhält man ${}^{\infty}\dot{T}_{\frac{\lambda}{2}} = -\,{}^{\infty}\ddot{T}_{\frac{\lambda}{2}}$. Für die Lage der Temperaturkurven des Grenzzustandes gegen das Koordinatensystem ist es von Wichtigkeit zu beachten, dass:

$$\frac{d\,{}^{\infty}\dot{T}_x}{dx} = \frac{d\,{}^{\infty}\ddot{T}_x}{dx} = -k \quad \text{ist.} \qquad 40)$$

Somit haben beide Temperaturkurven des Grenzzustandes im Schnittpunkte mit der Abscissenachse gleiche Richtung und zwar die der Geraden, welche den Verlauf der Temperatur beim An- und Abspannen darstellen würde, wenn bei beiden Vorgängen von der Differenz der Temperatur des Drahtes und der Umgebung abgesehen würde, oder wie man sich auch vorstellen kann, wenn die Temperatur der Umgebung die Aenderung jener des Drahtes vollständig übereinstimmend mitmachte. Es leuchtet dies auch daraus ein, weil bei diesen Dilatationen ($\dot{x}$ und $\ddot{x}$) die Temperatur des Drahtes jener der Umgebung desselben gleich ist, er also von letzterer weder Wärme empfängt, noch an sie abgibt, somit in diesem Zeitdifferenzial seine Temperatur nur von k (Gl. 40) abhängen kann.

Die Konstruktion der Kurve des Grenzzustandes, die sich uns den beiden Kurvenästen der An- und Abspannung zu einer geschlossenen zusammensetzt — was bei den früheren nicht der Fall ist — vereinfacht sich, wenn man erwägt, dass ${}^{\infty}\dot{T}_x = -\,{}^{\infty}\ddot{T}_x$, sobald die Exponenten von e gleich genommen werden. Nimmt man nämlich in Gl. 34) $x = \xi$ und berechnet die Ordinate, so hat man zugleich eine der des anderen Kurvenastes, der Absisse $x = \lambda - \xi$ ist. Ferner ergibt sich aus Gleichung 36) und 38), dass für $x = \frac{\lambda}{2}$ die Tangenten beider Kurven gleiche Richtung haben, sowie dass für $x = o$ und $x = \lambda$ die Richtungen derselben wechselseitig gleich sind. Endlich ergeben die eben citierten Gleichungen, dass auch die Tangenten der beiden Kurvenäste gleiche Richtung in jenen Punkten haben, für welche $x = \xi$ und $x = \lambda - \xi$ ist. Nach diesen Gesichtspunkten gibt Fig. 2 ein ungefähres Bild der Temperaturkurve des Grenzzustandes.

Man sieht, dass die Hauptrichtung der geschlossenen Kurve $D_0 D_1$ gemäss Gl. 30) und 31) von den Grössen k, h, v, (z) und λ abhängt. Dagegen ist die Richtung der Tangenten in den Punkten, deren Abscissen x' und x'' nur von k [Gl. 40)] bestimmt. Wie man somit auch die Grössen h, v und λ wählen mag, für denselben Stoff ändert sich die Richtung der Tangenten in diesen Punkten nicht.

§ 6. Fertigstellung der Korrektionsformeln des § 2.

Sehen wir hinsichtlich des Wertes der Grössen α'_t und α''_t von deren Abhängigkeit von der Spannung des Drahtes vorerst ab — im besonderen Falle kann dies immerhin berücksichtigt werden —, so ist $\alpha'_t = \alpha''_t = \alpha_t$ und die Formeln 1), 2) und 3) gehen über in

$$b_\nu - a_\nu = \lambda + {}^\nu i' + \gamma \cdot L\,\alpha_t\,({}^\nu T'_\lambda - {}^\nu T'_0) \qquad 41)$$

$$c_\nu - b_\nu = -\lambda + {}^\nu i'' + \gamma \cdot L\,\alpha_t\,({}^\nu T''_0 - {}^\nu T''_\lambda) \qquad 42)$$

$$c_\nu - a_\nu = ({}^\nu i' + {}^\nu i'') + \gamma \cdot L\,\alpha_t\,({}^\nu T''_0 - {}^\nu T'_0), \qquad 43)$$

da ${}^\nu T'_\lambda = {}^\nu T''_\lambda$ ist. Unter Anwendung der Gl. 28) und 29) erhält man:

$${}^\nu T'_\lambda - {}^\nu T'_0 = \frac{{}^1T'_\lambda}{e^{n\lambda} + 1} \cdot e^{n\lambda}\left[2 - \frac{1}{e^{2\nu n\lambda}}\left(e^{2n\lambda} - e^{n\lambda}\right)\right], \qquad 44)$$

$${}^\nu T''_0 - {}^\nu T''_\lambda = -\frac{{}^1T'_\lambda}{e^{n\lambda} + 1} \cdot e^{n\lambda}\left[2 + \frac{1}{e^{2\nu n\lambda}}\left(e^{n\lambda} - 1\right)\right]. \qquad 45)$$

Substituirt man für ${}^1T'_\lambda$ den aus Gl. 18) sich ergebenden Wert, so folgen aus Gl. 41) und 42), wenn man Gl. 44) und 45) damit verbindet, die Hauptformeln:

$$\lambda + {}^{\nu}\dot{l} = (b_\nu - a_\nu) + \gamma \cdot L\alpha_t \cdot \frac{k}{n} \cdot \frac{e^{n\lambda} - 1}{e^{n\lambda} + 1}\left[2 - \frac{1}{e^{2\nu n\lambda}}\left(e^{n\lambda} - 1\right)e^{n\lambda}\right], \quad 46)$$

$$\lambda - {}^{\nu}\ddot{l} = (b_\nu - c_\nu) + \gamma \cdot L\alpha_t \cdot \frac{k}{n} \cdot \frac{e^{n\lambda} - 1}{e^{n\lambda} + 1}\left[2 + \frac{1}{e^{2\nu n\lambda}}\left(e^{n\lambda} - 1\right)\right] \quad 47)$$

und durch Subtraktion dieser:

$${}^{\nu}\dot{l} + {}^{\nu}\ddot{l} = (c_\nu - a_\nu) - \gamma \cdot L\alpha_t \cdot \frac{k}{n} \cdot \left(e^{n\lambda} - 1\right)^2 \cdot \frac{1}{2^{2\nu n\lambda}}. \quad 48)$$

Beachtet man, dass $n = \frac{h}{v}$ und $v = \frac{\lambda}{z_0}$, wenn z_0 die Entstehungszeit der Länge λ bedeutet, so ist $n\lambda = hz_0$, und es gehen die Gl. 46), 47) und 48) in folgende über:

$$\lambda = (b_\nu - a_\nu) - {}^{\nu}\dot{l} + \gamma \cdot L\alpha_t \cdot \frac{k\lambda}{hz_0} \cdot \frac{e^{hz_0} - 1}{e^{hz_0} + 1}\left[2 - \frac{1}{e^{2\nu hz_0}}\left(e^{hz_0} - 1\right)e^{hz_0}\right], \quad 49)$$

$$\lambda = (b_\nu - c_\nu) + {}^{\nu}\ddot{l} + \gamma \cdot L\alpha_t \cdot \frac{k\lambda}{hz_0} \cdot \frac{e^{hz_0} - 1}{e^{hz_0} + 1}\left[2 + \frac{1}{e^{2\nu hz_0}}\left(e^{hz_0} - 1\right)\right], \quad 50)$$

$${}^{\nu}\dot{l} + {}^{\nu}\ddot{l} = (c_\nu - a_\nu) - \gamma \cdot L\alpha_t \cdot \frac{k\lambda}{hz_0}\left(e^{hz_0} - 1\right)^2 \cdot \frac{1}{e^{2\nu hz_0}}. \quad 51)$$

§ 7. Deutung der Formeln des § 6.

Wegen der Unkenntnis über $^{\nu}\dot{l}$ und $^{\nu}\ddot{l}$ wird erst die Anwendung vorstehender Formeln auf entsprechende Versuche Aufschluss über den Zusammenhang von l mit den anderen Grössen geben. Indes sind jetzt schon allgemeine Gesichtspunkte aufzustellen. Wenn man nämlich bei dem im § 1 angegebenen Versuchsverfahren die Differenzen $b_\nu - a_\nu$, $b_\nu - c_\nu$ beobachtet, so hat man selbst bei konstanter Temperatur der Umgebung nicht den wahren Wert der Summe e. D. + e. N., es ist vielmehr dieser Differenz eine Korrektionsgrösse:

$$^{\nu}\dot{F} = \gamma \cdot L\alpha_t \cdot \frac{k}{n} \cdot \frac{e^{n\lambda} - 1}{e^{n\lambda} + 1} \left[2 - \frac{1}{e^{2\nu n\lambda}} \left(e^{n\lambda} - 1 \right) e^{n\lambda} \right],$$

beziehungsweise 52)

$$^{\nu}\ddot{F} = \gamma \cdot L\alpha_t \cdot \frac{k}{n} \cdot \frac{e^{n\lambda} - 1}{e^{n\lambda} + 1} \left[2 + \frac{1}{e^{2\nu n\lambda}} \left(e^{n\lambda} - 1 \right) \right] \quad 53)$$

beizufügen. Wie man sieht, sind diese Korrektionswerte von ν abhängig; auch ist $^{\nu}\dot{F} < {}^{\nu}\ddot{F}$. Mit wachsendem ν nimmt $^{\nu}\dot{F}$ zu, $^{\nu}\ddot{F}$ dagegen ab und es nähern sich beide einem Grenzwerte

$$^{\infty}F = 2\gamma \cdot L\alpha_t \cdot \frac{k}{n} \cdot \frac{e^{n\lambda} - 1}{e^{n\lambda} + 1} = 2\gamma L\alpha_t \, {}^{\infty}\dot{T}_0.$$

Anderseits liefert die abgelesene Differenz $c_\nu - a_\nu$ ebenfalls nicht die Summe der bei der Ab- und Anspannung entstandenen e. N., sondern es ist die Korrektionsgrösse

$$^{\nu}F_1 = \gamma L\alpha_t \cdot \frac{k}{n} \cdot \left(e^{n\lambda} - 1 \right)^2 \cdot \frac{1}{e^{2\nu n\lambda}} = {}^{\nu}\ddot{F} - {}^{\nu}\dot{F}, \quad 54)$$

welche mit wachsendem ν der 0 sich nähert, neg. anzufügen.

Darnach können die Formeln 49), 50), 51) in folgender Weise übersichtlicher gestaltet werden, nämlich:

$$\lambda = (b_\nu - a_\nu) - {}^\nu\dot{I} + {}^\nu\dot{F} \quad \text{für die Anspannung,} \quad 55)$$

$$\lambda = (b_\nu - c_\nu) + {}^\nu\ddot{I} + {}^\nu\ddot{F} \quad \text{für die Abspannung,} \quad 56)$$

$${}^\nu\dot{I} + {}^\nu\ddot{I} = (c_\nu - a_\nu) \quad {}^\nu F_1. \quad 57)$$

Durch Addition der Gl. 55) und 56) ergibt sich:

$$2\lambda = 2b_\nu - (a_\nu + c_\nu) - ({}^\nu\dot{I} - {}^\nu\ddot{I}) + ({}^\nu\dot{F} + {}^\nu\ddot{F}), \quad 58)$$

$$\lambda = \left[b_\nu - \frac{a_\nu + c_\nu}{2}\right] - \frac{{}^\nu\dot{I} - {}^\nu\ddot{I}}{2} + \frac{{}^\nu\dot{F} + {}^\nu\ddot{F}}{2}. \quad 59)$$

Thatsache ist, dass bei wachsendem ν die Differenz $c_\nu - a_\nu$ alsbald den Wert 0 annimmt und ihn beizubehalten scheint, während sich ${}^\nu F_1$ ebenfalls der 0 nähert. Die rechte Seite der Gl. 57) muss somit für ein gewisses ν jedenfalls gleich 0 genommen werden können, mag ihr Wert anfänglich, worüber Versuche zu entscheiden haben werden, pos. oder neg. ausfallen. Somit ist einerseits

$${}^\infty\dot{I} + {}^\infty\ddot{I} = 0 \text{ also } {}^\infty\dot{I} = -{}^\infty\ddot{I}$$

und

$$\frac{{}^\infty\dot{I} - {}^\infty\ddot{I}}{2} = \frac{{}^\infty\dot{I} + {}^\infty\dot{I}}{2} = {}^\infty\dot{I},$$

und anderseits

$$\frac{{}^\infty\dot{F} + {}^\infty\ddot{F}}{2} = \frac{2\,{}^\infty F}{2} = {}^\infty F,$$

so dass für eine konstante Temperatur der Umgebung des Drahtes

$$\lambda = \left[b_\infty - \frac{a_\infty + c_\infty}{2}\right] + ({}^\infty F - {}^\infty\dot{I}). \quad 60)$$

Stets ist sowohl ${}^\infty F$ als auch ${}^\infty\dot{I}$ pos. Berechnet man λ aus Gleichung

$$\lambda = b_\infty - \frac{a_\infty + c_\infty}{2}, \qquad 61)$$

so ist der Fehler ${}^\infty F - {}^\infty \acute{l}$. Für die Anwendung wird es genügen ν so gross zu nehmen, dass $c_\nu - a_\nu = 0$ wird, was erfahrungsgemäss bei Eisen für $\nu = 5$ der Fall ist. Da sich die Korrektionsgrössen ${}^\infty F$ und ${}^\infty \acute{l}$ teilweise aufheben, so kann es, indem ${}^\infty \acute{l}$ nicht bestimmt werden kann, von Vorteil sein, auch ${}^\infty F$, wie in der schon mehrmals citierten Untersuchung geschehen, zu vernachlässigen, um eine erste Annäherung an den wirklichen Wert der elastischen Dehnung (e. D.) zu erhalten. Die Benützung der Gl. 61) statt Gl. 55) oder 56) hat, was hier nur nebenher erwähnt werden soll, zunächst den Vorteil, den direkten Einfluss der Aenderung der Temperatur der Umgebung auf die Ablesung zu beseitigen — s. § 21 der erwähnten Abhandlung —. Soviel über die Bestimmung der elastischen Dehnung mit Rücksicht auf das in meiner früheren Abhandlung [1]) beachtete Verfahren.

Bei genauerer Betrachtung der Relationen 55), 56), 57) mit Berücksichtigung der thatsächlichen Ergebnisse für die Differenzen $b_\nu - a_\nu$, $b_\nu - c_\nu$ und der Art der Abhängigkeit der Worte ${}^\nu \acute{F}$ und ${}^\nu \ddot{F}$ von ν, ist die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, dass nicht etwa $(c_\nu - a_\nu) - {}^\nu F_1 = 0$ ist von einem bestimmten ν an, sondern für jedes ν. Daraus ergäbe sich, dass sich die Gleichung $(b_\nu - a_\nu) + {}^\nu \acute{F} = (b_\nu - c_\nu) + {}^\nu \ddot{F}$ experimentell bestätigen müsste, woraus sich nicht nur Schlüsse auf die während der Be- und Entlastung entstehende e. N. bezüglich ihrer Grösse ergeben würden, sondern auch die auf den Begriff der Elastizität sich stützende Annahme, dass λ von der Zeit unabhängig sei, oder dass es überhaupt

1) A. Miller, Sitzungsberichte der math.-phys. Klasse der k. bayer. Akademie der Wissenschaften. 1882. Heft 4.

eine Grösse in diesem Sinne gäbe, eine indirekte Bestätigung erhielte. Es ist aber auch möglich, ja sogar wahrscheinlich, dass $^{\infty}\dot{l}$ oder $^{\infty}\ddot{l}$ oder beides zugleich 0 sind. Hierüber werden Versuche, etwa mit Anwendung verschiedener Zeiten (z_0) vielleicht Aufschluss geben.

Ist die Grösse der Konstanten k mittelst der von W. Thomson aus der mechanischen Wärmetheorie abgeleiteten Formel für Berechnung der durch Druckänderung erzeugten Temperaturänderung unter Beachtung der von Edlund[1]) angegebenen Modifikationen, sowie die der Konstanten h durch besonders angestellte Versuche bestimmt, so wird sich die Sache voraussichtlich weiter fördern lassen; bis dahin mag von der Mitteilung weiterer Vermutungen hier abzusehen sein.

1) E. Edlund, Poggendorff's Annalen. Bd. 126.

Fig. 2.

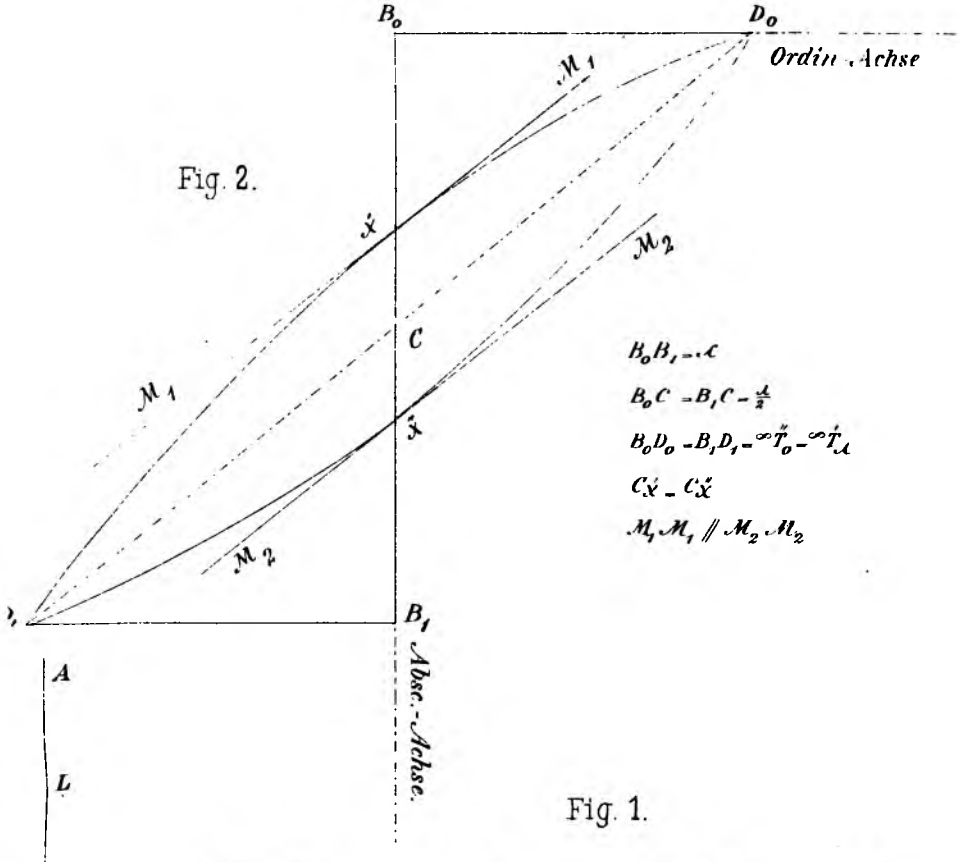
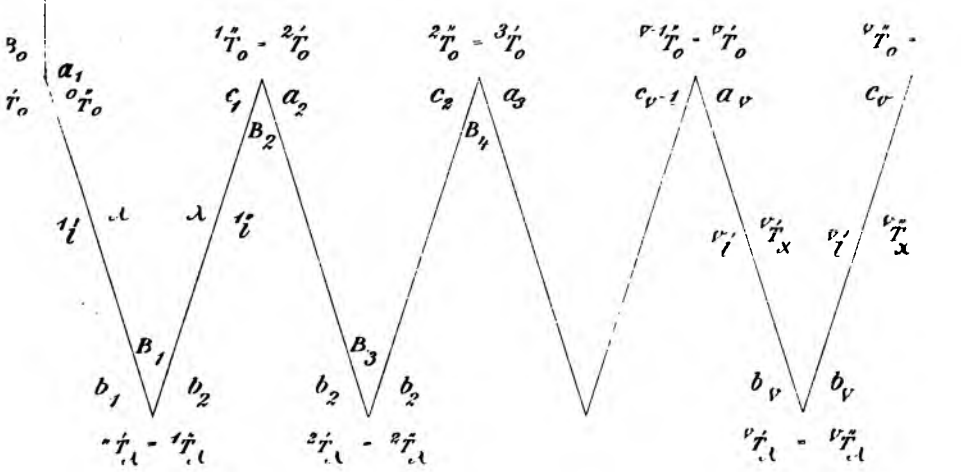

B_0
D_0
Ordin. Achse
M_1
M_2
$\dot{x}$
$\ddot{x}$
C
B_1
Absc.-Achse
A
L
$B_0B_1 = \mathcal{L}$
$B_0C = B_1C = \frac{\mathcal{L}}{2}$
$B_0D_0 = B_1D_1 = {}^{\infty}\ddot{T}_0 = {}^{\infty}\dot{T}_{\mathcal{L}}$
$C\dot{x} = C\ddot{x}$
$M_1M_1 \parallel M_2M_2$

Fig. 1.


a_1
a_2
a_3
a_ν
B_1
B_2
B_3
B_4
b_1
b_2
b_ν
c_1
c_2
$c_{\nu-1}$
c_ν
$\mathcal{L}$

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1883

Band/Volume: 1883

Autor(en)/Author(s): Miller Andreas

Artikel/Article: Ueber den Einfluss der durch Dilatation erzeugten Temperaturveränderung auf die Messung der ersteren 17-34